МИНОБРНАУКИ РОССИИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)
Кафедра МО ЭВМ

ОТЧЕТ

по лабораторной работе №1

по дисциплине «Построение и анализ алгоритмов»

Тема: Поиск с возвратом

Вариант: 3р

Студентка гр. 3388	____________________	Титкова С.Д.
Преподаватель	____________________	Жангиров Т.Р.

Санкт-Петербург

2025

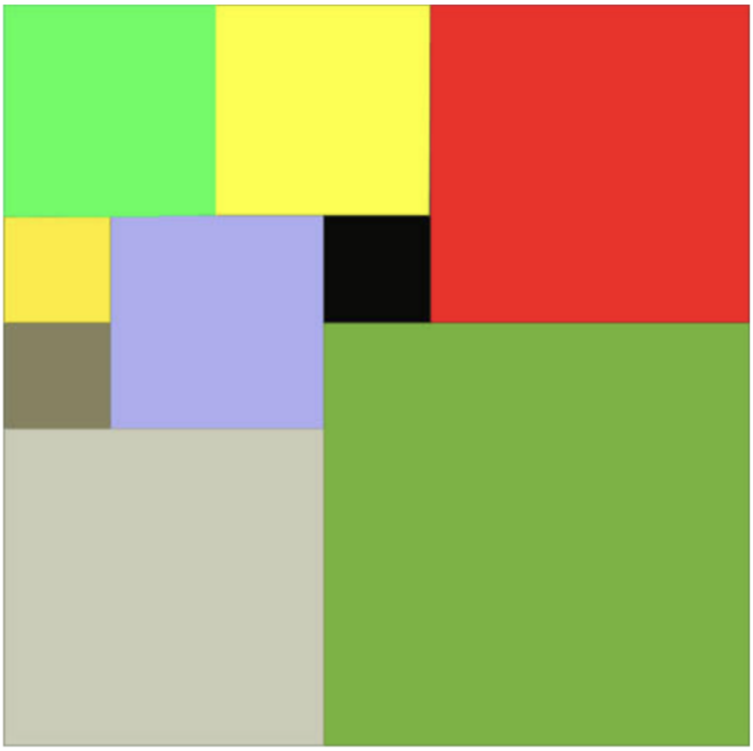
Цель работы:

Изучить принцип работы алгоритма поиска с возвратом. Решить с его помощью задачу.

Задание:

У Вовы много квадратных обрезков доски. Их стороны (размер) изменяются от 1 до $N-1$, и у него есть неограниченное число обрезков любого размера. Но ему очень хочется получить большую столешницу - квадрат размера N. Он может получить ее, собрав из уже имеющихся обрезков(квадратов).

Например, столешница размера 7×7 может быть построена из 9 обрезков.



Внутри столешницы не должно быть пустот, обрезки не должны выходить за пределы столешницы и не должны перекрываться. Кроме того, Вова хочет использовать минимально возможное число обрезков.

Входные данные:

Размер столешницы - одно целое число N $(2 \leq N \leq 20)$.

Выходные данные:

Одно число K, задающее минимальное количество обрезков(квадратов), из которых можно построить столешницу (квадрат) заданного размера N. Далее должны идти K строк, каждая из которых должна содержать три целых числа x,y и w, задающие координаты левого верхнего угла ($1 \le x,y \le N$) и длину стороны соответствующего обрезка (квадрата).

Пример входных данных:

7

Соответствующие выходные данные:

9

112

132

311

411

322

513

444

153

341

Реализация

Описание алгоритма:

Для решения поставленной задачи был использован рекурсивный бэктрекинг (рекурсивный поиск с возвратом). Так, после ввода стороны генерируется набор возможных высот для начального размещения крупных квадратов. Этот набор зависит от размера входного значения. Для каждой возможной высоты из набора выполняет следующие действия:

1. Инициализирует начальную диаграмму высот прямоугольника с учётом размещения крупных начальных блоков.
2. Вызывает рекурсивную функцию поиска оптимального решения.
3. Обновляет лучшее решение, если найденное решение лучше текущего лучшего решения.

Описание функций и структур:

- *Square* - структура для представления квадрата с координатами x, y и высотой h;
- *vector<tuple<int, int, int>> result* - вектор кортежей для хранения результатов (координаты и размеры квадратов);
- *bool DEBUG* – это переменная, которая является переключателем. При значении 1 будет выводиться отладочная информация(ставить в самом коде).
- *void print_solution_matrix(int n, const vector<tuple<int, int, int>>& result)* - функция выводит матрицу с расположением найденных квадратов;
- *void rec(vector<int>& diagram, vector<int> marks, vector<Square>& ans):*
    1. *Аргументы:*
        - *Diagram* - вектор целых чисел, представляющий высоты оставшихся областей прямоугольника;
        - *Marks* - вектор целых чисел, хранящий информацию о максимально возможных высотах квадратов на каждой позиции;
        - *Ans* - вектор структур Square, хранящий лучшее найденное решение.

2. *Возвращаемое значение*: функция модифицирует содержимое ans, обновляя его при нахождении более оптимального решения;
3. *Алгоритм*:

   Если все области диаграммы равны нулю, то текущее решение сохраняется в ans, если оно лучше предыдущего.

   Для каждой позиции на диаграмме вычисляется максимально возможная высота нового квадрата (max_h) и удаляется из диаграммы соответствующая область.

   Затем вызывается сама функция с обновлённой диаграммой и новым состоянием стека частичных решений.

   После каждого рекурсивного вызова состояние восстанавливается: добавленные элементы удаляются из стека частичных решений, а изменения в диаграмме отменяются.

- *Main():*

  Принимает на вход число. Генерирует набор возможных высот для начального размещения крупных квадратов. Находит 3 стороны для заполнения наибольшей площади за одну итерацию, затем ставит их в диаграмму. Затем вызывается рекурсивная функция для поиска оптимального решения. В конце выводится количество квадратов, а также строчки, в которых отражаются координаты левых верхних вершин квадратов и соотвествующая им высота. Количество строк равно количеству найденых квадратов.

Способ хранения частичных решений:

Частичные решения хранятся в виде:

1. *static vector<Square> stack* - это статический вектор, который хранит текущее частичное решение во время рекурсивного поиска. Каждый элемент stack представляет собой квадрат с координатами x, y и высотой h.

2. *vector<Square> ans* - это вектор, который хранит лучшее найденное решение на данный момент. Он обновляется каждый раз, когда находит более оптимальное решение.

Способ хранения:

- Когда добавляется новый квадрат к текущему решению, он помещается в конец stack.
- После того как все возможные ветви для данного квадрата были рассмотрены (т.е., после рекурсивного вызова), последний добавленный квадрат удаляется из конца stack. Это позволяет восстановить предыдущее состояние решения.
- Если текущее частичное решение становится полным (все области покрыты) и оно лучше предыдущего лучшего решения, то содержимое stack копируется в ans.

Алгоритмы оптимизации:

- *Ограничение рекурсии* - используется условие остановки рекурсии при достижении ситуации, когда текущее решение не может быть лучше найденного ранее.
- *Генерация начальных крупных блоков* - генерируются только те начальные блоки, которые имеют шанс дать хорошее решение, что сокращает количество ненужных рассмотрений
- *Отсечение по количеству углов* - вычисляет количество углов в текущей диаграмме. Если количество квадратов в текущем наборе плюс количество углов больше или равно размеру лучшего найденного решения, то текущая ветвь поиска отсекается, так как она не может привести к лучшему решению.

Оценка сложности алгоритма:

Основной идеей алгоритма является рекурсия, соответственно количество возможных переборов будет расти, как степенная функция(O(e^n)), где n-сторона квадрата.

Относительно памяти: наш алгоритм хранит матрицу O(n^2), стек O(n), а также в ходе алгоритма у нас производится рекурсия. Каждая рекурсия – O(1), их степенное количество. Таким образом, итоговая сложность O(n^2+n+e^n). Относительно степенной функции другое слагаемый довольно малы, следовательно итоговой сложностью относительно памяти будет: O(e^n).

Тестирование

Таблица 1. Тестирование.

Входные данные	*Выходные данные*
2	4 1 1 1 2 2 1 1 2 1 2 1 1
3	6 1 2 1 2 1 1 1 1 1 2 2 2 1 3 1 3 1 1
11	11 5 6 1 4 6 1 4 3 3 1 4 3 5 1 2 4 2 1 4 1 1 1 1 3 6 6 6 1 7 5 7 1 5
15	*6*

	1 6 5 *6 1 5* *1 1 5* *6 6 10* *1 11 5* *11 1 5*
19	*13* *9 10 1* *8 10 1* *8 7 3* *4 7 4* *1 8 3* *5 1 6* *4 6 1* *4 5 1* *1 5 3* *1 1 4* *10 10 10* *1 11 9* *11 1 9*

Исследование

Также в ходе лабораторной работы было проведено исследование зависимости количества иттераций от стороны квадрата. В ходе исследования получились следующие результаты(рис. 1 и табл. 2).

Таблица 2. Зависимость количества иттераций от стороны квадрата.

Сторона квадрата	Количество иттераций
2	2
4	13
7	188
11	4582
13	6314
15	21
17	31176

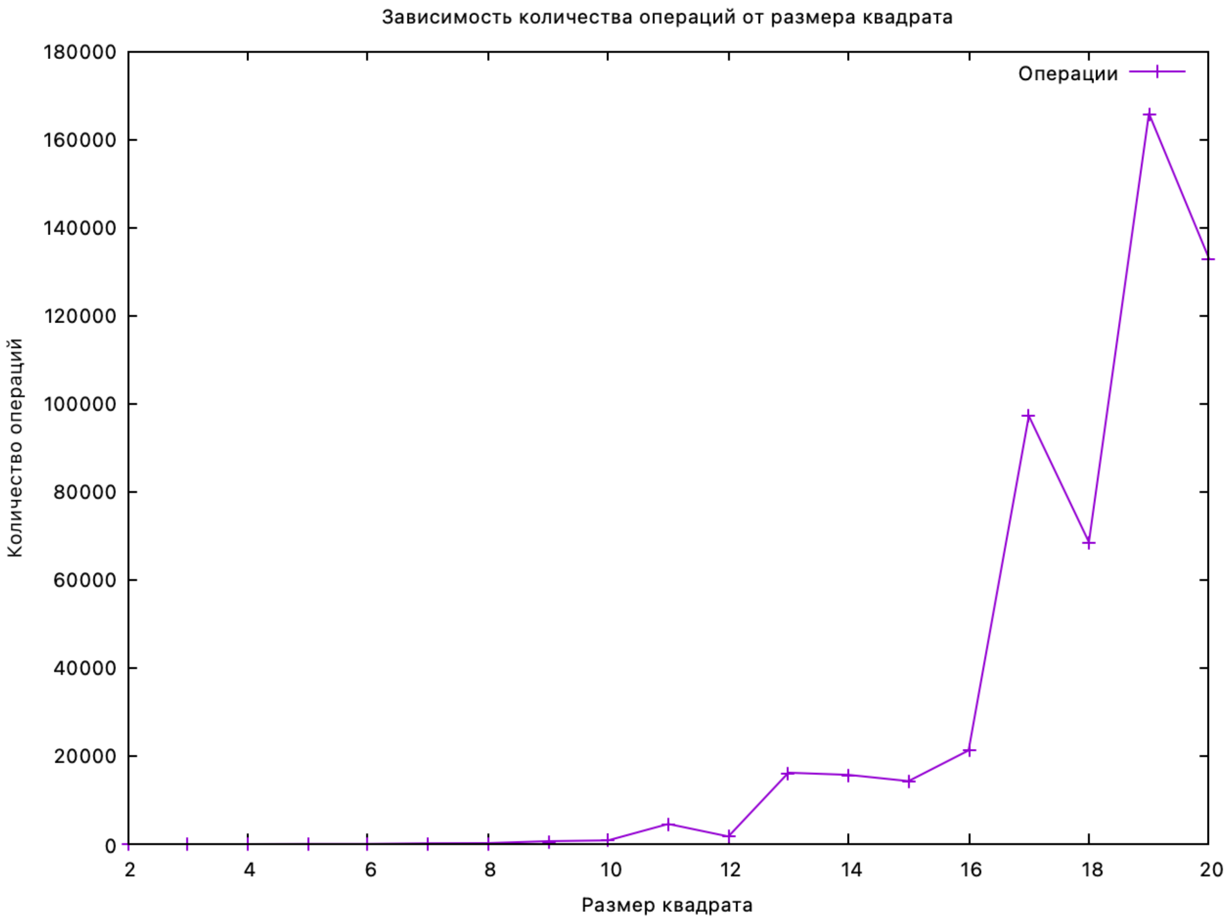


Рис. 1. Зависимость количества иттераций от стороны квадрата

Несложно заметить, что значения в простых числах образуют график экспоненциальной зависимости.

Вывод

В ходе лабораторной работы была написана программа с использованием алгоритма бэктрекинга. Также было проведено тестирование на различных входных данных. По результатом исследования можно заключить, что зависимость числа операций от размера поля экспоненциальна.

Исходный код программы см. в ПРИЛОЖЕНИИ А.

ПРИЛОЖЕНИЕ А.
ИСХОДНЫЙ КОД ПРОГРАММЫ

Algorithm.cpp

```
#include <algorithm>
#include <iostream>
#include <vector>
#include <tuple>

using namespace std;

struct Square {
    int x, y, h;
};

int cnt = 0;
bool DEBUG=0;

void print_solution_matrix(int n, const vector<tuple<int, int, int>>&
result) {

    vector<vector<int>> matrix(n, vector<int>(n, 0));
    int num = 0;

    for (const auto& s : result) {
        num += 1;
        int x, y, h;
        tie(x, y, h) = s;

        for (int i = x; i < x + h; ++i) {
            for (int j = y; j > y - h; --j) {
                matrix[i][j] = num;
            }
        }
    }

    for (int i = 0; i < n; ++i) {
        for (int j = 0; j < n; ++j) {

            if (matrix[i][j] < 10) {
                cout << matrix[i][j] << "  ";
            } else {
                cout << matrix[i][j] << " ";
            }
        }
        cout << endl;
    }
}

void rec(vector<int>& diagram, vector<int> marks, vector<Square>& ans)
{
    static vector<Square> stack = {};
    if (DEBUG==1){
        cnt += 1;
        cout << "IT #" << cnt << '\n';
```

```
        for (Square s : stack) {
            cout << '\t' << s.x << ' ' << s.y << ' ' << s.h << '\n';
        }
    }

    if (*max_element(diagram.begin(), diagram.end()) == 0) {
        if (ans.empty() || ans.size() > stack.size()) {
            ans = stack;
        }
        return;
    }

    int corners = (diagram.back() != 0);
    for (int i = 0; i < diagram.size() - 1; ++i) {
        corners += (diagram[i] != diagram[i + 1]);
    }

    if (!ans.empty() && stack.size() + corners >= ans.size()) {
        return;
    }

    for (int i = 0; i < diagram.size(); ++i) {
        int j = diagram[i] - 1;
        int max_h = 0;
        while (i - max_h >= 0 && diagram[i - max_h] == diagram[i]) {
            ++max_h;
        }
        if (i == diagram.size() - 1) {
            max_h = min(max_h, diagram[i]);
        } else {
            max_h = min(max_h, diagram[i] - diagram[i + 1]);
        }
        max_h = min(max_h, (int)diagram.size() - 1);
        for (int k = 0; k < max_h; ++k) {
            diagram[i - k] -= max_h;
        }
        for (int h = max_h; h >= 1; --h) {
            if (h > marks[i]) {
                stack.push_back({i + 1 - h, j, h});
                int x = marks[i];
                marks[i] = -1;
                rec(diagram, marks, ans);
                marks[i] = x;
                stack.pop_back();
            }
            diagram[i + 1 - h] += h;
            for (int k = 0; k < h - 1; ++k) {
                ++diagram[i - k];
            }
        }
        marks[i] = max_h;
    }
}
int main() {
    int n;
    cin >> n;
    vector<Square> ans;
    vector<int> hs;
```

```
    for (int h = (n + 1) / 2; h < min((n + 1) / 2 + 5, n); ++h) {
        hs.push_back(h);
    }

    if (n > 20) {
        if (n % 2 == 0) {
            hs = {n / 2};
        } else if (n % 3 == 0) {
            hs = {2 * n / 3};
        } else if (n == 25 || n == 27) {
            hs = {(n + 1) / 2 + 2};
        } else if (n == 37) {
            hs = {(n + 1) / 2 + 1};
        } else {
            hs = {(n + 1) / 2 + 1, (n + 1) / 2 + 3};
        }
    }

    for (int h : hs) {
        vector<int> diagram(n, n);
        vector<Square> cur_ans;

        for (int i = 0; i < h; ++i) {
            diagram[n - 1 - i] -= h;
        }
        for (int i = 0; i < n - h; ++i) {
            diagram[i] -= n - h;
        }
        for (int i = 0; i < n - h; ++i) {
            diagram[n - 1 - i] -= n - h;
        }


        rec(diagram, vector<int>(n, -1), cur_ans);

        cur_ans.push_back({n - h, n - 1, h});
        cur_ans.push_back({0, n - 1, n - h});
        cur_ans.push_back({n - 1 - (n - h) + 1, n - h - 1, n - h});

        if (ans.empty() || ans.size() > cur_ans.size()) {
            ans = cur_ans;
        }
    }



    cout << ans.size() << endl;
    for (Square s : ans) {
        cout << s.x + 1 << ' ' << s.y - s.h + 2 << ' ' << s.h << endl;
    }

    vector<tuple<int, int, int>> result;
    for (const auto& s : ans) {
        result.push_back(make_tuple(s.x, s.y, s.h));
    }

    if (DEBUG==1){
```

```
        cout << "Total iterations: " << cnt << '\n';
        print_solution_matrix(n, result);
    }

    return 0;
}
```