



## RAPPORT DE STAGE

---

Applications des techniques de machine learning pour le calcul des métriques de risques.

---

**Adrien Navarro**

Master 2 Quantitative Finance (M2QF)  
ENSIIE

**Tuteurs en entreprise**

Noureddine LEHDILI  
Hoang Dung NGUYEN

**Responsable pédagogique**

Vathana Ly Vath

**Équipe d'accueil**

Natixis CIB - Entreprise Risk Management

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Risque de marché</b>	<b>9</b>
1.1	Value-at-risk . . . . .	10
1.2	Expected shortfall . . . . .	10
1.3	Méthode de calcul . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Modèles de diffusion</b>	<b>14</b>
2.1	Modèle LGM-1F . . . . .	14
2.1.1	Généralités . . . . .	14
2.1.2	Pricing des produits de taux sous le modèle LGM-1F . . .	16
2.2	Modèle SABR . . . . .	19
2.2.1	Surface de volatilité implicite . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Portefeuille de produits de taux</b>	<b>21</b>
3.1	Swaps . . . . .	21
3.2	Swaptions européennes . . . . .	21
3.3	Swaptions bermudiennes . . . . .	22
3.3.1	Pricing . . . . .	23
3.3.2	Swaps annulables . . . . .	26
3.3.3	Validation . . . . .	28
3.4	Calibration des swaptions bermudiennes . . . . .	30
3.4.1	Procédure de calibration . . . . .	31
3.4.2	Résultats numériques . . . . .	32
<b>4</b>	<b>Théorie de l'interpolation</b>	<b>34</b>
4.1	Généralités . . . . .	34
4.1.1	Interpolation lagrangienne . . . . .	34
4.1.2	Phénomène de Runge . . . . .	35
4.2	Interpolation de Tchebychev unidimensionnelle . . . . .	36
4.3	Interpolation de Tchebychev multidimensionnelle . . . . .	39
4.3.1	Points de Tchebychev en dimension $d > 1$ . . . . .	39
4.3.2	Interpolation de Tchebychev . . . . .	40
4.4	Limites et solution . . . . .	41
4.4.1	Limites . . . . .	41
4.4.2	Solution . . . . .	41

<i>TABLE DES MATIÈRES</i>	3
<b>5 Etudes numériques</b>	<b>42</b>
5.1 Portefeuille de swaps . . . . .	42
5.2 Portefeuille de swaptions européennes . . . . .	44
5.3 Portefeuille de swaptions bermudiennes . . . . .	45
5.4 Portefeuille de produits de taux . . . . .	47
<b>6 Conclusion et ouverture</b>	<b>50</b>
<b>A Mesure de risque cohérente</b>	<b>51</b>
<b>B Changement de numéraire et mesures forward</b>	<b>52</b>
<b>C Etude de l'option switch</b>	<b>55</b>

# Table des figures

1.1	Méthode de calcul des métriques de risques en full pricing. . . . .	12
1.2	Méthode de calcul des métriques de risques en utilisant un proxy. . . . .	13
2.1	Choc sur les matrices du modèle SABR. . . . .	20
3.1	Convergence des prix d'une swaption européenne par l'approche par arbre. . . . .	30
4.1	Graphe de la fonction de Runge. . . . .	35
4.2	Interpolation polynomiale utilisant une grille équidistante. . . . .	36
4.3	Points de Tchebychev. . . . .	37
4.4	Convergence de l'interpolateur de Tchebychev vers la fonction de Runge. . . . .	39
4.5	Grille de Tchebychev de dimension 2. . . . .	40
5.1	Distribution des mark-to-markets full pricing (à gauche) et des mark-to-markets calculés avec le proxy (à droite) du portefeuille de swaps. . . . .	43
5.2	Diagramme QQ-plot des mark-to-markets du portefeuille de swaps calculés avec le proxy de Tchebychev contre les vrais prix. . . . .	43
5.3	Distribution des mark-to-markets full pricing (à gauche) et des mark-to-markets calculés avec le proxy (à droite) du portefeuille de swaptions. . . . .	44
5.4	Diagramme QQ-plot des mark-to-markets du portefeuille de swaptions calculés avec le proxy de Tchebychev contre les vrais prix. . . . .	45
5.5	Distribution des mark-to-markets full pricing (à gauche) et des mark-to-markets calculés avec le proxy (à droite) du portefeuille de swaptions bermudiennes. . . . .	46
5.6	Diagramme QQ-plot des mark-to-markets du portefeuille de swaptions bermudiennes calculés avec le proxy de Tchebychev contre les vrais prix. . . . .	46
5.7	Distribution des mark-to-markets full pricing (à gauche) et des mark-to-markets calculés avec le proxy (à droite) du portefeuille de produits de taux. . . . .	47
5.8	Diagramme QQ-plot des mark-to-markets du portefeuille de produits de taux calculés avec le proxy de Tchebychev contre les vrais prix. . . . .	48

5.9	Evolution du temps de calcul de la VaR suivant le nombre de points de Tchebychev choisis par dimensions. . . . .	49
5.10	Convergence de la VaR calculée avec le proxy vers la VaR full pricing. . . . .	49
C.1	Distribution des mark-to-markets d'une swaption bermudienne en utilisant la calibration et le pricing par arbre (à gauche) et l'approximation avec l'option switch (à droite). . . . .	56
C.2	Proxy switch versus full pricing . . . . .	56

# Liste des tableaux

1.1	Horizon de liquidité pour une classe de produits $k$ (Basel III). . .	9
3.1	Cash-flow d'un swap annulable payeur. . . . .	28
3.2	Cash-flow d'un swap payeur. . . . .	28
3.3	Cash-flow d'une swaption bermudienne receveuse. . . . .	28
3.4	Paramètres du swap annulable. . . . .	28
3.5	Comparaison du prix d'un swap annulable déterminé avec un arbre trinomial et celui déterminé avec la relation de parité en fonction du strike. . . . .	29
3.6	Comparaison du prix d'un swap annulable déterminé avec un arbre trinomial et celui déterminé avec la relation de parité en fonction de la date de fin swap sous-jacent. . . . .	29
3.7	Comparaison du prix d'une swaption bermudienne déterminé avec un arbre trinomial avec celui calculé avec une formule fermée en fonction du strike. . . . .	30
3.8	Résultats de la calibration sur 20 swaptions diagonales. . . . .	33
5.1	Précision et performance du proxy de Tchebychev sur le portefeuille de swaps. . . . .	44
5.2	Précision et performance du proxy de Tchebychev sur le portefeuille de swaptions. . . . .	45
5.3	Précision et performance du proxy de Tchebychev sur le portefeuille de swaptions bermudiennes. . . . .	47
5.4	Précision et performance du proxy de Tchebychev sur le portefeuille final. . . . .	48
C.1	Précision et performance de l'approximation par l'option switch. .	56

# Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Nouredine Lehdili pour m'avoir donné la chance de réaliser ce travail et pour son exigence constante tout au long de mon stage.

Je souhaite tout particulièrement remercier Hoang Dung Nguyen pour sa disponibilité, pour son soutien permanent et pour ne pas avoir compté ses heures lorsqu'il s'agissait de m'aider. Je le remercie aussi, et surtout, pour sa bonne humeur et pour ses qualités humaines.

# Cadre du stage

## Présentation de Natixis

Natixis est une filiale du groupe BPCE qui compte près de 16 000 collaborateurs dans 38 pays différents. Elle répond aux attentes de sa propre clientèle et celle du groupe en offrant le conseil et l'accompagnement à travers ses différentes activités : gestion d'actifs et de fortune (Natixis Investment Managers via les filiales, et Natixis Wealth Management), banque de grande clientèle, assurance, paiements. Le stage s'est déroulé au sein du département *Entreprise Risk Management de Risk Supervision Department* de Natixis.

## Objectif du stage

L'objectif principal du stage est d'étudier et de développer une méthode numérique permettant d'accélérer significativement le calcul de certaines métriques de risques et en particulier les métriques de risques de marché. En effet, le calcul de ces métriques nécessite de pricer des milliers de fois un portefeuille sensible à différents facteurs de risques. Les fonctions de pricing sont souvent lourdes en temps de calcul. L'approche numérique proposée utilise la théorie des tenseurs de Tchebychev. Les critères pour valider cette nouvelle approche sont d'une part la réduction significative du temps de calcul des métriques de risques étudiées et d'autre part la précision par rapport à une approche benchmark.

Les résultats numériques obtenus sont prometteurs et ont été validés sur plusieurs portefeuilles de produits de taux.

## Plan du rapport

Le rapport est organisé de la manière suivante. Le chapitre 1 présente les métriques de risques de marché étudiées. Les définitions et les méthodes de calculs benchmark et alternative seront énoncées. Le chapitre 2 présente les modèles utilisés pour la diffusion des facteurs de risques. Le chapitre 3 présente les produits qui seront utilisés dans les différents portefeuilles. Le chapitre 4 présente la théorie utilisée pour développer la technique de calcul alternative des métriques de risques. Enfin, le chapitre 5 présente les résultats numériques obtenus sur différents portefeuilles.



# Chapitre 1

## Risque de marché

Après la crise de 2008, le Comité de Basel a lancé un projet ambitieux nommé Fundamental Review of the Trading Book (FRTB). Un exemple de changement qu'apporte le framework Basel III par rapport aux précédents framework est qu'il prend d'avantage en considération le risque de liquidité ([Basel Committee on Banking Supervision 2020](#)). D'une part la value-at-risk avec un intervalle de confiance de 99% est remplacé par l'expected Shortfall 97.5%. D'autre part l'horizon de 10 jours n'est plus valide pour tous les produits.

L'expected shortfall doit prendre en compte le risque de liquidité. Ainsi la nouvelle expected shortfall peut s'écrire :

$$ES_{\alpha}(w) = \sqrt{\sum_{i=1}^5 \left( ES_{\alpha}(w, h_k) \sqrt{\frac{h_k - h_{k-1}}{h_1}} \right)^2},$$

où :

- ▷  $ES_{\alpha}(w, h_1)$  est l'expected shortfall pour un horizon de 10 jours en considérant tous les facteurs de risques.
- ▷  $ES_{\alpha}(w; h_k)$  est l'expected shortfall du portefeuille  $w$  à l'horizon  $h_k$  jours en considérant les facteurs de risques qui appartiennent à la classe de liquidité  $k$ .
- ▷  $h_k$  est l'horizon de liquidité de la classe  $k$  défini dans la table 1.1.

Classe k	Horizon de liquidité (en jours)
1	10
2	20
3	40
4	60
5	120

TABLE 1.1 – Horizon de liquidité pour une classe de produits  $k$  (Basel III).

La value-at-risk et l'expected shortfall sont les mesures de risques les plus utilisées par les banques et par les régulateurs pour calculer le capital à réserver. Ces mesures de risque représentent la quantité de capital nécessaire pour couvrir les pires pertes d'un portefeuille donné.

## 1.1 Value-at-risk

La value-at-risk  $\text{VaR}_\alpha(w, h)$  est définie comme les pertes potentielles qu'un portefeuille  $w$  peut subir pour un intervalle de confiance donné  $\alpha$  et un horizon  $h$  (Roncalli 2020). Par exemple si un portefeuille a une VaR 10 jours de 99% valant 10 millions d'euros, cela signifie qu'il y a 1% de chance que les pertes du portefeuille excèdent 10M € dans dix jours. Il y a donc trois paramètres à déterminer pour calculer cette mesure de risque :

- ▷ L'horizon  $h$  qui indique la période de calcul de la perte.
- ▷ L'intervalle de confiance  $\alpha$  qui donne la probabilité que les pertes soient inférieures ou égales à la VaR.
- ▷ Le portefeuille  $w$ .

Sans les deux premiers paramètres il est impossible d'interpréter la valeur de la VaR. Soit  $V_t$  la valeur du mark-to-market du portefeuille  $w$ . Le profit and loss (P&L) entre les instants  $t$  et  $t + h$  vaut :

$$\Pi_t(h) = V_{t+h} - V_t,$$

la perte du portefeuille est définie comme l'opposée du P&L :  $L_t(h) = -\Pi_t(h)$ . À l'instant  $t$  la perte du portefeuille n'est pas connue et est par conséquent aléatoire.

D'un point de vue statistique la value-at-risk  $\text{VaR}_\alpha(w, h)$  est le quantile de la perte pour une probabilité  $\alpha$

$$\mathbb{P}\{L_t(w) \leq \text{VaR}_\alpha(w, h)\} = \alpha.$$

Cela signifie que la probabilité que la perte soit inférieur ou égale à la VaR vaut le niveau de confiance  $\alpha$  :

$$\text{VaR}_\alpha(w, h) = F_L^{-1}(\alpha),$$

où  $F_L$  est la distribution de la perte du portefeuille.

L'analyse précédente suppose que le portefeuille reste inchangé durant les instants  $t$  et  $t + h$ . En pratique ce n'est pas forcément le cas. Dans Basel I  $h = 10$  jours et  $\alpha = 99\%$ , cela signifie qu'il y a une exception tous les 100 jours de trading. Cela ne correspond donc pas à une mesure de risque extrême. Du point de vu des régulateurs la value-at-risk 99% donne une mesure de risque de marché pour des conditions normales ou habituelles.

## 1.2 Expected shortfall

L'expected shortfall  $\text{ES}_\alpha(w, h)$  est définie comme l'espérance des pertes supérieures à la value-at-risk du portefeuille  $w$  (Roncalli 2020).

$$\text{ES}_\alpha(w, h) = \mathbb{E}[L_t(w) | L_t(w) \geq \text{VaR}_\alpha(w, h)].$$

L'expected shortfall dépend donc également des trois paramètres  $(h, \alpha, w)$  de la VaR. Il est clair que  $\text{ES}_\alpha(w, h) \geq \text{VaR}_\alpha(w, h)$ . L'expected-shortfall est une mesure plus conservatrice que la value-at-risk. C'est une mesure de risque sous des

conditions plus extrêmes que la value-at-risk. L'ES est une fonction croissante de  $\alpha$ .

Sous le framework Basel III, la value-at-risk 99% a été remplacée par l'ES 97,5% ([Basel Committee on Banking Supervision 2020](#)). Ce choix est justifié par le fait que la value-at-risk n'est pas une mesure de risque cohérente alors que l'expected shortfall l'est (voir annexe A). D'autre part, dans un monde gaussien, la value-at-risk 99% est égale à l'ES 97,5%. C'est pourquoi le niveau de l'ES est de 97,5%. Ainsi pour les banques la capital à réserver pour un portefeuille donné varie peu entre Basel II et Basel III, c'est surtout la méthode de calcul qui change.

## 1.3 Méthode de calcul

Pour calculer l'expected shortfall ou la value-at-risk il existe trois approches :

- (1) L'approche historique. Pour calculer les métriques de risques, les distributions empiriques des facteurs de risques sont considérées.
- (2) L'approche paramétrique. Cette approche consiste à déterminer une formule fermée de la distribution de perte  $F_L$ .
- (3) L'approche Monte Carlo. Cette approche consiste à diffuser les facteurs de risques, cela nécessite de supposer que les dynamiques des facteurs de risques suivent des modèles stochastiques.

Dans la suite seule la VaR et l'ES Monte Carlo seront considérées. Soit

$$X = (X_{1,t+h}, X_{2,t+h}, \dots, X_{m,t+h}),$$

le vecteur des facteurs de risque à la date  $t+h$ . L'approche de Monte Carlo suppose que le vecteur des facteurs de risques suit une distribution de probabilité. Dans cette approche  $S$  scénarios des facteurs de risques sont simulés, et le P&L simulé  $\Pi_s(w)$  est ensuite calculé pour chaque scénario  $s$ .

### Benchmark

Pour calculer la VaR ou l'ES Monte Carlo, plusieurs moyens sont possibles. La méthode utilisée dans la suite qui va servir de benchmark est la méthode du full pricing. Elle consiste à utiliser les pricers sur chacun des  $S$  scénarios pour obtenir le prix du mark-to-market.

$$\Pi_s(w) = g(X_{1,t+h}, X_{2,t+h}, \dots, X_{m,t+h}) - P_t(w).$$

La méthodologie est la suivante, soit  $w$  le portefeuille considéré,  $h$  l'horizon et  $\alpha$  le niveau de l'intervalle de confiance.

- (1) Calcul du prix de portefeuille  $w$  à l'instant  $t = 0$ .
- (2) Diffusion de  $S$  scénarios à l'horizon  $h$ .
- (3) Pricing du portefeuille sur les  $S$  scénarios avec la fonction de pricing.
- (4) Calcul de la métrique de risque souhaitée.

Cette méthode est très lente car il faut évaluer la fonction de pricing du portefeuille des milliers de fois, 10 000 dans l'étude qui est réalisée ici. En effet si le portefeuille est composé de produits complexes à pricer comme des produits américains, l'évaluation des 10 000 scénarios est très coûteuse. L'objectif du stage est de construire un proxy de la fonction de pricing du portefeuille pour diminuer le temps de calcul de l'étape (3).

La figure 1.1 résume graphiquement la méthode de calcul des métriques de risques en full pricing.

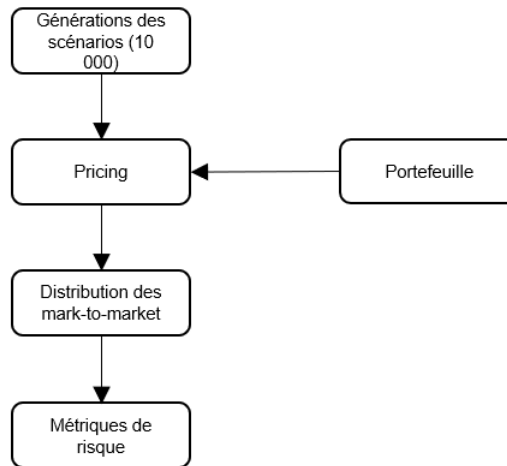


FIGURE 1.1 – Méthode de calcul des métriques de risques en full pricing.

### Méthode alternative

La méthodologie de calcul des métriques de risques de la méthode alternative, toujours en considérant le portefeuille  $w$ , l'horizon  $h$  et le niveau de l'intervalle de confiance  $\alpha$  est la suivante :

- (1) Calcul du prix de portefeuille  $w$  à l'instant  $t = 0$ .
- (2) Diffusion de  $S$  scénarios à l'horizon  $h$ .
- (3) Pricing du portefeuille sur  $S'$  scénarios avec la fonction de pricing.
- (4) Construction du proxy.
- (5) Calcul des prix du portefeuille  $w$  sur les scénarios restants.
- (6) Calcul de la métrique de risque souhaitée.

Pour que le proxy soit efficace il faut être vigilant sur trois points :  $S'$  doit évidemment être plus faible que  $S$ , la construction du proxy ne doit pas être trop coûteuse, tout comme l'évaluation du proxy sur les scénarios restants. Le proxy doit être suffisamment précis pour être utilisé. La figure 1.2 résume graphiquement la méthode de calcul des métriques de risques en utilisant un proxy.

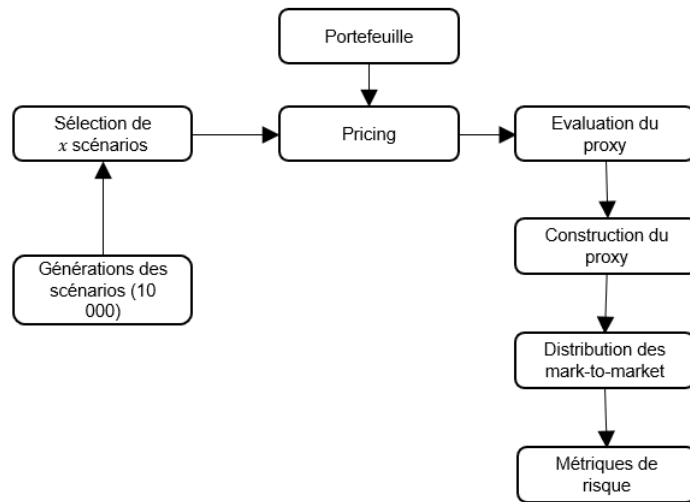


FIGURE 1.2 – Méthode de calcul des métriques de risques en utilisant un proxy.

Dans le chapitre suivant les modèles stochastiques décrivant la dynamique des facteurs de risques vont être étudiés.

# Chapitre 2

## Modèles de diffusion

### 2.1 Modèle LGM-1F

L'objectif de cette section est de présenter le modèle LGM-1F, le pricing de certains produits de taux sous ce modèle et la procédure de calibration sur des swaptions diagonales. Ce chapitre s'appuie très largement sur [Chaix \(2003\)](#). Dans la suite  $B(t, T)$  désigne le zéro-coupon bond à la date  $t$  et de maturité  $T$ . Le prix d'un produit sous un modèle est noté  $P_{(..)}^{(.)}$ , où  $(.)$  désigne le modèle utilisé ou s'il s'agit du prix du marché et  $(..)$  désigne le produit. Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé fini muni de la filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ .

#### 2.1.1 Généralités

Le modèle LGM-1F (Linear Gauss Markov one Factor) est un modèle pour le taux court. Il dérive du framework HJM. Le modèle HJM spécifie la dynamique du taux forward instantané sous une probabilité "objective"  $\mathbb{P}$ . Une fois cette dynamique donnée, celle des zéro-coupons bond peut être déduite sous  $\mathbb{P}$ . L'absence d'opportunité d'arbitrage assure l'existence d'une mesure de probabilité risque neutre  $\mathbb{Q}$ .

Dans le framework HJM, la dynamique des zéro-coupons bond de maturité  $T$  est donnée par :

$$\frac{dB(t, T)}{B(t, T)} = r_t dt + \Gamma(t, T) dW_t^{\mathbb{Q}},$$

où  $W^{\mathbb{Q}}$  est un mouvement brownien de dimension 1 sous la probabilité risque neutre  $\mathbb{Q}$ .

Le taux forward instantané de maturité  $T$  est défini par

$$f(t, T) = -\partial_T \ln B(t, T),$$

ou bien par

$$B(t, T) = e^{-\int_t^T f(t, s) ds}.$$

La dynamique correspondante sous  $\mathbb{Q}$  est

$$df(t, T) = -\gamma(t, T)\Gamma(t, T)dt + \gamma(t, T)dW_t^{\mathbb{Q}}, \quad (2.1)$$

où

$$\gamma(t, T) = -\partial_T \Gamma(t, T).$$

Le modèle HJM est dit gaussien si les volatilités  $\gamma(t, T)$  et  $\Gamma(t, T)$  sont déterministes. Par conséquent avec cette hypothèse supplémentaire  $\gamma(t, T)$  et  $\Gamma(t, T)$  sont des scalaires. Les hypothèses du linear gauss markov imposent que

$$|\gamma(t, T)| = \sigma(t) e^{-\int_t^T \lambda(s) ds},$$

où  $\sigma$  et  $\lambda$  sont des fonctions déterministes. Dans cette situation le modèle devient markovien i.e. la dynamique du modèle pour les dates  $s > t$  peut entièrement être déduite des observations à la date  $t$ .

Dans la suite  $\sigma$  est une fonction constante par morceaux et  $\lambda$  est une constante. Par conséquent,

$$\gamma(t, T) = \sigma(t) \exp -\lambda(T - t), \Gamma(t, T) = \frac{\sigma(t)}{\lambda} (\exp -\lambda(T - t) - 1).$$

Comme vu précédemment à l'équation 2.1,

$$df(t, T) = -\gamma(t, T) \cdot \Gamma(t, T) dt + \gamma(t, T) dW_t^{\mathbb{Q}}.$$

Avec la forme donnée aux volatilités instantannées il vient

$$f(t, T) = f(0, T) - \int_0^t \frac{\sigma(s)^2}{\lambda} (e^{-2\lambda(T-s)} - e^{-\lambda(T-s)}) ds + \int_0^t \sigma(s) e^{-\lambda(T-s)} dW_s^{\mathbb{Q}}. \quad (2.2)$$

À partir de cette expression, la dynamique du taux court peut être déduite. En effet,

$$\begin{aligned} r_t &= f(t, t) \\ &= f(0, t) - \int_0^t \frac{\sigma(s)^2}{\lambda} (e^{-2\lambda(t-s)} - e^{-\lambda(t-s)}) ds + \int_0^t \sigma(s) e^{-\lambda(t-s)} dW_s^{\mathbb{Q}} \\ &= f(0, t) - \frac{e^{-2\lambda t}}{\lambda} \int_0^t \sigma(s)^2 e^{2\lambda s} ds + \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} \int_0^t \sigma(s)^2 e^{\lambda s} ds + e^{-\lambda t} \int_0^t \sigma(s) e^{\lambda s} dW_s^{\mathbb{Q}}, \end{aligned}$$

et donc,

$$d(e^{\lambda t} r_t) = \left[ \lambda e^{\lambda t} f(0, t) + e^{\lambda t} \partial_2 f(0, t) + e^{-\lambda t} \int_0^t \sigma(s)^2 e^{2\lambda s} ds \right] \quad (2.3)$$

or,

$$d(e^{\lambda t} r_t) = e^{\lambda t} dr_t + \lambda e^{\lambda t} r_t dt. \quad (2.4)$$

par conséquent en combinant les équations 2.3 et 2.4 il vient :

$$dr_t = \left[ \lambda (f(0, t) - r_t) + \partial_2 f(0, t) + e^{-2\lambda t} \int_0^t \sigma(s)^2 e^{2\lambda s} ds \right] dt + \sigma(t) dW_t^{\mathbb{Q}} \quad (2.5)$$

Une équation similaire au modèle Hull White peut être établie pour le modèle LGM-1F.

Soit  $X_t = r_t - f(0, t)$  alors l'équation 2.5 permet d'écrire la dynamique de  $X_t$  comme suit :

$$dX_t = [\phi(t) - \lambda X_t]dt + \sigma(t)dW_t^{\mathbb{Q}}, \quad (2.6)$$

où  $\phi(t) = \int_0^t \sigma(s)^2 \exp(-2\lambda(t-s))ds$ . La formule de reconstruction de la courbe des zéro-coupon bonds s'écrit :

$$\begin{aligned} B(t, T) &= B_{t,T}(X_t) \\ &= \frac{B(0, T)}{B(0, t)} \exp\left\{-\frac{1}{2}\beta(t, T)^2\phi(t) - \beta(t, T)X_t\right\} \end{aligned} \quad (2.7)$$

avec  $\beta(t, T) = \frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda(T-t)})$ .

La fonction  $B_{t,T}(\cdot)$  est donc une fonction déterministe de  $X_t$ .

### 2.1.2 Pricing des produits de taux sous le modèle LGM-1F

Dans cette section des produits de taux sont prixés sous le modèle LGM-1F. L'objectif est d'obtenir une formule pour pricer une swaption européenne qui servira pour la calibration du modèle.

#### Option sur bond

Une option d'achat sur une obligation est un titre donnant le droit à son détenteur, à une date  $T$  donnée, d'acheter une obligation à un prix d'exercice  $K > 0$ . Le payoff de cette option est

$$\left(\sum_{i=1}^n c_i B(T, T_i) - K\right)^+,$$

où  $T < T_1 < \dots < T_n$  et  $c_i > 0$ .

Soit  $\mathbb{F}^T$  la mesure de probabilité  $T$ -forward dont le numéraire associé est  $B(0, T)$ . Cette mesure est définie dans l'annexe B. À  $t = 0$  le prix d'un call sur une obligation est :

$$P_{\text{CBO}}(T, K, (T_i)_{1,\dots,n}, (c_i)_{1,\dots,n}) = B(0, T) \mathbb{E}^{\mathbb{F}^T} \left[ \left( \sum_{i=1}^n c_i B(T, T_i) - K \right)^+ \right]. \quad (2.8)$$

Pour tout  $i$  la fonction  $B_{t,T}(\cdot)$  est strictement décroissante et donc d'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}_+^*$ . Par conséquent, comme les  $c_i$  sont strictement positifs, il vient que la fonction  $\sum_{i=1}^n c_i B(T, T_i)$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}_+^*$ . Comme  $K > 0$ , il vient :

$$\exists! x_0 \in \mathbb{R} : \sum_{i=1}^n c_i B_{T,T_i}(x_0) = K,$$



où  $x_0$  représente la frontière d'exercice de l'option sur les bonds. Soit  $K_i = B_{T,T_i}(x_0)$ . Alors

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n c_i B(T, T_i) - K &= \sum_{i=1}^n c_i B(T, T_i) - \sum_{i=1}^n c_i B_{T,T_i}(x_0) \\ &= \sum_{i=1}^n c_i B(T, T_i) - \sum_{i=1}^n c_i K_i \\ &= \sum_{i=1}^n c_i (B(T, T_i) - K_i). \end{aligned}$$

Une fois que  $x_0$  est déterminé, l'option sur le bond peut être évaluée comme une somme de call Black-Scholes.

$$\begin{aligned} P_{\text{CBO}}(T, K, (T_i), (c_i)_i) &= B(0, T) \mathbb{E}^{\mathbb{F}^T} \left[ \sum_{i=1}^n c_i (B(T, T_i) - K_i)^+ \right] \\ &= B(0, T) \sum_{i=1}^n c_i \mathbb{E}^{\mathbb{F}^T} \left[ \left( \frac{B(T, T_i)}{B(T, T)} - K_i \right)^+ \right]. \end{aligned}$$

### Option sur bond modifié

Une légère modification des options sur les bonds sont introduites pour prendre en compte l'intervalle de temps entre la maturité de l'option et le débuts des bonds. Une option sur un bond modifié est une option dont le payoff à  $T$  est le suivant :

$$\left( \sum_{i=1}^n c_i B(T, T_i) - K B(T, T_0) \right)^+,$$

où

$$K > 0, \quad T \leq T_0 < T_1 < \dots < T_n \quad \text{and} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, c_i > 0.$$

Lorsque  $T_0 = T$  il s'agit une option sur bond classique comme défini dans la section 2.1.2.

$$\tilde{P}_{\text{CBO}}(T, T_0, K, (T_i)_{1\dots n}, (c_i)_{1\dots n}) = B(0, T) \mathbb{E}^{\mathbb{F}^T} \left[ \left( \sum_{i=1}^n c_i B(T, T_i) - K B(T, T_0) \right)^+ \right].$$

En utilisant, la mesure  $T_0$ -forward  $\mathbb{F}^{T_0}$ , le prix peut être écrit comme :

$$\tilde{P}_{\text{CBO}}(T, T_0, K, (T_i)_{1\dots n}, (c_i)_{1\dots n}) = B(0, T_0) \mathbb{E}^{\mathbb{F}^{T_0}} \left[ \left( \sum_{i=1}^n c_i \frac{B(T, T_i)}{B(T, T_0)} - K \right)^+ \right].$$

Comme pour tout  $i \geq 1$ ,  $x \mapsto B_{T,T_i}(x)/B_{T,T_0}(x)$  est monotone, le même raisonnement que pour les options sur bond non modifiées.  $x_0$  et  $K_i$  sont définis par les relations suivantes :

$$\sum_{i=1}^n c_i \frac{B_{T,T_i}(x_0)}{B_{T,T_0}(x_0)} = K, \quad \text{et} \quad K_i = \frac{B_{T,T_i}(x_0)}{B_{T,T_0}(x_0)},$$

où les  $\sigma_i^{bs}$  vérifient :

$$\begin{aligned} T (\sigma_i^{bs})^2 &= \int_0^T |\Gamma(t, T_i) - \Gamma(t, T_0)|^2 dt \\ &= \left( \frac{e^{-\lambda(T_0-T)} - e^{-\lambda(T_i-T)}}{\lambda} \right)^2 \phi(T). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Finalement,

$$\tilde{P}_{\text{CBO}}(T, T_0, K, (T_i)_{1\dots n}, (c_i)_{1\dots n}) = B(0, T_0) \sum_{i=1}^n c_i \text{BScall}(F_i, 0, \sigma_i^{bs}, K_i, T),$$

où

$$F_i = \frac{B(0, T_i)}{B(0, T_0)} \quad \text{and} \quad \sigma_i^{bs} = \frac{e^{-\lambda(T_0-T)} - e^{-\lambda(T_i-T)}}{\lambda\sqrt{T}} \sqrt{\phi(T)}$$

Pour un put :

$$\tilde{P}_{\text{PBO}}(T, T_0, K, (T_i)_{1\dots n}, (c_i)_{1\dots n}) = B(0, T_0) \sum_{i=1}^n c_i \text{BSput}(F_i, 0, \sigma_i^{bs}, K_i, T)$$

### Swaption européenne

Le but de cette section est d'écrire une swaption comme une option sur un bond modifié.

Soit une swaption de maturité  $T_e$ . Soient  $T_0 < T_1 < \dots < T_{n-1}$  les dates de fixing du swap et  $T_1 < \dots < T_n$  les dates de paiement du swap. Le taux de swap est défini par

$$S(T_e, T_0, T_n) = \frac{B(T_e, T_0) - B(T_e, T_n)}{LVL(T_e, T_0, T_n)},$$

où

$$LVL(T_e, T_0, T_n) = \sum_{i=1}^n \delta_i B(T_e, T_i),$$

et  $\delta_i$  est la fraction d'année entre  $T_{i-1}$  et  $T_i$ .

Une swaption payeuse de strike  $K$  est une option dont le payoff est

$$\Psi^{\text{PS}}(T_e, T_0, T_n, K) = \left( B(T_e, T_0) - B(T_e, T_n) - \sum_{i=1}^n \delta_i K B(T_e, T_i) \right)^+.$$

Par conséquent, son prix à la date  $t = 0$  est

$$P_S^{LGM-1F}(T_e, T_0, T_n, K) = B(0, T_e) \times \mathbb{E}^{\mathbb{F}^{T_e}} \left[ \left( B(T_e, T_0) - B(T_e, T_n) - \sum_{i=1}^n \delta_i K B(T_e, T_i) \right)^+ \right].$$

Une swaption peut donc être vu comme une option sur bond modifiée.

$$P_S^{LGM-1F}(T_e, T_0, T_n, K) = \tilde{P}_{\text{PBO}}(T_e, T_0, \tilde{K}, (T_i)_{1\dots n}, (c_i)_{1\dots n}) \quad (2.10)$$

avec

$$\begin{aligned} c_i &= \delta_i K, \quad \text{for } i = 1, \dots, n-1, \\ c_n &= 1 + \delta_n K, \\ \tilde{K} &= 1. \end{aligned}$$

Le prix d'une swaption receveuse est obtenue comme un call sur un bond avec les mêmes paramètres.

## 2.2 Modèle SABR

Le modèle SABR (stochastic,  $\alpha, \beta, \rho$ ) est un modèle de volatilité stochastique qui capture le smile de la volatilité. Le modèle SABR spécifie la dynamique du taux forward  $F$ . Soit  $\sigma$  la volatilité de  $F$ . Alors :

$$\begin{aligned} dF_t &= \alpha_t (F_t)^\beta dW_t, \\ d\alpha_t &= \nu \alpha_t dZ_t, \\ d\langle W_t, Z_t \rangle &= \rho dt. \end{aligned}$$

Le modèle SABR permet d'écrire la formule suivante qui, une fois injectée dans la formule de pricing de Black, renvoie le prix du marché.

$$\begin{aligned} \sigma^{SABR} &= \frac{\alpha}{(FK)^{\frac{1-\beta}{2}} \left( 1 + \frac{(1-\beta)^2}{24} \ln^2(F/K) + \frac{(1-\beta)^4}{1920} \ln^4(F/K) \right)} \frac{z}{x(z)} \\ &\times \left( 1 + \left( \frac{(1-\beta)^2}{24} \frac{\alpha^2}{(FK)^{1-\beta}} + \frac{1}{4} \frac{\rho\beta\alpha\nu}{(FK)^{\frac{1-\beta}{2}}} + \left( \frac{2-3\rho^2}{24} \right) v^2 \right) T \right), \\ x(z) &= \ln \left( \frac{\sqrt{1-2\rho z + z^2} + z - \rho}{1-\rho} \right), \quad z = \frac{\nu}{\alpha} (FK)^{\frac{1-\beta}{2}} \ln(F/K). \end{aligned}$$

### 2.2.1 Surface de volatilité implicite

Pour diffuser la surface de volatilité le modèle SABR est utilisé. Il n'y a pas de formule pour la dynamique de  $\sigma^{SABR}$  par conséquent, les surfaces de volatilité implicite ne peuvent pas être diffusées de façon directe. En revanche, sous le modèle SABR, la dynamique du taux forward est connue. Par conséquent, pour diffuser la surface de volatilité, le taux forward va être diffusé puis être injecté dans la formule fermée ???. Cela revient à diffuser les surfaces de volatilité implicite. En pratique pour calculer  $\sigma^{SABR}$  quatre matrices sont à notre disposition :  $\sigma_{ATM_0}, \nu_0, \rho_0, \beta_0$ . Une fois que le taux forward est diffusé,  $\sigma_{SABR}$  est calculé sur chaque scénario avec le nouveau taux forward. Par conséquent, seul le  $\alpha$  est modifié, donc cela revient à modifier  $\sigma_{ATM}$ . la diffusion peut donc être interprétée comme un choc sur  $\sigma_{ATM}$ . La figure 2.1 résume l'interprétation du choc sur les matrices  $\sigma_{ATM_0}, \nu_0, \rho_0, \beta_0$ .

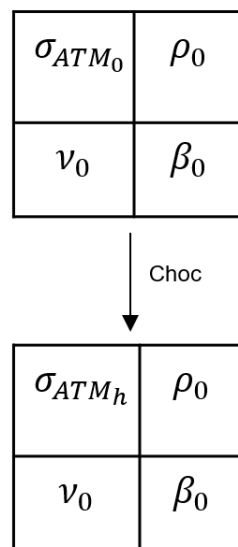


FIGURE 2.1 – Choc sur les matrices du modèle SABR.

# Chapitre 3

## Portefeuille de produits de taux

Ce chapitre consiste à décrire les produits présents dans les portefeuilles sur lesquels les métriques de risques seront calculées.

### 3.1 Swaps

Un swap de taux d'intérêt est un contrat entre deux parties par lequel elles s'engagent à s'échanger des flux à des dates spécifiées. Les flux échangés sont des taux d'intérêt, un taux fixe contre un taux variable. Il n'y a pas de flux à la mise en place du contrat. Les flux sont échangés à chaque date de paiement.

**Notation 3.1.1.** Dans la suite les caractéristiques d'un swap seront notés comme suit :

- ▷  $K$  : strike.
- ▷  $N$  : nominal.
- ▷  $\epsilon = \pm 1$  : suivant le type du contrat, payeur ou receveur.
- ▷  $T_0, T_1, \dots, T_{n-1}$  sont les dates de fixing du swap et  $T_1, T_2, \dots, T_n$  sont les dates de paiement du swap.

La valeur d'un swap dont les caractéristiques sont données par la notation 3.1.1 est à l'instant  $t \leq T_0$

$$\epsilon N \left( B(t, T_0) - B(t, T_n) - K \sum_{i=1}^n \tau_i B(t, T_i) \right). \quad (3.1)$$

### 3.2 Swaptions européennes

Une swaption européenne est un contrat qui donne le droit d'entrer dans un swap de taux d'intérêts à la date d'expiration  $T_e$  du contrat. Par convention une swaption payeuse permet d'entrer dans un swap où le taux fixe est payé et où le taux variable est reçu, une telle option est comparable à un call. Une swaption receveuse permet d'entrer dans un swap où le taux fixe est payé et où le taux variables est reçu, cette option est comparable à un put.

Soit  $\Psi^S$  la fonction payoff d'une swaption payeuse. Le payoff d'une swaption payeuse vaut :

$$\begin{aligned}\Psi^S(T_e) &= \left( B(T_e, T_0) - B(T_e, T_n) - K \sum_{i=1}^n \tau_i B(T_e, T_i) \right)^+ \\ &= N_{T_e} (F_{T_e} - K)^+, \end{aligned}$$

où  $N_t = \sum_{i=1}^n \delta_{t_i} B(t, T_i)$ , et  $F_t = \frac{B(t, T_0) - B(t, T_n)}{N_t}$ .

Pour pricer une swaption, la technique du changement de numéraire est utilisée. Cette technique est développée dans l'annexe B. Soit  $M_t = \exp(-\int_0^t r_s ds) N_t$ .  $M_t$  est une  $\mathcal{F}_t$ -martingale sous la mesure risque neutre  $\mathbb{Q}$ . La mesure swap forward  $\mathbb{S}$  définie par la densité de Radon-Nikodym suivante :

$$\frac{d\mathbb{S}}{d\mathbb{Q}} = \exp\left(-\int_t^{T_e} r_s ds\right) \frac{N_{T_e}}{N_t}, 0 \leq t \leq T_e.$$

Le prix  $P_S(t, T_e, T_0, T_n)$  de la swaption est donc :

$$\begin{aligned}P_S(t, T_e, T_0, T_n) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \exp\left(-\int_t^{T_e} r_s ds\right) (B(T_e, T_0) - B(T_e, T_n) - K N_{T_e})^+ | \mathcal{F}_t \right] \\ &= N_t \mathbb{E}^{\mathbb{S}} [(F_{T_e} - K)^+ | \mathcal{F}_t]. \end{aligned}$$

Le swap rate  $F_t$  est une martingale sous la mesure  $\mathbb{S}$ . Par conséquent une swaption payeuse peut être considérée comme un call de sous jacent le swap rate  $F$  et peut être valorisée par la formule de Black :

$$P_S(t, T_e, T_0, T_n) = N_t (F_t \mathcal{N}(d_1) - K \mathcal{N}(d_2)), \quad (3.2)$$

où

$$\begin{aligned}d_1 &= \frac{\log \frac{F_t}{K} + \frac{\sigma^2}{2} (T_e - t)}{\sigma \sqrt{T_e - t}}, \\ d_2 &= d_1 - \sigma \sqrt{T_e - t}, \end{aligned}$$

et où  $\mathcal{N}$  désigne la fonction de répartition de la loi normale.

### 3.3 Swaptions bermudiennes

Une swaption bermudienne est une option qui donne le droit à son détenteur d'entrer dans un swap de taux d'intérêt à une des dates données dans un échéancier de dates d'exercices.

**Notation 3.3.1.** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé fini muni de la filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ . L'actif sans risque est noté  $S_t^0$ . En notant  $r_t$  le taux court à l'instant  $t$ , il vient :  $S_t^0 = \exp(\int_0^t r_s ds)$ . Le marché est supposé viable et complet. Soit  $\mathbb{Q}$  l'unique probabilité sous laquelle les prix actualisés des actifs sont des martingales. Soient  $v(t, r_t)$  le prix de l'option à l'instant  $t$  et  $\Psi(t, r_t)$  le pay-off de l'option à l'instant  $t$ , autrement dit le profit que permet l'exercice à l'instant  $t$ .

Soit  $T$  la date d'expiration de l'option. L'intervalle  $[0, T]$  est discrétisé comme suit :  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = T$ . Le taux court  $r$  est supposé constant sur chacun des intervalles  $[t_i, t_{i+1}[$  pour  $i = 0, \dots, N - 1$ , du fait de la discrétisation. Et on pose  $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$

### 3.3.1 Pricing

#### Méthode générale

Pour définir la valeur d'une option bermudienne associée au processus  $\Psi$  un raisonnement par récurrence en marche arrière à partir de l'échéance  $T$  peut être fait (Lamberton & Lapeyre 1997).

À l'instant  $t_m$  il est clair que  $v(t_m, r_{t_m}) = \Psi(t_m, r_{t_m})$ . À l'instant  $t_{m-1}$ . Si le détenteur de l'option exerce immédiatement il fera le profit  $\Psi(t_{m-1}, r_{t_{m-1}})$ . Sinon il exercera éventuellement à l'instant  $N$ . Le vendeur doit donc encaisser à l'instant  $t_{m-1}$  une somme au moins égale à  $\Psi(t_{m-1}, r_{t_{m-1}})$  et lui permettant de fournir la richesse  $\Psi(t_m, r_{t_m})$  à l'instant  $t_N$ . Cette dernière est la valeur à  $t_{m-1}$  d'une stratégie admissible de valeur finale  $\Psi(t_m, r_{t_m})$ , c'est-à-dire  $S_{t_{m-1}}^0 \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\frac{\Psi(t_m, r_{t_m})}{S_{t_m}^0} | \mathcal{F}_{t_{m-1}}]$ .

Or  $S_{t_{m-1}}^0$  est  $\mathcal{F}_{t_{m-1}}$ -mesurable, et :

$$\begin{aligned} \frac{S_{t_{m-1}}^0}{S_{t_m}^0} &= \frac{\exp(\int_0^{t_{m-1}} r_s ds)}{\exp(\int_0^{t_m} r_s ds)} \\ &= \exp(-\int_{t_{m-1}}^{t_m} r_s ds) \\ &= \exp(-r_{t_{m-1}} \Delta t_{m-1}), \end{aligned}$$

Et  $\exp(-r_{t_{m-1}} \Delta t_{m-1})$  est  $\mathcal{F}_{t_{m-1}}$ -mesurable donc la stratégie admissible vaut :

$$\exp(-r_{t_{m-1}} \Delta t_{m-1}) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\Psi(t_m, r_{t_m}) | \mathcal{F}_{t_{m-1}}].$$

Dans le cas des options bermudiennes toutes les dates  $t_i$  ne sont pas nécessairement des dates d'exercice. Il faut donc distinguer les deux cas. De proche en proche, si  $t_i$  est une date d'exercice, la valeur de l'option bermudienne à l'instant  $t_i$  est donnée par :

$$v(t_i, r_{t_i}) = \max(\Psi(t_i, r_{t_i}), \exp(-r_{t_i} \Delta t_i) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[v(t_{i+1}, r_{t_{i+1}}) | \mathcal{F}_{t_i}]).$$

Si  $t_i$  n'est pas une date d'exercice :

$$v(t_i, r_{t_i}) = \exp(-r_{t_i} \Delta t_i) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[v(t_{i+1}, r_{t_{i+1}}) | \mathcal{F}_{t_i}].$$

L'algorithme suivant résume le pricing des options bermudiennes.

(1) À  $t_m$  :  $v(t_m, r_{t_m}) = \Psi(t_m, r_{t_m})$ .

(2) Pour  $i = m - 1, \dots, 0$  :

▷ Si  $t_i$  est une date d'exercice :

$$v(t_i, r_{t_i}) = \max(\Psi(t_i, r_{t_i}), \exp(-r_{t_i} \Delta t_i) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[v(t_{i+1}, r_{t_{i+1}}) | \mathcal{F}_{t_i}])$$

▷ Sinon :

$$v(t_i, r_{t_i}) = \exp(-r_{t_i} \Delta t_i) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[v(t_{i+1}, r_{t_{i+1}}) | \mathcal{F}_{t_i}]$$

### Pricing par arbre trinomial

La méthode de pricing par arbre trinomial (Brigo & Mercurio 2001) utilise un cadre à temps discret pour retracer l'évolution de l'actif sous-jacent, via un arbre, pour un nombre donné de pas qui correspond au temps entre la date d'évaluation et celle de l'expiration de l'option. Chaque nœud de l'arbre (intersection entre deux branches de l'arbre) est un prix possible du sous-jacent à un moment précis dans le temps. Cette évolution des prix constitue la base de l'évaluation des options. Dans le cas étudié, le sous-jacent est la variable d'état  $X_t = r_t - f_t$ . Le processus d'évaluation est itératif. On part du nœud final de chaque branche et ensuite on remonte jusqu'au premier nœud (date d'évaluation), où le résultat du calcul est la valeur de l'option.

Cette méthode utilise donc le processus suivant : création de l'arbre, calcul de la valeur de l'option au nœud final de chaque branche, calcul progressif de la valeur de l'option à partir du nœud précédent, la valeur du premier nœud étant la valeur de l'option.

Le modèle LGM-1F est utilisé. Le taux court a la dynamique suivante

$$\begin{aligned} X_t &= (\phi(t) - \lambda X_t)t + \sigma(t)W_t, \\ X_t &= r_t - f(0, t), \\ \Phi(t) &= \int_0^t \sigma^2(s) \exp(-2\lambda(t-s))s. \end{aligned}$$

Le processus  $X_t$  est discrétisé avec le pas de temps suivant :  $\Delta x_i = \sqrt{3\Delta t_i} \sigma(t_i)$ . Le calcul des probabilités de transition et leurs validités imposent de limiter l'expansion de l'arbre dans la direction  $j$ .

$$\forall i \in \{0, \dots, N\}, n(i) = \frac{4\mathbb{V}[X_{t_i}]}{\Delta x_i},$$

et la variable  $j$  vérifie

$$0 \leq j \leq 2n(i).$$

On pose  $U_t = \frac{X_t}{\sigma(t)}$ . Le couple  $(X_t, U_t)$  est discrétisé au nœud  $(i, j)$  dans l'arbre trinomial de la manière suivante :



$$X(i, j) = \mathbb{E}[X_{t_i}] + (j - n(i))\Delta x_i,$$

$$U(i, j) = \frac{\mathbb{E}[X_{t_i}]}{\sigma(t_i)\sqrt{\Delta t_i}} + (j - n(i))\sqrt{3}.$$

Pour connecter le nœud  $(i, j)$  de l'arbre trinomial aux nœuds :  $(i + 1, j')$ ,  $(i + 1, j')$ ,  $(i + 1, j')$  il faut calculer  $j'$ . Soit  $\bar{X}(i, j) = \mathbb{E}[X_{t_{i+1}} | X(t_i) = X(i, j)]$ , alors :

$$\begin{aligned}\bar{X}(i, j) &= \Phi(t_i)\Delta t_i + (1 - \lambda\Delta t_i)X(i, j), \\ &= \bar{U}(i, j) = \frac{\bar{X}(i, j)}{\sigma_{t_i}\sqrt{\Delta t_{i+1}}}.\end{aligned}$$

$j'$  est choisi de telle sorte que

$$U(i + 1, j') \leq \bar{U}(i, j) \leq U(i + 1, j' + 1),$$

donc :

$$j' = \frac{1}{2} + \frac{\bar{U}(i, j) - U(i, j)}{\sqrt{3}}.$$

L'espérance et la variance de  $U$  sont supposées correspondre à la diffusion en temps continu. Soit  $\Delta\eta = \bar{U}(i, j) - U(i + 1, j')$ .

▷  $j' \in \{1, 2, \dots, 2n(i + 1) - 1\}$

$$\begin{cases} p^u = \frac{1}{6} + \frac{\Delta\eta^2 - \Delta\eta\sqrt{3}}{6} \\ p^d = -\frac{\Delta\eta - \sqrt{3}p^u}{\sqrt{3}} \\ p^m = 1 - p^u - p^d \end{cases}$$

▷  $j' \leq 0$

$$\begin{cases} p^u = 0 \\ p^m = 0 \\ p^d = 1 \end{cases}$$

▷  $j' \geq 2n(i + 1)$

$$\begin{cases} p^u = 0 \\ p^m = 1 \\ p^d = 0 \end{cases}$$

En notant  $V_{i,j}$  la valeur de l'option au nœud  $(i, j)$  et  $p^{-1} = p^d, p^0 = p^m, p^1 = p^u$ . La valeur de :  $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[v(t_{i+1}, r_{t_{i+1}}) | \mathcal{F}_{t_i}]$  au nœud  $(i, j)$  est :

$$\sum_{l=-1}^1 p_{i,j}^l V_{i+1, j'+l}.$$

### Pricing des swaptions bermudiennes

Le payoff d'une swaption bermudienne est la partie positive du swap de taux d'intérêt sous-jacent. Le payoff d'une swaption bermudienne à la date  $t \leq T_0$  est  $(Swap_t)^+$ , où

$$Swap_t = B(t, T_0) - B(t, T_n) - K \sum_{i=1}^n B(t, T_i)$$

Soit  $\alpha_j$  une date d'exercice de la swaption.  $k$  est défini par  $T_k \leq \alpha_j < T_{k+1}$ . Le payoff de la swaption à la date  $t_j = \alpha_j$  date vaut :

$$\Psi^{\text{SB}}(t_j, r_{t_j}) := (B(t_j, T_k) - B(t_j, T_n) - K \sum_{l=k+1}^n B(t_j, T_l))^+$$

Dans la suite  $\Psi^{\text{SB}}(i, j)$  correspond à la valeur du payoff au noeud  $(i, j)$ .

**Remarque 1.** En pratique les dates d'exercices correspondent aux dates de fixing, autrement dit, en notant  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  les dates d'exercices de la swaptions bermudiennes, il vient  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\} \subset \{T_0, \dots, T_{n-1}\}$ .

(1) Pour  $i = N$  et  $j \in \{0, \dots, 2n(i)\}$ ,  $V^{\text{SB}}(N, j) = \Psi^{\text{SB}}(N, j)$ .

(2) Pour  $i = N - 1, \dots, 0$  et  $j \in \{0, \dots, 2n(i)\}$  :

▷ Si  $t_i$  est une date d'exercice :

$$V^{\text{SB}}(i, j) = \max \left( \Psi^{\text{SB}}(N, j), \exp(-(f(0, i) + X(i, j))\Delta t_i) \left[ \sum_{l=-1}^1 p^l(i, j) V^{\text{SB}}(i + 1, j' + l) \right] \right)$$

▷ Sinon :

$$V^{\text{SB}}(i, j) = \exp(-(f(0, i) + X(i, j))\Delta t_i) \left[ \sum_{l=-1}^1 p^l(i, j) V^{\text{SB}}(i + 1, j' + l) \right]$$

### 3.3.2 Swaps annulables

Les swaps annulables vont servir à valider de façon interne le pricer des swaptions bermudiennes. Le cas des swaps annulables est différents des autres options bermudiennes car c'est un contrat qui permet de sortir et non de rentrer dans un swap de taux d'intérêt. Il y a deux façons de pricer un swap annulable, ou bien une approche par arbre est utilisée, ou bien le swap annulable est vu comme la somme d'une swaption bermudienne et d'un swap de taux d'intérêts.

Considérons un swap annulable qui permet de sortir du swap dont les caractéristiques sont les mêmes qu'à la notation 3.1.1.

### Pricing par arbre

Pour déterminer le prix d'un swap annulable [Benali \(2003\)](#), l'intervalle  $[0, T_{n-1}]$  est discrétisé de manière suivante.  $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_N = T_{n-1}$ . Chacune des dates d'exercices du swap annulable et que chacune des dates de fixing doivent appartenir à l'ensemble  $t_0, \dots, t_N$ .

L'arbre du taux court est construit de la même manière qu'à la section 3.3.1. Soit  $V^{\text{SA}}(i, j)$  la valeur du swap annulable au noeud  $(i, j)$ .

**Définition 1** (Taux forward). Le taux forward à la date  $t$  commençant la date  $T$  pour une maturité  $S$  s'écrit :

$$F(t, T, S) = \frac{1}{\tau(T, S)} \left( \frac{B(t, T)}{B(t, S)} - 1 \right),$$

où  $\tau(T, S)$  est la fraction d'année entre  $T$  et  $S$ .

**Algorithme 1.** Pricing d'un swap annulable.

(1) Pour  $i = N, j = 0, \dots, 2n(i)$ ,

$$v(t_N, j) = iop \times \delta \times (F(T_{n-1}, T_{n-1}, T_n) - K)B(T_{n-1}, T_n)$$

(2) Pour  $i = N - 1, \dots, 0, j = 0, \dots, 2n(i)$

$$v(i, j) = \exp \left( -(X(i, j) + f(0, i))\Delta t_i \right) \left[ \sum_{l=-1}^1 p^l(i, j) V(i + 1, j' + l) \right]$$

▷ À chaque date d'exercice :

$$V(i, j) = \max(0, V(i, j))$$

▷ À chaque date de paiement  $T_k$  :

$$V(i, j) = V(i, j) + iop \times \delta \times (F(T_{k-1}, T_{k-1}, T_k) - K)$$

(3) la valeur du swap annulable est donnée par : Principal  $\times V(0, 0)$

### Relation de parité

Un swap annulable payeur peut être écrit comme la somme d'un swap payeur et d'une swaption bermudienne receveuse.

$$\text{swap annulable payeur} = \text{swap payeur} + \text{swaption bermudienne receveuse}.$$

Pour montrer cette relation, une étude des cash-flows échangés peut être faite. Considérons un swap annulable payeur qui est exercé à la date  $T_k$ . Les trois tableaux suivants montrent respectivement les cash-flows échangés pour un swap annulable payeur exercé à la date  $T_k$ , les cash-flows échangés d'un swap payeur et les cash-flows échangés d'une swaption bermudienne receveuse exercée à la date  $T_k$ .

Temps	$T_1$	$T_2$	...	$T_k$	$T_{k+1}$	...	$T_n$
Jambe flottante	$L(T_0, T_1)$	$L(T_1, T_2)$	...	$L(T_{k-1}, T_k)$	0	...	0
Jambe fixe	K	K	...	K	0	...	0
Cash-flow	$L(T_0, T_1) - K$	$L(T_1, T_2) - K$	...	$L(T_{k-1}, T_k) - K$	0	...	0

TABLE 3.1 – Cash-flow d'un swap annulable payeur.

Temps	$T_1$	$T_2$	...	$T_k$	$T_{k+1}$	...	$T_n$
Jambe flottante	$L(T_0, T_1)$	$L(T_1, T_2)$	...	$L(T_{k-1}, T_k)$	$L(T_k, T_{k+1})$	...	$L(T_{n-1}, T_n)$
Jambe fixe	K	K	...	K	K	...	K
Cash-flow	$L(T_0, T_1) - K$	$L(T_1, T_2) - K$	...	$L(T_{k-1}, T_k) - K$	$L(T_k, T_{k+1}) - K$	...	$L(T_{n-1}, T_n) - K$

TABLE 3.2 – Cash-flow d'un swap payeur.

Temps	$T_1$	$T_2$	...	$T_k$	$T_{k+1}$	...	$T_n$
Jambe flottante	0	0	...	0	$L(T_k, T_{k+1})$	...	$L(T_{n-1}, T_n)$
Jambe fixe	0	0	...	0	K	...	K
Cash-flow	0	0	...	0	$K - L(T_k, T_{k+1})$	...	$K - L(T_{n-1}, T_n)$

TABLE 3.3 – Cash-flow d'une swaption bermudienne receveuse.

Donc les cash-flows d'un swap annulable payeur vaut la somme des cash-flow d'un swap payeurs et d'une swaption bermudienne receveuse. Par absence d'opportunité d'arbitrage il vient que la relation de parité énoncée est vérifiée.

### 3.3.3 Validation

La relation de parité énoncée permet de valider les deux approches de pricing par arbre.

Les paramètres utilisés sont les suivants :

Début	5 ans
Fin	15 ans
$\sigma$	0.8%
$\lambda$	5%
Fréquence	1 an
Nombre de pas	30 par ans
Nominal	100
Type	payeur

TABLE 3.4 – Paramètres du swap annulable.

Le tableau 3.5 présente les prix du swap annulable dont les caractéristiques sont donnés dans le tableau 3.4, calculés avec un arbre trinomial et ceux calculés avec la relation de parité. Le strike varie de 6,30% à 7,70% et le strike ATM vaut 7,07%.

Strike	Prix swap annulable arbre	Prix swap annulable parité	Erreur
6, 30%	6,1433	6,1097	0,0336
6, 40%	5,775	5,7425	0,0325
6, 50%	5,4158	5,3839	0,0318
6, 60%	5,0675	5,0372	0,0304
6, 70%	4,7368	4,707	0,0298
6, 80%	4,4116	4,3833	0,0283
6, 90%	4,1083	4,0806	0,0277
7, 07% (ATM)	3,6205	3,5949	0,0256
7, 10%	3,531	3,5057	0,0253
7, 20%	3,2628	3,2378	0,025
7, 30%	3,0072	2,984	0,0232
7, 40%	2,7689	2,746	0,0229
7, 50%	2,5381	2,5166	0,0216
7, 60%	2,3263	2,3057	0,0205
7, 70%	2,1215	2,1021	0,0193

TABLE 3.5 – Comparaison du prix d'un swap annulable déterminé avec un arbre trinomial et celui déterminé avec la relation de parité en fonction du strike.

Le tableau 3.5 présente les prix du swap annulable dont les caractéristiques sont donnés dans le tableau 3.4 et dont le strike vaut 3%, calculés avec un arbre trinomial et ceux calculés avec la relation de parité. Cette fois-ci c'est la date de fin du swap qui varie.

Fin du swap (par an)	Prix swap annulable arbre	Prix swap annulable parité	Erreur
10	15,4522	15,3975	0,0547
15	22,3296	22,2714	0,0583
20	16,1323	16,1001	0,0322

TABLE 3.6 – Comparaison du prix d'un swap annulable déterminé avec un arbre trinomial et celui déterminé avec la relation de parité en fonction de la date de fin swap sous-jacent.

Une autre validation interne peut être faite. Si la swaption bermudienne considérée ne possède qu'une seule date d'exercice alors la swaption n'est plus bermudienne mais européenne. Dans ce cas, la swaption peut être pricée ou bien par la formule fermée 2.10, ou bien par l'arbre trinomial. Le tableau suivant compare les deux approches.

Strike	Prix swaption arbre	Prix swaption formule fermée	Erreur
6.3 %	7.8935	7.8961	0.0026
6.4 %	7.5595	7.5667	0.0072
6.5 %	7.2430	7.2457	0.0026
6.6 %	6.9265	6.9330	0.0064
6.7 %	6.6200	6.6289	0.0088
6.8 %	6.3280	6.3332	0.0052
6.9 %	6.0359	6.0460	0.0101
7.067 % (ATM)	5.5780	5.5855	0.0074
7.1 %	5.4898	5.4973	0.0075
7.2 %	5.2224	5.2357	0.0132
7.3 %	4.9712	4.9826	0.0114
7.4 %	4.7283	4.7379	0.0095
7.5 %	4.4855	4.5016	0.0161
7.6 %	4.2611	4.2735	0.0123
7.7 %	4.0425	4.0537	0.0111

TABLE 3.7 – Comparaison du prix d’une swaption bermudienne déterminé avec un arbre trinomial avec celui calculé avec une formule fermée en fonction du strike.

La figure 3.1 présente l’évolution du prix d’une swaption bermudienne avec une seule date d’exercice calculé avec un arbre trinomial en fonction du nombre de pas de l’arbre. La droite en pointillée rouge correspond au prix de cette swaption calculée avec la formule fermée 2.10.

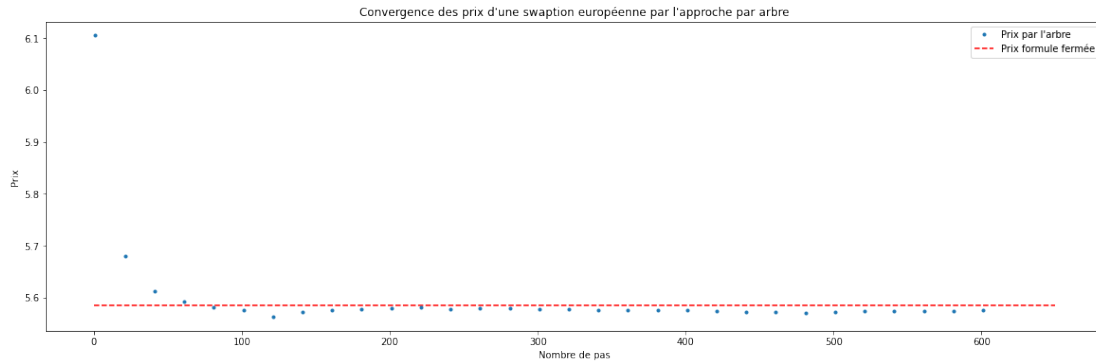


FIGURE 3.1 – Convergence des prix d’une swaption européenne par l’approche par arbre.

### 3.4 Calibration des swaptions bermudiennes

La calibration des swaptions bermudiennes doit être faite pour que les valeurs des swaptions diagonales sous LGM-1F correspondent au prix du marché. Il faut donc calibrer le modèle LGM-1F. Les paramètres  $\lambda$  et  $\sigma(\cdot)$  ne sont pas observables. Une méthode de calibration s’impose pour trouver les valeurs optimales

de ces paramètres qui valent les prix du marché. La calibration proposée se fait sur  $n$  swaptions diagonales de maturité  $T_1^e < T_2^e < \dots < T_n^e$ . L'approche suivie utilise une procédure de bootstrapping pour déterminer les valeurs de la fonction  $\sigma(\cdot)$  qui est constante par morceaux. Le paramètre de mean-reversion  $\lambda$  est supposé être déjà fixé. Cette méthode se base sur la donnée des prix des swaptions diagonales associées à la swaption bermudienne. Il s'agit d'une calibration au strike équivalent, autrement dit les strikes  $K_j$  des swaptions diagonales sont égaux au strike  $K$  de la swaption bermudienne. Par ailleurs leurs maturités correspondent aux différentes dates d'exercice  $(T_j^e)_j$  de la swaption bermudienne.

### 3.4.1 Procédure de calibration

Soient  $n$  swaptions diagonales et  $T_1^e < T_2^e < \dots < T_n^e$  leurs maturités. Pour tout  $j = 1, \dots, n$ , pour tout  $t \in [T_{j-1}^e, T_j^e[$ ,  $\sigma(t) = \sigma_j$ , où  $T_0 = 0$ . La procédure de calibration va permettre de déterminer les  $\phi(T_j^e)$ , puis une fois connus les  $\sigma_j$ . Soit  $P_{S_j}^{LGM-1F}$  le prix de la  $j^{eme}$  swaption diagonale.  $P_{S_j}^{LGM-1F}$  est uniquement une fonction de  $\phi(T_j^e)$  une fois que les autres paramètres sont donnés. Soit  $P_{S_j}^M$  le prix marché de la  $j^{eme}$  swaption diagonale. L'objectif de la calibration est de déterminer pour  $j = 1, \dots, n$ ,  $\phi(T_j^e)$  tel que  $P_{S_j}^{LGM-1F}(\phi(T_j^e)) = P_{S_j}^M$ . La procédure suivante peut être suivie.

- (1) Initialisation :  $T_0^e = 0$ , i.e.  $\phi(T_0^e) = 0$
- (2) Pour  $j = 1, \dots, n$  déterminer  $\phi(T_j^e)$  telle que  $P_{S_j}^{LGM-1F}(\phi(T_j^e)) = P_{S_j}^M$ . Pour cela l'algorithme de Newton est utilisé.
- (3) La valeur de  $\sigma_j$  est déduite en utilisant la définition de  $\phi(T_j^e)$  :

En pratique il faut faire attention à ce que la fonction  $\phi$  soit bien croissante. Par conséquent il faut ajouter une contrainte sur l'algorithme énoncé précédemment. Pour cela le prix de la  $j^{eme}$  swaption peut être écrit comme une fonction de  $\Delta\phi(T_j^e) = \phi(T_j^e) - \phi(T_{j-1}^e)$  et non plus de  $\phi(T_j^e)$ , pour  $j > 1$  avec  $\Delta\phi(T_j^e) > 0$ . L'algorithme devient donc :

- (1) Initialisation :  $T_0^e = 0$ , i.e.  $\phi(T_0^e) = 0$
- (2) Pour  $j = 1$  déterminer  $\phi(T_1^e)$  telle que  $P_{S_1}^{LGM-1F}(\phi(T_1^e)) = P_{S_1}^M$ . Pour cela l'algorithme de Newton est utilisé.
- (3) Pour  $j = 2, \dots, n$  déterminer  $\phi(T_j^e)$  telle que  $P_{S_1}^{LGM-1F}(\Delta\phi(T_j^e)) = P_{S_j}^M$ . Pour cela l'algorithme de Newton est utilisé.
- (4) La valeur de  $\sigma_j$  est déduite en utilisant la définition de  $\phi(T_j^e)$  :

Une fois que les  $\phi(T_i^e)$  sont calculés, les  $\sigma_j$  sont déterminés en utilisant la définition de la fonction  $\phi$ .

$$\begin{aligned}
\phi(T_j^e) &= \int_0^{T_j^e} \sigma^2(s) e^{-2\lambda(T_j^e-s)} ds \\
&= \int_{T_{j-1}^e}^{T_j^e} \sigma_j^2 e^{-2\lambda(T_j^e-s)} ds + \int_0^{T_{j-1}^e} \sigma^2(s) e^{-2\lambda(T_j^e-s)} ds \\
&= \sigma_j^2 \frac{1 - e^{2\lambda(T_j^e - T_{j-1}^e)}}{2\lambda} + e^{-2\lambda(T_j^e - T_{j-1}^e)} \phi(T_{j-1}^e).
\end{aligned}$$

Il en résulte :

$$\sigma_j = \sqrt{\frac{2\lambda \left( \phi(T_j^e) - e^{-2\lambda(T_j^e - T_{j-1}^e)} \phi(T_{j-1}^e) \right)}{1 - e^{2\lambda(T_j^e - T_{j-1}^e)}}}.$$

Pour calibrer une swaption bermudienne sous le modèle LGM-1F il faut donc déterminer  $\phi(T_j^e)$  tel que  $P_{S_j}^{LGM-1F}(\phi(T_j^e)) = P_{S_j}^M$ , or comme décrit dans la section 2.1.2 pour calculer  $P_{S_j}^{LGM-1F}(\phi(T_j^e))$  il faut déterminer un certain  $x_0$  et ce, par une méthode numérique. Ainsi, la calibration nécessite une optimisation imbriquée et cela est très coûteux en temps de calcul. D'autre part, il faut effectuer  $n$  optimisation pour déterminer  $\sigma$  constante par morceaux.

L'implémentation de la procédure calibration avec une contrainte d'efficacité a posé de réelles difficultés. En effet si la procédure décrite est facilement implémentable, il a fallu optimiser le code pour ne pas que le temps de calcul soit trop élevé. En outre, le choix de la méthode d'optimisation est fondamentale pour les deux optimisations imbriquées.

Dans cette approche,  $\lambda$  peut être n'importe quelle constante strictement positive. Par conséquent la fonction  $\sigma(\cdot)$  calibrée dépend de  $\lambda$ . Cependant le problème de calibration peut être mal posé si  $\lambda$  prend une valeur trop petite ou trop grande. Dans ce cas, l'algorithme de Newton ne donne pas de solution. Dans toute la suite  $\lambda = 1\%$ .

### 3.4.2 Résultats numériques

Voici les résultats de la calibration sur 20 swaptions diagonales de strike 4%, de nominal 1000 €, de fréquence 180 jours et dont les tenors vont de 1 an à 20 ans. La date de fin est commune à toutes les swaptions diagonales et vaut donc 21 ans.



Maturité (année)	$\sigma^{LGM-1F}$ (%)	Prix marché (en €)	Prix LGM-1F (en €)	Erreurs (en €)
1	0,73	118,00	118,00	0
2	0,59	133,59	133,59	0
3	0,57	141,35	141,35	0
4	0,62	144,09	144,09	0
5	0,61	142,66	142,66	0
6	0,62	138,30	138,27	0,03
7	0,65	131,34	131,34	0
8	0,67	122,98	122,98	0
9	0,69	113,87	113,87	0
10	0,70	104,07	104,07	0
11	0,68	93,81	93,81	0
12	0,65	83,41	83,44	0,03
13	0,53	72,96	72,96	0
14	0,59	62,75	62,75	0
15	0,53	52,57	52,57	0
16	0,50	42,64	42,64	0
17	0,62	33,27	33,26	0,01
18	0,67	24,30	24,30	0
19	0,78	15,82	15,82	0
20	0,66	7,67	7,67	0

TABLE 3.8 – Résultats de la calibration sur 20 swaptions diagonales.

Comme le montrent les résultats ci-dessus, la procédure de calibration donne de bons résultats, l'erreur ne dépasse pas 5 centimes d'euros.

# Chapitre 4

## Théorie de l'interpolation

L'objectif de ce chapitre est de construire un proxy d'une fonction  $f$  donnée. La théorie utilisée s'appuie sur les tenseurs de Tchebychev ([Ruiz & Zeron 2021](#)). Dans un premier temps l'utilisation des tenseurs de Tchebychev sera motivée, puis les interpolations unidimensionnelle et multidimensionnelle seront présentées. D'autre part, des résultats théoriques de convergence seront énoncés pour justifier l'utilisation de ces tenseurs.

### 4.1 Généralités

La base théorique de l'interpolation polynomiale s'appuie sur le théorème de Weierstrass énoncé ci-dessous.

**Théorème 1** (Weierstrass). Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Alors,  $\forall \epsilon > 0$ , il existe un unique polynôme  $p$  tel que

$$\forall x \in [a, b], |f(x) - p(x)| \leq \epsilon$$

Le théorème de Weierstrass affirme que pour toute fonction  $f$  continue définie sur un compact de  $\mathbb{R}$ , il existe un polynôme qui approche  $f$  aussi précisément que voulu. Ce résultat motive l'étude numérique des approximations des fonctions continues par des polynômes.

L'interpolation polynomiale est une technique d'interpolation d'un ensemble de donnée ou d'une fonction par un polynôme. Etant donné un ensemble de points  $\{(x_i, y_i), i = 0, \dots, n_p\}$ , on cherche un polynôme qui passe par tous ces points et éventuellement qui vérifie d'autres condition comme le degré le plus bas possible.

#### 4.1.1 Interpolation lagrangienne

L'interpolation lagrangienne est l'interpolation la plus simple possible. La seule contrainte est que le polynôme interpolateur  $p$  passe par tous les points donnés. Autrement dit, pour  $i = 0, \dots, n_p, p(x_i) = y_i$ . Le théorème d'unicité précise qu'il n'existe qu'un seul polynôme  $p$  de degré inférieur ou égal à  $n_p$  qui passe par tous ces points.

Le seul polynôme qui passe par ces points est le polynôme interpolateur de Lagrange défini par

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n_p} y_i L_i(x),$$

où  $L_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^{n_p} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$ .

La propriété caractéristique des polynômes de Lagrange  $L_i(x_j) = 0$  si  $i \neq j$  et  $L_i(x_i) = 1$  sinon, montre que la famille  $(L_i)_i$  est une base de  $\mathbb{R}_{n_p}[X]$ . Ainsi par le théorème d'unisolvance, le polynôme  $p$  ainsi construit est bien unique.

### 4.1.2 Phénomène de Runge

Le choix de la grille est fondamental. En effet un mauvais choix de grille peut entraîner la divergence de l'interpolateur. Un exemple bien connu de ce phénomène est le phénomène de Runge. La fonction de Runge est la fonction  $h$  définie sur  $[-1, 1]$  par :  $h(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ . Cette fonction est continue sur  $[-1, 1]$  et a pour graphe la figure suivante.

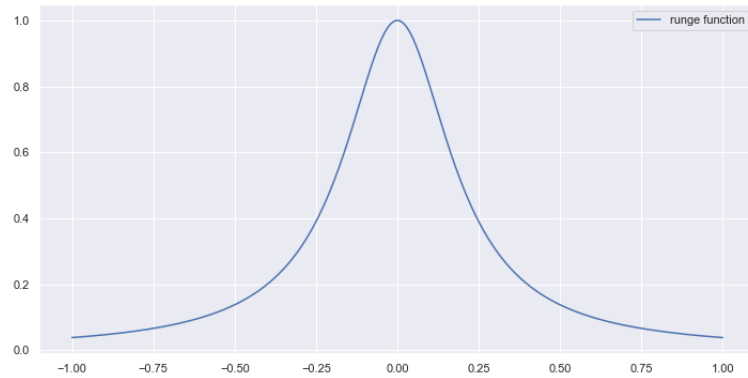


FIGURE 4.1 – Graphe de la fonction de Runge.

L'interpolateur lagrangien va être utilisé pour approcher  $h$ . Le choix naturel pour la construction de la grille est la grille équidistante. L'interpolation utilisera 5, 10 puis 15 points. La figure suivante présente graphiquement les résultats de l'interpolation polynomiale ainsi construite.

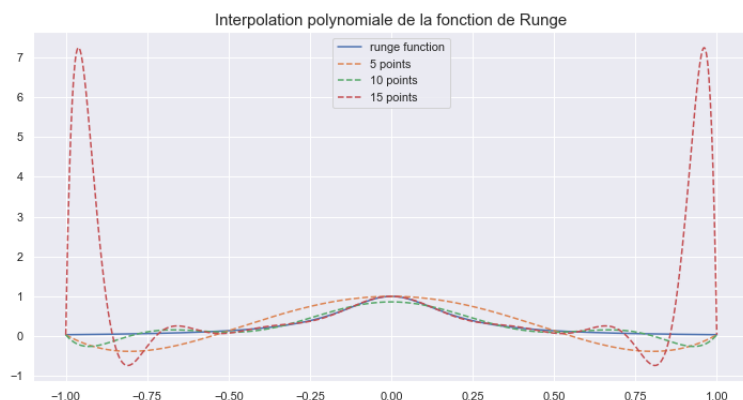


FIGURE 4.2 – Interpolation polynomiale utilisant une grille équidistante.

Plus le nombre de points de la grille augmente plus l'interpolateur diverge. Cette exemple souligne l'importance du choix de la grille. Dans la suite, une grille de points sera définie pour résoudre le problème lié au phénomène de Runge. Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^{n_p}$  sur  $[-1, 1]$  et  $p$  le polynôme interpolateur de Lagrange associé aux points  $x_1, \dots, x_{n_p}$ , alors la formule de Taylor-Lagrange permet d'écrire

$$|f(x) - p(x)| \leq \sup_{x \in [-1, 1]} |(x - x_1) \dots (x - x_{n_p})| \times \frac{\sup_{x \in [-1, 1]} (|f(x)|^{(n_p)})}{n_p!}.$$

L'idée est de choisir les points  $x_i$  qui minimise  $\sup_{x \in [-1, 1]} |(x - x_1) \dots (x - x_{n_p})|$ . C'est l'objectif de la section suivante.

## 4.2 Interpolation de Tchebychev unidimensionnelle

L'objectif de cette section est de construire un interpolateur d'une fonction continue  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  qui converge vers  $f$ . Pour construire l'interpolateur il faut :

- (1) Définir une grille de points sur lesquels  $f$  est évaluée et qui résout le problème lié au phénomène de Runge.
- (2) Construire l'interpolateur polynomial à partir de la grille de point définie et de l'image de cette grille par  $f$ .

**Définition 2.** (Polynôme de Tchebychev)

Les polynômes de Tchebychev de première espèce sont les uniques polynômes  $(T_n)_{n \geq 0}$  définis sur  $[-1, 1]$  par

$$T_k(x) = \cos k\theta,$$

où

$$\theta = \arccos(x).$$

Autrement dit,  $T_n$  est le polynôme en  $\cos \theta$  qui apparaît lorsque  $\cos n\theta$  est développé en somme de puissance de  $\cos \theta$ .  $(T_n)_{n \geq 0}$  est l'unique suite de polynômes

vérifiant la relation de récurrence suivante

$$T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X),$$

avec les conditions initiales suivantes  $T_0(X) = 1$  et  $T_1(X) = X$ .

Plus généralement,

$$T_n(x) = \frac{n}{2} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{(n-k-1)!}{k!(n-2k)!} (2x)^{n-2k}$$

**Définition 3.** (Points de Tchebychev) Les points de Tchebychev sont les racines des polynômes de Tchebychev. Soit  $x_i$  les points de Tchebyshev. Alors Les  $n$  premiers points de Tchebychev sont les racines de  $T_n$ , c'est-à-dire :

$$x_i = \cos \frac{2i-1}{2n} \pi, \quad i = 1, \dots, n$$

**Remarque 2.** Les points de Tchebychev peuvent être vus comme la projection sur l'axe réelle d'une grille de points équidistants sur le cercle unité.

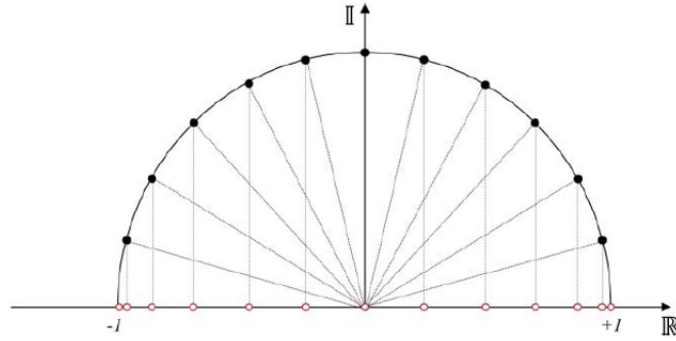


FIGURE 4.3 – Points de Tchebychev.

Il est possible de montrer que les points de Tchebychev  $x_k$  sont les solutions du problème d'optimisation suivant :

$$\operatorname{argmin}_{(x_1, \dots, x_{n_p})} \sup_{x \in [-1, 1]} |(x - x_1) \dots (x - x_{n_p})|.$$

Le choix de la grille étant faite, il reste à construire l'interpolateur. Soit  $p$  l'interpolateur polynomial de  $f$ .  $p$  s'écrit comme une combinaison linéaire de polynôme. Soit  $n+1$  le nombre de points de la grille, alors il existe  $n+1$  polynômes  $p_i$  tels que  $p = \sum_{i=0}^n c_i p_i$ , où les  $c_i$  sont des nombres réels.

**Définition 4.** Soit  $n+1$  le nombre de points de la grille de Tchebychev. Soit  $x_0, x_1, \dots, x_n$  les points de cette grille et soit  $v_0, v_1, \dots, v_n$  les images de ces points par la fonction  $f$ . L'interpolateur de Tchebychev noté  $p_n$  est l'unique polynôme d'ordre au plus  $n$  qui interpole les valeurs  $v_0, v_1, \dots, v_n$  aux points de Tchebychev  $x_0, x_1, \dots, x_n$ .

**Remarque 3.** D'après le théorème d'unisolvance, étant donné  $n + 1$  points et  $n + 1$  valeurs il existe un unique polynôme de degré au plus  $n$  qui les interpole. L'interpolateur de Tchebychev est unique et s'écrit comme suit :

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k T_k(x)$$

**Définition 5.** Soit  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .  $f$  est dite analytique si elle admet un développement de Taylor sur tout point de  $D$ .

**Définition 6.** L'ellipse de Bernstein de rayon  $\rho$  est définie par

$$\mathcal{E}_\rho = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid z = \frac{1}{2} (u + u^{-1}), \quad u = \rho e^{i\theta}, \quad \rho \geq 1, \quad 0 \leq \theta < 2\pi \right\}.$$

**Théorème 2.** Soit  $f$  une fonction analytique sur  $[-1, 1]$ . Soit  $\mathcal{E}_\rho$  l'ellipse de Bernstein de rayon  $\rho$ . Soit  $\tilde{f}$  le prolongement analytique de  $f$  sur  $\mathcal{E}_\rho$ , si pour tout  $x \in \mathcal{E}_\rho$ ,  $|\tilde{f}(x)| \leq M$  pour  $M > 0$ , alors pour tout  $n \geq 0$  :

$$\sup_{[-1,1]} |f(x) - p_n(x)| \leq \frac{4M\rho^{-n}}{\rho - 1}$$

Où  $p_n$  est l'interpolateur de Tchebychev de  $f$  sur les  $n + 1$  premiers points de Tchebychev.

Le théorème précédent montre qu'il faut très peu de points sur lesquels  $f$  est évaluée pour assurer un haut niveau de précision lorsque la fonction est analytique. Dans le contexte étudié  $f$  est une fonction de pricing. Les fonctions de pricing sont généralement analytique ou du moins analytique par morceaux. L'utilisation de l'interpolation de Tchebychev fait donc sens.

Il reste à déterminer les coefficients  $c_k$ . Il existe plusieurs manières d'évaluer l'interpolateur de Tchebychev. L'une d'elle est la formule d'interpolation barycentrique.

**Théorème 3** (Formule d'interpolation barycentrique unidimensionnelle). Soit  $x_0, \dots, x_n$  une grille de points de Tchebychev, et  $v_0, \dots, v_n$  les valeurs associées à cette grille. Alors L'interpolateur de Tchebychev associé à ces points est défini par :

$$p(x) = \frac{\sum_{i=0}^n \prime \frac{(-1)^i v_i}{x - x_i}}{\sum_{i=0}^n \prime \frac{(-1)^i}{x - x_i}}$$

Pour les valeurs de  $x$  qui ne sont pas sur la grille. Pour  $x = x_i$ ,  $p(x) = v_i$ . le symbole  $\prime$  signifie que le terme de la somme est multiplié par  $\frac{1}{2}$  lorsque  $i = 0$  ou  $i = n$ .

**Remarque 4.** Le théorème 2 a de nombreux avantages. Premièrement pour évaluer  $p_n(x)$  seules les images des points de Tchebychev par  $f$  sont nécessaires. Deuxièmement l'évaluation cette formule a une complexité linéaire par rapport

au degré du polynôme. Et enfin cette formule ne change pas lorsque l'intervalle de départ n'est plus  $[-1, 1]$  mais un intervalle quelconque  $[a, b]$ . Ainsi les théorèmes 1 et 2 montrent que l'interpolateur de Tchebychev construit permet d'approximer une fonction analytique  $f$  avec un haut degré de précision en appelant peu de fois la fonction  $f$ , et le proxy utiliser est un polynôme de faible degré et de manière stable.

**Remarque 5.** L'interpolateur de Tchebychev ainsi construit converge aussi pour la fonction de Runge comme le montre la figure 4.4.

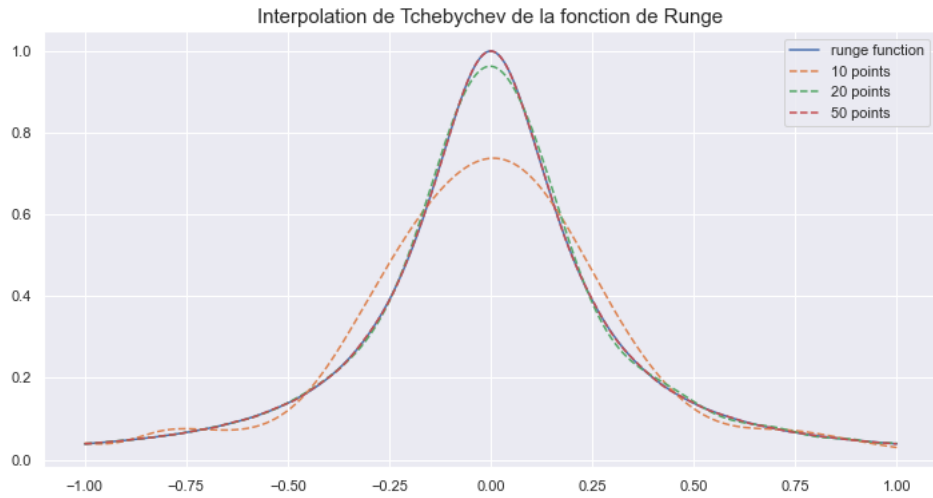


FIGURE 4.4 – Convergence de l'interpolateur de Tchebychev vers la fonction de Runge.

## 4.3 Interpolation de Tchebychev multidimensionnelle

Les résultats de la section 4.2 sont généralisables en dimension  $d > 1$ .

### 4.3.1 Points de Tchebychev en dimension $d > 1$

**Définition 7.** Soit  $A$  un hyper-rectangle de  $\mathbb{R}^d$ .  $A$  est le produit cartésien de  $d$  intervalles fermés  $I_i$  de  $\mathbb{R}$ . Soit  $\xi_i$  les points de Tchebychev de l'intervalle  $I_i$  pour  $1 \leq i \leq d$ . La grille de Tchebychev  $\xi$  de  $A$  est défini par le produit cartésien des points de Tchebychev  $\xi_i$ .  $\xi = \xi_1 \times \xi_2 \times \dots \times \xi_d$ .

La figure 4.5 représente la grille de Tchebychev en dimension 2 avec 10 points de Tchebychev par dimensions.

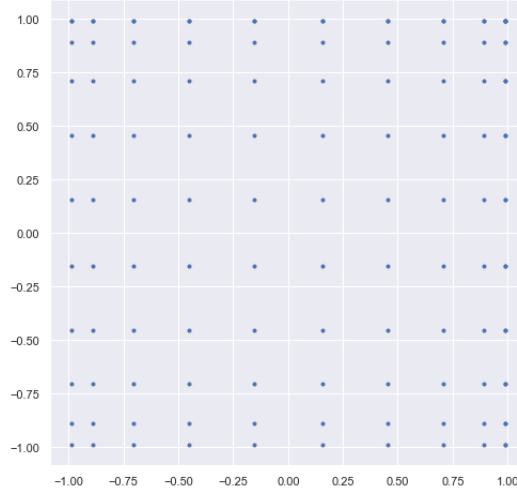


FIGURE 4.5 – Grille de Tchebychev de dimension 2.

### 4.3.2 Interpolation de Tchebychev

Le théorème suivant généralise le théorème 2 pour des dimensions  $d > 1$ .

**Théorème 4.** Soit  $f : [-1, 1]^d \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction analytique. Soit  $\mathcal{E}_\rho$  une ellipse de Bernstein généralisée de rayon  $\rho$ . Soit  $\tilde{f}$  le prolongement analytique de  $f$  sur  $\mathcal{E}_\rho$  telle que  $\sup_{x \in \mathcal{E}_\rho} |\tilde{f}(x)| \leq M$  pour  $M > 0$ . Alors il existe  $C > 0$  telle que pour tout  $n \geq 0$  :

$$\sup_{x \in [-1, 1]^d} |f(x) - p_n(x)| \leq C\rho^{-m},$$

où  $\rho = \min_{1 \leq j \leq d} \rho_j$  et  $m = \min_{1 \leq j \leq d} m_j$ . L'ensemble des  $\rho_j$  définissent le rayon de l'ellipse de Bernstein généralisée, et les  $m_j$  sont le nombre de points de Tchebychev sur le  $j^{\text{ème}}$  intervalle  $[-1, 1]$ .

La formule d'interpolation de Tchebychev dans le cas multidimensionnel est la suivante :

**Théorème 5.** Soit l'hyper-rectangle  $[-1, 1]^d$ . Pour chaque dimension considérons  $n_{i+1}$  points de Tchebychev, où  $1 \leq i \leq d$ . Soit  $f(k_1, \dots, k_d)$  la valeur d'une fonction  $f$  sur le point de Tchebychev  $(k_1, \dots, k_d)$ , où  $0 \leq k_i \leq n_i$ . L'interpolant de Tchebychev de  $f$  évalué en  $p$ , où  $p = (p_1, p_2, \dots, p_d)$  est un point quelconque dans  $[-1, 1]^d$ , est :

$$\sum_{j \in J} c_j T_j(p)$$

L'index  $j$  est un élément de l'ensemble  $J = (j_1, \dots, j_d) | 0 \leq j_i \leq n_i$  et les fonctions  $T_j$  sont définies comme suit

$$T_j(p_1, \dots, p_d) = \prod_{i=1}^d T_{j_i}(p_i).$$



Les coefficients  $c_j$  sont donnés par :

$$c_j = \left( \prod_{i=1}^d \frac{2^{1(\{0 < j_i < n_i\})}}{n_i} \right) \times \sum_{k_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{k_d=0}^{n_d} f_{(k_1, \dots, k_d)} \prod_{i=1}^d \cos \left( j_i \pi \frac{k_i}{n_i} \right),$$

Le symbole ‘ signifie que le terme de la somme est multiplié par 0.5, quand  $k_i = 0$  ou  $k_i = n_i$ .

**Remarque 6.** Les théorèmes 3 et 5 sont particulièrement intéressants pour l’application recherchée. En effet, soit  $P$  la fonction de pricing du portefeuille étudié, une fois que l’évaluation des points de Tchebychev est faite par  $P$  il ne reste qu’à évaluer les scénarios restants par le théorème 3 ou 5. Autrement dit il n’y a pas d’étape de "construction" du proxy comme sur la figure 1.2.

## 4.4 Limites et solution

### 4.4.1 Limites

L’objectif des techniques présentées est de construire un proxy d’une fonction de pricing  $P$  pour ne pas appeler  $P$  sur les 10 000 scénarios, mais sur un nombre réduit de scénarios. Soit  $d$  le nombre de facteurs de risques qui affectent le portefeuille. Alors  $P : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ . Pour construire le proxy il faut donc choisir un nombre  $n$  de points de Tchebychev par dimension pour construire la grille. Si par exemple  $d = 10$  et  $n = 3$  alors la grille va comporter  $3^{10}$  points soit 59054 points. Autrement dit, pour construire le proxy de  $P$ , il faudra appeler  $P$  59054 fois ! Tout l’intérêt du proxy est donc perdu à ce stade.

Il faut donc chercher à réduire la dimension de l’espace de départ de  $P$ .

### 4.4.2 Solution

La solution proposée est d’utiliser une analyse en composante principale sur l’espace de départ de la fonction de pricing. En pratique l’ACP est réalisée sur les facteurs de risques qui affectent le portefeuille.

# Chapitre 5

## Etudes numériques

Ce chapitre met en œuvre la méthode du calcul de la VaR et de l'ES en utilisant le proxy développé dans le chapitre 4. Quatre portefeuilles sont étudiés : un portefeuille de swaps, un portefeuille de swaptions européennes, un portefeuille de swaptions bermudiennes et un portefeuille regroupant les trois portefeuilles précédents.

### 5.1 Portefeuille de swaps

Le premier portefeuille considéré est un portefeuille de 625 swaps. Un seul type de facteur de risque affecte ce portefeuille. Il s'agit des taux zéro-coupons. Chaque point de la courbe des taux zéro-coupons est un facteur de risque, la courbe utilisée dans cette étude comporte 13 points. Soit  $P_{swap}$  la fonction de pricing du portefeuille, alors le domaine de définition de  $P_{swap}$  est un espace de dimension  $d = 13$ . Il faut nécessairement réduire cet espace avant de construire le proxy. Pour ce faire une ACP est réalisée sur les courbes de taux zéro-coupons diffusées. Le résultat de l'ACP est bon : la première composante principale résume plus de 99% de l'information détenue par les facteurs de risques. Ainsi dans le cas de ce portefeuille l'interpolateur utilisé est unidimensionnelle. La formule du théorème 3 est utilisée avec 10 points de Tchebychev. La figure 5.1 représente la distribution des mark-to-markets, du portefeuille de swaps, calculés en full pricing et la distribution des mark-to-markets calculés avec l'interpolation de Tchebychev.

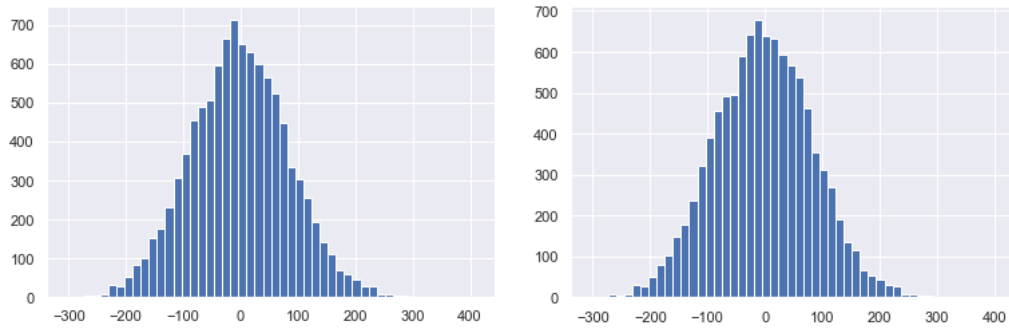


FIGURE 5.1 – Distribution des mark-to-markets full pricing (à gauche) et des mark-to-markets calculés avec le proxy (à droite) du portefeuille de swaps.

Pour mieux comparer les mark-to-markets le graphique suivant a été réalisé. Il s'agit du diagramme QQ-plot des mark-to-markets du portefeuille de swaps calculés avec le proxy de Tchebychev contre les vrais prix.

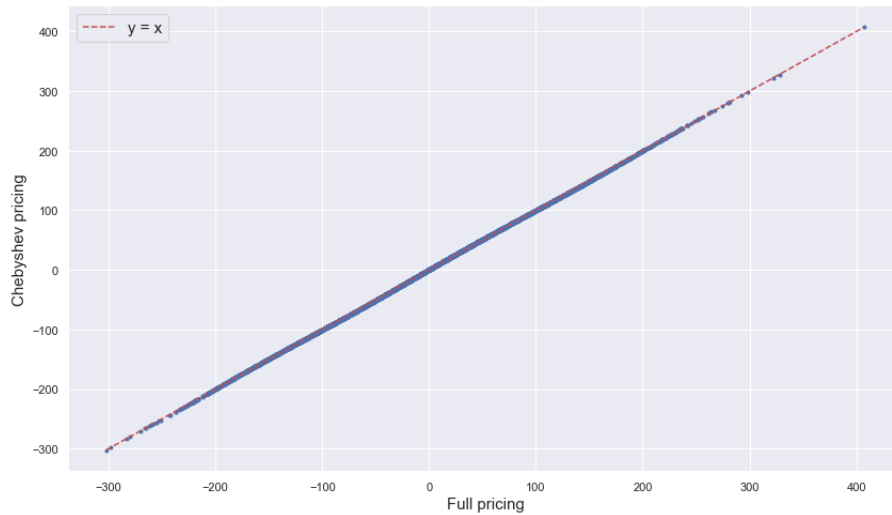


FIGURE 5.2 – Diagramme QQ-plot des mark-to-markets du portefeuille de swaps calculés avec le proxy de Tchebychev contre les vrais prix.

Comme les résultats de la table 5.1 le montrent il n'y a pas de réelle utilité à construire un proxy pour ce portefeuille de swaps puisque la VaR et l'ES full pricing sont calculées assez rapidement. L'utilisation d'un proxy dans ce cas n'est donc pas justifiée malgré ses bonnes performances en termes de précision et de diminution du temps de calcul.

	Full pricing	Proxy Tchebychev	Erreur / Performance
Value-at-risk	200,77 €	200,66 €	0.057%
Expected shortfall	202,26 €	202,01 €	0.12%
Temps de calcul	2min 12s	1min 56s	12,12%

TABLE 5.1 – Précision et performance du proxy de Tchebychev sur le portefeuille de swaps.

## 5.2 Portefeuille de swaptions européennes

Le second portefeuille considéré est un portefeuille de 425 swaptions européennes. Les swaptions sont pricedées par la formule 3.2. Une swaption ainsi pricedée est soumise à deux types de facteurs de risques, le risque dû à la déformation de la courbe des taux et celui dû à la déformation de la surface de volatilité implicite. La courbe des taux comporte 13 points et la surface de volatilité implicite 100 points. Ainsi le domaine de définition de la fonction de pricing du portefeuille de swaptions est de dimension 113. Deux ACP sont réalisées, une sur la courbe de taux et une sur la surface de volatilité implicite. L'information détenue dans la première composante de chaque ACP résume plus de 99% de l'information. Par conséquent l'espace de départ du proxy de la fonction de pricing est de dimension 2. La formule multidimensionnelle du théorème 5 est utilisée avec trois points de Tchebychev par dimensions. La figure 5.3 représente la distribution des mark-to-markets, du portefeuille de swaptions, calculés en full pricing et la distribution des mark-to-markets calculés avec l'interpolation de Tchebychev.

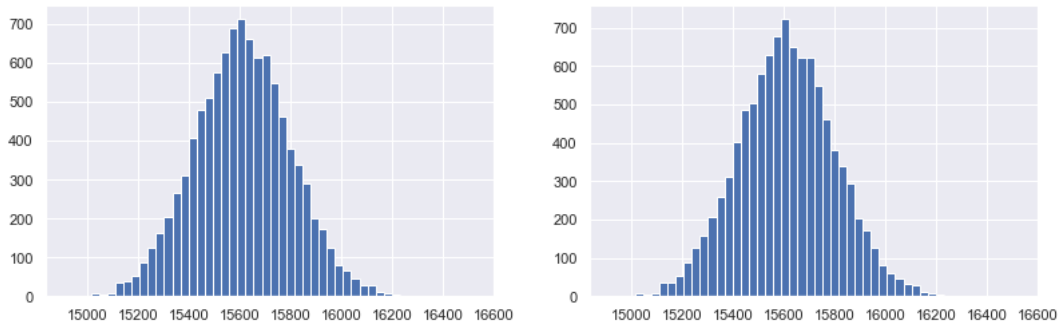


FIGURE 5.3 – Distribution des mark-to-markets full pricing (à gauche) et des mark-to-markets calculés avec le proxy (à droite) du portefeuille de swaptions.

Comme pour le portefeuille précédent le diagramme QQ-plot des mark-to-markets du portefeuille de swaps calculés avec le proxy de Tchebychev contre les vrais prix est réalisé. Il s'agit de la figure 5.4.

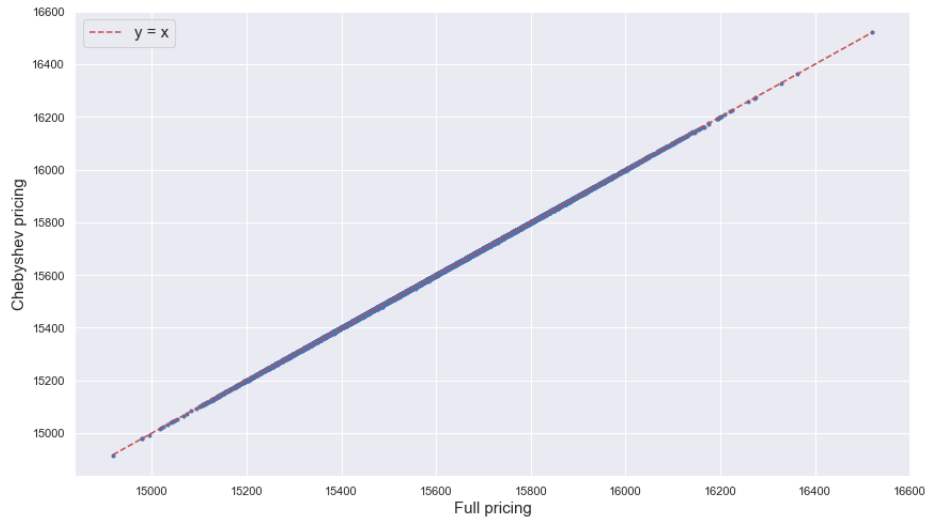


FIGURE 5.4 – Diagramme QQ-plot des mark-to-markets du portefeuille de swaptions calculés avec le proxy de Tchebychev contre les vrais prix.

Tout comme pour le portefeuille de swaps il n'y a pas de réelle utilité à construire un proxy pour ce portefeuille de swaptions d'après la table 5.2 puisque la VaR et l'ES full pricing sont calculées assez rapidement. L'utilisation d'un proxy dans ce cas n'est donc pas justifiée. Les performances en termes de précision et de temps de calcul du proxy sont toutefois satisfaisantes. Notons que la performance sur le temps de calcul pour le portefeuille de swaptions est bien meilleur que pour le portefeuille de swaps. Le temps de calcul de la VaR ou de l'ES est ainsi réduit de 54,26% pour le portefeuille de swaptions contre une réduction de 12,12% contre le portefeuille de swaps.

	Full pricing	Proxy Tchebychev	Erreur / Performance
Value-at-risk	2058,55 €	2054,71 €	0,0078%
Expected shortfall	2054,53 €	2054,62 €	0,0041%
Temps de calcul	6min 27s	2min 57s	54,26%

TABLE 5.2 – Précision et performance du proxy de Tchebychev sur le portefeuille de swaptions.

### 5.3 Portefeuille de swaptions bermudiennes

Le portefeuille de swaptions bermudiennes est composé de 25 swaptions bermudiennes. Tout comme le portefeuille de swaptions européennes deux types de facteurs de risques affectent ce portefeuille, les taux zéros-coupons et la surface de volatilité implicite. De même, deux ACP sont réalisées et la dimension de l'espace de départ du proxy de la fonction du pricing du portefeuille est donc de 2. La formule multidimensionnelle du théorème 5 est utilisée avec trois points de

Tchebychev par dimensions. La figure 5.5 représente la distribution des mark-to-markets, du portefeuille de swaptions bermudiennes, calculés en full pricing et la distribution des mark-to-markets calculés avec l'interpolation de Tchebychev.

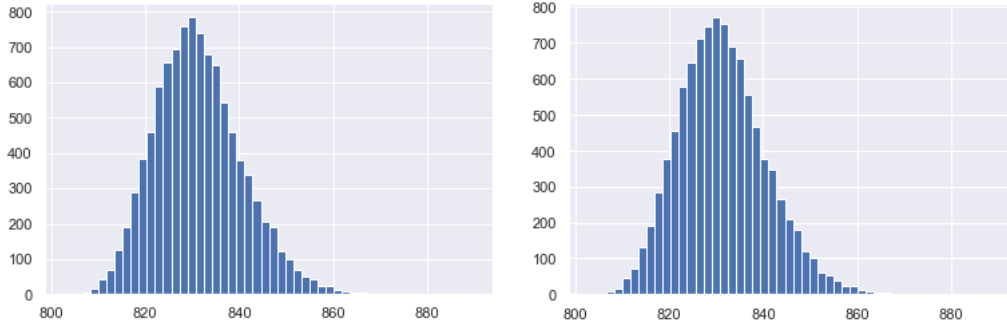


FIGURE 5.5 – Distribution des mark-to-markets full pricing (à gauche) et des mark-to-markets calculés avec le proxy (à droite) du portefeuille de swaptions bermudiennes.

La figure 5.6 est le diagramme QQ-plot des mark-to-markets du portefeuille de swaptions bermudiennes calculés avec le proxy de Tchebychev contre les vrais prix.

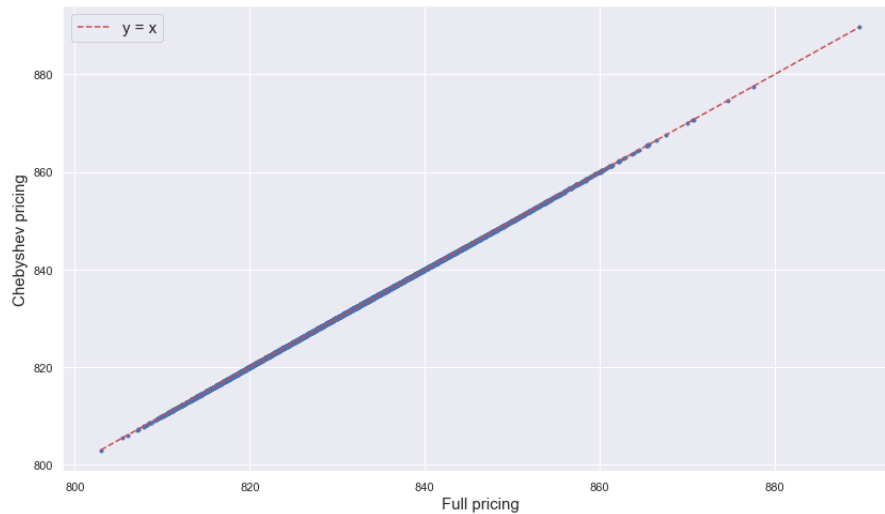


FIGURE 5.6 – Diagramme QQ-plot des mark-to-markets du portefeuille de swaptions bermudiennes calculés avec le proxy de Tchebychev contre les vrais prix.

Au-delà de la bonne précision du proxy, qui était également le cas pour les deux précédents portefeuilles, la performance du proxy sur le temps de calcul est excellente d'après la table 5.3. Le proxy ainsi construit permet de réduire de plus de 99% le temps de calcul. Le gain de temps est de 41h 11min 57s. Le temps de calcul est divisé par 332.

	Full pricing	Proxy Tchebychev	Erreur / Performance
Value-at-risk	25, 31 €	25, 35 €	0, 15%
Expected shortfall	25, 58 €	25, 57 €	0, 04%
Temps de calcul	41h 19min 24s	7min 27s	99, 69%

TABLE 5.3 – Précision et performance du proxy de Tchebychev sur le portefeuille de swaptions bermudiennes.

L'utilisation du proxy est pertinente sur ce portefeuille. Il permet de réduire considérablement le temps de calcul des métriques de risques étudiées tout en étant suffisamment précis, les erreurs sont strictement inférieure à 1%.

## 5.4 Portefeuille de produits de taux

Le dernier portefeuille considéré regroupe les portefeuilles précédents. Ce portefeuille est donc composé de :

- ▷ 625 swaps
- ▷ 425 swaptions européennes
- ▷ 25 swaptions bermudiennes

Pour construire le proxy, une grille de 3 points de Tchebychev par dimensions est utilisée. La grille contient donc 9 points. La formule multidimensionnelle du théorème 5 est utilisée avec trois points de Tchebychev par dimensions. La figure 5.7 représente la distribution des mark-to-markets, du portefeuille considéré, calculés en full pricing et la distribution des mark-to-markets calculés avec l'interpolation de Tchebychev.

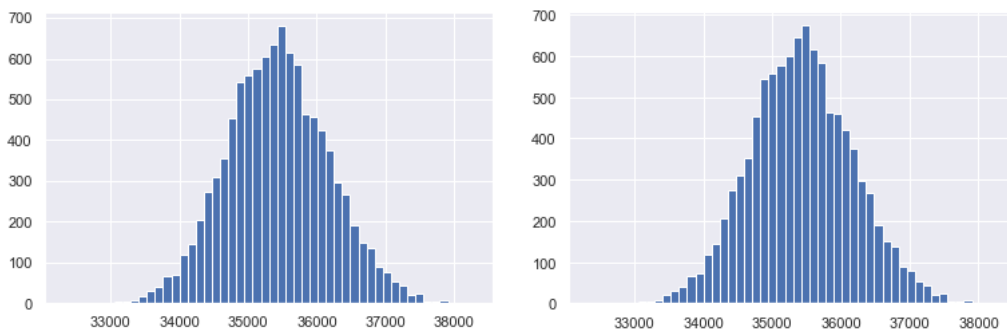


FIGURE 5.7 – Distribution des mark-to-markets full pricing (à gauche) et des mark-to-markets calculés avec le proxy (à droite) du portefeuille de produits de taux.

La figure 5.8 représente le diagramme QQ-plot des mark-to-markets du portefeuille de produits de taux calculés avec le proxy de Tchebychev contre les vrais prix.

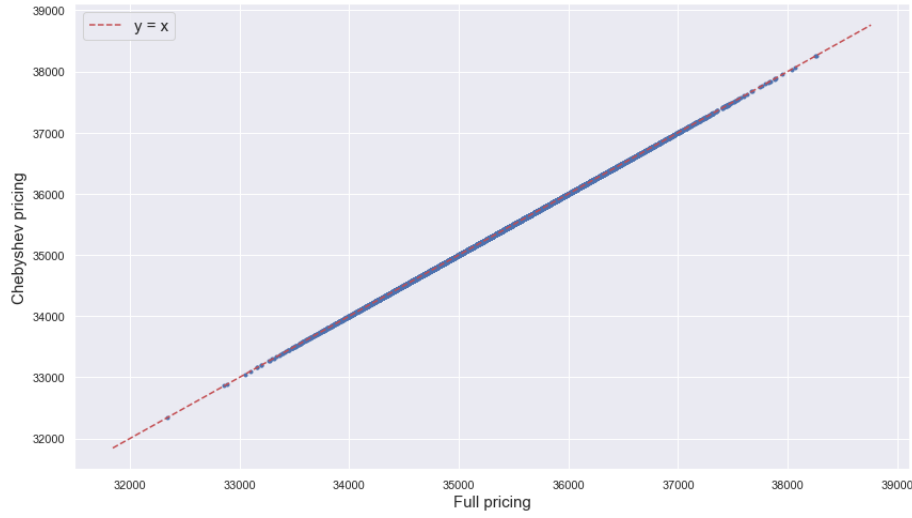


FIGURE 5.8 – Diagramme QQ-plot des mark-to-markets du portefeuille de produits de taux calculés avec le proxy de Tchebychev contre les vrais prix.

Les résultats numériques obtenus sur ce portefeuille sont à l'image des résultats précédents. Le temps de calcul des deux métriques de risque considérées provient du calcul du mark-to-market des swaptions bermudiennes.

	Full pricing	Proxy Tchebychev	Erreur / Performance
VaR(10j, 99%)	1841,42 €	1841,33 €	0,0048%
ES(10j, 97.5%)	1838,97 €	1838,98 €	0,00054%
Temps de calcul	41h 23min 15s	7min 32s	99,69%

TABLE 5.4 – Précision et performance du proxy de Tchebychev sur le portefeuille final.

Une étude numérique sur l'influence du nombre de points de Tchebychev a été réalisée sur le portefeuille finale. La figure 5.9 montre l'évolution du temps de calcul de la VaR en fonction du nombre de points de Tchebychev par dimension. La forme de la courbe obtenue est quadratique. Ce résultat était attendu car le pricer du portefeuille est appelé  $n_{tcheb}^d$ , où  $n_{tcheb}$  est le nombre de points de Tchebychev par dimensions et  $d$  la dimension de l'espace sur lequel l'interpolation est effectuée, et dans le cas de ce portefeuille  $d = 2$ . La figure 5.10 montre la convergence de la VaR calculé avec le proxy vers la VaR full pricing en fonction du nombre de points de Tchebychev. Dès 3 points de Tchebychev par dimensions la précision est satisfaisante. Cette étude permet de montrer numériquement les résultats des théorèmes 2 et 4 qui affirmaient la convergence rapide du proxy de Tchebychev.



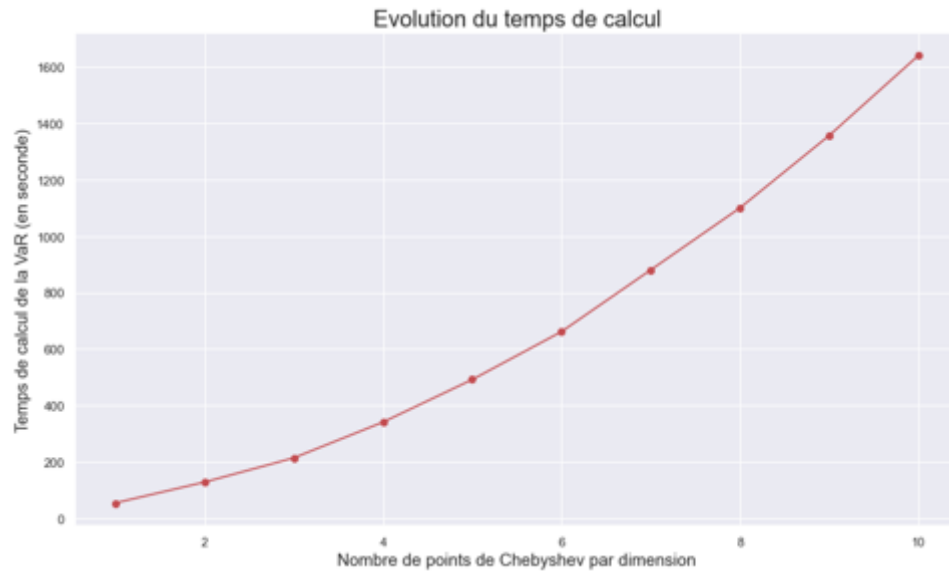


FIGURE 5.9 – Evolution du temps de calcul de la VaR suivant le nombre de points de Tchebychev choisis par dimensions.



FIGURE 5.10 – Convergence de la VaR calculée avec le proxy vers la VaR full pricing.

# Chapitre 6

## Conclusion et ouverture

Dans ce stage une méthode numérique s'appuyant sur les tenseurs de Tchebychev pour le calcul de la VaR et de l'ES a été implémentée. Cette méthode a été testée sur plusieurs portefeuilles de produits de taux et les résultats obtenus sont prometteurs. Ils sont cependant à nuancer, en effet l'excellente performance de la méthode numérique vient de celle de l'analyse en composante principale sur les facteurs de risques, et donc de leurs corrélations. En effet, l'ACP a permis de réduire significativement la dimension de l'espace de départ de la fonction de pricing du portefeuille, elle l'a en outre réduit de 111. S'il y a plus de facteurs de risques, ou s'ils sont moins corrélés, alors l'interpolation de Tchebychev devra être effectuée sur un espace de grande dimension et sa performance n'en sera que moins bonne.

# Annexe A

## Mesure de risque cohérente

Une fonction mesurable d'un espace  $\mathcal{L}$  de fonctions mesurables dans  $\mathbb{R} \cup +\infty$  est une mesure de risque cohérente pour  $\mathcal{L}$  si les propriétés suivantes sont satisfaites ([Roncalli 2020](#)).

▷ Monotonie : Soient  $Z_1, Z_2 \in \mathcal{L}$  et  $Z_1 \leq Z_2$  presque sûrement. Alors

$$\mu(Z_1) \geq \mu(Z_2).$$

▷ Homogénéité positive : Soit  $\alpha \geq 0$  et  $Z \in \mathcal{L}$ , alors

$$\mu(\alpha Z) = \alpha \mu(Z).$$

Si le capital investi dans  $Z$  varie d'un facteur  $\alpha$ , le risque associé varie de  $\alpha$ .

▷ Invariance par translation : Soit  $A$  une fonction déterministe avec un rendement  $a$ , et  $Z \in \mathcal{L}$ , alors

$$\mu(Z + A) = \mu(Z) - a.$$

L'actif sans risque  $A$  réduit le risque du portefeuille.

▷ Sous-additivité : Soient  $Z_1, Z_2 \in \mathcal{L}$ , alors

$$\mu(Z_1 + Z_2) \leq \mu(Z_1) + \mu(Z_2).$$

Un portefeuille contenant les deux actifs  $Z_1$  et  $Z_2$  est moins risqué que la somme des deux actifs pris séparément. C'est l'effet de la diversification.

## Annexe B

# Changement de numéraire et mesures forward

Cette annexe a pour but de présenter la technique de changement de numéraire. Il s'agit d'une technique très utile pour le pricing de certaines options ([Privault 2022](#)).

**Définition 8.** Un numéraire  $(N_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est un processus  $\mathcal{F}_t$ -adapté strictement positif qui peut être pris comme unité de référence. Ainsi le prix  $S_t$  d'un actif peut être exprimé en fonction du numéraire  $N_t$  par

$$\hat{S}_t = \frac{S_t}{N_t}, t \geq 0.$$

Les numéraires utilisés dans ce rapport sont :  $B(t, T)$  le prix d'une obligation payant  $B(T, T) = 1\text{€}$  à la maturité  $T$ , et l'annuité qui est le numéraire de la forme suivante,  $N_t = \sum_{i=1}^n (T_k - T_{k-1})B(t, T_k), 0 \leq t \leq T_0$ . Pour calculer le prix d'une option dont le sous-jacent est

$$\hat{S}_t = \frac{S_t}{N_t}, t \geq 0,$$

il faut déterminer une mesure de probabilité sous laquelle  $\hat{S}_t$  est une martingale. Les principaux résultats de cette partie s'appuient sur l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage. Dans la suite le numéraire actualisé est supposé être une martingale sous la mesure risque neutre  $\mathbb{Q}$ .

**Définition 9** (Mesure forward). Soit  $(N_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  un numéraire, la mesure forward associée est  $\hat{\mathbb{P}}$  définie par la densité de Radon-Nikodym

$$\frac{d\hat{\mathbb{P}}}{d\mathbb{Q}} = \exp\left(-\int_0^T r_s ds\right) \frac{N_T}{N_0},$$

aussi,

$$\frac{d\hat{\mathbb{P}}|_{\mathcal{F}_t}}{d\mathbb{Q}|_{\mathcal{F}_t}} = \exp\left(-\int_t^T r_s ds\right) \frac{N_T}{N_t}.$$

**Proposition 1.** Soit  $X_t$  un processus continu  $\mathcal{F}_t$ -adapté tel que

$$t \mapsto \exp\left(-\int_0^t r_s ds\right) X_t, t \geq 0,$$

est une martingale sous  $\mathbb{Q}$ . Alors sous le changement de numéraire, le processus

$$\hat{X}_t = \frac{X_t}{N_t},$$

est une  $\mathcal{F}_t$ -martingale sous  $\hat{\mathbb{P}}$ .

**Démonstration 1.**

$$\begin{aligned} \hat{\mathbb{E}} \left[ G \frac{X_t}{N_t} \right] &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ G \frac{X_t}{N_t} \frac{d\hat{\mathbb{P}}}{d\mathbb{Q}} \right] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ G \frac{X_t}{N_t} \frac{d\hat{\mathbb{P}}}{d\mathbb{Q}} \mid \mathcal{F}_t \right] \right] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ G \frac{X_t}{N_t} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \frac{d\hat{\mathbb{P}}}{d\mathbb{Q}} \mid \mathcal{F}_t \right] \right] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ G e^{-\int_0^t r_u du} \frac{X_t}{N_0} \right] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ G e^{-\int_0^s r_u du} \frac{X_s}{N_0} \right] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ G \frac{X_s}{N_s} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \frac{d\hat{\mathbb{P}}}{d\mathbb{Q}} \mid \mathcal{F}_s \right] \right] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ G \frac{X_s}{N_s} \frac{d\hat{\mathbb{P}}}{d\mathbb{Q}} \mid \mathcal{F}_s \right] \right] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ G \frac{X_s}{N_s} \frac{d\hat{\mathbb{P}}}{d\mathbb{Q}} \right] \\ &= \hat{\mathbb{E}} \left[ G \frac{X_s}{N_s} \right], \quad 0 \leq s \leq t, \end{aligned}$$

En utilisant le fait que,

$$t \mapsto e^{-\int_0^t r_s ds} X_t$$

est une  $\mathcal{F}_t$ -martingale sous  $\mathbb{Q}$ . Finalement il vient,

$$\hat{\mathbb{E}} \left[ G \hat{X}_t \right] = \hat{\mathbb{E}} \left[ G \frac{X_t}{N_t} \right] = \hat{\mathbb{E}} \left[ G \frac{X_s}{N_s} \right] = \hat{\mathbb{E}} \left[ G \hat{X}_s \right], \quad 0 \leq s \leq t,$$

pour toutes applications bornées  $\mathcal{F}_s$ -mesurables  $G$ .

La formule suivante permet de déterminer le prix d'une option dont le payoff est  $C$ .

**Proposition 2.** Une option dont le payoff  $C$  est intégrable a pour prix le prix suivant :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \exp\left(-\int_t^T r_s ds\right) C \mid \mathcal{F}_t \right] = N_t \hat{\mathbb{E}} \left[ \frac{C}{N_T} \mid \mathcal{F}_t \right].$$

**Démonstration 2.**

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_t^T r_s ds} C \mid \mathcal{F}_t \right] &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \frac{d\hat{\mathbb{P}}_{|\mathcal{F}_t}}{d\mathbb{Q}_{|\mathcal{F}_t}} \frac{N_t}{N_T} C \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= N_t \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \frac{d\hat{\mathbb{P}}_{|\mathcal{F}_t}}{d\mathbb{Q}_{|\mathcal{F}_t}} \frac{C}{N_T} \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= N_t \int_{\Omega} \frac{d\hat{\mathbb{P}}_{|\mathcal{F}_t}}{d\mathbb{Q}_{|\mathcal{F}_t}} \frac{C}{N_T} d\mathbb{Q}_{|\mathcal{F}_t} \\ &= N_t \int_{\Omega} \frac{C}{N_T} d\hat{\mathbb{P}}_{|\mathcal{F}_t} \\ &= N_t \hat{\mathbb{E}} \left[ \frac{C}{N_T} \mid \mathcal{F}_t \right], \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

Chaque application du changement de numéraire doit :

- ▷ Choisir un numéraire  $(N_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  convenable.
- ▷ S'assurer que  $C/N_T$  a une forme suffisamment simple pour que le changement de numéraire soit pertinent.
- ▷ Calculer l'espérance sous  $\hat{\mathbb{P}}$ .

Le résultat de la proposition 2 permet de pricer des options en utilisant le changement de numéraire. C'est cette formule qui est notamment utilisée pour pricer des swaptions européennes.

**Définition 10.** La mesure  $T$ -forward, notée  $\mathbb{F}^T$ , est la mesure associée au numéraire  $B(t, T)$ . La mesure swap-forward, notée  $\mathbb{S}$  est la mesure associée au numéraire  $N_t = \sum_{i=1}^n \tau_i B(t, T_i)$ .

# Annexe C

## Etude de l'option switch

Comme cela a été vu précédemment, c'est le calcul des mark-to-markets des options bermudiennes qui est couteux pour le calcul des métriques de risques en full pricing. L'objectif de cette annexe est d'étudier une approximation qui permet d'éviter la calibration des swaptions bermudiennes et le pricing par arbre trinomial. Soit  $P_t^{SB}$  le prix d'une swaption bermudienne,  $P_t^{SM}$  le prix de la swaption diagonale associée la plus chère, et  $P_t^{Switch}$  le prix de l'option switch. Pour réduire ce temps de calcul la méthode s'appuie sur la relation suivante ([Roux 2008](#)) :

$$P_{SB_t} = P_{SM_t} + P_{Switch_t}$$

En effet, vu d'aujourd'hui la situation la plus intéressante est d'entrer dans la swaption diagonale la plus chère. Cependant avec la déformation de la courbe des taux et de la surface de volatilité, la swaption la plus cher à  $t = 0$ , n'est peut-être pas la swaption la plus cher à  $t = 1$  an par exemple. L'option switch est définie comme l'option qui permet de choisir une autre swaption que la swaption diagonale la plus chère. En remarquant que la grande partie du prix de la swaption bermudienne est composée de la swaption diagonale la plus chère, voici l'approximation qui est proposée :

$$P_{SB_t} = P_{SM_t} + P_{Switch_0} \tag{C.1}$$

En utilisant cette approximation, la calibration et le pricing par arbre des swaptions bermudiennes qui sont très coûteux n'ont plus à être faits sur chaque scénario. Le pricing par arbre et la calibration seront néanmoins toujours utiles pour calculer  $P_0^{SB}$  et  $P_0^{Switch}$ . L'approximation propose donc de supposer que le prix de l'option switch est constant au cours du temps. En termes de risques cela signifie que le risque que affecte la swaption bermudienne est le même que celui qui affecte la swaption diagonale la plus chère.

L'étude numérique suivante présente les résultats de l'approximation proposée pour une swaption bermudienne. La figure C.1 présente la distribution des mark-to-markets d'une swaption bermudienne calculés avec un arbre, et nécessitant donc une calibration, et la distribution des mark-to-markets calculés avec l'approximation C.1.

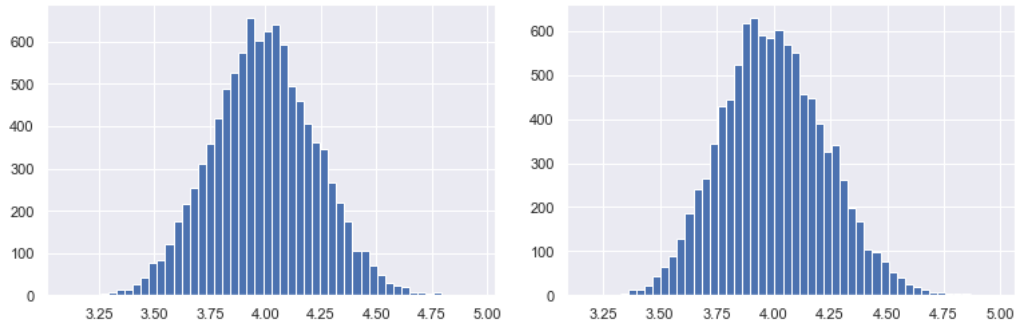


FIGURE C.1 – Distribution des mark-to-markets d'une swaption bermudienne en utilisant la calibration et le pricing par arbre (à gauche) et l'approximation avec l'option switch (à droite).

La figure suivante présente la distribution des mark-to-markets de la swaption bermudienne étudiée, calculée avec l'approximation C.1 en fonction de la distribution des mark-to-markets d'une swaption bermudienne calculée avec un arbre trinomial. L'axe rouge est la fonction  $y = x$ .

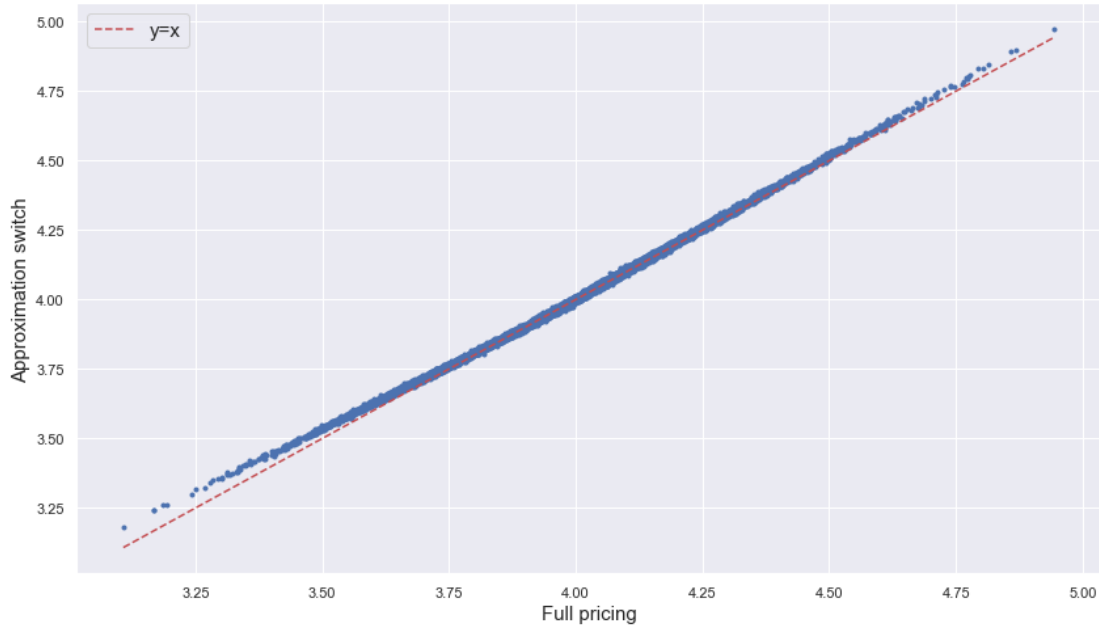


FIGURE C.2 – Proxy switch versus full pricing

	Full pricing	Proxy switch	Erreur / Performance
VaR(10j, 99%)	0,56 €	0,58 €	3,54%
ES(10j, 97.5%)	0,57 €	0,59 €	3,25%
Temps de calcul	2h 25min 51s	4min 6s	97,39%

TABLE C.1 – Précision et performance de l'approximation par l'option switch.

Comme le montre les résultats, l'approximation n'est pas assez précise pour



être utilisée. Une modélisation de la distribution de l'option switch plus précise pourrait être proposée. par exemple une modélisation de l'option switch par une loi normale pourrait faire l'objet d'une étude. Le temps de calcul est grandement diminué, ce qui était attendu car le calcul des mark-to-markets ne nécessite plus de calibration ni de pricing par arbre.

# Bibliographie

- Basel Committee on Banking Supervision (2020), ‘Calculation of rwa for market risk’, Available at [https://www.bis.org/basel\\_framework/chapter/MAR/10.htm](https://www.bis.org/basel_framework/chapter/MAR/10.htm).
- Benali, M. (2003), ‘Valorisation des produits de taux dans le cadre du modèle lgm-1f’, *Document interne Natixis*.
- Brigo, D. & Mercurio, F. (2001), *Interest-Rate Models : Theory and Practice*, Springer Finance.
- Chaix, A. (2003), ‘One factor linear Gauss Markov’, *Natixis’s internal document*.
- Lamberton, D. & Lapeyre, B. (1997), ‘Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance’, (*No Title*).
- Privault, N. (2022), *Introduction to Stochastic Finance with Market Examples*, Chapman and Hall.
- Roncalli, T. (2020), *Handbook of financial risk management*, CRC press.
- Roux, A. (2008), ‘Hull&White-1F : Pricing des swaptions Bermuda à nominal variable’, *Natixis’s internal document*.
- Ruiz, I. & Zeron, M. (2021), *Machine Learning for Risk Calculations : A Practitioner’s View*, John Wiley & Sons.