



Direction des Risques

Risques de Marchés

Pôle Taux

Adrien ROUX

Tél : 01 58 55 49 26

13 mai 2008

Proposition

Hull & White - 1F : Pricing des Swaptions Bermuda à Nominal Variable

Calibration sur les swaptions diagonales vs Basket calibration

1	Description du modèle et présentation des produits	4
1.1	Description du modèle Hull & White-1F	4
1.2	Présentation des produits	5
1.2.1	Swaptions bermuda à nominal variable	5
1.2.2	Swaptions Bermuda zéro-coupon	6
1.3	Influence du paramètre exotique λ	7
1.3.1	Influence de la mean-reversion sur la volatilité forward	7
1.3.2	Mean reversion et autocorrélation des taux Libor	7
1.3.3	Mean reversion et corrélation des taux de swap	10
2	Méthodes de calibration de la volatilité instantanée $\sigma(\cdot)$	11
2.1	Calibration sur les swaptions diagonales	12
2.1.1	Calibration par prix sur les swaptions diagonales	12
2.1.2	Approximation de la dynamique d'un taux de swap	13
2.1.3	Calibration par volatilité sur les swaptions diagonales	14
2.2	Basket calibration	15
2.2.1	Présentation du cadre général	15
2.2.2	Basket Calibration sur les volatilités	15
2.2.3	Une approche alternative pour la calibration au strike équivalent	18
2.2.4	Basket calibration sur les prix	22

3	Tests numériques	26
3.1	Influence de la mean reversion	26
3.1.1	Volatilité forward	26
3.1.2	Most expensive swaption et option switch	27
3.2	Validité de l'approximation de la dynamique des taux de swap	29
3.2.1	Approximation par une dynamique log-normale	29
3.2.2	Approximation par une dynamique normale	31
3.2.3	Approximation de la dynamique d'un panier de taux de swap	33
3.3	Convergence d'une swaption à nominal variable vers une swaption à nominal constant	36
3.3.1	Convergence du prix d'une swaption européenne	36
3.3.2	Convergence du prix d'une swaption bermuda	37
3.4	Analyse de la sensibilité du pricing au paramètre exotique de mean reversion	38
3.5	Validité de l'approximation du prix de marché d'une VNSwaption via le procédé d'optimisation	46
3.6	Synthèse des tests	47
4	Détails du paramétrage utilisé lors des tests	49
5	References	52

Synthèse :

Dans cette étude, nous nous intéressons à la calibration du modèle Hull & White à un facteur en vue de l'évaluation de la valeur de l'option switch associée à une swaption Bermuda à nominal variable ou zéro-coupon. Nous cherchons à mettre en évidence les avantages de la méthode de calibration appelée « basket calibration » en comparaison à la calibration sur les swaptions diagonales.

Dans un premier temps, nous rappelons les principes fondamentaux du modèle Hull & White à un facteur et la définition des produits considérés dans notre étude. Chacun des deux types de calibration est ensuite présenté avec les différentes mises en application possibles. A cette occasion, nous introduisons une méthode d'optimisation, nous permettant d'approcher les prix de marché de swaptions européennes à nominal variable. Nous nous appuyons sur cette approximation pour définir de nouvelles variantes de la basket calibration.

Enfin, nous testons par des exemples numériques un certain nombre de points théoriques présentés plus tôt :

- l'influence du paramètre exotique de mean reversion,
- la validité de l'approximation de la dynamique d'un panier de taux de swap dans le cadre de Hull & White - 1 facteur,
- la convergence du prix d'une swaption à nominal variable vers celui d'une swaption à nominal constant en fonction de la méthode de calibration,
- la sensibilité du pricing au paramètre exotique de mean reversion λ ,
- la validité de l'approximation du prix de marché d'une swaption européenne à nominal variable par optimisation.

Ces tests, au-delà de la simple illustration de certains points théoriques, mettent en évidence les différences de performance entre les méthodes de calibration. Nous retiendrons en particulier les résultats suivants :

- le paramètre exotique de mean reversion contrôle la corrélation entre les taux de swap de différentes maturités. Pour une mean reversion faible, la corrélation entre les taux de swap est élevée. L'incertitude est moins forte au moment du pricing initial. La probabilité d'exercer l'option à la date d'exercice de la swaption la plus chère au moment du pricing initial est élevée. La valeur de l'option switch est faible. Pour une mean reversion élevée, la corrélation entre les taux de swap est moins forte. L'incertitude est donc plus élevée au moment du pricing initial. La probabilité d'exercer l'option à la date d'exercice de la swaption la plus chère au moment du pricing initial est plus faible. La valeur de l'option switch est par conséquent plus élevée.
- la qualité de l'approximation de la dynamique d'un taux de swap dans le cadre Hull & White-1 facteur est bien meilleure avec une approximation gaussienne plutôt que log-normale. Toutefois, la qualité de l'approximation gaussienne de la dynamique d'un panier de taux de swap se détériore avec l'augmentation du strike et l'augmentation de l'amortissement (positif ou négatif) du nominal. Il existe une disymétrie entre les nominaux croissants et décroissants : un nominal croissant est un facteur aggravant.
- La calibration sur les swaptions diagonales a pour effet de rapidement assimiler le payoff à un payoff à nominal constant, alors que la basket calibration capture mieux l'aspect nominal variable.
- Le bénéfice de la basket calibration ressort nettement dans le cas de nominaux décroissants. Il n'apparaît pas clairement dans le cas de nominaux croissants. Par ailleurs, les méthodes de basket calibration reposant sur le procédé d'optimisation produisent dans le cas de nominaux décroissants des résultats comparables à ceux des méthodes de basket calibration habituelles, utilisant par exemple la méthode la moneyness. Dans le cas de nominaux croissants, ces mêmes méthodes de calibration produisent des résultats plus décevants. La basket calibration sur les prix obtenus par optimisation peut produire sous certaines conditions une amélioration significative et se détache ainsi des autres méthodes de basket calibration.
- L'évolution des prix de swaptions européennes obtenus par optimisation n'est cohérente avec l'évolution des prix calculés par les méthodes habituelles, i.e. basket calibration sur les volatilités ATM ou au strike équivalent, que dans le cas d'un nominal décroissant. Dans le cas d'un nominal croissant, le procédé d'optimisation sur-estime le prix de la swaption européenne à nominal variable. Cet écart est de plus en plus prononcé à mesure que le strike augmente.

1 Description du modèle et présentation des produits

1.1 Description du modèle Hull & White-1F

Le pricing des swaptions Bermuda à nominal variable est réalisé à l'aide d'un modèle Hull & White à 1 facteur (H&W-1F ou LGM-1F). Nous rappelons ici brièvement les hypothèses et principes fondamentaux du modèle. Pour plus de détails, se référer aux notes spécifiques de présentation du modèle H&W-1F.

H&W-1F s'inscrit dans le cadre des modèles Heath-Jarrow-Morton. Sous la probabilité risque neutre notée Q , la dynamique des zéro-coupons est donnée par :

$$\frac{dB(t, T)}{B(t, T)} = r_t dt + \Gamma(t, T) dW_t^Q$$

Le taux forward instantané suit alors la dynamique suivante :

$$df(t, T) = -\gamma(t, T)\Gamma(t, T)dt + \gamma(t, T)dW_t^Q$$

où $\Gamma(t, T) = -\int_t^T \gamma(t, s)ds$.

Le modèle H&W-1F est en outre gaussien, i.e. la volatilité $\gamma(t, s)$ est déterministe, et linéaire, i.e. $\gamma(t, s)$ peut s'écrire sous la forme particulière :

$$\gamma(t, T) \triangleq \sigma(t)e^{-\int_t^T \lambda(u)du}$$

Nous introduisons en plus en vue de la calibration du modèle les hypothèses simplificatrices suivantes :

- $\lambda(\bullet)$, i.e. le paramètre de mean reversion, est indépendant du temps : $\lambda(s) \triangleq \lambda$.
- $\sigma(\bullet)$ est supposée constante par morceaux.

On peut alors réécrire la volatilité $\Gamma(t, T)$ sous la forme suivante :

$$\Gamma(t, T) = -\sigma(t)\beta(t, T) \quad \text{où} \quad \beta(t, T) \triangleq \frac{1 - e^{-\lambda(T-t)}}{\lambda}$$

Sous ces hypothèses, la dynamique des taux courts s'écrit :

$$dr_t = \left(\lambda(f(0, t) - r_t) + \partial_T f(0, t) + \int_0^t \sigma^2(s) e^{-2\lambda(t-s)} ds \right) dt + \sigma(t)dW_t^Q$$

En introduisant la transformation, $X_t = r_t - f(0, t)$, on montre que le processus X_t vérifie l'EDS ci-dessous :

$$dX_t = (\phi(t) - \lambda X_t) dt + \sigma(t)dW_t^Q$$

où $\phi(t)$ est complètement déterminée via $\sigma(\bullet)$ et λ :

$$\phi(t) = \int_0^t \sigma^2(s) e^{-2\lambda(t-s)} ds$$

On peut alors montrer que les prix des zéro-coupons s'écrivent :

$$B(t, T) = \frac{B(0, T)}{B(0, t)} \exp \left(-\frac{1}{2} \beta^2(t, T) \phi(t) - \beta(t, T) X_t \right)$$

On note en particulier que, sous les hypothèses du modèle H&W-1F, les prix des zéro-coupons sont donnés par une formule fermée, qui est en fait une fonction déterministe de la variable d'état X_t :

$$B(t, T) = g_{t, T}(X_t) = \frac{B(0, T)}{B(0, t)} \exp \left(-\frac{1}{2} \beta^2(t, T) \phi(t) - \beta(t, T) X_t \right)$$

1.2 Présentation des produits

1.2.1 Swaptions bermuda à nominal variable

Les produits qui nous intéressent dans le cadre de ce document sont les swaptions Bermuda à nominal variable. Elles confèrent à leur détenteur le droit d'entrer dans un swap à nominal variable à différentes dates d'exercices $(T_i^e)_i$. Naturellement, ce type de produit englobe les swaptions bermuda à nominal constant, les swaptions européennes à nominal variable et les swaptions européennes à nominal constant.

Le prix d'une swaption à nominal constant évalué dans le cadre H&W-1F est un point déjà bien connu. Il est donné par une formule fermée et peut ainsi naturellement servir à la calibration de la volatilité instantanée σ à partir des prix de marché.

Dans le cas des swaptions à nominal variable, on ne dispose en général pas de formule fermée de pricing. Toutefois, il est intéressant de faire le rapprochement avec le pricing d'une option sur un panier de taux de swap.

Pour cela, on s'intéresse dans un premier temps à la NPV d'un swap à nominal variable notée $VNSwap(t)$. On considère ici un swap payeur.

Soient $\{T_0, \dots, T_{n-1}\}$ les dates de fixing du swap et $\{T_1, \dots, T_n\}$ les dates de paiement correspondantes. On note $(N_i)_i$ le nominal pour chaque date de paiement T_i . Les nominaux de la jambe fixe et de la jambe variable sont supposés égaux.

$$\forall t < T_0, \quad VNSwap(t) \triangleq \sum_{i=1}^n \delta_i N_i L(t, T_{i-1}, T_i) B(t, T_i) - \sum_{i=1}^n \delta_i N_i K B(t, T_i)$$

En faisant apparaître la moyenne des nominaux, on cherche à retrouver la forme de l'expression obtenue dans le cas d'un nominal constant :

$$\begin{aligned} \forall t < T_0, \quad VNSwap(t) &= \left(\sum_{i=1}^n \frac{N_i}{N^*} \right) \left[\sum_{i=1}^n \delta_i \frac{\frac{N_i}{N^*}}{\sum_{i=1}^n \frac{N_i}{N^*}} L(t, T_{i-1}, T_i) B(t, T_i) - K \sum_{i=1}^n \delta_i \frac{\frac{N_i}{N^*}}{\sum_{i=1}^n \frac{N_i}{N^*}} B(t, T_i) \right] \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \frac{N_i}{N^*} \right) lvl(t) \left(\frac{\sum_{i=1}^n \delta_i \frac{\frac{N_i}{N^*}}{\sum_{i=1}^n \frac{N_i}{N^*}} L(t, T_{i-1}, T_i) B(t, T_i)}{lvl(t)} - K \right) \end{aligned}$$

avec $lvl(t) \triangleq \sum_{i=1}^n \delta_i \frac{N_i}{N^*} B(t, T_i)$ et $N^* \triangleq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n N_i$

On pose $Y(t) \triangleq \frac{\sum_{i=1}^n \delta_i \frac{N_i}{N^*} L(t, T_{i-1}, T_i) B(t, T_i)}{lvl(t)}$. Cette expression de $Y(t)$ peut être transformée :

$$Y(t) = \sum_{i=1}^n \frac{(N_i - N_{i+1})}{N^*} \frac{\left(\sum_{j=1}^i \delta_j B(t, T_j) \right)}{lvl(t)} S_i(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(t) S_i(t)$$

où $S_i(t) \triangleq \frac{B(t, T_0) - B(t, T_i)}{\sum_{j=1}^i \delta_j B(t, T_j)}$ est le taux de swap débutant en T_0 et finissant en T_i et $\alpha_i(t) \triangleq \frac{(N_i - N_{i+1})}{N^*} \frac{\left(\sum_{j=1}^i \delta_j B(t, T_j) \right)}{lvl(t)}$.

Par convention, on définit la notation $N_{n+1} = 0$. En supposant que $\alpha_i(t)$ est déterministe, $Y(t)$ peut s'écrire comme la combinaison linéaire des taux de swap $S_i(t)$.

Il en résulte :

$$\forall t < T_0, \quad VNSwap(t) = N^* lvl(t) (Y(t) - K)$$

On en déduit une approximation de la valeur d'une swaption européenne à nominal variable. On note T_e la date d'exercice. Par soucis de clarté, on suppose que $T_e < T_0$. On obtient ainsi la valeur suivante :

$$VNSwaption(t) = N^*lv(t)\mathbb{E}_t^{Q^{lv}} \left[(Y(T_e) - K)^+ \right]$$

On voit ainsi apparaître le lien qu'il existe entre le pricing d'une swaption européenne à nominal variable et le pricing d'une swaption européenne sur un panier de taux de swap. On justifie ainsi le fait de se baser, dans la suite du document, sur les volatilités implicites des taux de swap données par le marché pour approcher la volatilité marché d'une VNSwaption européenne.

1.2.2 Swaptions Bermuda zéro-coupon

Une swaption Bermuda zéro-coupon confère le droit à son détenteur d'entrer dans un swap zéro-coupon à différentes dates d'exercice $(T_i^e)_i$. Un swap zéro-coupon est structuré comme un swap, i.e. une jambe fixe et une jambe variable. Toutefois, seule la jambe variable est payée périodiquement. La jambe fixe est versée en une seule et unique fois au terme du swap, i.e. à la dernière date de paiement. On rappelle la définition de la jambe fixe du swap zéro-coupon dans le cas d'un coupon discret :

$$JambeFixe(t) = N_0 ((1+x)^n - 1) B(t, T_n)$$

où n est le nombre de période du swap et x est le taux d'intérêt du coupon associé à la jambe zéro-coupon.

On montre dans la suite que le payoff d'une swaption Bermuda zéro-coupon peut se ramener au payoff d'une swaption bermuda à nominal variable. On considère le cas particulier d'une swaption Bermuda zéro-coupon receveuse de nominal initial N_0 . A la date d'exercice $T^e \in]T_{i-1}, T_i]$, la valeur d'exercice de l'option est donnée par :

$$\begin{aligned} ExerciseValue &= N_0 \left(B(T^e, T_n) ((1+x)^n - 1) - B(T^e, T_i) ((1+x)^i - 1) - \sum_{j=i+1}^n \delta_j B(T^e, T_j) L(T^e, T_{j-1}, T_j) \right) \\ &= N_0 (B(T^e, T_n) ((1+x)^n - 1) - B(T^e, T_i) ((1+x)^i - 1) - (B(T^e, T_i) - B(T^e, T_n))) \\ &= N_0 (B(T^e, T_n) ((1+x)^n - 1) - B(T^e, T_i) ((1+x)^i - 1) - (B(T^e, T_i) - B(T^e, T_n))) \\ &= N_0 ((1+x)^n B(T^e, T_n) - (1+x)^i B(T^e, T_i)) \end{aligned}$$

D'autre part, on s'intéresse à la swaption Bermuda receveuse de strike x et de nominal N_0 à l'instant T_0 croissant au taux x à chaque période. A la date $T^e \in]T_{i-1}, T_i]$, la valeur d'exercice de l'option est donnée par :

$$\begin{aligned} ExerciseValue &= \sum_{j=i+1}^n N_0 (1+x)^{j-1} x B(T^e, T_j) - \sum_{j=i+1}^n N_0 (1+x)^{j-1} \delta_j B(T^e, T_j) L(T^e, T_{j-1}, T_j) \\ &= N_0 \sum_{j=i+1}^n (1+x)^{j-1} x B(T^e, T_j) - N_0 \sum_{j=i+1}^n (1+x)^{j-1} (B(T^e, T_{j-1}) - B(T^e, T_j)) \\ &= N_0 \sum_{j=i+1}^n (1+x)^j B(T^e, T_j) - N_0 \sum_{j=i}^{n-1} (1+x)^j B(T^e, T_j) \\ &= N_0 (1+x)^n B(T^e, T_n) - N_0 (1+x)^i B(T^e, T_i) \end{aligned}$$

On en déduit que la marked-to-market value d'un swap zéro-coupon est égale à la marked-to-market value d'un swap à nominal variable avec $N_i = N_0 (1 + x)^i$. Le pricing d'une swaption Bermuda zéro-coupon peut donc se ramener au cas du pricing d'une swaption Bermuda à nominal variable, ce qui implique bien que la calibration du modèle de pricing d'une bermuda zéro-coupon se fasse sur les prix des VNSwaptions européennes associées.

En conclusion, les produits intégrés dans le scope de cette note sur la calibration sont les swaptions Bermuda à nominal variable, e.g. amortizing, step-up, roller-coaster (profil croissant puis décroissant), reverse roller-coaster (profil décroissant puis croissant) et les swaptions Bermuda zéro-coupons.

1.3 Influence du paramètre exotique λ

1.3.1 Influence de la mean-reversion sur la volatilité forward

D'après les hypothèses du modèle H&W-1F, on a sous la probabilité risque neutre Q :

$$df(t, T) = -\gamma(t, T)\Gamma(t, T)dt + \gamma(t, T)dW_t^Q \quad \text{avec} \quad \gamma(t, T) = \sigma(t)e^{-\lambda(T-t)}$$

On constate donc que pour λ donné, si $\lambda > 0$, la volatilité forward $\gamma(t, T)$ diminue lorsque la différence $T - t$ augmente. Les variations du mouvement Brownien sont alors plus amorties.

Conclusion : si $\lambda > 0$, les taux forward d'échéance lointaine sont moins volatiles que les taux forward d'échéance proche. Inversement, si $\lambda < 0$, l'effet inverse se produit. Les taux forward d'échéance longue seront plus volatiles que les taux forward d'échéance courte.

1.3.2 Mean reversion et autocorrélation des taux Libor

On s'intéresse à la corrélation des taux Libor $Corr(L_i(s), L_i(t))$ avec $L_i(t) \triangleq L(t, T_{i-1}, T_i)$. On a donc :

$$\begin{aligned} L_i(t) &= \frac{1}{\delta_i} \left(\frac{B(t, T_{i-1})}{B(t, T_i)} - 1 \right) = \frac{1}{\delta_i} \left(\frac{g_{t, T_{i-1}}(X_t)}{g_{t, T_i}(X_t)} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{\delta_i} \left(\frac{\frac{B(0, T_{i-1})}{B(0, t)} \exp\left(-\frac{1}{2}\beta^2(t, T_{i-1})\phi(t) - \beta(t, T_{i-1})X_t\right)}{\frac{B(0, T_i)}{B(0, t)} \exp\left(-\frac{1}{2}\beta^2(t, T_i)\phi(t) - \beta(t, T_i)X_t\right)} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{\delta_i} \left(\frac{B(0, T_{i-1})}{B(0, T_i)} \exp\left(-\frac{1}{2}\phi(t) (\beta^2(t, T_{i-1}) - \beta^2(t, T_i))\right) \exp(-(\beta(t, T_{i-1}) - \beta(t, T_i))X_t) - 1 \right) \end{aligned}$$

En posant $A(t) \triangleq \frac{B(0, T_{i-1})}{B(0, T_i)} \exp\left(-\frac{1}{2}\phi(t) (\beta^2(t, T_{i-1}) - \beta^2(t, T_i))\right)$, on obtient l'expression suivante :

$$L_i(t) = \frac{1}{\delta_i} (A(t) \exp(-(\beta(t, T_{i-1}) - \beta(t, T_i))X_t) - 1)$$

On en déduit une approximation à l'ordre 1 en X_t de $L_i(t)$:

$$L_i(t) \simeq \frac{1}{\delta_i} (A(t) (1 - (\beta(t, T_{i-1}) - \beta(t, T_i))X_t) - 1)$$

Il en résulte :

$$Cov(L_i(t), L_i(s)) \simeq \frac{1}{\delta_i^2} A(t)A(s) (\beta(t, T_{i-1}) - \beta(t, T_i)) (\beta(s, T_{i-1}) - \beta(s, T_i)) Cov(X_t, X_s)$$

et :

$$\begin{aligned} \text{Corr}(L_i(t), L_i(s)) &= \frac{\text{Cov}(L_i(t), L_i(s))}{\sqrt{\text{Var}(L_i(t))}\sqrt{\text{Var}(L_i(s))}} \\ &\simeq \frac{\text{Cov}(X_t, X_s)}{\sqrt{\text{Var}(X_t)}\sqrt{\text{Var}(X_s)}} = \text{Corr}(X_t, X_s) \end{aligned}$$

On suppose pour simplifier les écritures que $s < t$.

$$\text{Corr}(X_t, X_s) = \frac{\langle X_t, X_s \rangle}{\sqrt{\langle X \rangle_t} \sqrt{\langle X \rangle_s}}$$

D'après la formule d'Itô, on a $d(e^{\lambda t} X_t) = \lambda X_t e^{\lambda t} dt + e^{\lambda t} dX_t = e^{\lambda t} \phi(t) dt + e^{\lambda t} \sigma(t) W_t^Q$. Il en découle une expression sous forme d'intégrale stochastique de X_t :

$$X_t = \int_0^t e^{-\lambda(t-u)} \phi(u) du + \int_0^t e^{-\lambda(t-u)} \sigma(u) dW_u^Q$$

Cette dernière formule nous permet de calculer $\langle X_s, X_t \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle X_s, X_t \rangle &= \left\langle \int_0^s e^{-\lambda(s-u)} \sigma(u) dW_u^Q, \int_0^t e^{-\lambda(t-u)} \sigma(u) dW_u^Q \right\rangle \\ &= \left\langle \int_0^s e^{-\lambda(s-u)} \sigma(u) dW_u^Q, \int_s^t e^{-\lambda(t-u)} \sigma(u) dW_u^Q \right\rangle + \left\langle \int_0^s e^{-\lambda(s-u)} \sigma(u) dW_u^Q, \int_0^s e^{-\lambda(t-u)} \sigma(u) dW_u^Q \right\rangle \\ &= \left\langle \int_0^s e^{-\lambda(s-u)} \sigma(u) dW_u^Q, \int_0^s e^{-\lambda(t-u)} \sigma(u) dW_u^Q \right\rangle \\ &= e^{-\lambda(s+t)} \int_0^s e^{2\lambda u} \sigma(u)^2 du \end{aligned}$$

On introduit ici une hypothèse supplémentaire, en affirmant que $\sigma(u)$ est constante.

$$\text{Corr}(X_t, X_s) = \frac{\sigma^2 e^{-\lambda(s+t)} \int_0^s e^{2\lambda u} du}{\left(\sigma e^{-\lambda t} \sqrt{\int_0^t e^{2\lambda u} du} \right) \left(\sigma e^{-\lambda s} \sqrt{\int_0^s e^{2\lambda u} du} \right)} = \frac{\sqrt{\int_0^s e^{2\lambda u} du}}{\sqrt{\int_0^t e^{2\lambda u} du}} = \frac{\sqrt{\frac{e^{2\lambda s} - 1}{e^{2\lambda t} - 1}}}{\sqrt{\frac{s}{t}}}, \quad \begin{array}{ll} \text{si } \lambda \neq 0 \\ \text{si } \lambda = 0 \end{array}$$

On peut alors en conclure que :

$$\forall s < t, \quad \text{Corr}(L_i(t), L_i(s)) \simeq \begin{array}{ll} \sqrt{\frac{e^{2\lambda s} - 1}{e^{2\lambda t} - 1}} & , \quad \text{si } \lambda \neq 0 \\ \sqrt{\frac{s}{t}} & , \quad \text{si } \lambda = 0 \end{array}$$

Ce résultat montre que le paramètre de mean reversion contrôle l'auto-corrélation des taux Libor. Cette auto-corrélation est positive. On peut déduire de cette formule l'influence d'un accroissement de la valeur de λ , en dérivant l'expression obtenue sous le radical par rapport à λ .

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{e^{2\lambda s} - 1}{e^{2\lambda t} - 1} \right) = \frac{2se^{2\lambda s} (e^{2\lambda t} - 1) - 2te^{2\lambda t} (e^{2\lambda s} - 1)}{(e^{2\lambda t} - 1)^2}$$

On a alors :

$$2se^{2\lambda s} (e^{2\lambda t} - 1) - 2te^{2\lambda t} (e^{2\lambda s} - 1) > 0 \iff \frac{se^{2\lambda s}}{(e^{2\lambda s} - 1)} > \frac{te^{2\lambda t}}{(e^{2\lambda t} - 1)}$$

L'étude de la fonction $x \mapsto \frac{xe^{2\lambda x}}{(e^{2\lambda x} - 1)}$ révèle une stricte croissance sur $]0; \infty[$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, i.e. :

$$s < t \iff \frac{se^{2\lambda s}}{(e^{2\lambda s} - 1)} < \frac{te^{2\lambda t}}{(e^{2\lambda t} - 1)}$$

On en déduit que lorsque λ croît, l'auto-corrélation $Corr(L_i(t), L_i(s))$ décroît.

Conclusion : sous l'hypothèse d'une volatilité instantanée constante, la mean reversion contrôle l'auto-corrélation des taux Libor. Cette autocorrélation est toujours positive aussi bien lorsque $\lambda > 0$, que lorsque $\lambda < 0$ ou $\lambda = 0$. Lorsque λ croît, l'autocorrélation des taux Libor $Corr(L_i(t), L_i(s))$ décroît.

Remarque : une approximation de l'autocorrélation peut être obtenue dans le cas, où $\sigma(u)$ n'est pas supposée constante mais seulement constante par morceaux. On trouve alors :

$$\begin{aligned} \int_0^v e^{2\lambda u} \sigma(u)^2 du &= \sum_{j=1}^k \int_{T_{j-1}^e \wedge v}^{T_j^e \wedge v} e^{2\lambda u} \sigma(u)^2 du = \sum_{j=1}^k \sigma_j^2 \int_{T_{j-1}^e \wedge v}^{T_j^e \wedge v} e^{2\lambda u} du \\ &= \frac{1}{2\lambda} \sum_{j=1}^k \sigma_j^2 \left(e^{2\lambda(T_j^e \wedge v)} - e^{2\lambda(T_{j-1}^e \wedge v)} \right), \quad \text{si } \lambda \neq 0 \\ &= \sum_{j=1}^k \sigma_j^2 (T_j^e \wedge v - T_{j-1}^e \wedge v), \quad \text{si } \lambda = 0 \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \forall s < t, \quad Corr(L_i(t), L_i(s)) &\simeq Corr(X_t, X_s) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^k \sigma_j^2 (e^{2\lambda(T_j^e \wedge s)} - e^{2\lambda(T_{j-1}^e \wedge s)})}{\sum_{j=1}^k \sigma_j^2 (e^{2\lambda(T_j^e \wedge t)} - e^{2\lambda(T_{j-1}^e \wedge t)})}} & , \quad \text{si } \lambda \neq 0 \\ \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^k \sigma_j^2 (T_j^e \wedge s - T_{j-1}^e \wedge s)}{\sum_{j=1}^k \sigma_j^2 (T_j^e \wedge t - T_{j-1}^e \wedge t)}} & , \quad \text{si } \lambda = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Dans l'hypothèse d'une volatilité instantanée constante par morceaux, la relation entre mean reversion et auto-corrélation n'est plus aussi évidente. Les valeurs prises par la volatilité instantanée étant calibrées pour un λ donné, l'auto-corrélation dépend donc de la mean reversion mais aussi des prix de marché utilisés pour la calibration. Pour illustrer ce point, on considère deux dates d'exercice T_j^e et T_k^e d'une swaption Bermuda tels que $T_k^e < T_j^e$.

$$\begin{aligned} \langle X_{T_k^e}, X_{T_j^e} \rangle &= e^{-\lambda(T_k^e + T_j^e)} \int_0^{T_k^e} e^{2\lambda u} \sigma(u)^2 du \\ &= e^{-\lambda(T_j^e - T_k^e)} \int_0^{T_k^e} e^{-2\lambda(T_k^e - u)} \sigma(u)^2 du \\ &= e^{-\lambda(T_j^e - T_k^e)} \phi(T_k^e) \end{aligned}$$

On aura donc pour $\lambda \neq 0$ et $T_k^e < T_j^e$,

$$Corr(L_i(T_k^e), L_i(T_j^e)) \simeq Corr(X_{T_k^e}, X_{T_j^e}) = \frac{\langle X_{T_k^e}, X_{T_j^e} \rangle}{\sqrt{\langle X_{T_k^e} \rangle} \sqrt{\langle X_{T_j^e} \rangle}} = e^{-\lambda(T_j^e - T_k^e)} \sqrt{\frac{\phi(T_k^e)}{\phi(T_j^e)}}$$

Comme nous le verrons plus tard dans la section 2, la calibration sur les prix des swaptions fixe les valeurs $\phi(T_k^e)$ et $\phi(T_j^e)$ pour une valeur de λ donnée. L'auto-corrélation des taux Libor se trouve donc bien impactée par les prix de marché utilisés pour la calibration.

1.3.3 Mean reversion et corrélation des taux de swap

Sur le modèle de ce qui vient d'être fait pour l'autocorrélation des taux Libor, on examine la corrélation entre les taux de swap. Plus précisément, on s'intéresse à la corrélation entre $S_j^n(T_j)$ et $S_p^n(T_p)$, où $S_j^n(T_j)$ est le taux de swap débutant en T_j et s'achevant en T_n évalué à la date future T_j et $S_p^n(T_p)$ est le taux de swap débutant en T_p et s'achevant en T_n évalué à la date future T_p . On comprend intuitivement que la corrélation entre ces deux taux de swap influence directement l'évaluation de l'option switch d'une swaption Bermuda.

$$S_j^n(T_j) \triangleq \frac{1 - B(T_j, T_n)}{\sum_{k=j+1}^n \delta_k B(T_j, T_k)}$$

En utilisant la formule fermée de valorisation des obligations zéro-coupons, on en déduit :

$$\begin{aligned} 1 - B(T_j, T_n) &= 1 - \frac{B(0, T_n)}{B(0, T_j)} \exp \left(-\beta(T_j, T_n)^2 \phi(T_j) - \beta(T_j, T_n) X_{T_j} \right) \\ &\simeq \underbrace{1 - \frac{B(0, T_n)}{B(0, T_j)} \exp \left(-\beta(T_j, T_n)^2 \phi(T_j) \right)}_{\triangleq A(T_j, T_n)} (1 - \beta(T_j, T_n) X_{T_j}) \\ &\simeq 1 - A(T_j, T_n) + A(T_j, T_n) \beta(T_j, T_n) X_{T_j} \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} \sum_{k=j+1}^n \delta_k B(T_j, T_k) &\simeq \sum_{k=j+1}^n \delta_k A(T_j, T_k) (1 - \beta(T_j, T_k) X_{T_j}) \\ &\simeq \sum_{k=j+1}^n \delta_k A(T_j, T_k) - X_{T_j} \sum_{k=j+1}^n \delta_k A(T_j, T_k) \beta(T_j, T_k) \end{aligned}$$

On en conclut que :

$$S_j^n(T_j) \simeq \frac{1 - A(T_j, T_n)}{\sum_{k=j+1}^n \delta_k A(T_j, T_k)} + \left[(1 - A(T_j, T_n)) \frac{\sum_{k=j+1}^n \delta_k A(T_j, T_k) \beta(T_j, T_k)}{\left(\sum_{k=j+1}^n \delta_k A(T_j, T_k) \right)^2} + \frac{A(T_j, T_n) \beta(T_j, T_n)}{\sum_{k=j+1}^n \delta_k A(T_j, T_k)} \right] X_{T_j}$$

De la même façon, on trouve une approximation de $S_p^n(T_p)$. On constate alors que :

$$\text{Corr}(S_j^n(T_j), S_p^n(T_p)) \simeq \text{Corr}(X_{T_j}, X_{T_p})$$

D'après les calculs précédemment effectués dans le cas de l'autocorrélation des taux Libor, on peut conclure que dans le cas, où σ est constant :

$$\text{Corr}(S_j^n(T_j), S_p^n(T_p)) \simeq \begin{cases} \sqrt{\frac{e^{2\lambda(T_j \wedge T_p)} - 1}{e^{2\lambda(T_j \vee T_p)} - 1}} & , \quad \text{si } \lambda \neq 0 \\ \sqrt{\frac{T_j \wedge T_p}{T_j \vee T_p}} & , \quad \text{si } \lambda = 0 \end{cases}$$

Ainsi, il apparaît clairement dans le cas, où σ est constant, que la donnée du paramètre de mean reversion λ fixe la corrélation entre les taux de swap. Cette corrélation reste toujours positive. Elle décroît avec le paramètre λ . Intuitivement, cette diminution de l'inter-dépendance des taux de swap, lorsque λ croît, suggère

une augmentation de la valeur de l'option switch associée à la swaption bermuda. Nous nous attacherons à illustrer ce point plus tard au travers d'exemples numériques.

Remarque : Dans la cas, où σ est constant par morceaux, on obtient l'expression suivante :

$$\text{Corr}(S_j^n(T_j), S_p^n(T_p)) \simeq \begin{cases} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k \sigma_i^2 \left(e^{2\lambda(T_i^e \wedge (T_j \wedge T_p))} - e^{2\lambda(T_{i-1}^e \wedge (T_j \wedge T_p))} \right)}{\sum_{i=1}^k \sigma_i^2 \left(e^{2\lambda(T_i^e \wedge (T_j \vee T_p))} - e^{2\lambda(T_{i-1}^e \wedge (T_j \vee T_p))} \right)}} & , \quad \text{si } \lambda \neq 0 \\ \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k \sigma_j^2 (T_i^e \wedge (T_j \wedge T_p) - T_{i-1}^e \wedge (T_j \wedge T_p))}{\sum_{i=1}^k \sigma_i^2 (T_i^e \wedge (T_j \vee T_p) - T_{i-1}^e \wedge (T_j \vee T_p))}} & , \quad \text{si } \lambda = 0 \end{cases}$$

La relation entre la corrélation des taux de swap et la mean reversion est alors beaucoup moins évidente. Les valeurs σ_j sont calibrées pour λ fixé et dépendent des prix de marché utilisés pour la calibration.

2 Méthodes de calibration de la volatilité instantanée $\sigma(\cdot)$

On présente dans cette partie différentes méthodes de calibration de la fonction σ constante par morceaux dans le cadre du modèle H&W-1F. Le paramètre de mean reversion λ est supposé être déjà fixé. σ est calibré à l'aide de prix de marché d'options européennes dont les maturités sont les différentes dates d'exercice de l'option Bermuda. Le prix d'une option européenne de maturité T^e ne dépend de σ que sur l'intervalle $[0, T^e]$. En supposant que l'on dispose de k options européennes de maturités strictement croissantes $(T_j^e)_j$, on cherche à déterminer les valeurs σ_j telles que :

$$\forall j \in \{1..k\}, \forall t \in]T_{j-1}^e, T_j^e], \sigma(t) = \sigma_j \quad \text{avec } T_0^e \triangleq 0$$

par un procédé itératif, habituellement appelé *bootstrap*.

Au cours de cette procédure de calibration, une anomalie appelée *variance squeeze* peut se produire : on doit affecter une valeur négative à σ_j^2 . On résout cette anomalie en introduisant une valeur minimale σ_{\min} . Ceci a pour conséquence le mispricing de la swaption de date d'exercice T_j^e par le modèle ainsi calibré. Toutefois, les swaptions suivantes seront en général correctement pricées.

On distingue dans le cas de la calibration pour le pricing d'une swaption Bermuda à nominal variable plusieurs types de calibration, que l'on classe

- selon qu'elles s'appuient sur les prix ou sur les volatilités,
- selon le type d'instruments de calibration, i.e. swaptions diagonales ou panier de taux de swap,
- dans le cas d'une calibration sur les volatilités, on peut intégrer le smile ou non, on parle alors de calibration *vol ATM* ou de calibration *vol strike équivalent*.

La suite de cette section s'organise de la manière suivante :

- Dans un premier temps, on décrit en détails la calibration sur les swaptions diagonales aussi bien par les prix que par les volatilités. La description de la calibration par volatilité traite à la fois de la calibration *vol ATM* que de celle au *strike équivalent*.
- Dans un deuxième temps, on s'intéresse à la basket calibration sur les volatilités. Comme pour la calibration sur les swaptions diagonales, on traite des cas ATM et strike équivalent. Dans ce dernier cas, on présente deux approches différentes : dans la première, on s'appuie sur la moneyness pour calculer la volatilité au strike équivalent, dans la seconde, on introduit un procédé d'optimisation. On utilise ensuite ce procédé d'optimisation pour présenter une Basket calibration sur les prix.

2.1 Calibration sur les swaptions diagonales

2.1.1 Calibration par prix sur les swaptions diagonales

Cette méthode se base sur la donnée des prix de marché des swaptions diagonales naturellement associées à la swaption Bermuda. Ces swaptions ont pour strike K_j . Dans le cas d'une calibration ATM, les strikes K_j seront choisis égaux au taux de swap forward. Pour une calibration au strike équivalent, les strikes K_j seront égaux au strike K de la bermuda. Leurs maturités correspondent aux différentes dates d'exercice $(T_j^e)_j$ de notre option bermuda.

Dans le cadre du modèle H&W-1F, le prix d'une swaption européenne à nominal constant peut être calculé par une formule fermée. En effet, si on considère le cas d'une swaption payeuse, on a :

$$\begin{aligned}
 PS(T_j^e, T_{n(j)}, T_n, K_j) &= B(t, T_j^e) \mathbb{E}_t^{Q_j^{T_j^e}} \left[\left(B(T_j^e, T_{n(j)}) - B(T_j^e, T_n) - K_j \sum_{i=n(j)}^n \delta_i B(T_j^e, T_i) \right)^+ \right] \\
 &= B(t, T_{n(j)}) \mathbb{E}_t^{Q_j^{T_{n(j)}}} \left[\left(1 - \frac{B(T_j^e, T_n)}{B(T_j^e, T_{n(j)})} - K_j \sum_{i=n(j)}^n \delta_i \frac{B(T_j^e, T_i)}{B(T_j^e, T_{n(j)})} \right)^+ \right] \\
 &= B(t, T_{n(j)}) \mathbb{E}_t^{Q_j^{T_{n(j)}}} \left[\left(1 - \sum_{i=n(j)}^n c_i \frac{B(T_j^e, T_i)}{B(T_j^e, T_{n(j)})} \right)^+ \right] \quad \text{avec } c_i = K_j \delta_i + 1_{\{i=n\}}
 \end{aligned}$$

où $n(j)$ est la date de fixing qui succède à la date d'exercice $T_{n(j)}$, si T_j^e est une date de fixing alors $T_{n(j)} = T_j^e$. On reconnaît la formule du prix d'une put option sur obligation modifiée. On utilise le fait que $x \mapsto \sum_{i=n(j)}^n c_i \frac{g_{T_j^e, T_i}(x)}{g_{T_j^e, T_{n(j)}}(x)}$ avec $c_i > 0$ est strictement monotone pour calculer l'unique antécédent x_j^* du strike 1. On définit alors $K_j^i \triangleq \frac{g_{T_j^e, T_i}(x_j^*)}{g_{T_j^e, T_{n(j)}}(x_j^*)}$. Il en résulte :

$$\begin{aligned}
 PS(T_j^e, T_{n(j)}, T_n, K_j) &= B(t, T_{n(j)}) \sum_{i=n(j)}^n c_i \mathbb{E}_t^{Q_j^{T_{n(j)}}} \left[\left(K_j^i - \frac{B(T_j^e, T_i)}{B(T_j^e, T_{n(j)})} \right)^+ \right] \\
 &= \sum_{i=n(j)}^n c_i BSPut\left(\frac{B(t, T_i)}{B(t, T_{n(j)})}, t, \gamma_{ji}^*, K_j^i, T_j^e\right)
 \end{aligned}$$

avec $(\gamma_{ji}^*)^2 T_j^e = \int_0^{T_j^e} |\Gamma(s, T_i) - \Gamma(s, T_{n(j)})|^2 ds = \left(\frac{\exp(-\lambda(T_{n(j)} - T_j^e)) - \exp(-\lambda(T_i - T_j^e))}{\lambda} \right)^2 \phi(T_j^e)$

On constate que le prix de la swaption payeuse s'écrit comme une combinaison linéaire de prix Black Scholes de put options, où la dépendance en γ_{ji}^* correspond en réalité à une dépendance en $\phi(T_j^e)$ indépendamment de l'indice i . On ré-écrit formellement cette relation de la façon suivante :

$$PS(T_j^e, T_{n(j)}, T_n, K_j) = f_{n(j)}(\phi(T_j^e))$$

On peut maintenant formuler l'algorithme de calibration. Connaissant la valeur de $\phi(T_{j-1}^e)$, on cherche à déterminer $\phi(T_j^e)$ et σ_j :

1. on calcule les éléments caractéristiques de la date d'exercice T_j^e , afin de trouver la valeur de l'antécédent x_j^* par un algorithme du type Newton-Raphson.

2. on a alors à notre disposition l'ensemble des éléments qui composent la fonction $f_{n(j)}$. Par une deuxième utilisation d'un algorithme du type Newton-Raphson, on déduit du prix de marché de la swaption de maturité T_j^e la valeur de $\phi(T_j^e)$.
3. enfin, on trouve la valeur de σ_j , en utilisant la définition de $\phi(T_j^e)$:

$$\begin{aligned}
\phi(T_j^e) &= \int_0^{T_j^e} \sigma^2(s) e^{-2\lambda(T_j^e-s)} ds \\
\phi(T_j^e) &= \int_{T_{j-1}^e}^{T_j^e} \sigma_j^2 e^{-2\lambda(T_j^e-s)} ds + \int_0^{T_{j-1}^e} \sigma^2(s) e^{-2\lambda(T_j^e-s)} ds \\
\phi(T_j^e) &= \sigma_j^2 \frac{1 - e^{2\lambda(T_{j-1}^e - T_j^e)}}{2\lambda} + e^{-2\lambda(T_j^e - T_{j-1}^e)} \int_0^{T_{j-1}^e} \sigma^2(s) e^{-2\lambda(T_{j-1}^e-s)} ds \\
\phi(T_j^e) &= \sigma_j^2 \frac{1 - e^{2\lambda(T_{j-1}^e - T_j^e)}}{2\lambda} + e^{-2\lambda(T_j^e - T_{j-1}^e)} \phi(T_{j-1}^e)
\end{aligned}$$

Il en résulte :

$$\sigma_j = \sqrt{\frac{2\lambda \left(\phi(T_j^e) - e^{-2\lambda(T_j^e - T_{j-1}^e)} \phi(T_{j-1}^e) \right)}{1 - e^{2\lambda(T_{j-1}^e - T_j^e)}}}$$

On initialise ces itérations en utilisant le fait que pour la première date d'exercice T_1^e et le calcul de $\phi(T_1^e)$, on a $\phi(T_0^e) = \phi(0) = 0$.

2.1.2 Approximation de la dynamique d'un taux de swap

Afin de présenter la méthode de calibration sur les volatilités des swaptions diagonales, on introduit ici une approximation de la dynamique des taux de swap dans le cadre de H&W-1F. On cherche pour cela à approcher la dynamique d'un taux de swap $S(t)$ par une dynamique lognormale dans un premier temps, puis par une dynamique normale.

$$S(t) \triangleq \frac{B(t, T_0) - B(t, T_n)}{\sum_{i=1}^n \delta_i B(t, T_i)}$$

On calcule $dS(t)$ avec la formule d'Itô tout en négligeant les termes présents dans la drift :

$$dS(t) = \left[\frac{dB(t, T_0) - dB(t, T_n)}{\sum_{i=1}^n \delta_i B(t, T_i)} - \frac{(B(t, T_0) - B(t, T_n))}{\left(\sum_{i=1}^n \delta_i B(t, T_i) \right)^2} \sum_{i=1}^n \delta_i dB(t, T_i) \right] + (\dots) dt$$

En utilisant les hypothèses faites sur la dynamique des taux zéro-coupons dans le cadre de H&W-1F, on obtient l'expression suivante (cf [1] pour plus de détails.) :

$$dS(t) = \frac{\sigma(t)}{\lambda} e^{\lambda t} S(t) \left(\frac{B(t, T_0) e^{-\lambda T_0} - B(t, T_n) e^{-\lambda T_n}}{B(t, T_0) - B(t, T_n)} - \frac{\sum_{i=1}^n \delta_i B(t, T_i) e^{-\lambda T_i}}{\sum_{i=1}^n \delta_i B(t, T_i)} \right) dW_t^Q + (\dots) dt \quad \text{pour } \lambda \neq 0$$

Afin de simplifier les écritures, on introduit une fonction g de telle sorte que :

$$dS(t) = \sigma(t) e^{\lambda t} g(t) S(t) dW_t^Q + (\dots) dt$$

Pour obtenir les approximations recherchées, on laisse le terme de drift de côté, puis on freeze l'expression de la fonction $g(t)$ en sa valeur initiale, i.e. $\forall t > 0, g(t) \approx g(0)$. On obtient alors la dynamique log-normale recherchée :

$$dS(t) = \sigma(t)e^{\lambda t}g(0)S(t)dW_t^Q$$

et la dynamique normale :

$$dS(t) = \sigma(t)e^{\lambda t}g(0)S(0)dW_t^Q$$

Remarque : dans le cas, où $\lambda = 0$, l'expression se simplifie et on obtient :

$$dS(t) = \sigma(t)S(t) \left(-\frac{B(t, T_0)T_0 - B(t, T_n)T_n}{B(t, T_0) - B(t, T_n)} + \frac{\sum_{i=1}^n \delta_i B(t, T_i)T_i}{\sum_{i=1}^n \delta_i B(t, T_i)} \right) dW_t^Q + (\dots) dt$$

Il en résulte l'approximation suivante :

$$dS(t) = \sigma(t)g(0)S(t)dW_t^Q$$

En comparaison avec le résultat précédent, on constate l'absence du terme $e^{\lambda t}$ et l'adaptation de l'expression entre parenthèses, i.e. une adaptation de la définition de la fonction g . Dans la suite de cette partie, nous ne considérerons que le cas $\lambda \neq 0$. Les équations peuvent néanmoins être adaptées au cas $\lambda = 0$.

2.1.3 Calibration par volatilité sur les swaptions diagonales

On utilise ici les volatilités implicites des taux de swap déduites des prix de marché des swaptions diagonales. Plus précisément, soit k le nombre de dates d'exercice $(T_j^e)_j$. On considère ici les k volatilités implicites $(\gamma_j^{imp})_j$ liées aux swaps, qui débutent en T_j^e et s'achèvent en T_n , dernière date de paiement de la swaption bermuda. Ces volatilités implicites sont des volatilités dites *normales*, i.e. elles sont associées à une approximation gaussienne de la dynamique d'un taux de swap. Dans le cas d'une calibration *vol ATM*, ces volatilités implicites sont les volatilités ATM, sinon il s'agit de la volatilité au strike équivalent K . Typiquement, cette volatilité au strike K est approchée par le modèle paramétrique SABR. On calcule ensuite les valeurs $(\sigma_j)_j$ en itérant sur les dates d'exercice de la swaption Bermuda. Pour la première itération,

$$\begin{aligned} (\gamma_1^{imp})^2 T_1^e &= \int_0^{T_1^e} S_1(0)^2 g_1(0)^2 \sigma_1^2 e^{2\lambda s} ds \\ \sigma_1 &= \frac{\gamma_1^{imp}}{|S_1(0)g_1(0)|} \sqrt{2\lambda T_1^e (e^{2\lambda T_1^e} - 1)} \end{aligned}$$

où $g_1(0)$ a été calculé en utilisant la courbe de taux actuelle et les valeurs des zéro-coupons s'échelonnant de $T_{n(1)}$, la date de fixing succédant immédiatement à la date d'exercice T_1^e , à T_n . $S_1(0)$ est le taux du swap débutant en T_1^e et s'achèvant en T_n . La formule donnée ci-dessus pour $g(t)$ doit donc être aménagée suivant la date d'exercice considérée. Pour les dates d'exercice suivantes, on s'appuie sur la relation suivante :

$$\begin{aligned} (\gamma_j^{imp})^2 T_j^e &= \int_0^{T_j^e} S_j(0)^2 g_j(0)^2 \sigma_j^2 e^{2\lambda s} ds \\ &= \sum_{i=1}^j S_j(0)^2 g_j(0)^2 \int_{T_{i-1}^e}^{T_i^e} \sigma_i^2 e^{2\lambda s} ds \\ \frac{(\gamma_j^{imp})^2 T_j^e}{S_j(0)^2 g_j(0)^2} &= \sum_{i=1}^{j-1} \sigma_i^2 \frac{e^{2\lambda T_i^e} - e^{2\lambda T_{i-1}^e}}{2\lambda} + \sigma_j^2 \frac{e^{2\lambda T_j^e} - e^{2\lambda T_{j-1}^e}}{2\lambda} \end{aligned}$$

$S_i(0)$ est le taux du swap débutant en T_i^e et s'achèvent en T_n . Ce taux de swap est évalué aujourd'hui. On aboutit donc à l'égalité :

$$\sigma_j^2 = \frac{2\lambda}{e^{2\lambda T_j^e} - e^{2\lambda T_{j-1}^e}} \left(\frac{(\gamma_j^{imp})^2 T_j^e}{S_j(0)^2 g_j(0)^2} - \sum_{i=1}^{j-1} \sigma_i^2 \frac{e^{2\lambda T_i^e} - e^{2\lambda T_{i-1}^e}}{2\lambda} \right)$$

Par bootstrapping, on obtient chacune des valeurs prises par σ .

2.2 Basket calibration

But de la basket calibration : proposer une stratégie de calibration appropriée pour des swaps annulables exotiques.

On cherche à retrouver ou à approcher une propriété observée pour le pricing de swaption bermuda à nominal constant avec un modèle calibré sur les swaptions diagonales de strike le strike de la swaption bermuda et dont les maturités correspondent aux dates d'exercice. On observe en effet que les différentes swaptions européennes sous-jacentes au produit multi-callable ont alors une valeur indépendante du modèle. Celui se contente de valoriser l'option de switch de la Bermuda.

Avec la basket calibration, on cherche à retrouver cette propriété pour des produits multi-callables, dont le sous-jacent est un swap plus complexe que dans le cas d'une swaption bermuda à nominal constant, en particulier dans le cadre de ce document pour des swaptions bermuda à nominal variable.

2.2.1 Présentation du cadre général

La basket calibration s'inscrit dans un contexte plus général que la calibration d'un modèle H&W-1F pour le pricing d'une swaption bermuda à nominal variable. Elle peut s'adapter à la calibration du modèle H&W-1F pour le pricing d'un produit multi-callable dont le swap sous-jacent est plus exotique qu'un swap à nominal variable. Elle se décompose alors en 2 étapes :

Etape 1 Trouver pour chaque date d'exercice du produit initial une swaption à nominal variable "équivalente", i.e. maturité égale, nominaux de la jambe fixe égaux, NPV des swaps sous-jacents égaux, sensibilités par rapport aux taux de swap égales. (cf [1] pour plus de détails sur cette étape.)

Etape 2 Calibrer le modèle sur les VNSwaptions équivalentes choisies pour chaque date d'exercice. On se base alors sur les données de marché disponibles pour chacun des taux de swap du panier associé à la VNSwaption, typiquement les volatilités implicites des taux de swap et leurs corrélations.

Dans le cas des swaptions Bermuda à nominal variable, la première étape est triviale dans la mesure où le swap sous-jacent est déjà un swap à nominal variable. La calibration débute donc directement à l'étape 2.

2.2.2 Basket Calibration sur les volatilités

Dans un premier temps, on calcule une approximation de la volatilité de marché des VNSwaptions européennes associées à chaque date d'exercice T_j^e . On se base sur l'analogie établie dans la section 1 entre une option sur un panier de taux de swap et une VNSwaption européenne et on calcule simplement la volatilité associée au panier de taux de swap à partir des volatilités de chacun d'eux, de leurs corrélations historiques et de la composition du panier.

Volatilité du panier de taux de swap associé à chacune des dates d'exercice.

Soit k le nombre de dates d'exercice $(T_j^e)_j$.

Soit ρ^j la matrice de corrélation des taux de swaps débutant à la date T_j^e et finissant en T_i avec T_i une date de paiement intervenant après l'entrée dans le swap en T_j^e .¹

Soit γ_{ji} la volatilité implicite du taux de swap débutant en T_j^e et s'achevant en T_i avec T_i une date de paiement intervenant après l'entrée dans le swap en T_j^e . Il s'agit de volatilités dites *normales*, i.e. associées à une approximation gaussienne de la dynamique d'un taux de swap.

Soit $n(j)$ l'index de la date de paiement qui succède immédiatement à la date d'exercice T_j^e .

On recherche la composition du panier de taux de swap en s'appuyant sur le lien entre le pricing des options sur panier de taux de swap et le pricing des VNSwaptions mis en évidence dans la section 1.

$$\forall j \in \{1..k\}, \forall i \in \{n(j)..n\}, \alpha_i^j(T_j^e) \triangleq \alpha_i^j(0) = \frac{(n - n(j) + 1)(N_i - N_{i+1})}{\sum_{p=n(j)}^n N_p} \frac{\left(\sum_{p=n(j)}^i \delta_p B(0, T_p) \right)}{lvl^j(0)}$$

où l'indice i parcourt l'ensemble des dates de paiement ultérieures à la date d'exercice T_j^e jusqu'à la dernière date de paiement, i.e. $T_{n(j)}...T_n$. On rappelle que $N_{n+1} = 0$. De plus,

$$lvl^j(0) \triangleq \sum_{p=n(j)}^n \delta_p \frac{(n - n(j) + 1)N_p}{\sum_{p=n(j)}^n N_p} B(0, T_p)$$

La volatilité marché de notre panier de taux de swap est alors reconstituée pour chaque date d'exercice :

$$\forall j \in \{1..k\}, \Sigma_j^2 = \sum_{i=n(j)}^n \sum_{p=n(j)}^n \alpha_i^j(0) \alpha_p^j(0) \gamma_{ji} \gamma_{jp} \rho_{ip}^j$$

C'est dans le choix des valeurs de γ_{ji} et γ_{jp} , que réside la différence entre une calibration à la monnaie et une calibration au strike équivalent.

- dans le cas à la monnaie, on choisit simplement γ_{ji} égal à la volatilité implicite de la swaption européenne de maturité T_j^e à la monnaie
- dans le cas du strike équivalent, on calcule tout d'abord : la volatilité à la monnaie du panier notée Σ_j^{ATM} :

$$\forall j \in \{1..k\}, (\Sigma_j^{ATM})^2 = \sum_{i=n(j)}^n \sum_{p=n(j)}^n \alpha_i^j(0) \alpha_p^j(0) \gamma_{ji}^{ATM} \gamma_{jp}^{ATM} \rho_{ip}^j$$

Cette valeur est utilisée pour approcher la moneyness du panier, i.e. nb_std définie comme suit :

$$nb_std \triangleq \frac{K - \sum_{i=n(j)}^n \alpha_i^j(0) S_i^j(0)}{\Sigma_j^{ATM} \sqrt{T_j^e}}$$

On suppose alors que la moneyness de chacune des swaptions qui servent à définir les volatilité implicites γ_{ji} est égale à la moneyness du panier, i.e. :

$$sign(\alpha_i) \times \frac{K_i^j - S_i^j(0)}{\gamma_{ji}^{ATM} \sqrt{T_j^e}} \stackrel{!}{=} nb_std$$

¹ On notera que la corrélation historique ρ_{ip}^j utilisée dans le cadre de cette calibration est forte mais elle n'est pas aussi élevée que la corrélation modèle H&W-1F, qui prévoit une corrélation de 100% entre deux taux de swap qui débutent à la même date mais s'achèvent à des dates différentes.

On peut alors en déduire la valeur du strike équivalent :

$$K_i^j = S_i^j(0) + \text{sign}(\alpha_i) \times nb_std \times \gamma_{ji}^{ATM} \sqrt{T_j^e}$$

On utilise ensuite ce strike K_i^j pour définir via le modèle SABR la volatilité γ_{ji} .

Remarque : ce procédé ne garantit pas de produire des strikes K_i^j strictement positifs. Sous certaines conditions, cette méthode de la moneyness produit des strikes K_i^j négatifs. On impose donc une valeur de strike minimale dans l'algorithme de calibration.

Calibration des valeurs prises par σ :

On procède par bootstrap comme précédemment dans le cas de la calibration sur la volatilité des swaptions diagonales. On utilise l'approximation gaussienne de la dynamique d'un taux de swap dans le cadre de H&W-1F pour approcher la dynamique du panier.

$$\forall t \in]T_{i-1}^e, T_i^e], \quad dY(t) = \sigma(t) e^{\lambda t} \left(\sum_{i=n(j)}^n \alpha_i^j(0) g_i^j(0) S_i^j(0) \right) dW_t^Q$$

où S_i^j est le taux de swap qui débute en T_j^e et s'achève en T_i , une des dates ultérieures de paiement, i.e. $T_{n(j)} \dots T_n$. La valeur du taux de swap est évalué en $t = 0$. On note que la constante $g_i^j(0)$ est bien spécifique à une date d'exercice et une date de fin de swap composant le panier. On en déduit que :

$$\begin{aligned} \forall j \in \{1..k\}, \Sigma_j^2 T_j^e &= \int_0^{T_j^e} \sigma(t)^2 e^{2\lambda s} \left(\sum_{i=n(j)}^n \alpha_i^j(0) g_i^j(0) S_i^j(0) \right)^2 ds \\ \forall j \in \{1..k\}, \Sigma_j^2 T_j^e &= \left(\sum_{i=n(j)}^n \alpha_i^j(0) g_i^j(0) S_i^j(0) \right)^2 \sum_{p=1}^j \int_{T_{p-1}^e}^{T_p^e} \sigma(t)^2 e^{2\lambda s} ds \\ \forall j \in \{1..k\}, \sigma_j^2 \frac{e^{2\lambda T_j^e} - e^{2\lambda T_{j-1}^e}}{2\lambda} &= \frac{\Sigma_j^2 T_j^e}{\left(\sum_{i=n(j)}^n \alpha_i^j(0) g_i^j(0) S_i^j(0) \right)^2} - \sum_{p=1}^{j-1} \sigma_p^2 \frac{e^{2\lambda T_p^e} - e^{2\lambda T_{p-1}^e}}{2\lambda} \end{aligned}$$

Résoudre cette dernière équation nous permet de fixer la valeur de σ_j . On initialise cette récurrence avec σ_1 calculé de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \Sigma_1^2 T_1^e &= \int_0^{T_1^e} \sigma(t)^2 e^{2\lambda s} \left(\sum_{i=n(1)}^n \alpha_i^1(0) g_i^1(0) S_i^1(0) \right)^2 ds \\ \Sigma_1^2 T_1^e &= \sigma_1^2 \left(\sum_{i=n(1)}^n \alpha_i^1(0) g_i^1(0) S_i^1(0) \right)^2 \frac{e^{2\lambda T_1^e} - 1}{2\lambda} \\ \sigma_1 &= \frac{\Sigma_1}{\left| \sum_{i=n(1)}^n \alpha_i^1(0) g_i^1(0) S_i^1(0) \right|} \sqrt{\frac{2\lambda T_1^e}{e^{2\lambda T_1^e} - 1}} \end{aligned}$$

Remarque : dans le cas d'une swaption Bermuda à nominal constant la basket calibration produit des coefficients $\alpha_i^j(0)$ tous nuls à l'exception de $\alpha_n^j(0)$. En effet, $N_i - N_{i+1} = 0$ pour $i < n$. Le panier n'est alors constitué que d'un seul taux de swap. En regardant plus en détails, on s'aperçoit que l'on retombe dans le cadre de la calibration sur les swaptions diagonales.

2.2.3 Une approche alternative pour la calibration au strike équivalent

La méthode de calibration décrite ci-dessus dans le cas de la basket calibration sur les volatilités au strike équivalent reste valable. Seule la façon de calculer les volatilités implicites γ_{ji} qui interviennent dans le calcul de la volatilité marché du panier, change. L'idée de départ consiste à approcher le prix de marché d'une swaption européenne à nominal variable par une combinaison linéaire de prix de swaptions européennes à nominal constant. D'après la formule établie plus haut, on a dans le cas d'une swaption payeuse :

$$VNSwaption(t) = N^*lv(t)\mathbb{E}_t^{Q^{lv}} \left[\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i(T_e)S_i(T_e) - K \right)^+ \right]$$

En freezeant les coefficients $\alpha_i(T_e)$ à la date du pricing, on obtient :

$$VNSwaption(t) \simeq N^*lv(t)\mathbb{E}_t^{Q^{lv}} \left[\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i S_i(T_e) - K \right)^+ \right]$$

Dans la mesure, où pour un nominal décroissant, les coefficients α_i sont tous positifs, on présente d'abord l'approche dans le cadre de nominaux décroissants pour ensuite l'adapter au cas général, notamment le cas de nominaux croissants.

Cas simple d'un nominal décroissant Soient $\{b_i\}_{i=1..n}$ tels que $\sum_{i=1}^n b_i = 1$

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i S_i(T_e) - K \right)^+ &= \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i S_i(T_e) - K \sum_{i=1}^n b_i \right)^+ \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \left(S_i(T_e) - \underbrace{K \frac{b_i}{\alpha_i}}_{\triangleq K_i} \right) \right)^+ \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Jensen et la convexité de la fonction $x \mapsto x^+$, on obtient :

$$\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i S_i(T_e) - K \right)^+ \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i (S_i(T_e) - K_i)^+$$

On en déduit que quelque soit le n-uplet $\{b_i\}_{i=1..n}$, on a :

$$\begin{aligned} N^*lv(t)\mathbb{E}_t^{Q^{lv}} \left[\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i S_i(T_e) - K \right)^+ \right] &\leq N^* \sum_{i=1}^n \alpha_i lv(t)\mathbb{E}_t^{Q^{lv}} \left[(S_i(T_e) - K_i)^+ \right] \\ &\leq N^* \sum_{i=1}^n \frac{N_i - N_{i+1}}{N^*} lv_i(t)\mathbb{E}_t^{Q^{lv_i}} \left[(S_i(T_e) - K_i)^+ \right] \\ VNSwaption(t) &\leq N^* \sum_{i=1}^n \frac{N_i - N_{i+1}}{N^*} PS(S_i, T_e, K_i)(t) \end{aligned}$$

L'idée consiste alors à minimiser la quantité $N^* \sum_{i=1}^n \frac{N_i - N_{i+1}}{N^*} PS(S_i, T_e, K_i)$ sous la contrainte d'égalité $\sum_{i=1}^n b_i = 1$, qui est équivalente à $\sum_{i=1}^n \alpha_i K_i = K$. On définit alors ce minimum comme approximation du prix de la

swaption.² Pour calculer le prix des swaptions à nominaux constants $PS(S_i, T_e, K_i)$, on utilise les données de marché à notre disposition. Typiquement, on a recours aux matrices SABR qui nous permettent d'incorporer la donnée du smile dans le prix de marché de la swaption à nominal variable et en bout de chaîne dans la calibration du modèle.

$$VNSwaption(t) \simeq N^* \min_{\substack{(K_1, \dots, K_n) \\ \sum_{i=1}^n \alpha_i K_i = K}} \left[\sum_{i=1}^n \frac{N_i - N_{i+1}}{N^*} PS(S_i, T_e, K_i)(t) \right]$$

Le calcul du prix de marché de la VNSwaption se ramène donc à un calcul d'optimisation sous une contrainte d'égalité.

Dans le cas d'une dynamique Black-Scholes des taux de swap :

On suppose que les taux de swaps $S_i(T_e)$ ont une dynamique log-normale, i.e. $dS_i(t) = \sigma_i S_i(t) dW_t^{lv_i}$. On montre que l'on peut trouver une formule fermée définissant de manière unique les strikes K_i . Ces valeurs pourront servir de point de départ à l'algorithme d'optimisation chargé de trouver la solution dans un contexte plus général, dans lequel on intègre les matrices SABR.

Dans un premier temps, on reformule le problème d'optimisation, afin de travailler avec une unique probabilité level :

$$\min_{\substack{(K_1, \dots, K_n) \\ \sum_{i=1}^n \alpha_i K_i = K}} \left[\sum_{i=1}^n \alpha_i lv_i(t) \mathbb{E}_t^{Q^{lv_i}} \left[(S_i(T_e) - K_i)^+ \right] \right]$$

On définit alors le Lagrangien $L_0 \triangleq \sum_{i=1}^n \alpha_i lv_i(t) \mathbb{E}_t^{Q^{lv_i}} \left[(S_i(T_e) - K_i)^+ \right] + \lambda \left(\sum_{i=1}^n K_i - K \right)$. On a :

$$L_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i lv_i(t) \int_{\max(K_i, 0)}^{\infty} (x_i - K_i) f_i(x_i) dx_i + \lambda \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i K_i - K \right)$$

où f_i est la densité de probabilité de S_i sous Q^{lv_i} . Au travers de l'hypothèse faite sur les α_i , il en résulte que cette densité de probabilité correspond aussi à la densité log-normale de S_i sous la probabilité Q^{lv_i} . La condition nécessaire et suffisante sur les K_i pour minimiser le lagrangien s'écrit de la façon suivante :

$$\forall i \in \{1..n\}, \frac{\partial L_0}{\partial K_i} = -\alpha_i \left(lv_i(t) \int_{\max(K_i, 0)}^{\infty} f_i(x_i) dx_i - \lambda \right) = 0$$

et

$$\frac{\partial L_0}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^n \alpha_i K_i - K = 0$$

Il est alors possible de montrer par l'absurde que $\forall i \in \{1..n\}, K_i \geq 0$. On peut ensuite exprimer chacun des K_i en fonction de K_1 .

$$\forall i \in \{2..n\}, K_i = S_i \left(\frac{K_1}{S_1} \right)^{\frac{\sigma_i}{\sigma_1}} \exp \left[\frac{1}{2} \sigma_i T_e (\sigma_1 - \sigma_i) \right]$$

Ainsi, une solution du problème d'optimisation sous l'hypothèse d'une dynamique log-normale des taux de swap est obtenue en résolvant le système :

$$\forall i \in \{2..n\}, K_i = S_i \left(\frac{K_1}{S_1} \right)^{\frac{\sigma_i}{\sigma_1}} \exp \left[\frac{1}{2} \sigma_i T_e (\sigma_1 - \sigma_i) \right]$$

² La validité de l'hypothèse faite en égalisant le minimum avec le prix de la VNSwaption, i.e. le fait que le minimum atteint soit une bonne approximation du prix de la swaption, sera discutée plus tard au sein de la section consacrée aux tests numériques.

et

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i K_i = K$$

Comme les K_i sont des fonctions strictement croissantes de K_1 avec $K_i(K_1 = 0) = 0$ et $K_i(K_1 \rightarrow \infty) = \infty$, on en déduit qu'il existe pour tout $K > 0$, un unique n-uplet de strike K_i solution du système.

Cas général : les coefficients α_i ne sont pas forcément positifs On procède de façon analogue au cas décrit plus haut en prenant des précautions pour le signe de α_i :

$$\begin{aligned} VNSwaption(t) &= N^*lv(t)\mathbb{E}_t^{Q^{lv}} \left[\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i S_i(T_e) - K \right)^+ \right] \\ &= N^*lv(t)\mathbb{E}_t^{Q^{lv}} \left[\left(\sum_{i=1}^n |\alpha_i| \text{sign}(\alpha_i) S_i(T_e) - K \sum_{i=1}^n b_i \right)^+ \right] \end{aligned}$$

avec $\sum_{i=1}^n b_i = 1$. On pose en plus $\text{sign}(b_i) = \text{sign}(\alpha_i)$:

$$\begin{aligned} VNSwaption(t) &= N^*lv(t)\mathbb{E}_t^{Q^{lv}} \left[\left(\sum_{i=1}^n |\alpha_i| \text{sign}(\alpha_i) \left(S_i(T_e) - K \underbrace{\frac{|b_i|}{|\alpha_i|}}_{\triangleq K_i} \right) \right)^+ \right] \\ &\leq N^*lv(t) \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \mathbb{E}_t^{Q^{lv}} \left[(\text{sign}(\alpha_i) (S_i(T_e) - K_i))^+ \right] \\ &\leq N^* \left(\sum_{\substack{i=1 \\ \alpha_i > 0}}^n \frac{|N_i - N_{i+1}|}{N^*} PS(S_i, T_e, K_i) + \sum_{\substack{i=1 \\ \alpha_i < 0}}^n \frac{|N_i - N_{i+1}|}{N^*} RS(S_i, T_e, K_i) \right) \end{aligned}$$

avec $\sum_{i=1}^n \alpha_i K_i = K$. On va donc dans ce cas approcher le prix de marché d'une VNSwaption par :

$$VNSwaption(t) \simeq \min_{\substack{(K_1, \dots, K_n) \\ \sum_{i=1}^n \alpha_i K_i = K}} N^* \left(\sum_{\substack{i=1 \\ \alpha_i > 0}}^n \frac{|N_i - N_{i+1}|}{N^*} PS(S_i, T_e, K_i) + \sum_{\substack{i=1 \\ \alpha_i < 0}}^n \frac{|N_i - N_{i+1}|}{N^*} RS(S_i, T_e, K_i) \right)$$

Dans le cas, où le nominal est croissant, on a seulement un coefficient α_i positif, celui d'index $i = n$.

$$VNSwaption(t) \simeq \min_{\substack{(K_1, \dots, K_n) \\ \sum_{i=1}^n \alpha_i K_i = K}} N^* \left(\frac{N_n}{N^*} PS(S_n, T_e, K_n) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{N_{i+1} - N_i}{N^*} RS(S_i, T_e, K_i) \right)$$

Dans le cas d'une dynamique Black-Scholes des taux de swap :

On s'intéresse aussi au cas, où la dynamique des taux de swap est log-normale. Le problème reformulé pour définir le lagrangien prend alors la forme suivante :

$$\min_{\substack{(K_1, \dots, K_n) \\ \sum_{i=1}^n \alpha_i K_i = K}} N^* l v l(t) \left(\sum_{\substack{i=1 \\ \alpha_i > 0}}^n |\alpha_i| \mathbb{E}_t^{Q^{l v l}} \left[(S_i(T_e) - K_i)^+ \right] + \sum_{\substack{i=1 \\ \alpha_i < 0}}^n |\alpha_i| \mathbb{E}_t^{Q^{l v l}} \left[(K_i - S_i(T_e))^+ \right] \right)$$

On introduit alors le lagrangien L_0 :

$$L_0 \triangleq N^* l v l(t) \left(\sum_{\substack{i=1 \\ \alpha_i > 0}}^n |\alpha_i| \mathbb{E}_t^{Q^{l v l}} \left[(S_i(T_e) - K_i)^+ \right] + \sum_{\substack{i=1 \\ \alpha_i < 0}}^n |\alpha_i| \mathbb{E}_t^{Q^{l v l}} \left[(K_i - S_i(T_e))^+ \right] \right) + \lambda \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i K_i - K \right)$$

La condition nécessaire et suffisante sur les K_i pour minimiser le lagrangien s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} \forall i \in \{1..n\} / \alpha_i > 0, \frac{\partial L_0}{\partial K_i} &= - \left(|\alpha_i| l v l(t) \int_{\max(k_i, 0)}^{\infty} f_i(x_i) dx_i - \lambda \alpha_i \right) = 0 \\ \forall i \in \{1..n\} / \alpha_i < 0, \frac{\partial L_0}{\partial K_i} &= |\alpha_i| l v l(t) \int_0^{\max(k_i, 0)} f_i(x_i) dx_i + \lambda \alpha_i = 0 \end{aligned}$$

et

$$\frac{\partial L_0}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^n \alpha_i K_i - K = 0$$

On montre par l'absurde qu'aucun des K_i ne peut être strictement négatif. On peut ensuite ré-écrire les égalités ci-dessus.

$$\begin{aligned} \forall i \in \{1..n\} / \alpha_i > 0, \frac{|\alpha_i|}{\alpha_i} l v l(t) \Phi(d_2(S_i, K_i)) - \lambda &= 0 \\ \forall i \in \{1..n\} / \alpha_i < 0, \frac{|\alpha_i|}{\alpha_i} l v l(t) (1 - \Phi(d_2(S_i, K_i))) + \lambda &= 0 \end{aligned}$$

où Φ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire normale centrée réduite. d_2 est défini comme le coefficient habituellement utilisé dans la formule de Black-Scholes.

$$\begin{aligned} \forall i \in \{1..n\} / \alpha_i > 0, l v l(t) \Phi(d_2(S_i, K_i)) - \lambda &= 0 \\ \forall i \in \{1..n\} / \alpha_i < 0, l v l(t) \Phi(-d_2(S_i, K_i)) - \lambda &= 0 \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} \forall i \in \{1..n\} / \alpha_i > 0, \forall j \in \{1..n\} / \alpha_j > 0, d_2(S_i, K_i) &= d_2(S_j, K_j) \\ \forall i \in \{1..n\} / \alpha_i > 0, \forall j \in \{1..n\} / \alpha_j < 0, d_2(S_i, K_i) &= -d_2(S_j, K_j) \\ \forall i \in \{1..n\} / \alpha_i < 0, \forall j \in \{1..n\} / \alpha_j < 0, d_2(S_i, K_i) &= d_2(S_j, K_j) \end{aligned}$$

Dans le cas particulier d'un nominal croissant, on choisit d'utiliser le fait qu'un unique coefficient α_n soit positif. On exprime tous les K_i en fonction de K_n . Le minimum est alors atteint pour un n-uplet (K_1, \dots, K_n) vérifiant :

$$K_i = S_i \left(\frac{S_n}{K_n} \right)^{\frac{\sigma_i}{\sigma_n}} \exp \left(-\frac{1}{2} \sigma_i T_e (\sigma_n + \sigma_i) \right)$$

et

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i K_i = \sum_{i=1}^{n-1} -|\alpha_i| K_i + |\alpha_n| K_n = K$$

Les strikes K_i sont des fonctions strictement décroissantes de K_n . $K_i(K_n = 0) = \infty$ et $K_i(K_n = \infty) = 0$ impliquent, qu'il existe un unique minimum à notre problème d'optimisation sous contrainte simplifié par l'hypothèse de dynamique Black-Scholes des taux de swap.

On se propose maintenant d'utiliser, à la place de la méthode de moneyness, les strikes résultant du calcul d'optimisation, afin de calculer via le modèle SABR la volatilité de chacun des taux de swap incorporée dans le calcul de la volatilité du panier.

2.2.4 Basket calibration sur les prix

La méthode proposée ci-dessus pour le calcul des strikes pris en compte dans le calcul de la volatilité des taux de swap du panier suggère la définition d'une basket calibration sur les prix. En effet, la résolution du problème d'optimisation produit non seulement un vecteur de strike mais aussi un prix de marché approchée pour la VNSwaption européenne. Pour exploiter ce prix, une première approche consiste à définir la volatilité implicite associée en approchant la dynamique du panier par une dynamique gaussienne, i.e. on inverse une formule de pricing d'option valable dans le cas d'une dynamique gaussienne. On utilise alors cette volatilité implicite comme volatilité de marché de notre panier et on poursuit la calibration avec les mêmes étapes que décrites précédemment.

Une deuxième approche consiste à proposer une formule fermée pour le prix d'une VNSwaption européenne dans le cadre de HW-1F. Ne disposant pas de cette formule dans le cas général, nous commençons donc par proposer une formule fermée dans le cas d'une évolution linéaire du nominal (croissante ou décroissante). Cette formule est en particulier valable dans le cas d'une swaption zéro-coupon. On peut ensuite à l'aide de cette formule définir une calibration sur les prix sur le modèle de ce qui est fait dans le cas d'une calibration sur les prix des swaptions diagonales.

Pricing d'une swaption européenne à nominal variable dans le cadre de H&W-1F En s'inspirant de la méthode employée dans le calcul de la formule fermée d'une swaption européenne à nominal constant, on essaie de trouver une formule fermée pour le prix des swaptions européennes à nominal variable. Soit T_e la date d'exercice de la swaption.

$$\begin{aligned}
VNSwap(T_e) &= \sum_{i=1}^n \delta_i N_i L(T_e, T_{i-1}, T_i) B(T_e, T_i) - \sum_{i=1}^n \delta_i N_i K B(T_e, T_i) \\
&= N^* \left[\sum_{i=1}^n \frac{N_i}{N^*} (B(T_e, T_{i-1}) - B(T_e, T_i)) - K \sum_{i=1}^n \delta_i \frac{N_i}{N^*} B(T_e, T_i) \right] \\
&= N^* \left[\sum_{i=1}^n \frac{(N_i - N_{i+1})}{N^*} (B(T_e, T_0) - B(T_e, T_i)) - K \sum_{i=1}^n \delta_i \frac{N_i}{N^*} B(T_e, T_i) \right] \\
&= N^* \left[\sum_{i=1}^n \frac{(N_i - N_{i+1})}{N^*} B(T_e, T_0) - \sum_{i=1}^n \frac{(N_i - N_{i+1})}{N^*} B(T_e, T_i) - K \sum_{i=1}^n \delta_i \frac{N_i}{N^*} B(T_e, T_i) \right] \\
&= N^* \left[\sum_{i=1}^n \frac{(N_i - N_{i+1})}{N^*} B(T_e, T_0) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{N_i - N_{i+1}}{N^*} + K \delta_i \frac{N_i}{N^*} \right) B(T_e, T_i) \right]
\end{aligned}$$

On pose $K^* \triangleq \sum_{i=1}^n \frac{(N_i - N_{i+1})}{N^*} = \frac{N_1}{N^*}$ et $c_i \triangleq \frac{N_i - N_{i+1}}{N^*} + K \delta_i \frac{N_i}{N^*}$. Le payoff devient alors :

$$VNSwap(T_e) = N^* B(T_e, T_0) \left[K^* - \sum_{i=1}^n c_i \frac{B(T_e, T_i)}{B(T_e, T_0)} \right]$$

On impose la condition suivante $\forall i, c_i \geq 0$, soit $\frac{N_i - N_{i+1}}{N^*} + K\delta_i \frac{N_i}{N^*} \geq 0$

$$\begin{aligned} c_i &\geq 0 \iff \frac{N_i - N_{i+1}}{N^*} + K\delta_i \frac{N_i}{N^*} \geq 0 \\ c_i &\geq 0 \iff N_i - N_{i+1}K\delta_i N_i \geq 0 \\ c_i &\geq 0 \iff N_i(1 + K\delta_i) \geq N_{i+1} \end{aligned}$$

Cette condition correspond donc à une contrainte sur la croissance du nominal. Si celui-ci est amorti linéairement, i.e. $N_i = N_0(1 + m)^{i-1}$, cette contrainte correspond à $K\delta_i \geq m$. Il est alors évident que pour un nominal strictement décroissant, cette condition se vérifie toujours.

On reconnaît la formule du prix d'une put option sur obligation modifiée. Comme $c_i \geq 0$, la fonction $x \mapsto \sum_{i=1}^n c_i \frac{g_{T_e, T_i}(x)}{g_{T_e, T_0}(x)}$ est strictement monotone et il existe un unique antécédent x^* tel que $\sum_{i=1}^n c_i \frac{g_{T_e, T_i}(x^*)}{g_{T_e, T_0}(x^*)} = K^*$. On pose $K_i^* \triangleq \frac{g_{T_e, T_i}(x^*)}{g_{T_e, T_0}(x^*)}$. On trouve alors :

$$\begin{aligned} VNSwaption(t) &= N^* B(t, T_0) \mathbb{E}_t^{Q^{T_0}} \left[\left(K^* - \sum_{i=1}^n c_i \frac{B(T_e, T_i)}{B(T_e, T_0)} \right)^+ \right] \\ &= N^* B(t, T_0) \mathbb{E}_t^{Q^{T_0}} \left[\left(\sum_{i=1}^n c_i K_i^* - \sum_{i=1}^n c_i \frac{B(T_e, T_i)}{B(T_e, T_0)} \right)^+ \right] \\ &= N^* B(t, T_0) \mathbb{E}_t^{Q^{T_0}} \left[\left(\sum_{i=1}^n c_i \left(K_i^* - \frac{B(T_e, T_i)}{B(T_e, T_0)} \right) \right)^+ \right] \end{aligned}$$

En utilisant le fait que chacune des options sur obligations $K_i^* - \frac{B(T_e, T_i)}{B(T_e, T_0)}$ aie le même domaine d'exercice, i.e. $\{X_{T_e} < x^*\}$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} VNSwaption(t) &= N^* \sum_{i=1}^n c_i B(t, T_0) \mathbb{E}_t^{Q^{T_0}} \left[\left(K_i^* - \frac{B(T_e, T_i)}{B(T_e, T_0)} \right)^+ \right] \\ \Gamma(t, T_i) - \Gamma(t, T_e) &= \frac{\sigma(t)}{\lambda} \exp(-\lambda(T_e - t)) [\exp(-\lambda(T_i - t)) - 1] \end{aligned}$$

La volatilité Black-Scholes équivalente est donnée par :

$$(\sigma_i^*)^2 T_e = \int_0^{T_e} |\Gamma(t, T_i) - \Gamma(t, T_0)|^2 dt = \left(\frac{\exp(-\lambda(T_0 - T_e)) - \exp(-\lambda(T_i - T_e))}{\lambda} \right)^2 \phi(T_e)$$

On en conclut que si la condition $N_i(1 + K\delta_i) \geq N_{i+1}$ est remplie, le prix d'une VNSwaption européenne payeuse dans le cadre du modèle HW-1F est donnée par la formule fermée suivante :

$$VNSwaption(0) = N^* \sum_{i=1}^n c_i BS_Put \left(\frac{B(0, T_i)}{B(0, T_0)}, \sigma_i^*, K_i^*, T_e \right)$$

Le cas d'une VNSwaption européenne receveuse peut être traitée de façon analogue. La contrainte sur les coefficients c_i est identique au cas des swaptions payeuses.

Remarque : la condition inverse à celle imposée précédemment, i.e. $\forall i, c_i \triangleq \frac{N_i - N_{i+1}}{N^*} + K\delta_i \frac{N_i}{N^*} < 0$, soit sous une forme équivalente $(1 + K\delta_i) < \frac{N_{i+1}}{N_i}$, amènerait une simplification de l'expression du prix de la swaption. Toutefois, **cette condition sur les coefficients c_i n'est jamais réalisée**. En effet, dans toutes

les configurations possibles, le coefficient $c_n = \frac{N_n - N_{n+1}}{N^*} + K\delta_n \frac{N_n}{N^*} = \frac{N_n}{N^*} + K\delta_n \frac{N_n}{N^*}$ est toujours strictement positif.

En se basant sur une approche similaire, on peut obtenir une expression explicite du prix d'une swaption à nominal croissant dans le cadre du modèle H&W-1F sous la condition complémentaire à la condition obtenue ci-dessus : $N_i(1 + K\delta_i) \leq N_{i+1}$. On prend comme point de départ l'expression du payoff à la date d'exercice T_e :

$$VNSwap(T_e) = N^* \left[\sum_{i=1}^n \frac{N_i}{N^*} (B(T_e, T_{i-1}) - B(T_e, T_i)) - K \sum_{i=1}^n \delta_i \frac{N_i}{N^*} B(T_e, T_i) \right]$$

On développe tout d'abord le premier terme afin de faire apparaître les différences $N_{i+1} - N_i$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{N_i}{N^*} (B(T_e, T_{i-1}) - B(T_e, T_i)) &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{N_i}{N^*} (B(T_e, T_{i-1}) - B(T_e, T_i)) + \frac{N_n}{N^*} (B(T_e, T_{n-1}) - B(T_e, T_n)) \\ &= \sum_{i=0}^{n-2} \frac{N_{i+1}}{N^*} B(T_e, T_i) - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{N_i}{N^*} B(T_e, T_i) + \frac{N_n}{N^*} (B(T_e, T_{n-1}) - B(T_e, T_n)) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{N_{i+1} - N_i}{N^*} B(T_e, T_i) - \frac{N_n}{N^*} B(T_e, T_n) \end{aligned}$$

avec par convention $N_0 \triangleq 0$. On en déduit que :

$$\begin{aligned} VNSwap(T_e) &= N^* \left[\sum_{i=0}^{n-1} \frac{N_{i+1} - N_i}{N^*} B(T_e, T_i) - \frac{N_n}{N^*} B(T_e, T_n) - K \sum_{i=0}^n \delta_i \frac{N_i}{N^*} B(T_e, T_i) \right] \\ &= N^* \left[\sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{N_{i+1} - N_i}{N^*} - K\delta_i \frac{N_i}{N^*} \right) B(T_e, T_i) - \frac{N_n}{N^*} B(T_e, T_n) - K\delta_n \frac{N_n}{N^*} B(T_e, T_n) \right] \\ &= N^* \left[\sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{N_{i+1} - N_i}{N^*} - K\delta_i \frac{N_i}{N^*} \right) B(T_e, T_i) - \left(\frac{N_n}{N^*} + K\delta_n \frac{N_n}{N^*} \right) B(T_e, T_n) \right] \\ &= B(T_e, T_n) N^* \left[\sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{N_{i+1} - N_i}{N^*} - K\delta_i \frac{N_i}{N^*} \right) \frac{B(T_e, T_i)}{B(T_e, T_n)} - \left(\frac{N_n}{N^*} + K\delta_n \frac{N_n}{N^*} \right) \right] \end{aligned}$$

On pose $c_i \triangleq \frac{N_{i+1} - N_i}{N^*} - K\delta_i \frac{N_i}{N^*}$ et $K^* \triangleq \frac{N_n}{N^*} + K\delta_n \frac{N_n}{N^*} \geq 0$. L'idée est de travailler sous l'hypothèse de coefficients $c_i \geq 0$.

$$\begin{aligned} c_i &\geq 0 \iff \frac{N_{i+1} - N_i}{N^*} - K\delta_i \frac{N_i}{N^*} \geq 0 \\ c_i &\geq 0 \iff N_{i+1} \geq (1 + K\delta_i) N_i \end{aligned}$$

Cette condition correspond dans le cas d'une croissance linéaire du nominal, i.e. $N_i = N_0(1 + m)^{i-1}$, à $m \geq K\delta_i$. On en conclut alors que le prix de la VNSwaption est donné par :

$$VNSwaption(t) = N^* B(t, T_n) \mathbb{E}_t^{Q^{T_n}} \left[\left(\sum_{i=0}^{n-1} c_i \frac{B(T_e, T_i)}{B(T_e, T_n)} - K^* \right)^+ \right]$$

Comme précédemment, on s'appuie sur la monotonie de la fonction $x \mapsto \sum_{i=1}^n c_i \frac{g_{T_e, T_i}(x)}{g_{T_e, T_n}(x)}$, pour introduire x^*

tel que $\sum_{i=1}^n c_i \frac{g_{T_e, T_i}(x^*)}{g_{T_e, T_n}(x^*)} = K^*$ et les strikes $K_i^* \triangleq \frac{g_{T_e, T_i}(x^*)}{g_{T_e, T_n}(x^*)}$.

$$VNSwaption(t) = N^* \sum_{i=0}^{n-1} c_i B(t, T_n) \mathbb{E}_t^{Q^{T_n}} \left[\left(\frac{B(T_e, T_i)}{B(T_e, T_n)} - K_i^* \right)^+ \right]$$

Sous la probabilité Q^{T_n} , $\frac{B(., T_i)}{B(., T_n)}$ a une dynamique log-normale. La volatilité Black-Scholes équivalente est donnée par :

$$\begin{aligned} (\sigma_i^*)^2 T_e &= \int_0^{T_e} |\Gamma(t, T_i) - \Gamma(t, T_n)|^2 dt \\ &= \left(\frac{\exp(-\lambda(T_n - T_e)) - \exp(-\lambda(T_i - T_e))}{\lambda} \right)^2 \phi(T_e) \end{aligned}$$

Au final, on en conclut que, si la condition de croissance $N_{i+1} \geq (1 + K\delta_i) N_i$, on peut écrire :

$$VNSwaption(0) = N^* \sum_{i=0}^{n-1} c_i BS_Call \left(\frac{B(0, T_i)}{B(0, T_n)}, \sigma_i^*, K_i^*, T_e \right)$$

Algorithme de calibration par les prix sur un panier de taux de swap On suppose que l'une des conditions nécessaires à l'existence d'une formule fermée pour chaque VNSwaption européenne naturellement associée à la swaption bermuda considérée, est satisfaite, i.e.

$$\forall i \in \{1..n-1\}, \quad N_i (1 + K\delta_i) \geq N_{i+1} \quad \text{ou} \quad \forall i \in \{1..n-1\}, \quad N_i (1 + K\delta_i) \leq N_{i+1}$$

Dans le cas d'un amortissement linéaire ou d'une swaption Bermuda zéro-coupon, cette hypothèse est vérifiée. Soient $(T_j^e)_j$ les différentes dates d'exercice de la swaption Bermuda à nominal variable. On suppose que les valeurs $\phi(T_{j-1}^e)$ et σ_{j-1} sont connues, on cherche la valeur de $\phi(T_j^e)$. On rappelle que le paramètre de mean reversion λ est fixé. L'algorithme est décrit dans le cas, où la condition

$$\forall i \in \{1..n-1\}, \quad N_i (1 + K\delta_i) \geq N_{i+1}$$

est satisfaite.

1. Calcul du prix de la VNSwaption européenne associée à la date T_j^e par la résolution du problème d'optimisation sous contrainte.³
2. Calcul de la valeur de $\phi(T_j^e)$ en utilisant la formule fermée du prix d'une swaption européenne à nominal variable.

$$VNSwaption(0) = N_j^* \sum_{i=n(j)}^n c_i BS_Put \left(\frac{B(0, T_i)}{B(0, T_j^e)}, \sigma_{ji}^*, K_{ji}^*, T_j^e \right)$$

- (a) Calcul de la valeur x_j^* telle que $\sum_{i=n(j)}^n c_i g_{T_j^e, T_i}(x^*) = K_j^*$ par un algorithme de type Newton-Raphson.
- (b) On en déduit les strikes $K_{ji}^* \triangleq g_{T_j^e, T_i}(x_j^*)$.

³Ce problème d'optimisation peut être résolu via une méthode du gradient projeté. Toutefois, on note que la forme de la quantité à optimiser permet de facilement paralléliser le problème. Une méthode dite "dual decomposition method" ou toute autre méthode exploitant cette propriété pourra donc être utilisée pour la résolution de ce problème d'optimisation.

- (c) En remarquant que la dépendance du prix de la swaption en σ_{ji}^* est en fait une simple dépendance en $\phi(T_j^e)$,

$$\sigma_{ji}^* \triangleq \beta(T_j^e, T_i) \sqrt{\frac{\phi(T_j^e)}{T_j^e}}$$

on utilise un algorithme de type Newton-Raphson pour déduire du prix de marché de la swaption $VNSwaption(0)$ la valeur de $\phi(T_j^e)$.

3. Enfin, on retrouve la valeur de σ_j en utilisant la définition de $\phi(T_j^e)$:

$$\begin{aligned} \phi(T_j^e) &= \int_0^{T_j^e} \sigma^2(s) e^{-2\lambda(T_j^e-s)} ds = \int_{T_{j-1}^e}^{T_j^e} \sigma_j^2 e^{-2\lambda(T_j^e-s)} ds + \int_0^{T_{j-1}^e} \sigma^2(s) e^{-2\lambda(T_j^e-s)} ds \\ \phi(T_j^e) &= \sigma_j^2 \frac{1 - e^{2\lambda(T_{j-1}^e - T_j^e)}}{2\lambda} + e^{-2\lambda(T_j^e - T_{j-1}^e)} \phi(T_{j-1}^e) \end{aligned}$$

Il en résulte :

$$\sigma_j = \sqrt{\frac{2\lambda \left(\phi(T_j^e) - e^{-2\lambda(T_j^e - T_{j-1}^e)} \phi(T_{j-1}^e) \right)}{1 - e^{2\lambda(T_{j-1}^e - T_j^e)}}$$

On initialise ces itérations en utilisant le fait que pour la première date d'exercice T_1^e et le calcul de $\phi(T_1^e)$, on a $\phi(T_0^e) = \phi(0) = 0$.

3 Tests numériques

On présente ici une série de tests illustrant les points théoriques évoqués dans la section 2. On souligne que dans l'ensemble de nos tests,

- la courbe de taux des zéro-coupons est obtenue par interpolation cubique différentiable des taux zéro-coupons donnés dans la spreadsheet.
- le paramètre de mean reversion λ est fixé par l'utilisateur dans la spreadsheet et non calibré à partir de données de marché.
- lorsqu'il est fait référence à un prix calculé sur la base d'un modèle H&W-1F et d'un pricing par arbre, il s'agit très exactement d'un arbre trinomial recombinaison à 1 dimension, dont on a tronqué l'expansion, afin d'en optimiser la vitesse de calcul. Sauf si spécifié autrement le nombre de pas de temps pris en compte est de 500.

3.1 Influence de la mean reversion

3.1.1 Volatilité forward

On cherche ici à mettre en évidence l'influence du paramètre de mean reversion λ sur la volatilité forward. On s'intéresse en particulier aux volatilités forward 1Y. Pour cela, on considère la calibration sur la volatilité ATM des swaptions diagonales associées à une swaption bermuda à nominal constant de maturité $T_0 = 3$ ans et de tenor $T_n - T_0 = 7$ ans. La fréquence de paiement du swap est annuelle. La courbe de taux utilisée est celle de l'Euribor au 12/03/2008. Les volatilités implicites ATM utilisées pour le test sont données ci-dessous :

Swaption	Volatilité implicite
T0 -> T7	0.6562%
T1 -> T7	0.6441%
T2 -> T7	0.6353%
T3 -> T7	0.6366%
T4 -> T7	0.6335%
T5 -> T7	0.6344%
T6 -> T7	0.6291%

Test : pour différentes valeurs de la mean reversion λ , on calibre la volatilité instantanée σ continue par morceaux. Chaque morceau correspond à une durée de 1 an. On cherche ensuite à évaluer la volatilité forward 1Y à chacune des dates d'exercice de la swaption bermuda notée γ_j^* définie grâce à l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} (\gamma_j^*)^2 (T_j^e - T_{j-1}^e) &= \int_{T_{j-1}^e}^{T_j^e} \gamma(t, T_j^e)^2 dt = \int_{T_{j-1}^e}^{T_j^e} \gamma(t, T_j^e)^2 dt = \int_{T_{j-1}^e}^{T_j^e} (\sigma_t^\lambda)^2 e^{-2\lambda(T_j^e - t)} dt \\ &= \frac{(\sigma_j^\lambda)^2}{2\lambda} \left(1 - e^{-2\lambda(T_j^e - T_{j-1}^e)}\right) \end{aligned}$$

Cette expression peut se simplifier :

$$\gamma_j^* = \sigma_j^\lambda \sqrt{\frac{\left(1 - e^{-2\lambda(T_j^e - T_{j-1}^e)}\right)}{2\lambda(T_j^e - T_{j-1}^e)}}$$

Résultats : on représente les valeurs obtenues pour différentes valeurs de λ .

Lambda	1.0%	2.0%	3.0%	4.0%	5.0%	6.0%	7.0%	8.0%	9.0%	10.0%
T1 -> T2	0.60%	0.63%	0.66%	0.69%	0.73%	0.76%	0.79%	0.83%	0.86%	0.90%
T2 -> T3	0.59%	0.62%	0.65%	0.68%	0.71%	0.75%	0.78%	0.81%	0.85%	0.88%
T3 -> T4	0.64%	0.66%	0.69%	0.72%	0.75%	0.78%	0.81%	0.85%	0.88%	0.91%
T4 -> T5	0.61%	0.64%	0.67%	0.69%	0.72%	0.75%	0.78%	0.81%	0.84%	0.87%
T5 -> T6	0.63%	0.66%	0.69%	0.71%	0.74%	0.77%	0.79%	0.82%	0.85%	0.87%
T6 -> T7	0.58%	0.61%	0.64%	0.67%	0.69%	0.72%	0.74%	0.77%	0.79%	0.81%

Conclusion : on constate que sur de l'échantillon de test, la volatilité forward 1Y croît en fonction de la mean reversion λ .

3.1.2 Most expensive swaption et option switch

On considère de nouveau une swaption Bermuda à nominal constant et les swaptions diagonales qui lui sont associées. Indépendamment du modèle choisi, sa valeur vérifie :

$$\text{Most expensive Swaption} \leq \text{Swaption Bermuda} \leq \text{Cap}$$

La valeur de la swaption Bermuda peut alors être décomposée alors en deux termes :

$$\text{Swaption Bermuda} = \text{Most expensive swaption} + \text{Option Switch}$$

Le terme *Most expensive swaption* correspond à la valeur de la swaption la plus chère à la date du pricing. Si le modèle est correctement calibré sur les swaptions diagonales. La valeur de cette swaption ne dépend pas du modèle. Elle est notamment indépendante de la valeur donnée au paramètre de mean reversion λ .

L'*option switch* correspond à la valeur du droit de ne pas choisir cette swaption la plus chère et d'opter à une date ultérieure pour une autre swaption. On comprend intuitivement que la valeur de l'option switch dépend directement de l'estimation des volatilités forward débutant à la maturité de la swaption la plus chère, i.e. la valeur de l'option switch croît en fonction des volatilités forward.

Le test précédent a montré que lorsque λ croît, les volatilités forward croissent. On en conclut que l'option switch est une fonction croissante du paramètre de mean reversion, ce qui implique que la valeur de la swaption Bermuda est une fonction croissante du paramètre de mean reversion.

Conclusion : la valeur de l'option switch croît avec le paramètre exotique de mean reversion λ . Ainsi, la valeur de la swaption Bermuda à nominal constant calibré sur les swaptions diagonales croît avec le paramètre de mean reversion λ .

Pour illustrer cette conclusion, on cherche maintenant à illustrer l'influence du paramètre de mean reversion λ sur la date d'exercice optimal d'une swaption Bermuda à nominal constant, i.e. la date d'exercice de la *most expensive swaption*.

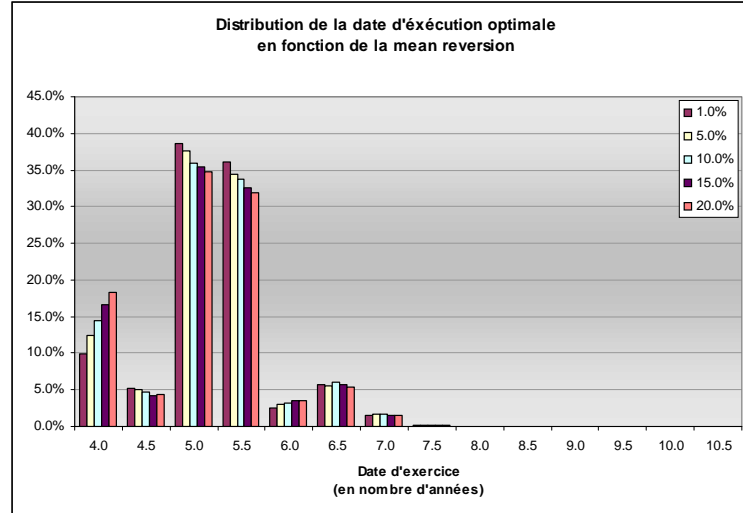
Test : pour différentes valeurs de mean reversion, on calibre la volatilité instantanée sur les swaptions diagonales, puis on price la swaption bermuda et chacune des swaptions diagonales associées. On peut alors identifier la date d'exercice de la *most expensive swaption*. Comme le pricing de ces swaptions européennes en tant qu'instruments de calibration est indépendant de λ , la date d'exercice optimal calculé en $t = 0$, est indépendante de la valeur prise par λ .

Dans un deuxième temps, on se place à une date future $t = T_0$ et pour différents scénarii, i.e. différentes réalisations de la variable d'état X_t , on price la swaption Bermuda à nominal constant et l'ensemble des swaptions diagonales sous-jacentes. On détermine à nouveau la date d'exercice optimal. On s'attache alors à déterminer la probabilité pour chaque date d'exercice de correspondre à la date d'exercice optimal. Pour ce deuxième pricing, on souligne que le modèle n'est pas recalibré.

Résultats : le swap sous-jacent débute en $t = 4 \text{ ans}$, et s'achève en $t = 11 \text{ ans}$. Sa périodicité est semi-annuelle. Le strike est fixé à 4.50%. A chaque date de fixing, le détenteur de la swaption bermuda payeuse a le droit d'entrer dans le swap. Les volatilités implicites utilisées pour la calibration et la courbe de taux sont reprises dans les tableaux 4.1 et 4.2 en annexe. Le tableau suivant récapitule les probabilités pour chaque date d'exercice de la Bermuda d'être la date d'exercice optimal.

Strike	4.5%
Date pricing	3

Distribution	Date d'exercice													
lambda	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0	8.5	9.0	9.5	10.0	10.5
1.0%	9.97%	5.14%	38.67%	36.18%	2.46%	5.68%	1.53%	0.17%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
5.0%	12.35%	5.06%	37.60%	34.39%	3.02%	5.54%	1.65%	0.19%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
10.0%	14.38%	4.69%	35.94%	33.81%	3.15%	5.99%	1.65%	0.19%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
15.0%	16.62%	4.20%	35.42%	32.57%	3.60%	5.68%	1.56%	0.14%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
20.0%	18.23%	4.44%	34.81%	31.92%	3.45%	5.38%	1.46%	0.10%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%



NB : la date d'exercice optimal calculé à la date $t = 0$, est de 5.0 *ans*.

Sur l'ensemble des valeurs testées sur notre échantillon, il ressort que la probabilité calculée en $t = 3.0 \text{ ans}$ d'entrer dans le swap à la date $t = 5.0 \text{ ans}$ est décroissante, lorsque la mean reversion λ augmente.

Conclusion : Il apparaît au travers de notre échantillon que la probabilité calculée à une date future d'exercer l'option à la date d'exercice optimal calculée à l'instant initial diminue, lorsque la mean reversion λ augmente. Plus la valeur de λ est faible, plus il est probable que l'option switch ne soit pas utilisée et que le droit d'entrer dans le swap soit exercé à la date d'exercice optimal calculée lors du pricing initial.

Cette observation est à mettre en parallèle avec les remarques faites précédemment sur les liens entre la valeur de l'option switch et la mean reversion ainsi que les liens entre la corrélation des taux de swap et la mean reversion.

- Pour une mean reversion faible, la corrélation entre les taux de swap est plus élevée. L'incertitude est moins forte au moment du pricing initial. La probabilité d'exercer l'option à la date d'exercice de la swaption la plus chère au moment du pricing initial est la plus élevée. La valeur de l'option switch est faible.
- Pour une mean reversion forte, la corrélation entre les taux de swap est moins forte. L'incertitude est donc plus élevée au moment du pricing initial. La probabilité d'exercer l'option à la date d'exercice de la swaption la plus chère au moment du pricing initial est faible. La valeur de l'option switch est par conséquent plus élevée.

3.2 Validité de l'approximation de la dynamique des taux de swap

Afin de discuter la validité de l'approximation de la dynamique d'un taux de swap nécessaire aux différentes calibrations sur les volatilités, aussi bien celle sur la volatilité des swaptions diagonales que la basket calibration, on effectue ici une série de tests. Dans un premier temps, on examine la validité de l'approximation de la dynamique d'un taux de swap par une dynamique log-normale, puis on s'intéresse à l'approximation gaussienne. Dans chacun des cas, on pratique un test sur les prix des swaptions européennes à nominal constant et un test sur les distributions du taux de swap à une date donnée. Dans un second temps, on examine l'approximation de la dynamique du panier de taux de swap grâce à un test sur les prix de VNSwaptions.

3.2.1 Approximation par une dynamique log-normale

Test sur les prix : pour différentes valeurs de la volatilité instantanée σ supposée constante et de mean reversion λ , on calcule le prix d'une swaption à nominal constant obtenue grâce la formule fermée connue dans le cadre de H&W-1F. Ensuite, on calcule le prix de la même swaption obtenue en se basant sur la dynamique log-normale du taux de swap et la formule de Black-Scholes. On a donc d'une part :

$$P_{HW-1F}[\sigma, \lambda, T, T_0, T_n, K] = \sum_{i=1}^n c_i B S P u t \left(\frac{B(0, T_i)}{B(0, T_0)}, 0, \gamma_i^*, K^i, T \right)$$

$$\text{où } (\gamma_i^*)^2 T = \left(\frac{\exp(-\lambda(T_0 - T_i^c)) - \exp(-\lambda(T_i - T))}{\lambda} \right)^2 \phi(T).$$

Et d'autre part :

$$dS(t) = \sigma e^{\lambda t} g(0) S(t) dW_t^Q$$

Le prix Black-Scholes est alors donné par :

$$P_{BS}^{approx}[\sigma, \lambda, T, T_0, T_n, K] = \left(\sum_{i=1}^n \delta_i B(0, T_i) \right) [S(0)N(d_1) - KN(d_2)]$$

$$\text{avec } S(0) \triangleq \frac{B(0, T_0) - B(0, T_n)}{\sum_{i=1}^n \delta_i B(0, T_i)}, d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S(0)}{K}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 g(0)^2 \frac{e^{2\lambda T} - 1}{2\lambda}}{\sigma g(0) \sqrt{\frac{e^{2\lambda T} - 1}{2\lambda}}} \text{ et } d_2 = d_1 - \sigma g(0) \sqrt{\frac{e^{2\lambda T} - 1}{2\lambda}}.$$

Résultats : le test est pratiqué pour un échantillon de valeurs de σ et de λ . On souligne notamment que σ n'a pas été calibré à partir de la valeur de λ . La swaption considérée est une swaption payeuse de maturité de $T = 3$ ans, de strike $K = 4,5\%$. Le swap sous-jacent débute en $T_0 = 3$ ans et arrive à échéance en $T_n = 10$ ans. La fréquence de paiement est semi-annuelle. La courbe de taux utilisée est reprise dans le tableau 4.3 en annexe.

Prix HW-1F	MR Lambda									
Volatilité sigma	1.00%	1.50%	2.00%	2.50%	3.00%	3.50%	4.00%	4.50%	5.00%	
0,50%	3,0151	2,9769	2,9400	2,9044	2,8700	2,8368	2,8047	2,7738	2,7439	
0,75%	3,8590	3,7983	3,7395	3,6826	3,6274	3,5740	3,5222	3,4721	3,4235	
1,00%	4,7315	4,6490	4,5690	4,4914	4,4161	4,3431	4,2724	4,2037	4,1371	
1,25%	5,6152	5,5112	5,4103	5,3124	5,2174	5,1252	5,0357	4,9489	4,8646	
1,50%	6,5041	6,3788	6,2572	6,1392	6,0246	5,9134	5,8054	5,7006	5,5988	
1,75%	7,3954	7,2489	7,1068	6,9688	6,8348	6,7047	6,5784	6,4557	6,3365	
2,00%	8,2875	8,1201	7,9575	7,7997	7,6464	7,4975	7,3530	7,2126	7,0761	
2,25%	9,1796	8,9913	8,8085	8,6309	8,4585	8,2910	8,1283	7,9703	7,8167	
2,50%	10,0711	9,8621	9,6591	9,4620	9,2705	9,0844	8,9037	8,7281	8,5575	

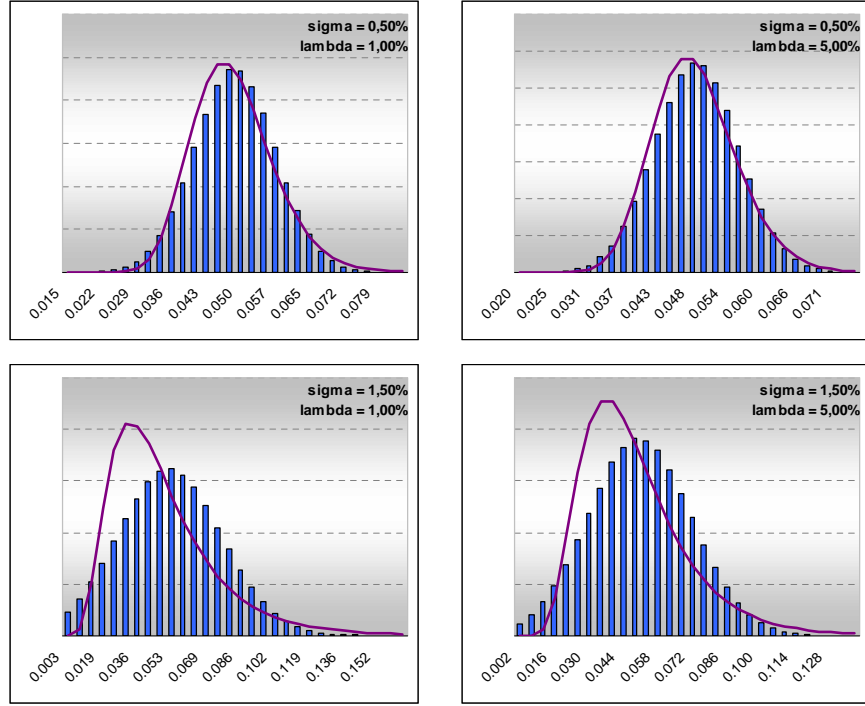
Prix B&S	MR Lambda									
Volatilité sigma	1.00%	1.50%	2.00%	2.50%	3.00%	3.50%	4.00%	4.50%	5.00%	
0,50%	2,9511	2,9149	2,8800	2,8463	2,8137	2,7822	2,7519	2,7226	2,6943	
0,75%	3,7537	3,6962	3,6405	3,5865	3,5341	3,4834	3,4343	3,3867	3,3406	
1,00%	4,5818	4,5039	4,4283	4,3550	4,2838	4,2148	4,1478	4,0827	4,0196	
1,25%	5,4160	5,3184	5,2237	5,1316	5,0423	4,9555	4,8712	4,7893	4,7098	
1,50%	6,2487	6,1321	6,0188	5,9087	5,8017	5,6977	5,5966	5,4984	5,4029	
1,75%	7,0756	6,9408	6,8096	6,6820	6,5580	6,4374	6,3200	6,2059	6,0950	
2,00%	7,8941	7,7417	7,5934	7,4491	7,3086	7,1719	7,0389	6,9095	6,7835	
2,25%	8,7020	8,5329	8,3683	8,2079	8,0517	7,8996	7,7515	7,6073	7,4668	
2,50%	9,4976	9,3127	9,1325	8,9568	8,7857	8,6188	8,4563	8,2979	8,1436	

Ecart_relatif	MR Lambda									
Volatilité sigma	1.00%	1.50%	2.00%	2.50%	3.00%	3.50%	4.00%	4.50%	5.00%	
0,50%	-2.12%	-2.08%	-2.04%	-2.00%	-1.96%	-1.92%	-1.88%	-1.84%	-1.80%	
0,75%	-2.73%	-2.69%	-2.65%	-2.61%	-2.57%	-2.53%	-2.49%	-2.46%	-2.42%	
1,00%	-3.16%	-3.12%	-3.08%	-3.04%	-3.00%	-2.96%	-2.92%	-2.88%	-2.84%	
1,25%	-3.55%	-3.50%	-3.45%	-3.40%	-3.36%	-3.31%	-3.27%	-3.22%	-3.18%	
1,50%	-3.93%	-3.87%	-3.81%	-3.75%	-3.70%	-3.65%	-3.60%	-3.55%	-3.50%	
1,75%	-4.32%	-4.25%	-4.18%	-4.11%	-4.05%	-3.99%	-3.93%	-3.87%	-3.81%	
2,00%	-4.75%	-4.66%	-4.58%	-4.50%	-4.42%	-4.34%	-4.27%	-4.20%	-4.14%	
2,25%	-5.20%	-5.10%	-5.00%	-4.90%	-4.81%	-4.72%	-4.64%	-4.55%	-4.48%	
2,50%	-5.69%	-5.57%	-5.45%	-5.34%	-5.23%	-5.13%	-5.03%	-4.93%	-4.84%	

L'écart relatif est calculé comme $\frac{P_{BS}^{approx} - P_{HW-1F}}{P_{HW-1F}}$.

Test sur les distributions : on compare la distribution empirique d'un taux de swap à une date future obtenue avec le modèle H&W-1F via des simulations de Monte-Carlo et la distribution théorique de l'approximation log-normale. Cette comparaison est effectuée pour différentes valeurs de σ, λ .

Résultats : On s'intéresse à la distribution du taux de swap à la date $T = 3$ ans. Ce swap débute en $T_0 = 3$ ans et arrive à échéance en $T_n = 10$ ans. La fréquence de paiement est semi-annuelle. Le strike est fixé à 4.5%. La courbe de taux utilisée est reprise dans le tableau 4.3. On utilise 30.000 simulations. La distribution empirique est construite sur la base de 30 classes homogènes. On a volontairement choisi un paramétrage identique à celui utilisé dans le test sur les prix effectué précédemment, afin de pouvoir faire le rapprochement.



Dans les graphiques ci-dessus, l'histogramme correspond à la distribution empirique obtenue par simulations de Monte-Carlo. La courbe représente la distribution log-normale théorique de l'approximation.

Conclusion : on observe grâce au test sur les prix que sur l'ensemble de notre échantillon de test :

- le prix BS est inférieur au prix HW-1F. On constate des écarts compris entre $-1,80\%$ et $-5,69\%$.
- pour un niveau de mean reversion λ donné, l'erreur relative se creuse avec l'augmentation de la valeur de la volatilité σ .
- pour un niveau de volatilité σ donnée, l'erreur relative croît, lorsque la mean reversion λ diminue.

Ces observations sont confirmées par le test sur les distributions. :

La qualité de l'approximation se détériore lorsque que l'on s'écarte du cas où le paramètre de mean reversion est élevé et la volatilité instantanée est faible. On note que la variable d'état étant gaussienne, elle peut prendre des valeurs fortement négatives, ce qui implique une probabilité non nulle d'avoir un taux de swap négatif. On parle dans le cas le plus défavorable de notre échantillon, i.e. $\sigma = 1.50\%$, $\lambda = 1.00\%$, d'environ $1,8\%$ de l'ensemble des tirages.

3.2.2 Approximation par une dynamique normale

Dans un deuxième temps, on s'intéresse à une approximation gaussienne de la dynamique du taux de swap. Le taux swap est simulé via un mouvement Brownien arithmétique. Là encore, on pratique deux tests : un test sur les prix des swaptions européennes et un test sur les distributions.

Test sur les prix : on réalise un test sur les prix des swaptions européennes à nominal constant similaire à celui pratiqué dans le test de l'approximation log-normale. Le prix d'une swaption dans le cas d'une dynamique normale, i.e.

$$dS(t) = \sigma e^{\lambda t} g(0) S(0) dW_t^Q$$

est donnée par :

$$P_{BS}^{approx}[\sigma, \lambda, T, T_0, T_n, K] = \left(\sum_{i=1}^n \delta_i B(0, T_i) \right) \left[S(0) \sigma^* \sqrt{T} \varphi \left(\frac{K - S(0)}{S(0) \sigma^* \sqrt{T}} \right) + (S(0) - K) \left(1 - N \left(\frac{K - S(0)}{S(0) \sigma^* \sqrt{T}} \right) \right) \right]$$

avec $S(0) \triangleq \frac{B(0,T_0)-B(0,T_n)}{\sum_{i=1}^n \delta_i B(0,T_i)}$, $\sigma^* \triangleq \frac{\sigma g(0)}{\sqrt{T}} \sqrt{\frac{e^{2\lambda T}-1}{2\lambda}}$, $\varphi(\cdot)$ la densité de probabilité correspondant à N , la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Résultats : on choisit volontairement un paramétrage identique au cas du test sur les prix dans le cas log-normale, afin de faciliter la comparaison.

Prix HW-1F	MR Lambda									
Volatilité sigma	1.00%	1.50%	2.00%	2.50%	3.00%	3.50%	4.00%	4.50%	5.00%	
0.50%	3.0151	2.9769	2.9400	2.9044	2.8700	2.8368	2.8047	2.7738	2.7439	
0.75%	3.8590	3.7983	3.7395	3.6826	3.6274	3.5740	3.5222	3.4721	3.4235	
1.00%	4.7315	4.6490	4.5690	4.4914	4.4161	4.3431	4.2724	4.2037	4.1371	
1.25%	5.6152	5.5112	5.4103	5.3124	5.2174	5.1252	5.0357	4.9489	4.8646	
1.50%	6.5041	6.3788	6.2572	6.1392	6.0246	5.9134	5.8054	5.7006	5.5988	
1.75%	7.3954	7.2489	7.1068	6.9688	6.8348	6.7047	6.5784	6.4557	6.3365	
2.00%	8.2875	8.1201	7.9575	7.7997	7.6464	7.4975	7.3530	7.2126	7.0761	
2.25%	9.1796	8.9913	8.8085	8.6309	8.4585	8.2910	8.1283	7.9703	7.8167	
2.50%	10.0711	9.8621	9.6591	9.4620	9.2705	9.0844	8.9037	8.7281	8.5575	

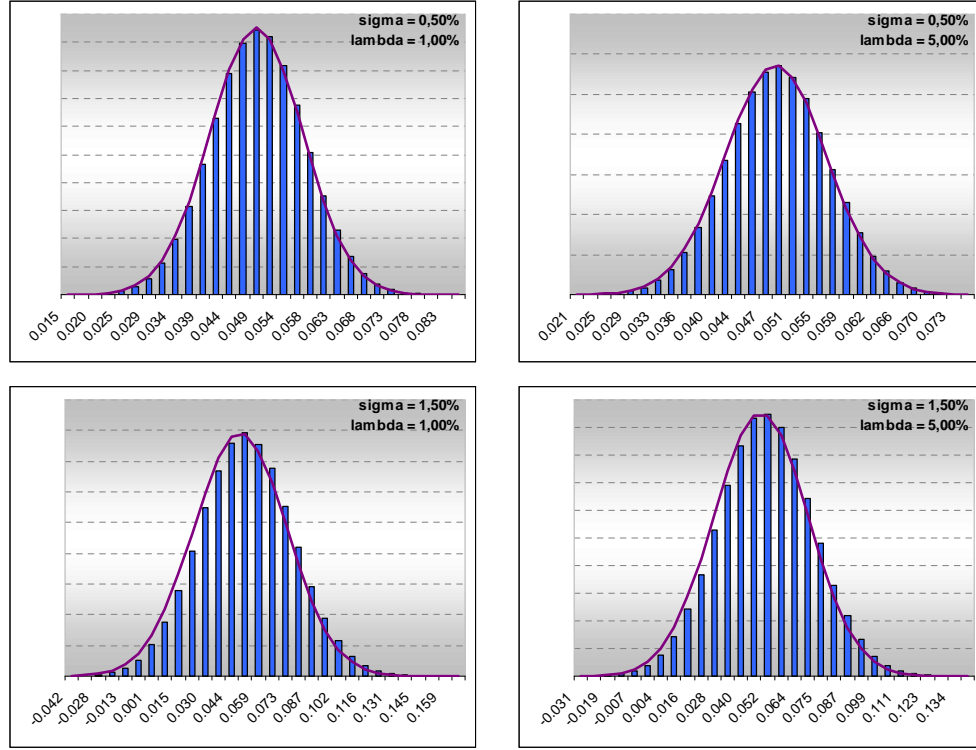
Prix B&S	MR Lambda									
Volatilité sigma	1.00%	1.50%	2.00%	2.50%	3.00%	3.50%	4.00%	4.50%	5.00%	
0.50%	3.0171	2.9790	2.9421	2.9065	2.8722	2.8390	2.8070	2.7760	2.7461	
0.75%	3.8625	3.8019	3.7432	3.6863	3.6312	3.5778	3.5261	3.4760	3.4274	
1.00%	4.7372	4.6547	4.5747	4.4972	4.4220	4.3490	4.2782	4.2096	4.1430	
1.25%	5.6238	5.5198	5.4188	5.3208	5.2258	5.1335	5.0440	4.9571	4.8728	
1.50%	6.5165	6.3910	6.2692	6.1510	6.0362	5.9249	5.8168	5.7118	5.6099	
1.75%	7.4127	7.2658	7.1232	6.9848	6.8505	6.7201	6.5935	6.4705	6.3511	
2.00%	8.3110	8.1428	7.9796	7.8211	7.6672	7.5178	7.3727	7.2318	7.0950	
2.25%	9.2109	9.0214	8.8374	8.6588	8.4854	8.3171	8.1536	7.9948	7.8405	
2.50%	10.1117	9.9009	9.6963	9.4977	9.3048	9.1175	8.9356	8.7590	8.5874	

Ecart relatif	MR Lambda									
Volatilité sigma	1.00%	1.50%	2.00%	2.50%	3.00%	3.50%	4.00%	4.50%	5.00%	
0.50%	0.07%	0.07%	0.07%	0.07%	0.08%	0.08%	0.08%	0.08%	0.08%	
0.75%	0.09%	0.10%	0.10%	0.10%	0.10%	0.11%	0.11%	0.11%	0.12%	
1.00%	0.12%	0.12%	0.13%	0.13%	0.13%	0.13%	0.14%	0.14%	0.14%	
1.25%	0.15%	0.15%	0.16%	0.16%	0.16%	0.16%	0.17%	0.17%	0.17%	
1.50%	0.19%	0.19%	0.19%	0.19%	0.19%	0.19%	0.20%	0.20%	0.20%	
1.75%	0.23%	0.23%	0.23%	0.23%	0.23%	0.23%	0.23%	0.23%	0.23%	
2.00%	0.28%	0.28%	0.28%	0.27%	0.27%	0.27%	0.27%	0.27%	0.27%	
2.25%	0.34%	0.33%	0.33%	0.32%	0.32%	0.31%	0.31%	0.31%	0.31%	
2.50%	0.40%	0.39%	0.39%	0.38%	0.37%	0.36%	0.36%	0.35%	0.35%	

L'écart relatif est calculé comme $\frac{P_{BS}^{approx} - P_{HW-1F}}{P_{HW-1F}}$.

Test sur les distributions : on procède de la même façon que pour l'approximation log-normale.

Résultats : La construction de la distribution empirique est réalisée selon le même procédé que dans le test de l'approximation log-normale avec le même nombre de simulations et de classes.



Conclusion : le test sur les prix révèle que sur l'ensemble de notre échantillon :

- le prix BS version normale est supérieur au prix HW-1F. Toutefois, les écarts sont beaucoup moins significatifs que dans le cas de l'approximation log-normale. Ils sont ici compris entre 0,07% et 0,40% pour des écarts dans le cas log-normale de l'ordre de $-1,80\%$ à $-5,69\%$.
- pour un niveau de mean reversion λ donné, l'erreur relative se creuse avec l'augmentation de la valeur de la volatilité σ .
- pour un niveau de volatilité σ donnée, à la différence du cas log-normale, il ne se dessine pas de tendance globale.
Pour des valeurs de σ faible, i.e. $\sigma < 1,75$, l'erreur relative aura plutôt tendance à augmenter lorsque la mean reversion augmente.
Pour des valeurs de σ plus élevées, i.e. $\sigma > 1,75$, on observe la situation inverse : lorsque la mean reversion augmente, l'erreur relative diminue.

Le test sur les distributions montre que l'approximation gaussienne de la dynamique d'un taux de swap est réellement proche de la dynamique obtenue dans le cadre H&W-1F. A la différence du cas log-normale, la qualité de l'approximation se détériore nettement moins lorsque l'on s'écarte du cas λ élevé et σ faible.

A l'issue des tests pratiqués sur les deux types d'approximation, l'approximation gaussienne nous semble la plus adaptée.

3.2.3 Approximation de la dynamique d'un panier de taux de swap

Suite aux tests précédents, on s'intéresse maintenant à la dynamique d'un panier de taux de swap $Y(t) \triangleq \sum_{i=1}^n \alpha_i S_i(t)$. On opte pour une approximation gaussienne de la dynamique des taux de swap. Nous allons ici tester la qualité de l'approximation de la dynamique du panier de taux de swap au travers d'une comparaison sur les prix des VNSwaptions. Ce test permettra en particulier de juger de l'impact du freeze de la valeur de α_i en $\alpha_i(0)$.

Test sur les prix : on compare les prix de VNSwaptions obtenus d'une part par un modèle H&W-1F et un pricing par arbre trinomial recombinaut à une dimension et d'autre part par une approximation gaussienne de la dynamique du panier de taux de swap et la formule fermée de Black Scholes pour une dynamique normale. Chacune des VNSwaptions considérées a une maturité T_0 . Le nominal est amorti linéairement, i.e. $N_i = N_0(1 - m)^i$. Le swap sous-jacent débute en $T_0 = 3$ ans et s'achève en $T_n = 10$ ans. La fréquence de paiement est semi-annuelle. On laisse varier le strike K , l'amortissement m , la mean reversion λ et la volatilité instantanée σ supposée constante. La courbe de taux utilisée est reprise dans le tableau 4.3 en annexe.

La dynamique du panier de swap est donnée par :

$$dY(t) = \sigma e^{\lambda t} \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i^1(0) g_i^1(0) S_i^1(0) \right) dW_t^Q$$

On calcule la volatilité de $Y(t)$ notée σ_Y^* grâce à la relation suivante :

$$(\sigma_Y^*)^2 T_0 = \sigma^2 \left(\frac{e^{2\lambda T_0} - 1}{2\lambda} \right) \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i^1(0) g_i^1(0) S_i^1(0) \right)^2$$

$$\text{avec } \alpha_i^1(0) \triangleq \frac{N_i - N_{i+1}}{N^*} \frac{\sum_{j=1}^i \delta_j B(0, T_j)}{l v l^*(0)}, l v l^*(0) \triangleq \sum_{i=1}^n \delta_i \frac{N_i}{N^*} B(0, T_i), g_i^1(0) \triangleq \frac{1}{\lambda} \left(\frac{B(0, T_0) e^{-\lambda T_0} - B(0, T_i) e^{-\lambda T_i}}{B(0, T_0) - B(0, T_i)} - \frac{\sum_{j=1}^i \delta_j B(0, T_j) e^{-\lambda T_j}}{\sum_{j=1}^i \delta_j B(0, T_j)} \right),$$

$$\text{et } N^* \triangleq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n N_i.$$

Le prix de la swaption est alors donné par la formule :

$$P^{approx}[\sigma, \lambda, m, T_0, T_n, K] = N^* l v l^*(0) \left[\sigma_Y^* \sqrt{T_0} \varphi \left(\frac{K - Y(0)}{\sigma_Y^* \sqrt{T_0}} \right) + (Y(0) - K) \left(1 - N \left(\frac{K - Y(0)}{\sigma_Y^* \sqrt{T_0}} \right) \right) \right]$$

Résultats : on observe les écarts de prix relatifs :

$$Ecart_relatif[\sigma, \lambda, m, T_0, T_n, K] = \frac{|P_{HW-1F} - P^{approx}[\sigma, \lambda, T_0, T_n, K]|}{P_{HW-1F}}$$

Dans chacun des tableaux ci-dessous, on donne pour un couple (λ, σ) fixé la valeur du maximum des écarts relatifs sur l'ensemble des valeurs d'amortissement m de l'échantillon de test. $m \in \{-50\%, -40\%, -30\%, -20\%, -10\%, -5\%, 0\%$

$$MaxOfEcart_relatif[\sigma, \lambda, T_0, T_n, K] = \max_{m \in \{-50\% \dots 50\% \}} (Ecart_relatif[\sigma, \lambda, m, T_0, T_n, K])$$

– Strike 3,00% :

Maturité T	3.00
Strike K	3.00%
Amort	(All)

Max of Ecart relatif	MR Lambda									
Volatilité sigma	1.00%	1.50%	2.00%	2.50%	3.00%	3.50%	4.00%	4.50%	5.00%	
0.50%	0.0380%	0.0355%	0.0332%	0.0313%	0.0296%	0.0294%	0.0296%	0.0301%	0.0272%	
0.75%	0.1032%	0.1061%	0.0992%	0.0941%	0.0931%	0.0927%	0.0930%	0.0940%	0.0956%	
1.00%	0.1875%	0.1818%	0.1758%	0.1704%	0.1676%	0.1675%	0.1685%	0.1707%	0.1739%	
1.25%	0.2588%	0.2533%	0.2483%	0.2441%	0.2406%	0.2398%	0.2431%	0.2345%	0.2341%	
1.50%	0.3095%	0.3185%	0.3204%	0.3208%	0.3255%	0.3308%	0.3293%	0.3223%	0.3158%	
1.75%	0.3759%	0.3842%	0.3932%	0.3916%	0.3898%	0.3946%	0.3914%	0.3856%	0.3800%	
2.00%	0.4386%	0.4369%	0.4354%	0.4339%	0.4328%	0.4359%	0.4349%	0.4313%	0.4317%	
2.25%	0.4899%	0.4928%	0.4959%	0.4994%	0.5032%	0.5073%	0.5119%	0.5168%	0.5222%	
2.50%	0.5582%	0.5578%	0.5574%	0.5570%	0.5576%	0.5635%	0.5701%	0.5773%	0.5732%	

– Strike 4,00% :

Maturité T	3.00
Strike K	4.00%
Amort	(All)

Max of Ecart relatif	MR Lambda									
Volatilité sigma	1.00%	1.50%	2.00%	2.50%	3.00%	3.50%	4.00%	4.50%	5.00%	
0.50%	0.1563%	0.1515%	0.1469%	0.1437%	0.1433%	0.1440%	0.1457%	0.1485%	0.1524%	
0.75%	0.2330%	0.2370%	0.2415%	0.2466%	0.2483%	0.2409%	0.2339%	0.2272%	0.2209%	
1.00%	0.3429%	0.3226%	0.2905%	0.2938%	0.2839%	0.2691%	0.2712%	0.2737%	0.2764%	
1.25%	0.4169%	0.3986%	0.4008%	0.3940%	0.3775%	0.3507%	0.3319%	0.3324%	0.3211%	
1.50%	0.4758%	0.4653%	0.4678%	0.4645%	0.4547%	0.4376%	0.4127%	0.3820%	0.3872%	
1.75%	0.5521%	0.5446%	0.5336%	0.5186%	0.4989%	0.4740%	0.4535%	0.4578%	0.4563%	
2.00%	0.5530%	0.5544%	0.5546%	0.5532%	0.5496%	0.5433%	0.5338%	0.5204%	0.5026%	
2.25%	0.5894%	0.5778%	0.5641%	0.5479%	0.5487%	0.5500%	0.5500%	0.5482%	0.5443%	
2.50%	0.6120%	0.6061%	0.5985%	0.5892%	0.5780%	0.5648%	0.5491%	0.5441%	0.5456%	

- Strike 6,75% : compte tenu de la valeur élevée du maximum, on ajoute au tableau le minimum des écarts relatifs, afin de se rendre compte de l'amplitude des écarts observés.

$$MinOfEcart_relatif[\sigma, \lambda, T_0, T_n, K] = \min_{m \in \{-50\% \dots 50\% \}} (Ecart_relatif[\sigma, \lambda, m, T_0, T_n, K])$$

Maturité T	3.00
Strike K	6.75%
Amort	(All)

		MR Lambda									
Volatilité sigma	Data	1.00%	1.50%	2.00%	2.50%	3.00%	3.50%	4.00%	4.50%	5.00%	
0.50%	Max of Ecart relatif	9.188%	9.683%	9.959%	10.921%	11.613%	12.077%	12.858%	13.945%	14.887%	
	Min of Ecart relatif	2.796%	3.341%	3.356%	4.269%	4.737%	4.568%	5.696%	5.978%	6.574%	
0.75%	Max of Ecart relatif	5.794%	6.100%	6.435%	6.712%	7.136%	7.438%	7.910%	8.302%	8.755%	
	Min of Ecart relatif	1.652%	1.668%	2.155%	2.086%	2.541%	2.678%	3.162%	3.232%	3.148%	
1.00%	Max of Ecart relatif	4.494%	4.545%	4.920%	5.083%	5.290%	5.640%	5.693%	6.180%	6.406%	
	Min of Ecart relatif	1.211%	1.258%	1.363%	1.500%	1.820%	2.005%	2.137%	2.170%	2.122%	
1.25%	Max of Ecart relatif	3.668%	3.935%	4.087%	4.095%	4.432%	4.628%	4.644%	5.033%	5.251%	
	Min of Ecart relatif	0.831%	1.023%	1.067%	1.261%	1.293%	1.356%	1.478%	1.692%	1.779%	
1.50%	Max of Ecart relatif	3.291%	3.473%	3.570%	3.595%	3.862%	4.032%	4.083%	4.300%	4.546%	
	Min of Ecart relatif	0.558%	0.697%	0.883%	1.001%	1.152%	1.243%	1.284%	1.308%	1.450%	
1.75%	Max of Ecart relatif	3.013%	3.015%	3.225%	3.378%	3.455%	3.498%	3.741%	3.902%	3.961%	
	Min of Ecart relatif	0.520%	0.596%	0.735%	0.829%	0.876%	0.891%	1.059%	1.097%	1.136%	
2.00%	Max of Ecart relatif	2.814%	2.864%	2.899%	3.088%	3.219%	3.284%	3.325%	3.549%	3.702%	
	Min of Ecart relatif	0.279%	0.422%	0.547%	0.649%	0.786%	0.889%	0.950%	0.985%	1.025%	
2.25%	Max of Ecart relatif	2.636%	2.682%	2.700%	2.877%	3.004%	3.074%	3.077%	3.278%	3.437%	
	Min of Ecart relatif	0.201%	0.276%	0.422%	0.517%	0.611%	0.748%	0.835%	0.889%	0.921%	
2.50%	Max of Ecart relatif	2.476%	2.493%	2.591%	2.732%	2.825%	2.864%	2.921%	3.100%	3.226%	
	Min of Ecart relatif	0.073%	0.215%	0.342%	0.376%	0.535%	0.626%	0.685%	0.725%	0.745%	

- Strike 9,50% :

Maturité T	3.00
Strike K	9.50%
Amort	(All)

		MR Lambda									
Volatilité sigma	Data	1.00%	1.50%	2.00%	2.50%	3.00%	3.50%	4.00%	4.50%	5.00%	
1.00%	Max of Ecart relatif	19.849%	21.197%	22.639%	24.182%	25.837%	27.617%	29.458%	31.300%	33.160%	
	Min of Ecart relatif	10.283%	11.329%	12.519%	12.896%	13.945%	14.229%	15.265%	15.357%	16.322%	
1.25%	Max of Ecart relatif	14.686%	15.763%	16.753%	17.685%	18.594%	20.107%	21.636%	23.192%	24.826%	
	Min of Ecart relatif	7.611%	8.385%	8.834%	9.700%	10.104%	10.775%	11.396%	11.447%	12.004%	
1.50%	Max of Ecart relatif	11.568%	12.407%	13.304%	13.966%	14.811%	16.001%	17.010%	17.874%	19.014%	
	Min of Ecart relatif	5.802%	6.422%	6.967%	7.234%	7.949%	8.280%	8.495%	9.145%	9.417%	
1.75%	Max of Ecart relatif	9.790%	10.347%	10.861%	11.716%	12.231%	13.099%	14.011%	14.624%	15.706%	
	Min of Ecart relatif	4.526%	5.119%	5.522%	6.108%	6.338%	6.620%	7.098%	7.402%	7.479%	
2.00%	Max of Ecart relatif	8.222%	8.956%	9.295%	10.009%	10.531%	11.144%	11.918%	12.297%	13.410%	
	Min of Ecart relatif	3.788%	4.243%	4.750%	5.061%	5.297%	5.686%	5.874%	6.168%	6.208%	
2.25%	Max of Ecart relatif	7.365%	7.872%	8.214%	8.793%	9.147%	9.845%	10.159%	11.033%	11.443%	
	Min of Ecart relatif	3.040%	3.588%	3.888%	4.325%	4.709%	4.816%	4.977%	5.321%	5.618%	
2.50%	Max of Ecart relatif	6.548%	7.086%	7.252%	7.885%	8.111%	8.787%	9.052%	9.809%	10.078%	
	Min of Ecart relatif	2.707%	3.028%	3.490%	3.749%	4.014%	4.227%	4.514%	4.690%	4.914%	

Dans le cas d'un strike de 9,50% (Out of the money), le prix de l'option calculé avec HW-1F est nul pour une volatilité σ inférieure à 1%. Les prix calculés via l'approximation gaussienne sont inférieurs à 10^{-5} .

Conclusion : pour des strikes faibles (in the money, i.e. $K = 3,00\%$ et $K = 4,00\%$), les écarts observés sont faibles. Le prix calculé à l'aide de l'approximation gaussienne du panier constitue une bonne approximation du prix calculé avec le modèle HW-1F. Les écarts les plus significatifs se produisent pour des valeurs λ faibles et des valeurs σ élevées. Pour un strike donné, l'erreur relative augmente, lorsque σ croît avec λ constant.

L'approximation se dégrade avec l'augmentation du strike (out the money $K = 6,75\%$ et deeply out of the money $K = 9,50\%$). On constate des écarts pouvant aller jusqu'à 15% ou 30% du prix calculé avec H&W-1F. A l'inverse du constat fait dans le cas "in the money", les écarts maximum constatés se produisent pour des valeurs de λ élevées (5%) et des valeurs σ faibles (1%). De plus, pour un strike donné et λ fixé, l'erreur relative augmente, lorsque σ décroît.

Ces écarts constatés pour des strikes élevés ne se produisent pas uniquement pour de forts amortissements, i.e. $m = 50\%$ ou $m = -50\%$. En effet, comme le montre le tableau ci-dessous, pour des amortissements faibles, on trouve pour le cas "out of the money" des écarts supérieurs à ceux observés pour des strikes plus faibles.

Sachant que dans le cas, où l'amortissement est nul, le panier se compose uniquement d'un taux de swap, on en conclut que l'approximation de la dynamique d'un taux de swap par une dynamique normale se détériore de façon non négligeable, quand le strike augmente.

MR Lambda	(All)
Volatilité sigma	(All)
Maturité T	3.00

		Amort													
Strike K	Data	-50.00%	-40.00%	-30.00%	-20.00%	-10.00%	-5.00%	0.00%	5.00%	10.00%	20.00%	30.00%	40.00%	50.00%	
3.00%	Max of Ecart relatif	0.3019%	0.2376%	0.1268%	0.1099%	0.3140%	0.4280%	0.4854%	0.5773%	0.5582%	0.5184%	0.4276%	0.3580%	0.2940%	
	Min of Ecart relatif	0.0027%	0.0027%	0.0028%	0.0003%	0.0011%	0.0002%	0.0002%	0.0027%	0.0061%	0.0161%	0.0227%	0.0272%	0.0251%	
4.00%	Max of Ecart relatif	0.6120%	0.5160%	0.3619%	0.1726%	0.2238%	0.3193%	0.4492%	0.5202%	0.5517%	0.4814%	0.3500%	0.2566%	0.1654%	
	Min of Ecart relatif	0.0261%	0.0255%	0.0246%	0.0178%	0.0003%	0.0147%	0.0452%	0.0761%	0.1079%	0.1433%	0.1259%	0.1004%	0.0614%	
6.75%	Max of Ecart relatif	14.8874%	14.1329%	12.8811%	11.4349%	9.4008%	8.9927%	8.3165%	7.6160%	7.0206%	6.5737%	7.0721%	7.5799%	7.3075%	
	Min of Ecart relatif	2.4763%	2.1798%	1.8508%	1.3973%	0.8209%	0.5527%	0.2925%	0.2247%	0.0730%	0.2798%	0.6232%	0.7737%	1.0047%	

Ce dernier tableau met en évidence une asymétrie suivant que l'amortissement soit positif ou négatif. L'ordre de grandeur des écarts observés dans le cas d'un nominal croissant est supérieur à celui observé dans le cas d'un nominal décroissant. On en déduit que **si l'augmentation du strike provoque une détérioration de l'approximation de la dynamique du panier par une dynamique normale, un nominal variable accentue cet effet, en notant qu'un nominal croissant sera un facteur aggravant.**

3.3 Convergence d'une swaption à nominal variable vers une swaption à nominal constant

3.3.1 Convergence du prix d'une swaption européenne

Dans un premier temps, on considère une swaption à nominal variable amorti linéairement à chaque date de paiement. Soit m le coefficient d'amortissement. On a alors $N_i = N_0 (1 - m)^i$. On souhaite observer la convergence du prix de cette VNSwaption vers le prix de la swaption à nominal constant, N_0 , en faisant varier la valeur de m et observer si cette convergence est influencée par le mode de calibration i.e. basket calibration ou calibration sur les swaptions diagonales. On considère aussi bien la convergence des swaptions à nominal décroissant, i.e. $m > 0$, que celle des swaptions à nominal croissant, i.e. $m < 0$. On souhaite observer cette convergence dans les cas *Out of the money*, *At the money*, *In the money*.

Test : le paramètre de mean reversion est fixé à $\lambda = 5,00\%$. On considère le cas d'une swaption payeuse de maturité 3 ans, de tenor 9 ans et de fréquence annuelle. Les différents strikes testés sont : $K_{ITM} = 3,00\%$, $K_{ATM} = 4,50\%$, $K_{OTM} = 6,00\%$. La calibration sur les swaptions diagonales est une calibration sur les volatilités ATM. La basket calibration est une calibration sur les volatilités ATM. La courbe de taux utilisée est celle de l'EUR au 12/03/2008. La structure de corrélations historiques entre les taux de swap intervenant dans la basket calibration et les paramètres SABR utilisés pour définir les volatilités implicites, sont repris dans les tableaux 4.4 et 4.5 en annexe.

Résultats : on s'intéresse tout d'abord au prix de référence de la swaption à nominal constant. Il est calculé grâce à une formule fermée et pour les différents strikes.

Situation	Strike	Amortissement	Prix de référence
ITM	3.00%	0%	10.8398
ATM	4.60%	0%	2.9880
OTM	6.00%	0%	0.3918

On récapitule ci-dessous les prix obtenus suivant la calibration lorsque l'on fait varier l'amortissement m .

Prix (vol Diag ATM)		Amort																		
Strike		-5.0000%	-4.0000%	-3.0000%	-2.0000%	-1.0000%	-0.1000%	-0.0100%	-0.0010%	-0.0001%	0.0001%	0.0010%	0.0100%	0.1000%	1.0000%	2.0000%	3.0000%	4.0000%	5.0000%	
	3.00%	13.4274	12.8601	12.3187	11.8020	11.3092	10.8858	10.8444	10.8403	10.8399	10.8398	10.8394	10.8353	10.7941	10.3920	9.9648	9.5573	9.1686	8.7987	
	4.60%	3.7545	3.5864	3.4260	3.2731	3.1273	3.0018	2.9896	2.9884	2.9882	2.9882	2.9881	2.9869	2.9747	2.8557	2.7305	2.6122	2.4995	2.3920	
	6.00%	0.4913	0.4696	0.4488	0.4289	0.4100	0.3937	0.3921	0.3919	0.3919	0.3919	0.3919	0.3917	0.3901	0.3746	0.3582	0.3431	0.3287	0.3150	

Prix (vol Basket ATM)		Amort																		
Strike		-5.0000%	-4.0000%	-3.0000%	-2.0000%	-1.0000%	-0.1000%	-0.0100%	-0.0010%	-0.0001%	0.0001%	0.0010%	0.0100%	0.1000%	1.0000%	2.0000%	3.0000%	4.0000%	5.0000%	
	3.00%	13.4380	12.8683	12.3246	11.8057	11.3112	10.8860	10.8445	10.8403	10.8399	10.8398	10.8394	10.8352	10.7939	10.3902	9.9613	9.5523	9.1623	8.7903	
	4.60%	3.7906	3.6140	3.4459	3.2858	3.1333	3.0024	2.9896	2.9884	2.9882	2.9882	2.9881	2.9868	2.9741	2.8501	2.7200	2.5971	2.4802	2.3690	
	6.00%	0.5093	0.4833	0.4587	0.4352	0.4130	0.3940	0.3921	0.3919	0.3919	0.3919	0.3919	0.3917	0.3898	0.3719	0.3535	0.3363	0.3200	0.3046	

Ecart_relatif		Amort																		
Strike		-5.0000%	-4.0000%	-3.0000%	-2.0000%	-1.0000%	-0.1000%	-0.0100%	-0.0010%	-0.0001%	0.0001%	0.0010%	0.0100%	0.1000%	1.0000%	2.0000%	3.0000%	4.0000%	5.0000%	
	3.00%	-0.0980%	-0.0750%	-0.0538%	-0.0343%	-0.0185%	-0.0018%	-0.0002%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0002%	0.0018%	0.0169%	0.0322%	0.0462%	0.0587%	0.0769%	
	4.60%	-1.2076%	-0.9248%	-0.6638%	-0.4234%	-0.2025%	-0.0195%	-0.0019%	-0.0002%	0.0000%	0.0000%	0.0002%	0.0019%	0.0193%	0.1851%	0.3526%	0.5055%	0.6439%	0.7687%	
	6.00%	-4.5874%	-3.5157%	-2.5253%	-1.6119%	-0.7715%	-0.0742%	-0.0074%	-0.0007%	-0.0001%	0.0001%	0.0007%	0.0074%	0.0735%	0.7063%	1.2133%	1.7404%	2.2184%	2.6503%	

Ecart_absolu (en bp)		Amort																		
Strike		-5.0000%	-4.0000%	-3.0000%	-2.0000%	-1.0000%	-0.1000%	-0.0100%	-0.0010%	-0.0001%	0.0001%	0.0010%	0.0100%	0.1000%	1.0000%	2.0000%	3.0000%	4.0000%	5.0000%	
	3.00%	-1.06	-0.81	-0.58	-0.37	-0.20	-0.02	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.18	0.35	0.50	0.64	0.83	
	4.60%	-3.61	-2.76	-1.98	-1.27	-0.61	-0.06	-0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.06	0.55	1.05	1.51	1.92	
	6.00%	-1.80	-1.38	-0.99	-0.63	-0.30	-0.03	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.03	0.28	0.48	0.68	0.87	1.04	

L'écart relatif est défini comme $\frac{P_{Swap_Diag} - P_{Basket_Calib}}{P_{ref}}$. L'écart relatif peut donc se décomposer en :

$$Ecart_relatif \triangleq \frac{P_{Swap_Diag} - P_{Basket_Calib}}{P_{ref}} = \frac{P_{Swap_Diag} - P_{ref}}{P_{ref}} - \frac{P_{Basket_Calib} - P_{ref}}{P_{ref}}$$

or, si $m > 0$, $P_{Swap_Diag} < P_{ref}$ et $P_{Basket_Calib} < P_{ref}$. Et inversement, si $m < 0$, $P_{Swap_Diag} > P_{ref}$ et $P_{Basket_Calib} > P_{ref}$.

On en conclut que les valeurs prises par l'écart relatif doivent être interprétées de la façon suivante :

- si l'amortissement $m > 0$ et $Ecart_relatif > 0$ (resp. $Ecart_relatif < 0$), alors la convergence du prix obtenu par la calibration sur les swaptions diagonales est plus (resp. moins) rapide que la convergence du prix obtenu par basket calibration.
- si l'amortissement $m < 0$ et $Ecart_relatif < 0$ (resp. $Ecart_relatif > 0$), alors la convergence du prix obtenu par la calibration sur les swaptions diagonales est plus (resp. moins) rapide que la convergence du prix obtenu par basket calibration.

Les cases du tableau $Ecart_relatif$, dont les valeurs sont négatives, ont été légèrement grisées, pour faciliter l'interprétation du tableau.

L'écart absolu est défini comme $P_{Swap_Diag} - P_{Basket_Calib}$. Les cases, dont les valeurs sont négatives, sont elles-aussi grisées.

Conclusion : sur l'ensemble de l'échantillon, la convergence vers la swaption européenne à nominal constant est plus rapide dans le cas de la calibration sur les swaptions diagonales. Cette différence de rapidité de convergence dépend fortement du strike de la swaption. Lorsque le strike augmente, cette différence devient beaucoup plus significative. Ainsi, cette différence est très marquée dans le cas, où la swaption est *out of the money*.

Pour des nominaux décroissants, i.e. $m > 0$, les prix obtenus par calibration sur les swaptions diagonales ATM sont plus élevés que les prix calculés avec une calibration basket ATM. Pour des nominaux croissants, i.e. $m < 0$, l'effet inverse est observable, i.e. les prix de la calibration sur les swaptions diagonales ATM sont inférieurs aux prix calculés avec la calibration basket ATM.

3.3.2 Convergence du prix d'une swaption bermuda

Dans un deuxième temps, on considère une swaption Bermuda à nominal variable amorti linéairement à chaque date de paiement. On a alors de nouveau $N_i = N_0 (1 - m)^i$. On souhaite observer la convergence du prix de cette swaption Bermuda vers le prix de la swaption bermuda à nominal variable pour la calibration sur les volatilités ATM des swaptions diagonales et la basket calibration sur les volatilités ATM.

Test : le paramètre de mean reversion est fixé à 5,00%. On considère le cas d'une swaption payeuse. Les différents strikes testés sont : $K_{ITM} = 3,00\%$, $K_{ATM} = 4,64\%$, $K_{OTM} = 6,00\%$. La courbe de taux utilisée est celle de l'EUR au 12/03/2008. La structure de corrélation utilisée et les paramètres SABR utilisés pour définir les volatilités implicites utilisées pour les deux calibrations sont repris en annexe dans les tableaux 4.4 et 4.5.

Résultats : on calcule d'abord les prix de référence pour des nominaux constants :

Situation	Strike	Amortissement	Prix de référence
ITM	3.00%	0.00%	11.3798
ATM	4.60%	0.00%	4.3640
OTM	6.00%	0.00%	1.3681

On fait ensuite varier la valeur du coefficient d'amortissement m :

Prix (vol Diag ATM)		Amort																	
Strike		-5.0000%	-4.0000%	-3.0000%	-2.0000%	-1.0000%	-0.1000%	-0.0100%	-0.0010%	-0.0001%	0.0001%	0.0010%	0.0100%	0.1000%	1.0000%	2.0000%	3.0000%	4.0000%	5.0000%
	3.00%	14.0906	13.4966	12.9297	12.3887	11.8724	11.4280	11.3846	11.3803	11.3799	11.3798	11.3793	11.3750	11.3318	10.9098	10.4615	10.0340	9.6263	9.2374
	4.60%	5.5220	5.2675	5.0250	4.7939	4.5737	4.3845	4.3660	4.3642	4.3640	4.3640	4.3638	4.3619	4.3436	4.1644	3.9746	3.7938	3.6217	3.4579
	6.00%	1.7762	1.6860	1.6003	1.5189	1.4416	1.3753	1.3688	1.3682	1.3681	1.3681	1.3680	1.3674	1.3610	1.2985	1.2323	1.1694	1.1096	1.0530

Prix (vol Basket ATM)		Amort																	
Strike		-5.0000%	-4.0000%	-3.0000%	-2.0000%	-1.0000%	-0.1000%	-0.0100%	-0.0010%	-0.0001%	0.0001%	0.0010%	0.0100%	0.1000%	1.0000%	2.0000%	3.0000%	4.0000%	5.0000%
	3.00%	14.1087	13.5107	12.9400	12.3953	11.8756	11.4283	11.3846	11.3803	11.3799	11.3798	11.3793	11.3750	11.3315	10.9068	10.4557	10.0256	9.6155	9.2243
	4.60%	5.5473	5.2871	5.0391	4.8030	4.5781	4.3849	4.3661	4.3642	4.3640	4.3640	4.3638	4.3619	4.3431	4.1603	3.9666	3.7823	3.6069	3.4401
	6.00%	1.7898	1.6965	1.6078	1.5237	1.4439	1.3755	1.3689	1.3682	1.3681	1.3681	1.3680	1.3674	1.3608	1.2963	1.2280	1.1633	1.1018	1.0435

Ecart_relatif		Amort																	
Strike		-5.0000%	-4.0000%	-3.0000%	-2.0000%	-1.0000%	-0.1000%	-0.0100%	-0.0010%	-0.0001%	0.0001%	0.0010%	0.0100%	0.1000%	1.0000%	2.0000%	3.0000%	4.0000%	5.0000%
	3.00%	-0.1594%	-0.1236%	-0.0901%	-0.0582%	-0.0281%	-0.0027%	-0.0003%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0003%	0.0027%	0.0263%	0.0509%	0.0736%	0.0948%	0.1146%
	4.60%	-0.5796%	-0.4482%	-0.3244%	-0.2086%	-0.1006%	-0.0097%	-0.0010%	-0.0001%	0.0000%	0.0000%	0.0001%	0.0010%	0.0097%	0.0944%	0.1820%	0.2635%	0.3385%	0.4079%
	6.00%	-0.9909%	-0.7665%	-0.5519%	-0.3512%	-0.1691%	-0.0168%	-0.0017%	-0.0002%	0.0000%	0.0000%	0.0002%	0.0017%	0.0167%	0.1609%	0.3097%	0.4468%	0.5725%	0.6945%

Ecart_absolu (en bp)		Amort																	
Strike		-5.0000%	-4.0000%	-3.0000%	-2.0000%	-1.0000%	-0.1000%	-0.0100%	-0.0010%	-0.0001%	0.0001%	0.0010%	0.0100%	0.1000%	1.0000%	2.0000%	3.0000%	4.0000%	5.0000%
	3.00%	-1.81	-1.41	-1.03	-0.66	-0.32	-0.03	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.03	0.30	0.58	0.84	1.08	1.30	
	4.60%	-2.53	-1.96	-1.42	-0.91	-0.44	-0.04	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.04	0.41	0.79	1.15	1.48	1.78
	6.00%	-1.36	-1.05	-0.76	-0.48	-0.23	-0.02	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.22	0.42	0.61	0.78	0.95

La définition et l'interprétation des écarts relatifs et écarts absolus se font de la même manière que dans le cas des swaptions européennes présenté plus haut.

Conclusion : on observe toujours une convergence plus rapide des prix calculés sur la base d'une calibration sur les volatilités ATM des swaptions diagonales. Cependant, dans les cas ATM et OTM la différence dans la rapidité de convergence est moins significative que dans le cas des swaptions européennes. Le cas ITM affiche une différence de rapidité de convergence supérieure à celle observée plus tôt dans le cas des swaptions européennes.

Le prix d'une swaption Bermuda à nominal variable calibrée sur les swaptions diagonales est supérieur à celui de la même bermuda calibré via la basket calibration ATM dans le cas d'un nominal décroissant, alors qu'il devient inférieur dans le cas d'un nominal croissant.

La calibration sur les swaptions diagonales a donc pour effet de rapidement assimiler le payoff à un payoff à nominal constant, alors que la basket calibration capture mieux l'aspect *nominal variable*, même lorsque ce premier ne varie que légèrement.

3.4 Analyse de la sensibilité du pricing au paramètre exotique de mean reversion

On analyse ici la sensibilité du prix au paramètre exotique de mean reversion λ . Notre démarche consiste à calibrer le modèle H&W-1F avec différents niveaux de mean reversion pour différentes swaptions Bermuda à nominal variable, i.e différents niveaux d'amortissement m et différents strikes K . On analyse ensuite la sensibilité du pricing des swaptions Bermuda à la mean reversion. Chacune des swaptions européennes associées à la Bermuda est par la suite pricée avec la calibration associée à la Bermuda. On peut ainsi faire ressortir la sensibilité des prix des one-callables à la mean reversion λ .

Test : Pour des amortissements compris entre 10% et -10% et pour trois niveaux de strike différents, i.e. $K_{ITM} = 3.50\%$, $K_{ATM} = 4.80\%$, $K_{OTM} = 6.10\%$, on calibre et on price une swaption Bermuda de maturité 3 ans, de tenor 7 ans et de fréquence annuelle. Sans modifier la calibration, on vient pricer chacun des 7 one-callables sous-jacents à la Bermuda. Pour caractériser la dépendance en λ de chacun de ses prix, on réalise ces étapes de pricing pour un ensemble de valeurs de mean reversion compris entre 1% et 10%, puis on régresse linéairement le prix en fonction de λ . La pente obtenue nous sert d'indicateur de la dépendance en λ .

Nous n'avons pas opté pour la solution, qui consiste à simplement shifter λ en se plaçant à un niveau de mean reversion donné. Cette sensibilité aurait en effet été associée à un niveau de mean reversion spécifique, ce que nous ne souhaitons pas.

La courbe de taux utilisée est celle de l'EUR au 12/03/2008. La structure de corrélation prise en compte dans la basket calibration est récapitulée dans le tableau 4.5. Les matrices SABR sont reprises dans le tableau 4.4.

Résultats : Les tableaux ci-dessous récapitulent les pentes calculées pour la Bermuda et les one-callables associés pour chaque calibration. Les abréviations suivantes sont utilisées :

volDiagATM : calibration sur la volatilité ATM des swaptions diagonales.

volBasketATM : basket calibration sur les volatilités ATM des taux de swap.

volDiagStrikeEq : calibration sur la volatilité au strike des swaptions diagonales.

volBasketStrikeEq : basket calibration sur les volatilités aux strikes obtenus par la méthode de la moyness.

volBasketOptim : basket calibration sur les volatilités aux strikes obtenus par le procédé d'optimisation.

volBasketOptimBis : basket calibration, où la volatilité du panier est obtenue en calculant la volatilité implicite associée au prix obtenu par le procédé d'optimisation.

BasketOptimPrix : basket calibration sur les prix obtenus par le procédé d'optimisation.

- Sensibilité du prix de la swaption Bermuda à nominal variable en fonction de la méthode de calibration employée :

Slope	Amort									
	10.000%	7.500%	5.000%	2.500%	0.001%	-2.500%	-5.000%	-7.500%	-10.000%	
volDiagATM										
ITM	2.472	2.530	2.589	2.647	2.701	2.753	2.808	2.870	2.937	
ATM	2.351	2.406	2.461	2.513	2.563	2.614	2.669	2.730	2.787	
OTM	1.041	1.073	1.103	1.134	1.166	1.198	1.232	1.266	1.300	
volBasketATM										
ITM	1.959	2.129	2.310	2.502	2.701	2.911	3.135	3.379	3.643	
ATM	1.865	2.025	2.195	2.374	2.563	2.765	2.980	3.210	3.452	
OTM	0.822	0.900	0.983	1.071	1.166	1.266	1.375	1.490	1.612	
volDiagStrikeEq										
ITM	2.942	3.015	3.095	3.178	3.258	3.332	3.399	3.465	3.522	
ATM	2.279	2.331	2.381	2.431	2.486	2.543	2.598	2.649	2.700	
OTM	0.839	0.865	0.894	0.922	0.950	0.981	1.012	1.043	1.074	
volBasketStrikeEq										
ITM	2.279	2.496	2.734	2.990	3.258	3.600	3.967	4.363	4.794	
ATM	1.788	1.945	2.112	2.292	2.486	2.682	2.888	3.104	3.332	
OTM	0.662	0.726	0.796	0.870	0.950	0.972	0.994	1.019	1.048	
volBasketOptim										
ITM	2.276	2.493	2.732	2.989	3.258	3.496	3.753	4.030	4.327	
ATM	1.789	1.945	2.112	2.292	2.486	2.690	2.905	3.132	3.370	
OTM	0.662	0.726	0.796	0.870	0.950	0.985	1.037	1.102	1.177	
volBasketOptimBis										
ITM	2.022	2.197	2.381	2.576	2.780	3.484	4.312	5.268	6.161	
ATM	1.879	2.036	2.202	2.376	2.558	3.272	4.122	5.066	5.703	
OTM	0.959	1.041	1.127	1.220	1.318	1.853	2.545	3.348	4.027	
BasketOptimPrix										
ITM	2.083	2.265	2.454	2.655	2.865	3.592	4.442	5.418	6.335	
ATM	1.867	2.024	2.190	2.363	2.546	3.259	4.105	5.045	5.690	
OTM	0.910	0.989	1.073	1.163	1.257	1.767	2.430	3.201	3.849	

- Sensibilité du prix des swaptions européennes associées à la Bermuda en fonction de la méthode de calibration employée :

VNSwaption européenne de maturité T = 3 ans

Slope	Amort	10.000%	7.500%	5.000%	2.500%	0.001%	-2.500%	-5.000%	-7.500%	-10.000%
volDiagATM										
ITM	0.482	0.360	0.238	0.100	-0.059	-0.218	-0.395	-0.590	-0.791	
ATM	0.733	0.610	0.438	0.239	0.014	-0.218	-0.463	-0.776	-1.124	
OTM	0.316	0.266	0.208	0.139	0.058	-0.036	-0.143	-0.263	-0.401	
volBasketATM										
ITM	-0.038	-0.039	-0.044	-0.047	-0.059	-0.062	-0.065	-0.068	-0.078	
ATM	0.023	0.046	0.039	0.027	0.014	0.025	0.053	0.044	0.033	
OTM	0.041	0.045	0.048	0.053	0.058	0.063	0.071	0.078	0.083	
volDiagStrikeEq										
ITM	0.620	0.469	0.301	0.129	-0.073	-0.295	-0.525	-0.766	-1.050	
ATM	0.698	0.583	0.432	0.239	0.021	-0.224	-0.457	-0.749	-1.088	
OTM	0.242	0.205	0.161	0.106	0.045	-0.026	-0.109	-0.206	-0.316	
volBasketStrikeEq										
ITM	-0.051	-0.054	-0.053	-0.061	-0.073	-0.084	-0.096	-0.109	-0.123	
ATM	0.010	0.031	0.044	0.033	0.020	0.009	0.040	0.049	0.039	
OTM	0.030	0.034	0.038	0.041	0.045	0.045	0.042	0.040	0.040	
volBasketOptim										
ITM	-0.051	-0.053	-0.053	-0.061	-0.073	-0.081	-0.090	-0.090	-0.099	
ATM	0.010	0.031	0.044	0.033	0.020	0.010	0.045	0.047	0.037	
OTM	0.030	0.034	0.038	0.041	0.045	0.046	0.047	0.049	0.052	
volBasketOptimBis										
ITM	-0.039	-0.044	-0.046	-0.051	-0.056	-0.084	-0.124	-0.136	-0.197	
ATM	0.027	0.046	0.038	0.027	0.014	0.041	0.051	0.052	0.024	
OTM	0.050	0.054	0.058	0.061	0.068	0.104	0.139	0.197	0.255	
BasketOptimPrix										
ITM	0.004	0.003	0.004	0.007	0.007	0.008	-0.001	0.013	0.009	
ATM	0.004	0.023	0.015	0.004	-0.009	0.013	0.017	0.016	-0.015	
OTM	0.006	0.006	0.005	0.003	0.002	0.001	0.005	0.012	0.013	

VNSwaption européenne de maturité T = 4 ans

Slope	Amort	10.000%	7.500%	5.000%	2.500%	0.001%	-2.500%	-5.000%	-7.500%	-10.000%
volDiagATM										
ITM	0.310	0.240	0.160	0.066	-0.041	-0.161	-0.295	-0.439	-0.606	
ATM	0.484	0.387	0.286	0.177	0.031	-0.145	-0.346	-0.576	-0.837	
OTM	0.286	0.244	0.191	0.127	0.051	-0.036	-0.139	-0.257	-0.392	
volBasketATM										
ITM	-0.028	-0.030	-0.031	-0.036	-0.041	-0.046	-0.050	-0.052	-0.058	
ATM	0.010	0.004	0.008	0.028	0.031	0.029	0.026	0.022	0.017	
OTM	0.035	0.039	0.043	0.047	0.051	0.057	0.063	0.070	0.078	
volDiagStrikeEq										
ITM	0.415	0.322	0.210	0.082	-0.063	-0.218	-0.391	-0.588	-0.815	
ATM	0.476	0.381	0.278	0.172	0.031	-0.141	-0.339	-0.565	-0.822	
OTM	0.233	0.197	0.155	0.105	0.043	-0.030	-0.115	-0.212	-0.323	
volBasketStrikeEq										
ITM	-0.027	-0.033	-0.042	-0.053	-0.063	-0.071	-0.073	-0.077	-0.081	
ATM	0.011	0.005	0.004	0.025	0.031	0.029	0.026	0.023	0.018	
OTM	0.030	0.032	0.035	0.040	0.043	0.042	0.045	0.048	0.050	
volBasketOptim										
ITM	-0.027	-0.033	-0.042	-0.053	-0.063	-0.059	-0.057	-0.070	-0.088	
ATM	0.011	0.005	0.004	0.025	0.031	0.029	0.026	0.022	0.018	
OTM	0.030	0.032	0.035	0.040	0.043	0.043	0.046	0.051	0.055	
volBasketOptimBis										
ITM	-0.027	-0.032	-0.037	-0.037	-0.040	-0.060	-0.079	-0.098	-0.126	
ATM	0.011	0.004	0.007	0.027	0.031	0.022	0.024	0.035	0.032	
OTM	0.043	0.047	0.051	0.057	0.062	0.085	0.110	0.136	0.175	
BasketOptimPrix										
ITM	0.006	0.005	0.005	0.006	0.010	0.006	0.007	0.013	0.017	
ATM	0.001	-0.006	-0.003	0.016	0.021	0.011	0.010	0.021	0.018	
OTM	0.006	0.006	0.006	0.007	0.008	0.009	0.012	0.012	0.019	

VNSwaption européenne de maturité T = 5 ans

Slope	Amort	10.000%	7.500%	5.000%	2.500%	0.001%	-2.500%	-5.000%	-7.500%	-10.000%
volDiagATM										
ITM	0.177	0.138	0.092	0.041	-0.023	-0.097	-0.182	-0.286	-0.403	
ATM	0.292	0.243	0.181	0.106	0.016	-0.092	-0.219	-0.366	-0.537	
OTM	0.207	0.179	0.145	0.101	0.045	-0.022	-0.101	-0.192	-0.298	
volBasketATM										
ITM	-0.018	-0.020	-0.023	-0.022	-0.023	-0.024	-0.027	-0.031	-0.039	
ATM	0.009	0.010	0.012	0.014	0.015	0.017	0.019	0.019	0.020	
OTM	0.028	0.031	0.036	0.042	0.045	0.048	0.052	0.057	0.063	
volDiagStrikeEq										
ITM	0.242	0.194	0.134	0.061	-0.029	-0.135	-0.259	-0.401	-0.565	
ATM	0.290	0.241	0.180	0.105	0.015	-0.092	-0.218	-0.365	-0.534	
OTM	0.175	0.152	0.122	0.084	0.037	-0.020	-0.087	-0.165	-0.257	
volBasketStrikeEq										
ITM	-0.023	-0.021	-0.022	-0.024	-0.029	-0.037	-0.048	-0.059	-0.069	
ATM	0.008	0.010	0.012	0.013	0.015	0.016	0.018	0.019	0.020	
OTM	0.024	0.027	0.030	0.034	0.037	0.038	0.040	0.044	0.048	
volBasketOptim										
ITM	-0.022	-0.021	-0.022	-0.024	-0.029	-0.038	-0.049	-0.056	-0.055	
ATM	0.008	0.010	0.012	0.013	0.015	0.016	0.017	0.019	0.020	
OTM	0.024	0.027	0.030	0.034	0.037	0.038	0.041	0.045	0.050	
volBasketOptimBis										
ITM	-0.012	-0.016	-0.020	-0.026	-0.029	-0.036	-0.044	-0.062	-0.069	
ATM	0.009	0.011	0.012	0.014	0.015	0.020	0.001	0.029	0.010	
OTM	0.030	0.033	0.037	0.042	0.044	0.058	0.074	0.088	0.107	
BasketOptimPrix										
ITM	0.008	0.010	0.008	0.007	0.005	0.006	0.017	0.012	0.019	
ATM	0.006	0.008	0.010	0.011	0.013	0.017	-0.001	0.026	0.010	
OTM	0.007	0.007	0.008	0.010	0.010	0.011	0.014	0.015	0.016	

VNSwaption européenne de maturité T = 6 ans

Slope	Amort	10.000%	7.500%	5.000%	2.500%	0.001%	-2.500%	-5.000%	-7.500%	-10.000%
volDiagATM										
ITM	0.146	0.135	0.119	0.098	0.072	0.039	-0.003	-0.053	-0.113	
ATM	0.225	0.206	0.181	0.150	0.114	0.070	0.015	-0.051	-0.131	
OTM	0.176	0.168	0.156	0.138	0.115	0.085	0.048	0.003	-0.051	
volBasketATM										
ITM	0.003	0.016	0.032	0.050	0.072	0.096	0.123	0.154	0.190	
ATM	0.020	0.036	0.055	0.080	0.114	0.155	0.203	0.258	0.320	
OTM	0.027	0.044	0.064	0.088	0.115	0.147	0.183	0.226	0.273	
volDiagStrikeEq										
ITM	0.183	0.166	0.142	0.111	0.075	0.031	-0.023	-0.090	-0.169	
ATM	0.219	0.201	0.175	0.141	0.100	0.054	-0.002	-0.070	-0.151	
OTM	0.150	0.142	0.132	0.116	0.096	0.069	0.036	-0.005	-0.054	
volBasketStrikeEq										
ITM	-0.021	-0.003	0.018	0.043	0.075	0.116	0.164	0.221	0.285	
ATM	0.008	0.026	0.046	0.069	0.100	0.139	0.186	0.241	0.305	
OTM	0.020	0.034	0.052	0.072	0.096	0.115	0.137	0.165	0.197	
volBasketOptim										
ITM	-0.021	-0.003	0.018	0.043	0.075	0.113	0.155	0.200	0.250	
ATM	0.008	0.026	0.046	0.069	0.100	0.141	0.190	0.246	0.311	
OTM	0.020	0.034	0.052	0.072	0.096	0.116	0.144	0.177	0.216	
volBasketOptimBis										
ITM	-0.004	0.010	0.028	0.049	0.073	0.137	0.218	0.310	0.400	
ATM	0.024	0.039	0.058	0.082	0.115	0.216	0.334	0.446	0.521	
OTM	0.041	0.057	0.077	0.100	0.127	0.217	0.303	0.422	0.526	
BasketOptimPrix										
ITM	0.015	0.030	0.050	0.074	0.102	0.176	0.267	0.368	0.467	
ATM	0.024	0.040	0.059	0.083	0.117	0.219	0.340	0.456	0.534	
OTM	0.024	0.039	0.056	0.077	0.101	0.184	0.264	0.379	0.486	

VNSwaption européenne de maturité T = 7 ans

Slope	Amort								
	10.000%	7.500%	5.000%	2.500%	0.001%	-2.500%	-5.000%	-7.500%	-10.000%
volDiagATM									
ITM	0.065	0.061	0.055	0.046	0.035	0.020	0.002	-0.021	-0.049
ATM	0.097	0.094	0.088	0.079	0.067	0.050	0.028	0.000	-0.034
OTM	0.082	0.080	0.075	0.068	0.058	0.045	0.027	0.005	-0.022
volBasketATM									
ITM	-0.177	-0.146	-0.102	-0.042	0.035	0.133	0.254	0.403	0.581
ATM	-0.239	-0.194	-0.130	-0.044	0.067	0.207	0.380	0.591	0.844
OTM	-0.189	-0.153	-0.101	-0.032	0.058	0.172	0.312	0.483	0.689
volDiagStrikeEq									
ITM	0.081	0.077	0.069	0.059	0.044	0.025	0.002	-0.027	-0.062
ATM	0.094	0.091	0.086	0.077	0.065	0.048	0.027	0.000	-0.034
OTM	0.073	0.071	0.068	0.062	0.053	0.041	0.025	0.006	-0.018
volBasketStrikeEq									
ITM	-0.224	-0.186	-0.130	-0.055	0.044	0.175	0.345	0.561	0.831
ATM	-0.231	-0.188	-0.126	-0.043	0.064	0.200	0.366	0.568	0.811
OTM	-0.161	-0.130	-0.085	-0.025	0.053	0.142	0.242	0.345	0.470
volBasketOptim									
ITM	-0.224	-0.185	-0.130	-0.055	0.044	0.169	0.319	0.501	0.721
ATM	-0.231	-0.188	-0.126	-0.043	0.064	0.201	0.370	0.576	0.824
OTM	-0.161	-0.130	-0.085	-0.025	0.053	0.145	0.254	0.386	0.545
volBasketOptimBis									
ITM	-0.185	-0.152	-0.106	-0.043	0.039	0.175	0.395	0.751	1.208
ATM	-0.241	-0.195	-0.130	-0.044	0.066	0.244	0.516	0.885	1.367
OTM	-0.209	-0.168	-0.112	-0.036	0.060	0.222	0.481	0.835	1.362
BasketOptimPrix									
ITM	-0.168	-0.130	-0.078	-0.009	0.080	0.238	0.487	0.875	1.374
ATM	-0.252	-0.207	-0.143	-0.058	0.052	0.225	0.493	0.859	1.336
OTM	-0.246	-0.212	-0.163	-0.096	-0.008	0.123	0.343	0.652	1.145

VNSwaption européenne de maturité T = 8 ans

Slope	Amort								
	10.000%	7.500%	5.000%	2.500%	0.001%	-2.500%	-5.000%	-7.500%	-10.000%
volDiagATM									
ITM	0.063	0.070	0.077	0.085	0.093	0.102	0.111	0.120	0.130
ATM	0.091	0.101	0.112	0.123	0.135	0.147	0.159	0.172	0.184
OTM	0.078	0.087	0.096	0.106	0.117	0.128	0.139	0.151	0.163
volBasketATM									
ITM	-0.097	-0.069	-0.030	0.024	0.093	0.183	0.296	0.435	0.604
ATM	-0.130	-0.091	-0.036	0.038	0.134	0.258	0.412	0.601	0.830
OTM	-0.110	-0.077	-0.030	0.033	0.117	0.222	0.355	0.518	0.715
volDiagStrikeEq									
ITM	0.080	0.089	0.099	0.109	0.119	0.130	0.141	0.153	0.165
ATM	0.089	0.098	0.109	0.119	0.131	0.142	0.154	0.167	0.179
OTM	0.069	0.076	0.085	0.093	0.103	0.112	0.122	0.133	0.143
volBasketStrikeEq									
ITM	-0.121	-0.086	-0.037	0.030	0.119	0.235	0.397	0.606	0.870
ATM	-0.125	-0.088	-0.035	0.036	0.131	0.249	0.397	0.578	0.798
OTM	-0.095	-0.066	-0.025	0.030	0.103	0.187	0.280	0.382	0.494
volBasketOptim									
ITM	-0.121	-0.086	-0.037	0.030	0.119	0.231	0.370	0.541	0.747
ATM	-0.125	-0.088	-0.035	0.037	0.131	0.251	0.401	0.586	0.811
OTM	-0.095	-0.066	-0.025	0.030	0.103	0.189	0.293	0.420	0.573
volBasketOptimBis									
ITM	-0.104	-0.074	-0.033	0.023	0.097	0.235	0.469	0.792	1.261
ATM	-0.131	-0.092	-0.037	0.038	0.134	0.299	0.540	0.881	1.359
OTM	-0.121	-0.084	-0.033	0.036	0.125	0.288	0.525	0.876	1.381
BasketOptimPrix									
ITM	-0.091	-0.059	-0.013	0.048	0.127	0.283	0.536	0.886	1.389
ATM	-0.138	-0.100	-0.045	0.028	0.124	0.285	0.523	0.861	1.335
OTM	-0.147	-0.116	-0.071	-0.009	0.073	0.212	0.421	0.749	1.198

VNSwaption européenne de maturité T = 9 ans

Slope	Amort								
	10.000%	7.500%	5.000%	2.500%	0.001%	-2.500%	-5.000%	-7.500%	-10.000%
volDiagATM									
ITM	0.053	0.063	0.074	0.086	0.100	0.116	0.134	0.155	0.178
ATM	0.068	0.080	0.094	0.110	0.128	0.149	0.172	0.198	0.227
OTM	0.061	0.072	0.085	0.099	0.116	0.134	0.155	0.178	0.205
volBasketATM									
ITM	-0.028	-0.009	0.017	0.053	0.100	0.160	0.236	0.329	0.444
ATM	-0.041	-0.016	0.019	0.066	0.128	0.207	0.307	0.430	0.581
OTM	-0.034	-0.012	0.018	0.060	0.116	0.186	0.275	0.385	0.521
volDiagStrikeEq									
ITM	0.066	0.078	0.092	0.107	0.125	0.145	0.167	0.193	0.221
ATM	0.066	0.078	0.091	0.107	0.124	0.144	0.167	0.192	0.220
OTM	0.057	0.067	0.078	0.092	0.107	0.124	0.143	0.165	0.189
volBasketStrikeEq									
ITM	-0.036	-0.013	0.020	0.065	0.125	0.209	0.317	0.457	0.634
ATM	-0.039	-0.015	0.018	0.064	0.124	0.201	0.296	0.414	0.558
OTM	-0.028	-0.008	0.020	0.057	0.107	0.161	0.223	0.293	0.372
volBasketOptim									
ITM	-0.036	-0.013	0.020	0.065	0.125	0.198	0.291	0.405	0.545
ATM	-0.039	-0.015	0.018	0.064	0.124	0.202	0.299	0.419	0.567
OTM	-0.028	-0.008	0.020	0.057	0.107	0.163	0.233	0.319	0.425
volBasketOptimBis									
ITM	-0.029	-0.009	0.018	0.056	0.105	0.208	0.361	0.597	0.918
ATM	-0.041	-0.016	0.019	0.066	0.128	0.242	0.409	0.647	0.983
OTM	-0.036	-0.011	0.023	0.070	0.130	0.239	0.411	0.652	0.978
BasketOptimPrix									
ITM	-0.022	-0.001	0.029	0.069	0.122	0.234	0.399	0.651	0.989
ATM	-0.044	-0.020	0.015	0.061	0.122	0.235	0.400	0.636	0.969
OTM	-0.050	-0.028	0.003	0.045	0.100	0.196	0.356	0.572	0.884

Les résultats sont agrégés de la manière suivante : pour chaque niveau d'amortissement et chaque strike, on observe la sensibilité à la mean reversion de chacun des one-callables pour un shift de 10% et on recense celles qui sont supérieures à un seuil ε . Cette opération est réalisée pour différents niveaux de seuil $\varepsilon = 0.50bp$, $0.75bp$, $1bp$ et $3bp$.

Cette façon d'agréger les résultats a pour but de faire ressortir le fait qu'une différence de sensibilité entre deux calibrations est moins significative, si dans les deux cas, la sensibilité reste inférieure à un seuil satisfaisant. Seul le fait de dépasser ce seuil pour une des deux calibrations rend compte d'un réel avantage.

Pour chaque niveau d'amortissement, le maximum des fréquences des écarts calculés est repris et sert de critère de comparaison entre les différentes méthodes de calibration. Pour rendre la comparaison plus visuelle, on introduit le code couleur suivant : lorsque le résultat est optimal, il est surligné en vert. Lorsqu'il s'agit du pire des résultats obtenus, il est surligné en rouge.

– $\varepsilon = 0.50bp$:

Résultats agrégés	Amort								
	10.0%	7.5%	5.0%	2.5%	0.0%	-2.5%	-5.0%	-7.5%	-10.0%
volDiagATM	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	85.7%	85.7%	71.4%	85.7%	85.7%
ITM	100.0%	100.0%	100.0%	71.4%	57.1%	71.4%	71.4%	85.7%	85.7%
ATM	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	57.1%	85.7%	71.4%	85.7%	85.7%
OTM	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	85.7%	42.9%	71.4%	71.4%	85.7%
volBasketATM	28.6%	28.6%	28.6%	42.9%	85.7%	85.7%	100.0%	100.0%	100.0%
ITM	28.6%	28.6%	14.3%	14.3%	57.1%	71.4%	85.7%	85.7%	85.7%
ATM	28.6%	28.6%	28.6%	28.6%	57.1%	57.1%	71.4%	57.1%	57.1%
OTM	28.6%	28.6%	28.6%	42.9%	85.7%	85.7%	100.0%	100.0%	100.0%
volDiagStrikeEq	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	71.4%	85.7%	71.4%	85.7%	100.0%
ITM	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	71.4%	71.4%	71.4%	85.7%	100.0%
ATM	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	57.1%	85.7%	71.4%	85.7%	85.7%
OTM	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	57.1%	42.9%	71.4%	71.4%	85.7%
volBasketStrikeEq	42.9%	42.9%	28.6%	57.1%	71.4%	85.7%	85.7%	100.0%	100.0%
ITM	42.9%	42.9%	28.6%	57.1%	71.4%	85.7%	85.7%	100.0%	100.0%
ATM	28.6%	28.6%	14.3%	28.6%	57.1%	57.1%	57.1%	57.1%	57.1%
OTM	28.6%	28.6%	28.6%	28.6%	57.1%	57.1%	57.1%	57.1%	71.4%
volBasketOptim	42.9%	42.9%	28.6%	57.1%	71.4%	85.7%	85.7%	100.0%	100.0%
ITM	42.9%	42.9%	28.6%	57.1%	71.4%	85.7%	85.7%	100.0%	100.0%
ATM	28.6%	28.6%	14.3%	28.6%	57.1%	57.1%	57.1%	57.1%	57.1%
OTM	28.6%	28.6%	28.6%	28.6%	57.1%	57.1%	57.1%	71.4%	85.7%
volBasketOptimBis	42.9%	57.1%	57.1%	57.1%	85.7%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%
ITM	28.6%	28.6%	14.3%	28.6%	57.1%	85.7%	85.7%	100.0%	100.0%
ATM	28.6%	28.6%	28.6%	28.6%	57.1%	57.1%	71.4%	71.4%	57.1%
OTM	42.9%	57.1%	57.1%	57.1%	85.7%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%
BasketOptimPrix	42.9%	28.6%	42.9%	42.9%	57.1%	57.1%	57.1%	57.1%	57.1%
ITM	28.6%	28.6%	28.6%	28.6%	57.1%	57.1%	57.1%	57.1%	57.1%
ATM	28.6%	28.6%	28.6%	42.9%	57.1%	57.1%	57.1%	57.1%	57.1%
OTM	42.9%	28.6%	42.9%	28.6%	42.9%	57.1%	57.1%	57.1%	57.1%

– $\varepsilon = 0.75bp$:

Résultats agrégés	Amort								
	10.0%	7.5%	5.0%	2.5%	0.0%	-2.5%	-5.0%	-7.5%	-10.0%
volDiagATM	85.7%	100.0%	100.0%	100.0%	42.9%	71.4%	71.4%	71.4%	85.7%
ITM	57.1%	57.1%	71.4%	57.1%	28.6%	71.4%	71.4%	71.4%	85.7%
ATM	85.7%	100.0%	100.0%	100.0%	42.9%	71.4%	71.4%	71.4%	85.7%
OTM	85.7%	85.7%	100.0%	85.7%	42.9%	42.9%	71.4%	71.4%	71.4%
volBasketATM	28.6%	28.6%	14.3%	14.3%	42.9%	57.1%	57.1%	71.4%	85.7%
ITM	28.6%	14.3%	14.3%	0.0%	28.6%	57.1%	57.1%	57.1%	71.4%
ATM	28.6%	28.6%	14.3%	14.3%	42.9%	57.1%	57.1%	57.1%	57.1%
OTM	28.6%	28.6%	14.3%	14.3%	42.9%	57.1%	57.1%	71.4%	85.7%
volDiagStrikeEq	85.7%	100.0%	100.0%	100.0%	42.9%	71.4%	71.4%	85.7%	85.7%
ITM	85.7%	100.0%	85.7%	71.4%	28.6%	71.4%	71.4%	85.7%	85.7%
ATM	85.7%	100.0%	100.0%	100.0%	42.9%	71.4%	71.4%	71.4%	85.7%
OTM	57.1%	71.4%	85.7%	85.7%	42.9%	28.6%	71.4%	71.4%	71.4%
volBasketStrikeEq	28.6%	28.6%	14.3%	0.0%	42.9%	71.4%	71.4%	85.7%	85.7%
ITM	28.6%	28.6%	14.3%	0.0%	28.6%	71.4%	71.4%	85.7%	85.7%
ATM	28.6%	28.6%	14.3%	0.0%	42.9%	57.1%	57.1%	57.1%	57.1%
OTM	28.6%	14.3%	14.3%	0.0%	42.9%	57.1%	57.1%	57.1%	57.1%
volBasketOptim	28.6%	28.6%	14.3%	0.0%	42.9%	71.4%	71.4%	71.4%	85.7%
ITM	28.6%	28.6%	14.3%	0.0%	28.6%	71.4%	71.4%	71.4%	85.7%
ATM	28.6%	28.6%	14.3%	0.0%	42.9%	57.1%	57.1%	57.1%	57.1%
OTM	28.6%	14.3%	14.3%	0.0%	42.9%	57.1%	57.1%	57.1%	57.1%
volBasketOptimBis	28.6%	28.6%	28.6%	14.3%	42.9%	85.7%	85.7%	100.0%	100.0%
ITM	28.6%	14.3%	14.3%	0.0%	28.6%	71.4%	85.7%	85.7%	85.7%
ATM	28.6%	28.6%	14.3%	14.3%	42.9%	57.1%	57.1%	57.1%	57.1%
OTM	28.6%	28.6%	28.6%	14.3%	42.9%	85.7%	85.7%	100.0%	100.0%
BasketOptimPrix	28.6%	28.6%	14.3%	28.6%	57.1%	57.1%	57.1%	57.1%	57.1%
ITM	28.6%	14.3%	14.3%	0.0%	57.1%	57.1%	57.1%	57.1%	57.1%
ATM	28.6%	28.6%	14.3%	14.3%	42.9%	57.1%	57.1%	57.1%	57.1%
OTM	28.6%	28.6%	14.3%	28.6%	28.6%	57.1%	57.1%	57.1%	57.1%

– $\varepsilon = 1.0bp$:

Résultats agrégés	Amort								
	10.0%	7.5%	5.0%	2.5%	0.0%	-2.5%	-5.0%	-7.5%	-10.0%
volDiagATM	57.1%	71.4%	71.4%	85.7%	42.9%	57.1%	71.4%	71.4%	85.7%
ITM	57.1%	57.1%	42.9%	14.3%	14.3%	57.1%	71.4%	71.4%	85.7%
ATM	57.1%	71.4%	71.4%	85.7%	42.9%	57.1%	71.4%	71.4%	85.7%
OTM	57.1%	57.1%	57.1%	71.4%	42.9%	28.6%	71.4%	71.4%	71.4%
volBasketATM	28.6%	14.3%	14.3%	0.0%	42.9%	57.1%	57.1%	57.1%	57.1%
ITM	14.3%	14.3%	14.3%	0.0%	14.3%	42.9%	57.1%	57.1%	57.1%
ATM	28.6%	14.3%	14.3%	0.0%	42.9%	57.1%	57.1%	57.1%	57.1%
OTM	28.6%	14.3%	14.3%	0.0%	42.9%	57.1%	57.1%	57.1%	57.1%
volDiagStrikeEq	57.1%	57.1%	71.4%	85.7%	42.9%	71.4%	71.4%	71.4%	85.7%
ITM	57.1%	57.1%	57.1%	57.1%	28.6%	71.4%	71.4%	71.4%	85.7%
ATM	57.1%	57.1%	71.4%	85.7%	42.9%	57.1%	71.4%	71.4%	85.7%
OTM	57.1%	57.1%	57.1%	42.9%	28.6%	28.6%	57.1%	71.4%	71.4%
volBasketStrikeEq	28.6%	14.3%	14.3%	0.0%	28.6%	57.1%	57.1%	71.4%	71.4%
ITM	28.6%	14.3%	14.3%	0.0%	28.6%	57.1%	57.1%	71.4%	71.4%
ATM	28.6%	14.3%	14.3%	0.0%	28.6%	57.1%	57.1%	57.1%	57.1%
OTM	14.3%	14.3%	0.0%	0.0%	28.6%	57.1%	57.1%	57.1%	57.1%
volBasketOptim	28.6%	14.3%	14.3%	0.0%	28.6%	57.1%	57.1%	57.1%	57.1%
ITM	28.6%	14.3%	14.3%	0.0%	28.6%	57.1%	57.1%	57.1%	57.1%
ATM	28.6%	14.3%	14.3%	0.0%	28.6%	57.1%	57.1%	57.1%	57.1%
OTM	14.3%	14.3%	0.0%	0.0%	28.6%	57.1%	57.1%	57.1%	57.1%
volBasketOptimBis	28.6%	14.3%	14.3%	14.3%	42.9%	71.4%	85.7%	85.7%	100.0%
ITM	28.6%	14.3%	14.3%	0.0%	14.3%	57.1%	71.4%	71.4%	85.7%
ATM	28.6%	14.3%	14.3%	0.0%	42.9%	57.1%	57.1%	57.1%	57.1%
OTM	28.6%	14.3%	14.3%	14.3%	42.9%	71.4%	85.7%	85.7%	100.0%
BasketOptimPrix	28.6%	28.6%	14.3%	0.0%	42.9%	57.1%	57.1%	57.1%	57.1%
ITM	14.3%	14.3%	0.0%	0.0%	42.9%	57.1%	57.1%	57.1%	57.1%
ATM	28.6%	14.3%	14.3%	0.0%	42.9%	57.1%	57.1%	57.1%	57.1%
OTM	28.6%	28.6%	14.3%	0.0%	14.3%	57.1%	57.1%	57.1%	57.1%

– $\varepsilon = 3bp$:

Résultats agrégés	Amort								
	10.0%	7.5%	5.0%	2.5%	0.0%	-2.5%	-5.0%	-7.5%	-10.0%
volDiagATM	28.6%	28.6%	14.3%	0.0%	0.0%	0.0%	28.6%	42.9%	42.9%
ITM	28.6%	14.3%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	14.3%	28.6%	42.9%
ATM	28.6%	28.6%	14.3%	0.0%	0.0%	0.0%	28.6%	42.9%	42.9%
OTM	14.3%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	28.6%
volBasketATM	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	42.9%	42.9%	57.1%
ITM	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	42.9%	42.9%
ATM	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	42.9%	42.9%	57.1%
OTM	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	28.6%	42.9%	42.9%
volDiagStrikeEq	28.6%	28.6%	14.3%	0.0%	0.0%	0.0%	28.6%	42.9%	42.9%
ITM	28.6%	28.6%	14.3%	0.0%	0.0%	0.0%	28.6%	42.9%	42.9%
ATM	28.6%	28.6%	14.3%	0.0%	0.0%	0.0%	28.6%	42.9%	42.9%
OTM	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	28.6%
volBasketStrikeEq	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	42.9%	42.9%	57.1%
ITM	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	42.9%	42.9%	42.9%
ATM	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	28.6%	42.9%	57.1%
OTM	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	28.6%	42.9%
volBasketOptim	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	28.6%	42.9%	57.1%
ITM	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	28.6%	42.9%	42.9%
ATM	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	28.6%	42.9%	57.1%
OTM	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	42.9%	42.9%
volBasketOptimBis	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	57.1%	57.1%	57.1%
ITM	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	42.9%	57.1%	57.1%
ATM	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	57.1%	57.1%	57.1%
OTM	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	57.1%	57.1%	57.1%
BasketOptimPrix	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	57.1%	57.1%	57.1%
ITM	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	42.9%	57.1%	57.1%
ATM	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	57.1%	57.1%	57.1%
OTM	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	42.9%	57.1%	57.1%

Conclusion : Notre analyse met en évidence les points suivants :

- *Interprétation des résultats avant agrégation :* Sur l'ensemble des 7 swaptions européennes à nominal variable,
 - la basket calibration, en particulier la basket calibration sur les prix obtenus par optimisation (*BasketOptimPrix*), produit les sensibilités les plus faibles, sur les swaptions de maturité 3, 4 et 5 ans, que le nominal soit croissant ou décroissant.
 - Pour les swaptions de maturité supérieure, cette amélioration de la sensibilité dépend du fait que le nominal soit croissant ou décroissant. Pour un nominal décroissant, la basket calibration améliore la calibration en rendant les one-callables moins sensible à la mean reversion. Dans le cas d'un nominal croissant, c'est l'inverse, la sensibilité est globalement dégradée par l'utilisation d'une basket calibration.
- La swaption de maturité 7 ans ressort quasiment systématiquement plus sensible à la mean reversion dans le cas d'une basket calibration que dans le cas d'une calibration sur les swaptions diagonales.

Ces observations sont à mettre en parallèle avec le fait que dans le cas ITM et ATM, les swaptions les plus chères sont celles de maturité 3, 4 ou 5 ans. Alors que dans le cas OTM, les swaptions les plus chères ont une maturité supérieure, i.e. 6, 7, 8 ou 9 ans. Comme la sensibilité à la mean reversion est très atténuée sur les swaptions de maturité inférieure à 5 ans par l'utilisation de la basket calibration et en particulier de la basket calibration par optimisation sur les prix, on en conclut que l'évaluation de l'option switch dans le cas ITM et ATM est plus performante lorsqu'elle se fait avec une basket calibration.

- Pour toutes les méthodes de calibration, le prix de la swaption bermuda à nominal variable croît en fonction de la mean reversion λ .
- *Interprétation des résultats après agrégation :*
 - Pour $\varepsilon = 0.50bp$: deux calibrations ressortent particulièrement. La *BasketOptimPrix* de façon générale et la *volBasketATM* pour les nominaux décroissants. Les deux calibrations sur les swaptions diagonales affichent les plus mauvaises performances dans le cas de nominaux décroissants. Dans le cas de nominaux croissants, l'écart avec la basket calibration est moins net.
 - Pour $\varepsilon = 0.75bp$: le bénéfice d'une basket calibration ressort très clairement pour des nominaux décroissants. Dans le cas d'un nominal croissant, la calibration *volBasketOptimBis* a des performances décevantes. On retiendra de manière générale, que *volBasketStrikeEq* et *volBasketOptim* sont comparables, tout comme *BasketOptimPrix* et *volBasketATM*.
 - Pour $\varepsilon = 1.0bp$: les résultats confirment les observations faites précédemment pour un seuil de $\varepsilon = 0.75bp$.
 - Pour $\varepsilon = 3.0bp$: on observe très nettement le bénéfice d'une basket calibration quelle qu'elle soit pour un nominal décroissant. Pour ce qui est des nominaux croissants, la calibration sur les swaptions diagonales

produit des résultats comparables, voire meilleurs. Les calibrations se basant sur le procédé d'optimisation produisent pour des nominaux croissants des résultats décevants en comparaison aux autres basket calibrations.

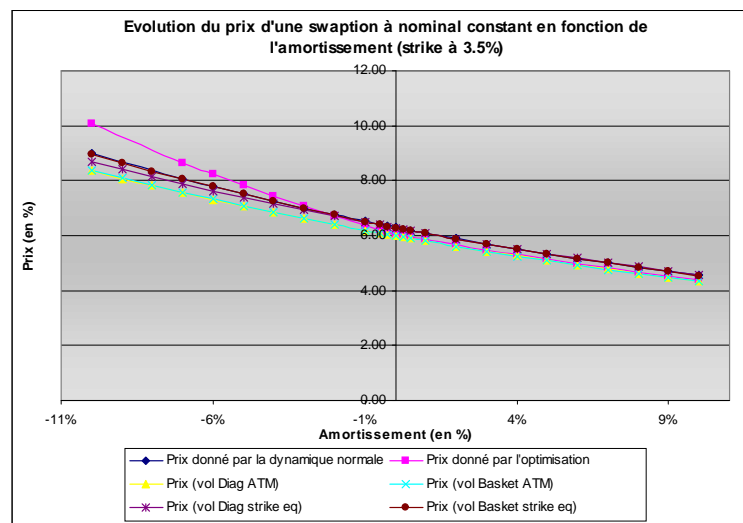
- En résumé cette analyse met en évidence les points suivants :
 - L'évaluation de l'option switch pour les cas ITM et ATM est plus fiable lorsqu'elle est effectuée avec une basket calibration et en particulier une basket calibration sur les prix obtenus par optimisation.
 - Le bénéfice de la basket calibration ressort nettement dans le cas de nominaux décroissants. Il n'apparaît pas dans le cas de nominaux croissants.
 - Les méthodes de calibration reposant sur le procédé d'optimisation produisent des résultats discutables dans le cas de nominaux croissants.
 - Les calibrations *volBasketOptim* et *volBasketOptimBis* affichent dans le cas de nominaux décroissants des performances comparables aux basket calibrations *volBasketATM* et *volBasketStrikeEq*. La calibration sur les prix *BasketOptimPrix* peut produire dans certains cas une amélioration significative et se détache ainsi des autres méthodes de basket calibration.
 - Pour chacune des méthodes de calibration employées, le prix de la swaption Bermuda à nominal variable croît en fonction de la mean reversion.

3.5 Validité de l'approximation du prix de marché d'une VNSwaption via le procédé d'optimisation

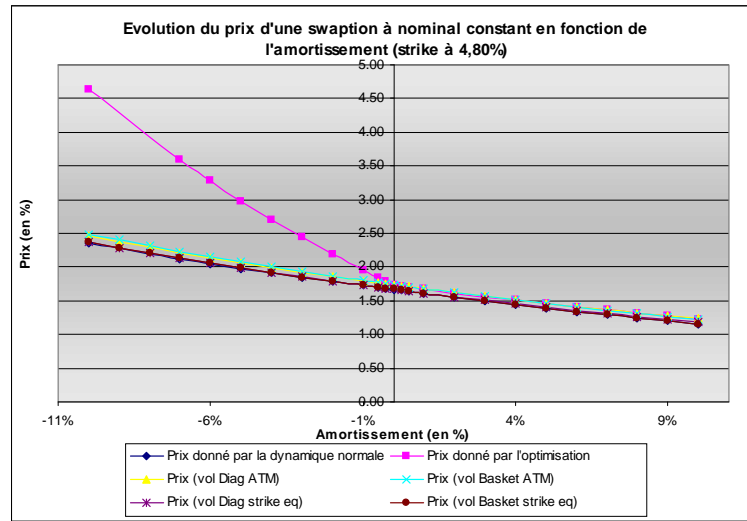
Test : on considère une swaption européenne à nominal variable amortie linéairement. Sa maturité est de 3 ans, son tenor est fixé à 7 ans et sa fréquence est annuelle. On souhaite d'une part comparer le prix de cette swaption pricée avec le modèle HW-1F sous différents mode de calibration, i.e. Diag ATM, Basket ATM, Diag strike Equivalent, Basket Strike Equivalent avec le prix obtenu par le procédé d'optimisation. D'autre part, on compare ce prix avec le prix d'une option sur un panier de taux de swap dont la distribution est approchée par une loi gaussienne. Les prix calculés avec le modèle HW-1F utilisent une mean-reversion λ fixée à 5%.

Résultats : Les graphiques ci-dessous montrent pour chaque strike l'évolution du prix en fonction de l'amortissement pour chaque type de calibration.

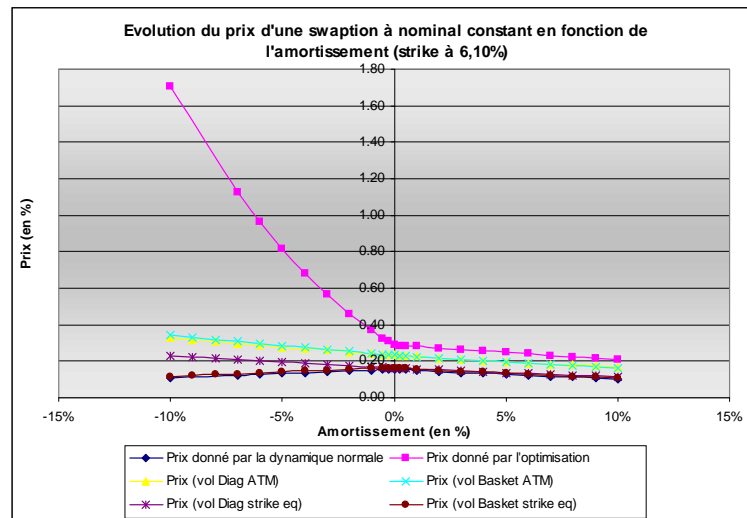
- strike = 3.50% :



- strike = 4.80% :



– strike = 6.10% :



Conclusion : notre analyse met en évidence les points suivants :

- L'évolution des prix obtenus par optimisation est cohérente avec l'évolution des autres prix utilisés comme benchmark uniquement dans le cas d'un nominal décroissant.
- Dans le cas d'un nominal croissant, le procédé d'optimisation sur-estime le prix de la swaption européenne à nominal variable. Cet écart est de plus en plus prononcé à mesure que le strike augmente.

3.6 Synthèse des tests

– *Influence de la mean reversion.*

Nous avons illustré que :

- la **volatilité forward** **croît**, lorsque la mean reversion λ augmente.
- la valeur de l'**option switch** **croît** avec le paramètre exotique de mean reversion λ . Ainsi, la valeur de la swaption Bermuda à nominal constant croît avec le paramètre de mean reversion λ .

- la probabilité calculée à une date future d'exercer l'option à la date d'exercice optimal calculée à l'instant initial décroît en fonction de la mean reversion. **Plus la valeur de λ est faible, plus il est probable que l'option switch ne soit pas "utilisée" et que le droit d'entrer dans le swap soit exercé à la date d'exercice optimal calculée lors du pricing initial.**

Ces observations sont à mettre en parallèle avec les remarques faites précédemment dans la partie théorique :

- Pour une mean reversion faible, la corrélation entre les taux de swap est plus élevée. L'incertitude est moins forte au moment du pricing initial. La probabilité d'exercer l'option à la date d'exercice de la swaption la plus chère au moment du pricing initial est la plus élevée. La valeur de l'option switch est faible.
- Pour une mean reversion forte, la corrélation entre les taux de swap est moins forte. L'incertitude est donc plus élevée au moment du pricing initial. La probabilité d'exercer l'option à la date d'exercice de la swaption la plus chère au moment du pricing initial est faible. La valeur de l'option switch est par conséquent plus élevée.
- *Validité de l'approximation de la dynamique des taux de swap*

Nos tests révèlent que **la qualité de l'approximation de la dynamique d'un taux de swap dans le cadre Hull & White-1 facteur est bien meilleure avec une approximation gaussienne plutôt que log-normale.** Cette différence porte aussi bien sur le calcul des prix des swaptions européennes que sur la distribution du taux de swap à une date future donnée.

Pour l'approximation de la **dynamique d'un panier de taux de swap**, l'approximation gaussienne de chacune des dynamiques de taux de swap composant le panier conduit à une bonne approximation des prix de swaptions européennes à nominal variable dans le cas "in the money" ou "at the money". Toutefois, **cette approximation se détériore avec l'augmentation du strike et l'augmentation de l'amortissement (positif ou négatif) du nominal.** Il existe une disymétrie entre les nominaux croissants et décroissants. Un nominal croissant est un facteur aggravant.

- *Convergence du prix d'une swaption à nominal variable vers le prix d'une swaption à nominal constant.*

La convergence du prix d'une swaption européenne à nominal variable vers celui d'une swaption européenne à nominal constant est **plus rapide dans le cas de la calibration sur les swaptions diagonales.** Cette différence de rapidité de convergence selon la calibration dépend fortement du strike de la swaption. **Lorsque le strike augmente, cette différence devient beaucoup plus significative.** On note une disymétrie entre le cas d'un nominal croissant et d'un nominal décroissant. **La différence de rapidité de convergence est plus prononcée dans le cas de nominaux décroissants.**

Dans le cas de swaptions Bermuda, on a encore une convergence plus rapide des prix calculés sur la base d'une calibration sur les swaptions diagonales. Les différences de convergence sont toujours plus prononcées pour des nominaux décroissants. Le prix d'une swaption Bermuda payeuse à nominal variable calibrée sur les swaptions diagonales est supérieur à celui calculé via la basket calibration dans le cas d'un nominal décroissant, alors qu'il devient inférieur dans le cas d'un nominal croissant.

La calibration sur les swaptions diagonales a donc pour effet de rapidement assimiler le payoff à un payoff à nominal constant, alors que la basket calibration capture mieux l'aspect nominal variable, même lorsque ce premier ne varie que légèrement.

- *Analyse de la sensibilité du pricing au paramètre exotique de mean reversion λ .*

Notre analyse révèle que :

- L'évaluation de l'option switch pour les cas ITM et ATM est plus fiable lorsqu'elle est effectuée avec une basket calibration et en particulier une basket calibration sur les prix obtenus par optimisation.
- Le bénéfice de la basket calibration ressort nettement dans le cas de nominaux décroissants. Il n'apparaît pas dans le cas de nominaux croissants.
- Les méthodes de calibration reposant sur le procédé d'optimisation produisent des résultats discutables dans le cas de nominaux croissants.
- Les calibrations sur les volatilités utilisant les strikes ou le prix obtenus par optimisation affichent dans le cas de nominaux décroissants des performances comparables aux basket calibrations sur les volatilités ATM et au strike utilisant la méthode de la moneyness. La basket calibration sur les prix obtenus par optimisation peut produire sous certaines conditions une amélioration significative et se détache ainsi des autres méthodes de basket calibration.
- Pour chacune des méthodes de calibration employées, le prix de la swaption Bermuda à nominal variable croît en fonction de la mean reversion.

En prenant comme référence les prix obtenus par la basket calibration, la sensibilité finale du prix de la swaption Bermuda au paramètre de mean reversion λ est :

- sous-estimée par l'utilisation de la calibration sur les swaptions diagonales dans le cas de nominaux croissants. La valeur de l'option switch croît en réalité plus vite en fonction de λ .
- sur-estimée par l'utilisation de la calibration sur les swaptions diagonales dans le cas de nominaux décroissants. La valeur de l'option switch croît en réalité moins vite en fonction de λ .

– Analyse de la basket calibration par les prix

Notre analyse met en évidence les points suivants :

- L'évolution des prix obtenus par optimisation est cohérente avec l'évolution des autres prix utilisés comme benchmark uniquement dans le cas d'un nominal décroissant.
- Dans le cas d'un nominal croissant, le procédé d'optimisation sur-estime le prix de la swaption européenne à nominal variable. Cet écart est de plus en plus prononcé à mesure que le strike augmente.

4 Détails du paramétrage utilisé lors des tests

- Paramétrage du test portant sur la date d'exercice optimal et l'option switch d'une Bermuda à nominal constant.

Tableau 4.1 : Courbe de taux ZC.

Courbe de taux	
Time	Rate
0.003	2.1000%
0.258	1.9199%
0.514	2.1076%
1.017	2.1500%
2.036	2.4500%
3.050	3.0500%
5.078	3.2500%
7.108	3.8500%
10.153	4.1000%
15.225	4.3000%
20.297	4.7000%
25.369	4.8500%
30.444	4.9000%

Tableau 4.2 : Volatilités implicites ATM des swaptions diagonales.

Le paramètre β est choisi constant et égal à 0.5.

Tableau 4.5 : structure de corrélation des taux de swap nécessaire à la basket calibration sur les volatilités. Chaque matrice correspond à une maturité, de sorte que chacune d'elles représente les corrélations entre les taux de swap de différentes tenors pour une maturité donnée.

3Y	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100.0%	97.7%	95.3%	93.1%	91.1%	89.3%	87.6%	86.0%	84.7%
2	97.7%	100.0%	99.1%	97.8%	96.2%	94.8%	93.3%	92.0%	90.9%
3	95.3%	99.1%	100.0%	99.5%	98.5%	97.5%	96.4%	95.3%	94.4%
4	93.1%	97.8%	99.5%	100.0%	99.6%	99.0%	98.2%	97.4%	96.6%
5	91.1%	96.2%	98.5%	99.6%	100.0%	99.7%	99.2%	98.7%	98.1%
6	89.3%	94.8%	97.5%	99.0%	99.7%	100.0%	99.8%	99.4%	99.1%
7	87.6%	93.3%	96.4%	98.2%	99.2%	99.8%	100.0%	99.9%	99.6%
8	86.0%	92.0%	95.3%	97.4%	98.7%	99.4%	99.9%	100.0%	99.9%
9	84.7%	90.9%	94.4%	96.6%	98.1%	99.1%	99.6%	99.9%	100.0%

4Y	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100.0%	97.9%	95.7%	93.5%	91.7%	90.1%	88.6%	87.4%	86.3%
2	97.9%	100.0%	99.1%	97.8%	96.3%	95.1%	93.9%	92.8%	91.9%
3	95.7%	99.1%	100.0%	99.5%	98.6%	97.7%	96.8%	95.9%	95.1%
4	93.5%	97.8%	99.5%	100.0%	99.7%	99.1%	98.4%	97.7%	97.1%
5	91.7%	96.3%	98.6%	99.7%	100.0%	99.8%	99.3%	98.8%	98.4%
6	90.1%	95.1%	97.7%	99.1%	99.8%	100.0%	99.8%	99.5%	99.2%
7	88.6%	93.9%	96.8%	98.4%	99.3%	99.8%	100.0%	99.9%	99.7%
8	87.4%	92.8%	95.9%	97.7%	98.8%	99.5%	99.9%	100.0%	99.9%
9	86.3%	91.9%	95.1%	97.1%	98.4%	99.2%	99.7%	99.9%	100.0%

5Y	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100.0%	97.5%	95.4%	93.6%	92.2%	91.1%	90.0%	89.1%	88.2%
2	97.5%	100.0%	99.0%	97.9%	96.7%	95.8%	94.9%	94.1%	93.3%
3	95.4%	99.0%	100.0%	99.4%	98.7%	98.0%	97.3%	96.6%	96.0%
4	93.6%	97.9%	99.4%	100.0%	99.7%	99.2%	98.7%	98.1%	97.6%
5	92.2%	96.7%	98.7%	99.7%	100.0%	99.8%	99.4%	99.0%	98.6%
6	91.1%	95.8%	98.0%	99.2%	99.8%	100.0%	99.8%	99.6%	99.3%
7	90.0%	94.9%	97.3%	98.7%	99.4%	99.8%	100.0%	99.9%	99.7%
8	89.1%	94.1%	96.6%	98.1%	99.0%	99.6%	99.9%	100.0%	99.9%
9	88.2%	93.3%	96.0%	97.6%	98.6%	99.3%	99.7%	99.9%	100.0%

6Y	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100.0%	97.2%	95.4%	93.9%	92.6%	91.6%	90.7%	89.8%	89.1%
2	97.2%	100.0%	99.0%	98.0%	97.0%	96.2%	95.4%	94.7%	94.0%
3	95.4%	99.0%	100.0%	99.5%	98.9%	98.2%	97.6%	97.0%	96.4%
4	93.9%	98.0%	99.5%	100.0%	99.7%	99.3%	98.8%	98.3%	97.8%
5	92.6%	97.0%	98.9%	99.7%	100.0%	99.8%	99.5%	99.1%	98.7%
6	91.6%	96.2%	98.2%	99.3%	99.8%	100.0%	99.8%	99.6%	99.3%
7	90.7%	95.4%	97.6%	98.8%	99.5%	99.8%	100.0%	99.9%	99.7%
8	89.8%	94.7%	97.0%	98.3%	99.1%	99.6%	99.9%	100.0%	99.9%
9	89.1%	94.0%	96.4%	97.8%	98.7%	99.3%	99.7%	99.9%	100.0%

7Y	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100.0%	97.7%	95.7%	94.1%	92.7%	91.7%	90.8%	89.9%	89.1%
2	97.7%	100.0%	99.1%	98.1%	97.0%	96.2%	95.3%	94.6%	93.8%
3	95.7%	99.1%	100.0%	99.5%	98.8%	98.2%	97.5%	96.9%	96.3%
4	94.1%	98.1%	99.5%	100.0%	99.7%	99.3%	98.8%	98.3%	97.8%
5	92.7%	97.0%	98.8%	99.7%	100.0%	99.8%	99.5%	99.1%	98.7%
6	91.7%	96.2%	98.2%	99.3%	99.8%	100.0%	99.9%	99.6%	99.3%
7	90.8%	95.3%	97.5%	98.8%	99.5%	99.9%	100.0%	99.9%	99.7%
8	89.9%	94.6%	96.9%	98.3%	99.1%	99.6%	99.9%	100.0%	99.9%
9	89.1%	93.8%	96.3%	97.8%	98.7%	99.3%	99.7%	99.9%	100.0%

8Y	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100.0%	97.9%	95.9%	94.4%	93.2%	92.3%	91.4%	90.6%	89.8%
2	97.9%	100.0%	99.2%	98.2%	97.2%	96.4%	95.6%	94.9%	94.2%
3	95.9%	99.2%	100.0%	99.5%	98.9%	98.3%	97.7%	97.1%	96.5%
4	94.4%	98.2%	99.5%	100.0%	99.7%	99.3%	98.8%	98.4%	97.9%
5	93.2%	97.2%	98.9%	99.7%	100.0%	99.8%	99.5%	99.1%	98.8%
6	92.3%	96.4%	98.3%	99.3%	99.8%	100.0%	99.9%	99.6%	99.4%
7	91.4%	95.6%	97.7%	98.8%	99.5%	99.9%	100.0%	99.9%	99.7%
8	90.6%	94.9%	97.1%	98.4%	99.1%	99.6%	99.9%	100.0%	99.9%
9	89.8%	94.2%	96.5%	97.9%	98.8%	99.4%	99.7%	99.9%	100.0%

9Y	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100.0%	97.9%	95.9%	94.4%	93.2%	92.3%	91.4%	90.6%	89.8%
2	97.9%	100.0%	99.2%	98.2%	97.2%	96.4%	95.6%	94.9%	94.2%
3	95.9%	99.2%	100.0%	99.5%	98.9%	98.3%	97.7%	97.1%	96.5%
4	94.4%	98.2%	99.5%	100.0%	99.7%	99.3%	98.8%	98.4%	97.9%
5	93.2%	97.2%	98.9%	99.7%	100.0%	99.8%	99.5%	99.1%	98.8%
6	92.3%	96.4%	98.3%	99.3%	99.8%	100.0%	99.9%	99.6%	99.4%
7	91.4%	95.6%	97.7%	98.8%	99.5%	99.9%	100.0%	99.9%	99.7%
8	90.6%	94.9%	97.1%	98.4%	99.1%	99.6%	99.9%	100.0%	99.9%
9	89.8%	94.2%	96.5%	97.9%	98.8%	99.4%	99.7%	99.9%	100.0%

10Y	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100.0%	97.9%	95.9%	94.4%	93.2%	92.3%	91.4%	90.6%	89.8%
2	97.9%	100.0%	99.2%	98.2%	97.2%	96.4%	95.6%	94.9%	94.2%
3	95.9%	99.2%	100.0%	99.5%	98.9%	98.3%	97.7%	97.1%	96.5%
4	94.4%	98.2%	99.5%	100.0%	99.7%	99.3%	98.8%	98.4%	97.9%
5	93.2%	97.2%	98.9%	99.7%	100.0%	99.8%	99.5%	99.1%	98.8%
6	92.3%	96.4%	98.3%	99.3%	99.8%	100.0%	99.9%	99.6%	99.4%
7	91.4%	95.6%	97.7%	98.8%	99.5%	99.9%	100.0%	99.9%	99.7%
8	90.6%	94.9%	97.1%	98.4%	99.1%	99.6%	99.9%	100.0%	99.9%
9	89.8%	94.2%	96.5%	97.9%	98.8%	99.4%	99.7%	99.9%	100.0%

11Y	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100.0%	97.9%	95.9%	94.4%	93.2%	92.3%	91.4%	90.6%	89.8%
2	97.9%	100.0%	99.2%	98.2%	97.2%	96.4%	95.6%	94.9%	94.2%
3	95.9%	99.2%	100.0%	99.5%	98.9%	98.3%	97.7%	97.1%	96.5%
4	94.4%	98.2%	99.5%	100.0%	99.7%	99.3%	98.8%	98.4%	97.9%
5	93.2%	97.2%	98.9%	99.7%	100.0%	99.8%	99.5%	99.1%	98.8%
6	92.3%	96.4%	98.3%	99.3%	99.8%	100.0%	99.9%	99.6%	99.4%
7	91.4%	95.6%	97.7%	98.8%	99.5%	99.9%	100.0%	99.9%	99.7%
8	90.6%	94.9%	97.1%	98.4%	99.1%	99.6%	99.9%	100.0%	99.9%
9	89.8%	94.2%	96.5%	97.9%	98.8%	99.4%	99.7%	99.9%	100.0%

5 References

- [1] "Basket Calibration and Variable Notional Swaptions" - A. Chaix - IXIS-CIB, May 3, 2006
- [2] "Bermudan Swaption" - A. Triki - IXIS-CIB, July 20, 2005