RÉSUMÉ DE COURS: CALCUL DIFFÉRENTIEL

NIVEAU:MP

EamdaouiPrépas
Les mathématiques en prépas

CONTEXTE

Soient E, F, G et H des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimensions finies non nulles. On pose $\dim E = n$ et $\dim F = p$.
Soient $U \subset E$ et $V \subset F$ deux ouverts non vide, $a \in U$, $f : U \to F$, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p)$ une base de F.

DÉRIVÉES PARTIELLES ET DIFFÉRENTIELLES

Définition: Dérivée selon un vecteur

On dit que f admet une dérivée en a suivant $h \in E \setminus \{0\}$ si $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{f(a+th)-f(a)}{t}$ existe ou encore si $\varphi : t \longmapsto f(a+th)$ est dérivable en 0. Dans ce cas, cette limite s'appelle la dérivée de f en a suivant h et on la note $\varphi'(0) = D_h f(a)$.

Définition: Dérivées partielles

- *On appelle dérivées partielles de f en a les dérivées, lorsqu'elles existent, de f en a suivant les vecteurs $e_1, \ldots, e_n$.*
- *La dérivée en a selon e_i se note $D_i f(a)$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.*
- *$x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ s'appelle la i-ème application dérivée partielle de f sur U. On la note $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$.*

DIFFÉRENTIELLE

Définition: Différentielle en un point

On dit que f est différentiable en a s'il existe une application linéaire ℓ de E vers F et ε une application de E dans F continue et nulle en 0 telles que $\forall h \in E$ tel que $a+h \in U$: $f(a+h) \underset{h\to 0_E}{=} f(a) + \ell(h) + \|h\|\varepsilon(h)$ L'application ℓ est unique, appelée la différentielle de f en a et notée $\mathrm{d}f_a$. On écrit $o(\|h\|)$ pour $\|h\|\varepsilon(h)$.

Propriété

1. *f est différentiable en $a \Rightarrow f$ est continue en a.*
2. *f est différentiable en $a \Rightarrow f$ est dérivable en a selon tout vecteur et: $\forall h \in E \setminus \{0\}, \mathrm{d}f_a(h) = D_h f(a)$.*
3. *Si $E = \mathbb{R}$. L'application f est différentiable en a si, et seulement, si f est dérivable en a. Auquel cas, $\forall h \in \mathbb{R}, \mathrm{d}f_a(h) = hf'(a)$.*
4. *Si f est différentiable en a alors les dérivées partielles de f en a existent et on a $\forall h = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} h_i e_i \in E$,*

$$\mathrm{d}f_a(h) = D_h f(a) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

Définition: Différentielle

On dit que f est différentiable sur U si f est différentiable en tout point de U. L'application $\mathrm{d}f : x \in U \mapsto \mathrm{d}f_x \in \mathcal{L}(E,F)$ s'appelle la différentielle de f sur U.

FONCTIONS DE CLASSE $\mathcal{C}^k$

Définition

On dit que f est de classe :

- *$\mathcal{C}^k$ ($k \geqslant 1$) sur U si ses dérivées partielles d'ordre k existent et sont continues sur U.*
- *$\mathcal{C}^\infty$ sur U si $\forall k \in \mathbb{N}^*$, f est de $\mathcal{C}^k$ sur U.*

La notion de fonction de classe $\mathcal{C}^k$ ne dépend pas du choix de la base $\mathcal{B}$.

Propriété: Somme

*Soit $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. Soient $f, g : U \subset E \longrightarrow F$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^k$ alors $\lambda f + \mu g$ est de classe $\mathcal{C}^k$ et*

$$\frac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial x_i} = \lambda \frac{\partial f}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial g}{\partial x_i}$$

Propriété: Composition par une application bilinéaire

Soit $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. Soit $f : U \subset E \longrightarrow F, g : U \subset E \longrightarrow G$ et $B : F \times G \longrightarrow H$ bilinéaire. Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^k$ alors $B(f,g)$ l'est aussi et

$$\frac{\partial B(f,g)}{\partial x_i} = B\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}, g\right) + B\left(f, \frac{\partial g}{\partial x_i}\right)$$

Propriété

Si $f \in \mathcal{C}^k(U,F)$ et $g \in \mathcal{C}^k(U,\mathbb{K})$, alors $gf \in \mathcal{C}^k(U,F)$. Si de plus g ne s'annule pas sur U alors $\dfrac{f}{g}$ est de classe $\mathcal{C}^k$

Propriété: Lien avec les composantes

Soit $f : U \subset E \longrightarrow F$. Alors f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur U ssi ses fonctions composantes sont de classe $\mathcal{C}^k$ sur U

Propriété: Règle de la chaine

Soit $f : U \subset E \longrightarrow F$ et $g : V \subset F \longrightarrow G$ deux fonctions de $\mathcal{C}^k$ telles que $f(U) \subset V$, alors $g \circ f$ est de $\mathcal{C}^k$ et $\forall a \in U$

$$\forall j \in [\![1,n]\!], \quad \frac{\partial(g\circ f)}{\partial x_j}(a) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a).\frac{\partial g}{\partial y_i}(f(a))$$

avec $f_1, \cdots, f_p$ les fonctions coordonnées de f.

Propriété: Formule d'intégration

Soit $f : U \subset E \longrightarrow F$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ et $\gamma : [0,1] \longrightarrow E$ est un arc de classe $\mathcal{C}^1$ inscrit dans U d'extrémités $a = \gamma(0)$ et $b = \gamma(1)$ alors

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 \mathrm{d}f_{\gamma(t)}(\gamma'(t))\,\mathrm{d}t$$

En particulier si U est un ouvert connexe par arcs alors f est constante si, et seulement si, $\mathrm{d}f = \widetilde{0}$

Propriété: Théorème de Schwarz

Soit $f \in C^2(U,F)$. Alors :

$$\forall i \neq j \in [\![1,n]\!]^2, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

DÉVELOPPEMENT DE TAYLOR D'ORDRE 2

Propriété

Soit $f \in \mathcal{C}^2(U)$. Alors $\forall h = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} h_i e_i \in E$ tel que $a+h \in U$ on a :

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) + \circ\left(\|h\|^2\right).$$

APPLICATIONS AUX EXTRÉMUMS

Propriété: Caractérisation de points critiques

Si $f : U \subset E \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $a \in U$. Alors

$$a \text{ est point critique de } f \iff \forall i \in [\![1,n]\!], \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$$

Propriété: Extrémums en dimension 2

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et a critique de f. On note $r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b), s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)$ et $t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)$.

1. *Si $s^2 - rt < 0$ et $r > 0$ alors f admet un minimum local stricte en a.*
2. *Si $s^2 - rt < 0$ et $r < 0$ alors f admet un maximum local stricte en a.*
3. *Si $s^2 - rt > 0$ alors a est un point col ou selle de f*
4. *Si $s^2 - rt = 0$, on ne peut pas conclure*

MATRICE JACOBIENNE

Définition

On appelle matrice jacobienne relative aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ d'une application $f : U \subset E \longrightarrow F$ différentiable en $a \in U$ la matrice de l'application linéaire $\mathrm{d}f_a$ relative aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$: $\mathrm{J_f}(a) = \underset{\mathcal{B},\mathcal{C}}{\mathrm{Mat}}(\mathrm{d}f_a) \in \mathrm{M}_{p,n}(\mathbb{R})$

Si $f_1, \cdots, f_p$ les coordonnées de f: $\mathrm{J_f}(a) = \left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$

GRADIENT

E désigne un espace euclidien dont on note $(.|.)$ le produit scalaire

Propriété: Gradient

*Si $f : U \subset E \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ alors pour tout $a \in U$, il existe un unique vecteur dans E noté $\nabla f(a)$ et appelé gradient de f en a vérifiant $\forall h \in E, \quad D_h f(a) = (\nabla f(a)|h)$
De plus, si $\mathcal{B} = (e1, \cdots, e_n)$ est une BON de E alors*

$$\nabla f(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) e_i$$

CONTACT INFORMATION

Web www.elamdaoui.com
Email elamdaoui@gmail.com
Phone 06 62 30 38 81