Сборник распространенных вопросов, примеров и контрпримеров по курсу математического анализа 3 семестра

Коллектив 2 курса ФБМФ 2020-2021

10 января 2021 г.

Содержание

1 Многомерный анализ

1.1 Теорема о неявной функции. Отображения

1.**Верно ли, что если якобиан отображения всюду в $\mathbb{R}^2$ отличен от нуля, то отображение является взаимно однозначным?**

Нет, неверно - в теореме говорится лишь о локальной обратимости. Так,

$$\begin{cases} U = e^x \cos y \\ V = e^x \sin y \end{cases} \quad I = \begin{Vmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{Vmatrix} = e^{2x} \neq 0 \ \ \forall (x,y) \ \in \mathbb{R}^2$$

а в то же время отображение, очевидно, взаимно однозначным не является: $\forall x, y \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z} \ \ F(x,y) = F(x, y + 2\pi k)$.

2.**Может ли область в $\mathbb{R}^n$ при непрерывно дифференцируемом отображении переходить в множество, не являющееся открытым? Не являющееся линейно связным?**

Нет, не может - это утверждает теорема о сохранении области(т.е. открытого линейно связного множества) при непрерывно дифференцируемом отображении, доказанная в курсе.

3.**Приведите пример уравнения, задающего неявно более чем одну непрерывную функцию**

Например, $x^2 + y^2 - 1 = 0$ на R^2 задаёт непрерывные функции $y_1 = \sqrt{1 - x^2}$ и $y_2 = -\sqrt{1 - x^2}$ на $x \in [-1; 1]$. Заметим, что если убрать условие непрерывности, то таких функций можно придумать несчётное количество даже самым простым способом: до точки $a \in [-1; 1]$ взять $y = y_1$, а после неё - $y = y_2$, и т.к. точек на отрезке несчётное количество то и функций будет как минимум столько же.

4.**Как определяют дифференциал функции на поверхности $M \subset \mathbb{R}^n$ в точке x_0 , в которой поверхность является гладкой?**

В таком случае имеют в виду, что дифференциал определён на касательной плоскости к поверхности M в точке x_0.

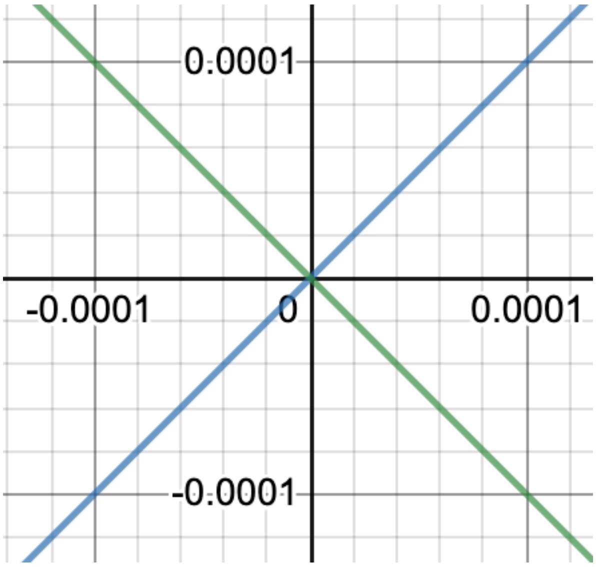
5. **Что значит что функция является непрерывно дифференцируемой на замкнутом множестве?**

Функцию $\varphi : G \to \mathbb{R}$, где G - открытое множество в $\mathbb{R}^n$, называют непрерывно дифференцируемой на множестве $\bar{G}$, если φ и её частные производные $\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}, x \in G, j \in \overline{1, n}$ непрерывны на G и имеют конечные пределы в любой точке ∂G. В этом случае полагают:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x^0) \equiv \lim_{x \to x^0} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x)$$

6.**Приведите пример $F(x,y)$ такой, что в некоторой точке (x_0, y_0) выполнены все условия теоремы о неявной функции кроме $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$, и теорема не выполняется.**

Рассмотрим $F(x,y) = x^2 - y^2$. Очевидно, эта функция непрерывно дифференцируема в окрестности точки $(0,0)$ и $F(0,0) = 0$. Но при этом $F'_y = -2y$, и $F'_y(0,0) = 0$. Очевидно, что F задаёт в окрестности нуля несколько непрерывных функций и единственности нет:



1.2 Экстремумы функций многих переменных

1.**Приведите пример, когда необходимое условие выполняется, но экстремума в этой точке нет.**

Рассмотрим $f(x,y) = xy$. $df(0,0) = 0$, но при этом экстремума в этой точке нет: $f(t,t) = t^2 > 0, f(t,-t) = -t^2 < 0\ \forall t \not= 0 \in \mathbb{R}$.

2.**Приведите пример, когда второй дифференциал функции является полуопределённой квадратичной формой, и экстремума нет.**

$f(x,y) = x^4+y^4-2x^2$, тогда $d^2f = (12x^2-4)dx^2+12y^2dy^2$. В точке (0,0) эта форма отрицательно полуопределена, но $f(t;0) = t^4 - 2t^2 < 0$ при достаточно малых t, а $f(0;t) = t^4 > 0$, значит экстремума нет.

3. **Приведите пример, когда второй дифференциал функции в некоторой точке является полуопределённой квадратичной формой, и в ней достигается строгий минимум.**

Возьмём функцию из предыдущего пункта, но в точке $(-1;0)$ - легко проверить, что эта точка является стационарной для нашей функции, и в ней действительно достигается строгий минимум, т.к.$\Delta u(\Delta x, \Delta y) = (-1+\Delta x)^4+\Delta y^4-2(\Delta x-1)^2+1 = 1-4\Delta x+6\Delta x^2+o(\Delta x^2)+\Delta y^4 = 2\Delta x^2+4\Delta x-2+1 = 4\Delta x^2+\Delta y^4+o(\Delta x^2) > 0$ при достаточно малых Δx.

4.**Приведите пример непрерывно дифференцируемой функции, имеющей бесконечное число строгих максимумов, но ни одного минимума**

$f = cos(x) - y^2$. Найдём стационарные точки:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = -sin(x) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi k \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow d^2f = \begin{Vmatrix} -cos(x) & 0 \\ 0 & -2 \end{Vmatrix}$$

Эта форма неопределена, если cos(x)<0, и отрицательно определена, если cos(x)>0, а поэтому функция имеет счётное число минимумов и ни одного максимума.

5.**Приведите пример дифференцируемой функции двух переменных, не имеющей экстремума в начале координат, но такую, что её сужение на любую прямую, проходящую через начало координат, имеет строгий локальный минимум.**

$U(x,y) = (y-3x^2)(y-x^2)$. Проверим, что в (0,0) нет экстремума: $U(0,\Delta) = \Delta^2$, $U(\Delta, 2\Delta^2) = -\Delta^4$. Возьмём прямую y = kx, тогда функция будет иметь вид $U = (kx-x^2)(kx-3x^2)$, тогда с малым приращением Δ (исключая Δ^2 как $o(\Delta)$) U(Δ) = $k^2\Delta^2 > 0$, а значит это минимум.

6.**Исследовать функцию $f(x,y) = (x^2+y^2)^{2/3}$ на экстремумы**

Рассмотрим малую окрестность точки M(0,0). Точку данной окрестности A, отличную от M(0,0), можно представить в виде $f(x+dx, y+dy)$, где значения dx и dy не

равны нулю одновременно, т. е. $dx \cdot dy \neq 0$.
Значение функции в данной произвольной точке А:

$$f(A) = (dx^2 + dy^2)^{2/3}$$

Так как $dx \cdot dy \neq 0, \quad f(A) > 0$
Отсюда следует, что для любой точки А из окрестности М(0,0) значение $f(A) > 0 = f(M)$. Отсюда следует, что М(0,0) - минимум данной функции.
Проверим существование других экстремумов:

$$f'_x = (2/3(x^2 + y^2)^{-1/3}) \cdot 2x = 4x/3((x^2 + y^2)^{1/3})$$

Аналогично

$$f'_y = 4y/3((x^2 + y^2)^{1/3})$$

Система:

$$\begin{cases} f'_x = 0, \\ f'_y = 0 \end{cases}$$

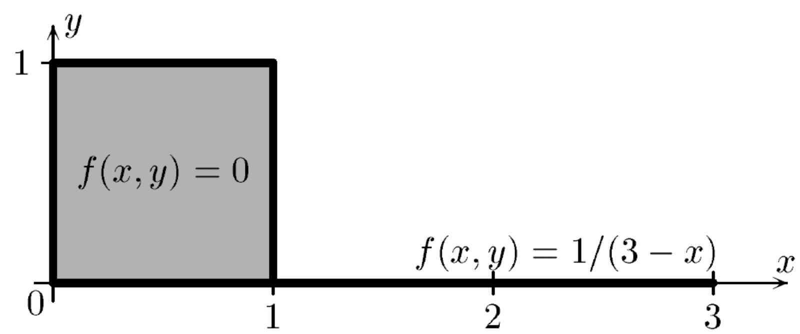
не имеет решений.
В точке (0,0) функция не дифференцируема, но непрерывна и имеет значение, по определению мы доказали выше, что точка (0,0) является минимумом. Отсюда следует, что функция имеет один экстремум - глобальный минимум в точке (0,0).

2 Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы

2.1 Кратный интеграл Римана

1.**Верно ли, что если функция интегрируема на измеримом множестве в смысле Римана, то она на этом множестве ограничена?**

Нет, неверно. Следующий пример показывает, что функция $f(x)$ может быть интегрируема на измеримом множестве E (в смысле сумм Римана), но не быть ограниченной на E. Рассмотрим в $\mathbb{R}^2$ множество $E = ([0,1] \times [0,1]) \bigcup ((1,3) \times \{0\})$



Пусть

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & x \in [0,2] \\ 1/(3-x), & x \in (2,3) \end{cases}$$

Поскольку $f(x,0) \to \infty$ при $x \to 3$, то функция f неограничена на множестве E. Пусть $T = \{E_i\}_{i=1}^{I}$ - разбиение множества E мелкости $l(T) \leq 1$. Поскольку $\operatorname{diam}(E_i) \leq 1\ \forall i \in \{1,\ldots,I\}$, то либо E_i не пересекается с квадратом $[0,1]\times[0,1]$, либо E_i не пересекается с интервалом $(1,3)\times\{0\}$. В первом случае $\mu(E_i) = 0$. Во втором - для любой точки $\xi_i = (x_i, y_i) \in E_i$ выполняется $f(\xi_i) = 0$. Итак, $f(\xi_i) \cdot \mu(E_i) = 0\ \forall i \in \{1,\ldots,I\}$, поэтому

$$\sigma(f; \mathrm{T}; \xi_{\mathrm{T}}) = 0 \text{ при } \ell(\mathrm{T}) \leq 1$$

следовательно, интеграл Римана функции f по множеству E существует и равен 0. В смысле сумм Римана интеграл от неограниченной функции не существует.

2.**А если добавить условие $\overline{E} = \overline{\operatorname{int} E}$?**

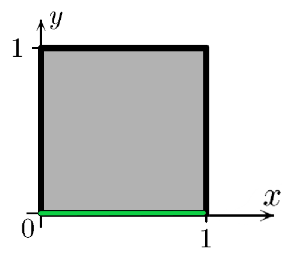
Для такого случая уже есть теорема(необходимое условие интегрируемости): если $\overline{E} = \overline{\operatorname{int} E}$ и функция $f(x)$ интегрируема на множестве E, то $f(x)$ ограничена на E.

3.**Верно ли, что если функция f интегрируема на множествах X и Y, то она интегрируема на $X \cup Y$?**

Нет, это может быть неверно в случае неограниченной функции f.

Пусть

$$X = (0,1) \times (0,1), Y = (0,1) \times \{0\}$$



$$f(x) = \begin{cases} 0, & y \in (0,1) \\ \frac{1}{x}, & y = 0 \end{cases}$$

Поскольку суммы Римана функции f по любому разбиению множеств X и Y равны нулю, то интегралы функции f по множествам X и Y существуют и равны 0.

Поскольку для множества $X \cup Y = (0,1) \times [0,1)$ имеет место условие

$$\overline{\operatorname{int}(X \cup Y)} = \overline{X \cup Y} = [0,1] \times [0,1]$$

и функция f неограничена на множестве $X \cup Y$, то в силу теоремы из п.2 функция f неинтегрируема на $X \cup Y$

4.**Приведите пример функции, для которой существуют оба повторных интеграла, но они не равны между собой.**

Из теоремы о сведении кратного интеграла к повторному следует, что если функция $g(x,y)$ интегрируема на прямоугольнике $G = [a,b] \times [c,d]$ и существуют повторные интегралы

$$\int_a^b dx \int_c^d g(x,y)dy \quad \text{и} \quad \int_c^d dy \int_a^b g(x,y)dx$$

то они равны кратному $\int\int_G g(x,y)dydx$ и, следовательно, равны между собой.

Если же кратный интеграл не существует, то указанные повторные интегралы могут существовать, но быть различными.

Например для функции:

$$g(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}$$
$$E = [0,1] \times [0,1]$$

имеет место

$$\int_0^1 dy \int_0^1 g(x,y)dx = -\pi/4$$

$$\int_0^1 dx \int_0^1 g(x,y)dy = \pi/4$$

Это несложно показать:

$$g(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{1}{x^2+y^2}$$

Интегрируя по частям, получим:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2}\Big|_0^1 + 2\int_0^1 \frac{x^2}{(x^2+y^2)^2}dx$$

$\int_0^1 g(x,y)dx = \int_0^1 \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{x}{x^2+y^2}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2}dx$
$\int_0^1 dy \int_0^1 g(x,y)dx = -\int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = -\arctan 1 = -\frac{\pi}{4}$
$\to \int_0^1 dx \int_0^1 g(x,y)dy = \int_0^1 \frac{y}{x^2+y^2}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$

Есть и ещё один канонический пример такой функции:

$$f(x,y) \equiv \begin{cases} y^{-2}, & \text{если} \quad 0 < x < y < 1, \\ -x^{-2}, & \text{если} \quad 0 < y < x < 1 \\ 0 & \text{в остальных точках} \\ & \text{квадрата } 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1 \end{cases}$$

Для $0 < y < 1$ имеем

$$\int_0^1 f(x,y)dx = \int_0^y \frac{dx}{y^2} - \int_y^1 \frac{dx}{x^2} = 1$$

и, следовательно,

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)dxdy = \int_0^1 1dy = 1$$

Аналогично для $0 < x < 1$ имеем

$$\int_0^1 f(x,y)dy = -\int_0^x \frac{dy}{x^2} + \int_x^1 \frac{dy}{y^2} = -1$$

и

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)dydx = \int_0^1 (-1)dx = -1$$

В обоих случаях кратный интеграл не существует, потому что функции неограничены в окрестности (0,0) и в окрестностях координатных осей соответственно.

5.**Может ли функция быть непрерывной на множестве, но не интегрируемой на нём по Риману?**

Да, если это множество открыто и функция существенно(не на подмножестве меры ноль) неограничена на нём: например $f(x) = \frac{1}{xy}$ на $G = (0,1] \times (0,1]$.

6.**Приведите пример интегрируемой по Риману функции, неограниченной и имеющей счётное число разрывов.**

Пусть $n = 1 : G = [0,1] \in \mathbb{R}^1$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq \frac{1}{k} \\ \frac{1}{x}, & x \in \cup_{k\in\mathbb{N}} \left\{\frac{1}{k}\right\} \end{cases}$$

то есть $f(\frac{1}{k}) = k, \forall k \in \mathbb{N}$, $f(x) = 0, x \neq \frac{1}{k}$

Рассмотрим разбиение $T(G) = \{G_1, G_2\}$, где $G_1 = \cup_{k\in\mathbb{N}} \left\{\frac{1}{k}\right\}$, $G_2 = G \backslash G_1$, произвольную выборку, соответствующую данному разбиению: $\xi_T = \{\xi_1, \xi_2\}, \xi_1 \in G_1, \xi_2 \in G_2$

$\mu(G_1) = 0$ как мера множества, состоящего из членов сходящейся последовательности

Соответсвующая сумма Римана:

$$\sigma(f,T,\xi_T) = f(\xi_1)\cdot\mu(G_1) + f(\xi_2)\cdot\mu(G_2) = c\cdot 0 + 0\cdot 1 = 0$$

$$\Longrightarrow s(f,T) = inf_{\xi_T}\sigma(f,T,\xi_T) = 0$$
$$S(f,T) = sup_{\xi_T}\sigma(f,T,\xi_T) = 0$$

где супремум и инфимум берутся по всем выборкам ξ_T соответствующим разбиению T. Так как при добавлении множеств в разбиение его мелкость не увеличивается, то данный результат оказывается верным для любого разбиения, чья мелкость $l(T) < 1$.

7. **Пусть функция f(x) интегрируема на множестве $G \subset \mathbb{R}^n$ и ограничена на δG (границе). Доказать, что f интегрируема на $\overline{G}$, и $\int\limits_{\overline{G}} f(x)dx = \int\limits_{G} f(x)dx$.**

Так как функция интегрируема на G, то множество G измеримо по Жордану, по критерию измеримости мера его границы равна нулю. Очевидно, $\overline{G} \setminus G \subseteq \delta G$, а поэтому $\overline{G} \setminus G$ измеримо по Жордану и его мера равна нулю. Таким образом, мы получаем $\overline{G} = G \cup (\overline{G} \setminus G), G \cap (\overline{G} \setminus G) = \oslash, \mu(\overline{G} \setminus G) = 0$, а значит $\int\limits_{\overline{G}} f(x)dx$ существует и равен $\int\limits_{G} f(x)dx$.

2.2 Замена переменных в кратном интеграле

1.**Почему пользуясь формулой замены переменных в кратном интеграле, мы можем забивать на то, что теряется взаимная однозначность или якобиан обращается в ноль.?**

Наши действия можно оправдать тем, что из способа задания отображения F:

$$\mathbb{R}^2_{uv} \quad \supset \quad \underset{\text{откр.}}{G} \quad \overset{F}{\underset{\longleftarrow}{\longrightarrow}} \quad \underset{\text{откр.}}{G^*} \quad \subset \quad \mathbb{R}^2_{xy}$$

1^o. F взаимно однозначно отображает G в G^*;
2^o. отображение F непрерывно дифференцируемо на $\overline{G}$;
3^o. $J_F(\vec{u}) \neq 0$ для любой точки $\vec{u} \in G$.

Здесь $J_F(\vec{u})$ – якобиан отображения F в точке $\vec{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$:

$$J_F(\vec{u}) = \det \mathcal{D}\, F(\vec{u}) = \det \begin{pmatrix} x'_u(u,v) & x'_v(u,v) \\ y'_u(u,v) & y'_v(u,v) \end{pmatrix} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}.$$

следует, что взаимнооднозначность и обращение якобиана отображения в нуль возможно только на границе множества G, а так как оно измеримо и ограничено, то по критерию измеримости $\mu(\partial G) = 0$.
Можно рассмотреть множество Ω на котором требуемые условия выполняются.Поскольку множество Ω отличается от G на множество меры нуль, а интеграл по множеству меры нуль равен нулю, то интеграл по Ω равен интегралу по G

2.**Найти объём четырёхмерного шара**.

$f = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2}$

$V = \int\limits_a^b S(\omega)d\omega,$ где$S(\omega)$ - сечение четырёхмерного шара гиперплоскостью $\omega = const$. Так как $r(\omega) = \sqrt{1-\omega^2}$, то площадь сечения $S = \frac{4\pi}{3}(1-\omega^2)^{3/2}$.

$$V_4 = \iiint\limits_G \sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2}\, dx\, dy\, dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} cos(\theta)d\theta \int\limits_0^R \sqrt{R^2 - r^2} r^2 dr =$$

$$= 2\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} cos(\theta)d\theta \int\limits_0^R R\sqrt{R(\frac{r}{R})^2}\; r^2 dr = (sin(t) = \frac{r}{R}) =$$

$$8\pi \int\limits_0^{\pi/2} R\sqrt{1 - sin^2(t)}\; sin^2(t)d(Rsin(t)) = 8\pi \int\limits_0^{\pi/2} cos^2(t) sin^2(t) R^4 dt =$$

$$\pi \int\limits_0^{\pi/2} (1 - cos(4t))R^4 dt = \frac{\pi^2 R^2}{2}$$

3.**Вычислить** $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$.

$$I = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \int\limits_0^{+\infty} e^{-y^2}dy, \quad I^2 = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx \int\limits_0^{+\infty} e^{-y^2}dy = \iint\limits_G e^{-(x^2+y^2)}dxdy.$$

где G - вся 1 координатная четверть на плоскости. Далее полярной заменой координат:

$$I^2 = \int\limits_0^{+\infty} e^{-r^2}rdr \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi = \frac{\pi}{4} \Rightarrow I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

2.3 Криволинейные интегралы. Формула Грина

1.**Как зависят криволинейные интегралы 1 и 2 рода от направления обхода кривой?**

Криволинейные интегралы 1 рода не зависят от ориентации кривой, а криволинейные интегралы 2 рода меняют знак при смене ориентации.

2.**Каков физический смысл криволинейных интегралов 1 и 2 рода?**

Криволинейный интеграл й 1 рода по кривой Г от заданной линейной плотности $f(M)$ это масса этой кривой, а криволинейный интеграл 2 рода от некого векторного поля $\overrightarrow{a}(M)$ - работа силы, заданной этим векторным полем, вдоль кривой.

3.**Пусть $G-$ ограниченная плоская область с кусочно гладкой границей ∂G, ориентированной так, что область G находится (локально) слева от касательного к ∂G вектора. Как можно вычислить площадь этой области, зная уравнение границы?**

Из формулы Грина

$$\iint\limits_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int\limits_\Gamma Pdx + Qdy$$

выбрав соответствующие P и Q легко получить следующие эквивалентные формулы для площади области, которая равна $\iint\limits_G 1dxdy$:

$$S = \oint\limits_{\partial G} xdy = -\oint\limits_{\partial G} ydx = \frac{1}{2}\oint\limits_{\partial G} xdy - ydx$$

2.4 Поверхностные интегралы 1 рода

1.**Почему цилиндрическая поверхность, заданная уравнениями $x = Rcos(\varphi), y = Rsin(\varphi), z = h, \varphi \in [0, 2\pi]$, не является ПГП? Почему не является ПГП коническая поверхность, заданная уравниениями $x = rcos(\varphi), y = rsin(\varphi), z = r, \varphi \in [0, 2\pi]$?**

Цилиндричекая и коническая поверхность не являются ПГП, потому что при фиксированных h и r соответственно $\varphi = 0$ и $\varphi = 2\pi$ соответствуют одной и той же точке, а значит отображение не является биективным.

2.**Найти площадь поверхности, полученной при вращении в пространстве графика непрерывно дифференцируемой функции y = f (x), $x \in [a, b]$ вокруг оси Ox (считать, что f(x)>0).**

Параметризуем нашу поверхность естественным образом:

$$\overrightarrow{r} = \begin{pmatrix} x \\ f(x)cos(\varphi) \\ f(x)sin(\varphi) \end{pmatrix}, \text{тогда: } \overrightarrow{r}'_x = \begin{pmatrix} 1 \\ f'_x cos(\varphi) \\ f'_x sin(\varphi) \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{r}'_\varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ -fsin(\varphi) \\ fcos(\varphi) \end{pmatrix};$$

$$[r'_x, r'_\varphi]^2 = \begin{vmatrix} 1+f'(x)^2 & 0 \\ 0 & f(x)^2 \end{vmatrix} = f(x)^2 \cdot (1+f'(x)^2)$$

$$\iint\limits_G 1dS = \iint\limits_D f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}dxd\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}dx = 2\pi \int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}dx$$

(строго говоря, в точках $\varphi = 0$ и $\varphi = 2\pi$ нарушается биективность, поэтому для честного вычисления интеграла нужно его считать для отрезка $\varphi \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$(см. следующий пример со сферой - там это расписано подробно), но ответ получается такой же)

3.**Найти площадь сферы $x^2+y^2+z^2 = R^2$ как площадь КГП, разбивая её на несколько ПГП**

Разобъём сферу на 4 части: 2 "полярные шапки"сверху и снизу, и 2 половины, устраняя таким образом небиективность отображения на полюсах и на нулевом меридиане(ему отвечают значения φ 0 и 2π): $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$.

$$S_1 : \{(\varphi, \psi) : \psi \in [\frac{\pi}{2} - \varepsilon; \frac{\pi}{2}]\}$$

$$S_2 : \{(\varphi, \psi) : \psi \in [-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{2} + \varepsilon]\}$$

$$S_3 : \{(\varphi, \psi) : \psi \in (-\frac{\pi}{2} + \varepsilon; \frac{\pi}{2} - \varepsilon); \varphi \in [-\pi; 0]\}$$

$$S_4 : \{(\varphi, \psi) : \psi \in (-\frac{\pi}{2} + \varepsilon; \frac{\pi}{2} - \varepsilon); \varphi \in [0; \pi]\}$$

Для поверхностей S_3 и S_4 посчитаем площадь при помощи обычной параметризации сферы:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} R\cos\varphi\cos\psi \\ R\sin\varphi\cos\psi \\ R\sin\psi \end{pmatrix}, \text{тогда: } \ \vec{r}'_\varphi = \begin{pmatrix} -R\sin\varphi\cos\psi \\ R\cos\varphi\cos\psi \\ 0 \end{pmatrix}, \ \ \vec{r}'_\psi = \begin{pmatrix} -R\cos\varphi\sin\psi \\ -R\sin\varphi\sin\psi \\ R\cos\psi \end{pmatrix}$$

$$[r'_\varphi, r'_\psi]^2 = \begin{vmatrix} R^2\cos^2\psi & 0 \\ 0 & R^2 \end{vmatrix} = R^4\cos^2\psi$$

$$\iint\limits_{S_3} 1dS = R^2 \int\limits_{-\pi}^{0} d\varphi \int\limits_{-\pi/2+\varepsilon}^{\pi/2-\varepsilon} \cos\psi d\psi = \pi R^2 \cdot 2\cos\varepsilon = \iint\limits_{S_4} 1dS$$

Теперь посчитаем интеграл по полярной шапке, на которой сферическую параметризацию ввести нельзя и приходится действовать по-другому:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{R^2-x^2-y^2} \end{pmatrix}, \text{тогда: } \ \vec{r}'_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \end{pmatrix}, \ \ \vec{r}'_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \end{pmatrix}$$

$$[r'_x, r'_y]^2 = \begin{vmatrix} 1+\frac{x^2}{R^2-x^2-y^2} & \frac{xy}{R^2-x^2-y^2} \\ \frac{xy}{R^2-x^2-y^2} & 1+\frac{y^2}{R^2-x^2-y^2} \end{vmatrix} = 1 + \frac{x^2+y^2}{R^2-x^2-y^2} + \cancel{\frac{x^2y^2}{R^2-x^2-y^2}} - \cancel{\frac{x^2y^2}{R^2-x^2-y^2}} = \frac{R^2}{R^2-x^2-y^2}$$

Введём теперь на множестве D стандартную полярную замену координат, его границы задаются неравенством:

$$x^2 + y^2 \leq R^2 - R^2\cos^2\varepsilon = R^2\sin^2\varepsilon \Rightarrow r \leq R\sin\varepsilon$$

$$\iint\limits_{S_1} 1dS = \iint\limits_{D} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}dxdy = \int\limits_0^{R\sin\varepsilon} r\frac{R}{\sqrt{R^2 - r^2}}dr \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = -2\pi R^2\cos\varepsilon + 2\pi R^2$$

Суммируя интегралы, получим:

$$\iint\limits_{S} 1dS = \cancel{4\pi R^2\cos\varepsilon} + 4\pi R^2 - \cancel{4\pi R^2\cos\varepsilon} = 4\pi R^2$$

4.**Длину(незамкнутой) дуги мы определяли как предел периметра вписанной в дугу ломаной при условии , что длины всех ее сторон стремятся к нулю.Можно ли площадь кривой поверхности (скажем, незамкнутой) определять как предел площади многогранной поверхности, вписанной в данную поверхность, при условии , что диаметры всех граней стремятся к нулю?**

Нет. Шварц показал, что упомянутый предел не существует даже для простого случая: поверхности прямого кругового цилиндра.

Разбиваем высоту цилиндра на n слоёв , окружности - на m слоев . Вроде бы очевидно, что треугольники получаются малого периметра. А если посчитать суммарную площадь всей "гармошки то получится , что она зависит от предела $q = \frac{n}{m^2}$, а он может даже равняться бесконечности.

Важно понимать, чем отличается положение вещей в случае ломаной, вписанной в кривую , и в случае многогранной поверхности,вписанной в кривую поверхность.Будем для простоты считать кривую и кривую поверхность, о которых идёт речь, гладкими. Тогда лишь только хорды, составляющие ломаную, достаточно малы, направление каждой из них сколь угодно мало разнится от направления касательной в любой точке соответствующей дуги. Поэтому такая бесконечно малая хорда и может с возрастающей точностью служить заменой соотвествующего элемента дуги. Напротив, сколь угодно малая многоугольная площадка, вершины которой лежат на кривой поверхности, может оказаться вовсе не близкой по своему расположению в пространстве к касательной плоскости к поверхности; в таком случае заменять элемент поверхности она не может. Это обстоятельство прекрасно иллюстрирует только что рассмотренный пример: касательные плоскости к цилиндрической поверхности все вертикальны, а треугольные грани вписанной поверхности при большом q становятся почти горизонтальными, образуя мелкие складки.

5. **Является ли множество** $\left\{ \begin{array}{c} (x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3, \\ (x, y) \in \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2 \end{array} \right\}$ **простой гладкой поверхностью при а)** $\begin{array}{l} f(x, y) = x^2 + y^2 \\ D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\} \end{array}$ **и б)** $\begin{array}{l} f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \\ D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\} \end{array}$.

а)да, т.к. функция f непрерывно дифференцируема во всех точках, а производные $\vec{r}'_x$ и $\vec{r}'_y$ не обращаются в ноль ни в каких точках D

б)нет, так как функция f не дифференцируема в точке (0,0).

2.5 Поверхностные интегралы 2 рода

Регулярная поверхность - $\forall$ точки $p \in M$ $\exists$ открытое множество $U \subset \mathbb{R}^3$ содержит $p : M \cap U$ является ПГП.

Простая гладкая поверхность (ПГП) - $\exists$ область $G \subset \mathbb{R}^2$ и непрерывно дифференцируемое отображение $r : G \to \mathbb{R}^3$, $r(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}$:

1) $S = r(G)$

2) r инъективно и $r^{-1} : S \to G$ непрерывно

3) $rk \begin{pmatrix} x_{u'} & x_{v'} \\ y_{u'} & y_{v'} \\ z_{u'} & z_{v'} \end{pmatrix} = 2$

· Если множество E покрывается $1^{й}$ параметризацией $r : G \to \mathbb{R}^3$, то

$$r_{u'} \times r_{v'} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Поэтому для $F = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$

$$\iint\limits_E (F, n) dS = \iint\limits_{r^{-1}(E)} (F(r), \pm \frac{r'_u \times r'_v}{|r'_u \times r'_v|}) |r'_u \times r'_v| dudv = \pm \iint\limits_{r^{-1}(E)} \begin{vmatrix} P(r) & Q(r) & R(r) \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} dudv$$

$\oplus$ если $r'_u \times r'_v \uparrow\uparrow \bar{n}$ (внешняя сторона)

Поэтому для ПИВР исполькуется обозначение:

$$\iint\limits_E Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

Пример: функция ϕ - непрерывно дифференцируема на $\bar{G} \subset \mathbb{R}^2$ (G измеримо) и S - график ϕ на $\bar{G}$, ориентированный полем нормалей $\bar{n}$. Если функция R непрерывна на открытом множестве $\supset S$, то $\iint\limits_S Rdxdy = \pm \iint\limits_G R(x, y, \phi(x, y)) dxdy$

$\oplus$ для верхней стороны графика S (т.е. $(n, e_3) > 0$)

Регулярная поверхность ориентирована, если на ней $\exists$ непрерывное поле единичных нормалей $\bar{n} : M \to \mathbb{R}^3$

Для ПГП с параметризацией r $n(p) = -\frac{r'_u \times r'_v}{|r'_u \times r'_v|}\Big|_{r^{-1}(p)}$ (в частности поверхность, заданная графиком непрерывно дифференцируемой функции, ориентирована).

· Регулярная поверхность $M = \{(x, y, z) \in \Omega : F(x, y, z) = 0$, где $F : \Omega \to R$ непрерывно дифференцируема на открытом множестве $\Omega \subset R^3$ с grad $F \neq 0$ ориентирована.

· $\exists$ неориентированные регулярные поверхности - лист мебиуса:
края разреза имеют 1 ориентацию;
имеет 1 сторону;

Если дана кусочно-гладкая поверхность $S_1, S_2, ..., S_n$ и на общей части двух примыкающих контуров описывалась в противоположенном направлении, тогда поверхность S является двухсторонней.

* Параметризация ленты мебиуса:

$$r(u,v) = ((2 - vsin\frac{u}{2})sinu, (2 - vsin\frac{u}{2})cosu, vcos\frac{u}{2}), v \in (-1,1), u \in (0, 2\pi)$$

покрывает всё за исключением $u = 0$

· $\exists$ множество сколько угодно малой меры, внутри которого направление отрезка единичной длины можно поменять на обратное непрерывным движением (пример Безиковича).

· $\iint\limits_S R(x,y,z)dxdy$, где S - график непрерывно дифференцируемой $z(x,y), (x,y) \in \bar{G}$, G - измеримая область в R^2, R непрерывна на S.

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = z(x,y) \end{cases} \quad r_{x'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ z_{x'} \end{pmatrix}, r_{y'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ z_{y'} \end{pmatrix}$$

$$(r'_x, r'_y, \bar{a}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & z'_x \\ 0 & 1 & z'_y \\ 0 & 0 & R \end{vmatrix} = R \Rightarrow \iint\limits_S R(x,y,z)dxdy = \iint\limits_G R(x,y,z(x,y))dxdy$$

1.**Упростить выражение $\iint\limits_S R(x,y,z)dxdy, S-$график непрерывно дифференцируемой функции $z(x,y), (x,y) \in \overline{G}$, G - измеримая область в R^2, функция R непрерывна на S.**

Пусть x и y - сами себе параметры на S (т.е x=x, y=y, z=z(x,y)) тогда:

$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{r}'_x, \overrightarrow{r}'_y) = \left\|\begin{matrix} 0 & 0 & R \\ 1 & 0 & z'_x \\ 0 & 1 & z'_y \end{matrix}\right\| = R(x,y,z(x,y)) \Rightarrow \iint\limits_S R(x,y,z)dxdy = \pm \iint\limits_G R(x,y,z(x,y))dxdy$$

2.**Для цилиндрической и конической поверхностей выснить, какой знак будет иметь единичный вектор нормали на каждой стороне поверхности.**

Для цилиндрической поверхности имеем:

$$r_\varphi = \begin{pmatrix} -R\sin(\varphi) \\ R\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}; r_h = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$[r_\varphi, r_h] = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -Rsin(\varphi) & Rcos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos(\varphi) \\ R\sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Направление совпадает с внешней нормалью к цилиндру(в этом легко убедиться, подставив, например, $\varphi = \pi/4$), поэтому на внешней стороне знак плюс, а на внутренней - минус.

Для конической поверхности:

$$r_\varphi = \begin{pmatrix} -\rho\sin(\varphi) \\ \rho\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}; r_\rho = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$[r_\rho, r_\varphi] = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 1 \\ -\rho\sin(\varphi) & \rho\cos(\varphi) & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -\rho\cos(\varphi) \\ -\rho\sin(\varphi) \\ \rho \end{pmatrix}$$

Таким образом, вектор направлен внутрь конической поверхности, поэтому для внутренней стороны знак плюс, а для внешней минус.

3.**Докажите, что поток радиус-вектора $\overrightarrow{r}$ через любую замкнутую поверхность в направлении внешней нормали равен утроенному объёму тела, ограниченного этой поверхностью**

По теореме Остроградского-Гаусса:

$$\iint\limits_{\partial G}(\overrightarrow{r},\overrightarrow{dS}) = \iiint\limits_{G} div\overrightarrow{r}dG = 3\iiint\limits_{G} dG = 3\mu(G)$$

так как $div\overrightarrow{r} = \frac{\partial}{\partial x}x + \frac{\partial}{\partial y}y + \frac{\partial}{\partial z}z = 3$.

4.**Верно ли, что потоки ротора векторного поля $\overrightarrow{a}$ через две разные гладкие поверхности S_1 и S_2, имеющие один и тот же край Г, совпадают?**

Нет, если поле $\overrightarrow{a}$ не является непрерывно дифференцируемым, то формула Стокса неприменима и поток может зависеть от выбора конкретной поверхности. А если же $\overrightarrow{a}$ непрерывно дифференцируемо, это верно, но с точностью до знака - в зависимости от ориентации поверхности поток может равняться циркуляции $\overrightarrow{a}$ по Г, взятой со знаком плюс или минус.

5.**Вычислить интеграл Гаусса** $I(x;y;z) = \iint\limits_S \frac{\cos(\widehat{\mathbf{r},\mathbf{n}})}{\mathbf{r}^2}dS, \quad (x;y;z) \notin S; G \in R^3$ **- ограниченная область с гладкой границей S, n - внешняя нормаль к S,** $\mathbf{r} = (\xi - x)\vec{i} + (\eta - y)\vec{j} + (\zeta - z)\vec{k}$.

1 случай: $\quad (x;y;z) \notin \bar{G}$

$$I = \iint\limits_S \frac{(\vec{r},\vec{n})}{lr^3}dS = \iint\limits_S \left(\frac{\vec{r}}{r^3},\vec{n}\right)dS = \int\limits_S (\frac{\vec{r}}{r^3},dS).$$

$\vec{a} = (\frac{\xi-x}{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}^3}, \frac{\eta-y}{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}^3}, \frac{\zeta-z}{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}^3}).$

Тогда $div\vec{a} = 0$ и следовательно $\iiint\limits_G 0dxdydz = 0$

2 случай: $\quad (x;y;z) \in G$ - функция не дифференцируемая внутри области
Поэтому теоремой Остроградского-Гаусса воспользоваться напрямую не можем.
Введем сферу S_1 радиуса ε с центром в $\quad (x;y;z)$

$$I = \iint\limits_S \frac{(\vec{r},\vec{n})}{lr^3}dS = I = \iint\limits_S \frac{(\vec{r},\vec{n})}{lr^3}dS - = \iint\limits_{S_1} \frac{(\vec{r},\vec{n})}{lr^3}dS + = \iint\limits_{S_1} \frac{(\vec{r},\vec{n})}{lr^3}dS =$$

$$= \iint\limits_{S_1} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^3}dS = \frac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_{S_1} dS = \frac{1}{\varepsilon^2}4\pi\varepsilon^2 = 4\pi$$

Ответ: 0, если точка вне $\bar{G}$, и 4π, если внутри.

6.**Как зависит поверхностный интеграл 2 рода от ориентации поверхности?**

При изменении ориентации поверхностный интеграл 2 рода меняет знак.

3 Элементы теории поля

1.**Вычислить** $div[\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}]$**,** $rot[\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}]$**,** $grad(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})$**.**

$$div[\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}] = (\nabla,\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}) = (\nabla,\overrightarrow{\mathbf{a}},\overrightarrow{b}) + (\nabla,\overrightarrow{a},\overrightarrow{\mathbf{b}}) = (\overrightarrow{b},[\nabla,\overrightarrow{a}]) + (\overrightarrow{a},[\nabla,\overrightarrow{b}]) = (\overrightarrow{b},rot\overrightarrow{a}) - (\overrightarrow{a},rot\overrightarrow{b})$$

$$rot[\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}] = [\nabla,rot[\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}]] = \overrightarrow{\mathbf{a}}(\overrightarrow{b},\nabla) + \overrightarrow{b}(\nabla,\overrightarrow{\mathbf{a}}) + \overrightarrow{\mathbf{b}}(\overrightarrow{a},\nabla) + \overrightarrow{a}(\nabla,\overrightarrow{\mathbf{b}}) =$$

$$= \overrightarrow{a}\cdot div(\overrightarrow{b}) - \overrightarrow{b}\cdot div(\overrightarrow{a}) + (\overrightarrow{b},\nabla)\overrightarrow{a} - (\overrightarrow{a},\nabla)\overrightarrow{b}$$

Для вычисления градиента скалярного произведения сначала вычислим вспомогательную величину:

$$[\overrightarrow{b},rot\overrightarrow{a}] = [\overrightarrow{b},[\nabla,\overrightarrow{a}]] = \nabla(\overrightarrow{\mathbf{a}},\overrightarrow{b}) - (\overrightarrow{b},\nabla)\overrightarrow{a}$$

откуда

$$\nabla(\vec{\mathbf{a}}, \vec{b}) = [\vec{b}, rot\vec{a}] + (\vec{b}, \nabla)\vec{a}$$

Тогда получаем:

$$grad(\vec{a}, \vec{b}) = \nabla(\vec{\mathbf{a}}, \vec{b}) + \nabla(\vec{a}, \vec{\mathbf{b}}) = [\vec{b}, rot\vec{a}] + (\vec{b}, \nabla)\vec{a} + [\vec{a}, rot\vec{b}] + (\vec{a}, \nabla)\vec{b}$$

2.**Верно ли, что безвихревое поле потенциально?**

Нет, неверно.

Пусть $\vec{a} = -\frac{y}{x^2+y^2}\vec{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\vec{j}$ и $G = \mathbb{R}^3 \backslash \{Z = 0\}$

$$rot\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ - поле безвихревое}$$

Но при этом если по определению посчитать циркуляцию $\vec{a}$, например, по единичной окружности в плоскости xy вокруг центра координат, получим $\int_\Gamma \vec{a}d\vec{r} = 2\pi \neq 0 \Rightarrow$ не является потенциальным.

Замечание: из безвихревости всё же следует потенциальность, но при дополнительном условии: область G должна быть **поверхностно односвязной**.

Определение. Область $G \subset \mathbb{R}^3$ называется поверхностно односвязной, если для любой замкнутой кусочно-гладкой кривой $\Gamma \subset G$ существует кусочно-гладкая ориентируемая поверхность $S \subset G$, краем которой является кривая Γ.

Образно говоря, поверхностная односвязность области G означает, что область G не имеет «сквозных отверстий».

3.**Верно ли, что потенциальное поле является безвихревым?**

Да, это верно всегда. По определению потенциальности поля на G $\exists$ u : $\vec{a} = grad$ u. Безвихревость означает $rot\vec{a} = \vec{0}$.

При этом $[\nabla \times (\nabla, u)] = ([\nabla \times \nabla], u) = 0$, поэтому $rot\ grad u = 0\ \forall u$, а значит потенциальное поле является безвихревым.

4.**Обязательно ли требовать непрерывность вторых производных для доказательства формулы Стокса?**

Нет, достаточно потребовать выполнения условия непрерывной дифференцируемости, но доказательство такой теоремы оказывается намного сложнее и выходит за рамки нашего курса.

5.**Зависит ли ротор от ориентации трехмерного пространства?**

Да, зависит: ротор меняет знак при смене ориентации пространства.

6.**Зависит ли ротор от системы координат?**

Нет, в общем случае ротор не зависит от системы координат при условии, что сохраняется ориентация пространства.

7. **Исследовать соленоидальность поля $\vec{a} = f(r)\vec{r}$ в области $G = \mathbb{R}^3 \backslash \{0, 0, 0\}$**

Т.к. теорему о соленоидальности применить нельзя(область не является объёмно-односвязной), посчитаем поток через сферу радиуса R:

$$\iint_S (\vec{a}, d\vec{S})$$

$$\begin{cases} x = \cos\varphi\cos\psi \cdot R \\ y = \sin\varphi\cos\psi \cdot R \\ z = \sin\psi \cdot R \end{cases} \qquad r'_\varphi = R\begin{pmatrix} -\sin\varphi\cos\psi \\ \cos\varphi\cos\psi \\ 0 \end{pmatrix}, r'_\psi = R\begin{pmatrix} -\cos\varphi\sin\psi \\ -\sin\varphi\sin\psi \\ \cos\psi \end{pmatrix}$$

$$[r'_\varphi, r'_\psi] = R^2 \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\sin\varphi\cos\psi & \cos\varphi\cos\psi & 0 \\ -\cos\varphi\sin\psi & -\sin\varphi\sin\psi & \cos\psi \end{vmatrix} = \vec{k} R^2 \begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\psi & \cos\varphi\cos\psi \\ -\cos\varphi\sin\psi & \sin\varphi\sin\psi \end{vmatrix} +$$
$$\cos\psi R^2 \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} \\ -\sin\varphi\cos\psi & \cos\varphi\cos\psi \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos^2\psi \\ \sin\varphi\cos^2\psi \\ \sin\psi\cos\psi \end{pmatrix} \cdot R$$

$\left(\vec{a}, r'_\varphi, r'_\psi\right) = R^2 f(R) \cdot \left(\cos\varphi\cos\psi\cos\varphi\cos^2\psi + \sin^2\varphi\cos^3\psi + \sin^2\psi\cos\psi\right) = R^2 f(R) \cdot \left(\cos^3\psi\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) + \sin^2\psi\cos\psi\right) = R^2 f(R) \cdot \cos\psi \cdot \left(\cos^2\psi + \sin^2\psi\right) = f(R) \cdot \cos\psi \cdot R^2$

Таким образом:

$$\iint\limits_S \left(\vec{a}, d\vec{S}\right) = R^2 f(R) \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi \, d\psi \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = R^2 f(R) \cdot 2\pi \cdot \sin\psi\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 4\pi R^2 f(R)$$

Следовательно, это поле является соленоидальным лишь при $f(R) = 0 \ \forall R$, т.е. $f(R) \equiv 0$.

8. **Верно ли, что из условия $div\,\vec{a} = 0 \ \forall M \in G$ следует, что поле $\vec{a}$ соленоидально в области G?**

Нет, неверно. Рассмотрим поле $\vec{a} = \frac{\vec{r}}{r^3}$. Легко получить, что его дивергенция везде равна нулю:

$$\operatorname{div}\vec{a} = \left(\nabla, \tfrac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}\right) = \tfrac{1}{|\vec{r}|^3}(\nabla, \vec{r}) + \left(\vec{r}, \nabla\tfrac{1}{|\vec{r}|^3}\right) = \tfrac{3}{|\vec{r}|^3} - \left(\vec{r}, \tfrac{3\nabla|\vec{r}|}{|\vec{r}|^4}\right) = \tfrac{3}{|\vec{r}|^3} - 3\left(\vec{r}, \tfrac{\vec{r}}{|\vec{r}|^5}\right) = 0$$

При этом из пункта 7 мы знаем, что поток через сферу радиуса R с центром в начале координат равен нулю лишь при условии $f(r) \equiv 0$, и легко убедиться что для нашего поля $\vec{a}$ такой поток нулю не равен, поэтому соленоидальным в области, содержащей начало координат, оно не является. Так, для R=2:

$$\iint_S (\vec{a}, \vec{dS}) = \iint_S (\vec{a}, \vec{n}) dS = \iint_S \left(\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}, \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}\right) dS = \iint_S \frac{dS}{|\vec{r}|^2} = \frac{2^2 4\pi}{2^2} = 4\pi \neq 0$$

Замечание: из нулевой дивергенции всё же следует соленоидальность, но для этого необходимо чтобы область G была **объёмно односвязной**.

Определение. Область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ называется объёмно односвязной, если для любой замкнутой поверхности $S \subset \Omega$ область G, ограниченная поверхностью S, содержится в Ω.

Образно говоря, объемная односвязность области Ω означает, что область Ω не имеет «внутренних полостей».

9.**Верно ли, что из соленоидальности поля $\vec{a}$ в некоторой области G следует, что в этой области следует $div\,\vec{a} = 0$?**

Да, это верно для любой области G и непосредственно следует из геометрического определения дивергенции.

10.**Что можно сказать о потенциальности векторного поля в плоской области $G \subset \mathbb{R}^2$?**

Тут применимы схожие принципы с объёмными областями, но стоит уточнить определения:

· Из потенциальности непрерывно дифференцируемого поля $\vec{a} = (P, Q)^T$ в области G обязательно следует условие

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \quad \forall (x, y) \in G \tag{1}$$

· Обратное же верно лишь в случае **односвязной** области.

Определение. Область $G \subset \mathbb{R}^2$ называется односвязной, если для любой простой замкнутой кривой $\Gamma \subset G$ область Ω, ограниченная кривой Γ, содержится в области G.

Образно говоря, односвязность области $G \subset \mathbb{R}^2$ означает, что область G не имеет «дыр».

Легко привести пример, когда условие (1) выполнено в области, не являющейся односвязной, и поле не является потенциальным: достаточно взять поле из пункта 2 без третьей компоненты и рассмотреть его циркуляцию по окружности, окружающей начало координат.

11.**Дважды непрерывно дифференцируемая функция u(x,y,z) называется гармонической в области G, если $\Delta u = 0$. Найти все гармонические в области $G = \mathcal{R}^3/(0,0,0)$ функции вида u=f(r), f-дважды непрерывно дифференцируемая функция при r>0.**

$$\Delta f = 0 \Rightarrow (\nabla; f_r' \frac{\overrightarrow{r}}{r}) = 0$$

$$\frac{1}{r}(\nabla f_r'; \overrightarrow{r}) + \frac{f_r'}{r}(\nabla; \overrightarrow{r}) + f_r'(\nabla \frac{1}{r} \overrightarrow{r}) = 0$$

$$f_r'' + 3\frac{f_r'}{r} - \frac{f_r'}{r} = 0 \rightarrow f_r'' + 2\frac{f_r'}{r} = 0$$

решаем диффур:$f = r^{\lambda}, \quad \lambda(\lambda-1) + 2\lambda = 0, \quad \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1, f(r) = C_1 + \dfrac{C_2}{r}$

12.**Привести пример области G, являющейся объёмно односвязной, но не поверхностно односвязной**

Подойдёт внутренность тора или всё пространство $\mathbb{R}^3$ без оси Oz - легко проверить по определению.

13.**Привести пример области G, являющейся поверхностно односвязной, но не объёмно односвязной**

Например, единичный шар с выколотым центром - любую кривую на нём можно стянуть в точку, а вот поверхность внутри которой лежит выколотая точка не получится.

Источники

1. В.Ж.Сакбаев - лекции, прочитанные в МФТИ в 2020 г.

2. В.Ж.Сакбаев, О.Г.Прончева, Е.Ю.Редкозубова, В.Б.Трушин, Скубачевский А.А. - семинары в МФТИ, 2020

3. Г.Е.Иванов "Лекции по математическому анализу 2017

4. Л.Д.Кудрявцев "Курс математического анализа"

5. Б.Гелбаум, Дж.Олстед "Контрпримеры в анализе"

6. Г.Н.Яковлев "Лекции по математическому анализу"

7. Петрович А.Ю. "Лекции по математическому анализу"

По вопросам, в связи с опечатками и пожеланиями обращаться:
Чернов Никита, Б06-902

В создании принимали участие:
Кузьмиченко Полина, Б06-901
Степовой Константин, Б06-901
Гришина Елена, Б06-902
Иноземцева Леся, Б06-902
Гордийчук Маргарита, Б06-903
Григорьев Владимир, Б06-903
Протасов Сергей, Б06-903
Даничкина Ксения, Б06-905
Крючкова Анастасия, Б06-905
Садекова Алиса, Б06-906
Богдан Елизавета, Б06-907
Бурова Алиса, Б06-907
Закирова Марфа, Б06-907
Захаржевский Марк, в душе БМ
Сергеева Юлия, Б06-907