Programma dettagliato

- Cenni su insiemi, insiemi numerici, operazioni su insiemi, logica elementare, esempio di dimostrazione diretta, indiretta. Dimostrazione per assurdo che $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Definizione di campo, relazione d'ordine, campi ordinati, estremo superiore e inferiore di un insieme, definizione di $\mathbb{R}$, retta estesa, definizione di intervallo (aperto, chiuso, limitato, illimitato). Principio di induzione, disuguaglianza di Bernoulli con dimostrazione, binomio di Newton. Valore assoluto, radici n-esime aritmetiche, potenze a esponente reale, logaritmi.

- Definizione di $\mathbb{C}$ e struttura di campo, forma algebrica di numeri complessi, rappresentazione nel piano di Gauss, coniugato, modulo, forma trigonometrica, prodotto di due numeri complessi con dimostrazione, formula de Moivre, forma esponenziale, radici n-esime complesse, equazioni algebriche e teorema fondamentale dell'algebra.

- Definizione di funzione, dominio, codominio, immagine, controimmagine, grafico di una funzione, funzioni iniettive, suriettive, biunivoche, funzione composta, funzione inversa, funzioni reali di variabile reale: funzioni limitate, simmetriche, monotone, periodiche. Funzioni elementari: potenza, esponenziale, logaritmo, trigonometriche, inverse di trigonometriche, parte intera, mantissa, iperboliche. Operazioni elementari sui grafici (traslazioni, dilatazioni/contrazioni, riflessioni, modulo).

- Successioni numeriche, successioni convergenti, divergenti e oscillanti, definizione di limite per successioni convergenti e divergenti, teorema unicità del limite con dimostrazione, successioni infinitesime e infinite, successioni limitate, teorema di limitatezza con dimostrazione, proposizione a_n limitata, $b_n \to 0$ $\Rightarrow$ $a_n b_n \to 0$ con dimostrazione, proposizione a_n limitata, b_n divergente $\Rightarrow$ $a_n + b_n$ divergente con dimostrazione. Teorema sull'algebra dei limiti, teorema di permanenza del segno con dimostrazione, corollario permanenza del segno con dimostrazione, teorema del confronto e dei due carabinieri con dimostrazione. Successioni monotone, teorema di monotonia con dimostrazione, successione geometrica, limite notevole di Nepero con dimostrazione. Confronti e stime asintotiche, criterio del rapporto con dimostrazione, gerarchia degli infiniti, definizione di o-piccolo, limiti notevoli.

- Definizione di serie numerica, serie geometrica, serie telescopica, serie di Mengoli, condizione necessaria alla convergenza della serie con dimostrazione, serie armonica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ con dimostrazione, costante di Eulero-Mascheroni. Serie a termini non negativi: criterio del confronto con dimostrazione, criterio del confronto asintotico con dimostrazione, criterio del rapporto con dimostrazione, criterio della radice. Serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ comportamento con dimostrazione per $\alpha \leq 1$ e $\alpha \geq 2$. Serie a termini di segno non definito: convergenza assoluta; serie a termini alterni, criterio di Leibniz con dimostrazione.

——————fine argomenti inclusi nel primo test——————

- Limiti di funzioni reali, definizione successionale, definizione topologica, unicità del limite, definizione di intorno, definizione di limite con linguaggio intorni, punto di accumulazione, esempi. Teorema dei due carabinieri con dimostrazione e corollario, teorema di permanenza del segno e corollario, algebra dei limiti, limite destro e sinistro.

- Definizione di funzione continua, funzione seno continua sul suo dominio con dimostrazione, algebra delle funzioni continue, continuità della funzione composta con dimostrazione, punti di discontinuità, classificazione e esempi. Prolungamento per continuità di una funzione, confronti e stime asintotiche per funzioni, asintoti di funzioni, grafici locali, limiti notevoli, esempi. Teorema degli zeri con dimostrazione, teorema di Weierstrass con dimostrazione, teorema dei valori intermedi con dimostrazione, teorema di permanenza di segno per funzioni continue,

- Definizione di derivata di una funzione in un punto, significato geometrico, esempi, punti di non derivabilità, classificazione ed esempi, f derivabile $\Rightarrow$ f continua con dimostrazione. Teorema di monotonia per funzioni, teorema di inversione di funzioni monotone con dimostrazione, teorema di inversione di funzioni monotone continue con dimostrazione, teorema sulla derivata dell'inversa con dimostrazione.

- Definizione punto di estremo relativo e assoluto, punto stazionario, teorema di Fermat con dimostrazione, definizione di punto di flesso, teorema di Rolle con dimostrazione, teorema di Lagrange con dimostrazione, Teorema di Cauchy, Proposizione su derivata nulla di una funzione con dimostrazione, test di monotonia 1 con dimostrazione, test di monotonia 2 con dimostrazione, teorema di De l'Hôpital con dimostrazione, teorema sul limite della derivata con dimostrazione, esempi applicativi.

- Derivate di ordini successivi, spazi $C^k(I)$ con $k \in \mathbb{N}$, teorema di Darboux, definizione di funzione convessa e concava, significato geometrico, teoremi sul legame tra convessità e retta tangente, definizione di punto di cambio concavità, teoremi sul legame tra convessità e derivata prima e seconda. Applicazioni del teorema degli zeri, di Lagrange e studio di funzione.

- Definizione e algebra o-piccolo, relazioni con asintotico, approssimazione di una funzione in un intorno di x_0, definizione di differenziabilità in x_0, legame con derivabilità, formula di Taylor con resto di Peano con dimostrazione, esempi e applicazioni, formula di Taylor con resto di Lagrange, criterio della derivata n-esima, somme di serie con uso di Taylor.

- Definizione di funzione integrabile secondo Riemann con costruzione, funzione di Dirichlet, classi di funzioni Riemann integrabili su $[a, b]$, linearità e additività di integrali, confronto per integrali, corollario disuguaglianza modulo con dimostrazione, simmetrie, teorema della media integrale con dimostrazione, definizione di primitiva e di funzione integrale. Teorema fondamentale del calcolo I e II con dimostrazioni, estensione del teorema. Integrazione per parti e sostituzione con dimostrazioni, area di regioni piane. Tecniche di integrazioni per funzioni razionali fratte, funzioni trigonometriche, funzioni irrazionali.

- Definizione di integrale improprio di f continua con un asintoto verticale e definizione di integrale improprio su $[a, +\infty)$, esempi fondamentali $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$. Criteri per integrali impropri di funzioni non negative, criterio del confronto con dimostrazione, criterio del confronto asintotico con dimostrazione. Convergenza assoluta di integrali impropri, esempio di funzione integrabile ma non assolutamente. Legami tra serie e integrali impropri, teorema Mc Laurin con dimostrazione, esempi applicativi, integrali di Fresnel.

Condizione necessaria, ma NON sufficiente . . .

Di seguito viene fornita una selezione dei precedenti argomenti che è necessario (ma NON sufficiente) conoscere per superare l'esame.

- Avere ben chiara la differenza tra condizione necessaria e condizione sufficiente. . .
- Definizione di campi ordinati, estremo superiore e inferiore di un insieme, definizione di $\mathbb{R}$, definizione di intervallo (aperto, chiuso, limitato, illimitato). Definizione di $\mathbb{C}$, radici n-esime complesse, teorema fondamentale dell'algebra. Definizione di funzione, dominio, immagine, funzioni reali di variabile reale: funzioni limitate, monotone. Funzioni elementari.
- Definizione di limite per successioni convergenti e divergenti, successioni limitate, teorema dei due carabinieri. Successioni monotone, teorema di monotonia, successione geometrica. Criterio del rapporto, gerarchia degli infiniti, limiti notevoli.
- Definizione di serie numerica, serie geometrica, condizione necessaria alla convergenza della serie. Criteri per serie a termini non negativi. Convergenza assoluta, criterio di Leibniz.

——————fine argomenti inclusi nel primo test——————

- Limiti di funzioni reali, definizione successionale, definizione topologica, definizione di intorno, definizione di limite con linguaggio intorni. Teorema dei due carabinieri. Definizione di funzione continua, punti di discontinuità. Teorema degli zeri, teorema di Weierstrass.
- Definizione di derivata di una funzione in un punto, significato geometrico, punti di non derivabilità, f derivabile $\Rightarrow$ f continua. Definizione punto di estremo relativo e assoluto, punto stazionario, teorema di Fermat, teorema di Rolle, teorema di Lagrange, test di monotonia 1 e 2, teorema di De l'Hôpital.
- Derivate di ordini successivi, spazi $C^k(I)$ con $k \in \mathbb{N}$, legame tra convessità e derivata prima e seconda. Definizione o-piccolo, formula di Taylor con resto di Peano.
- Definizione di funzione integrabile secondo Riemann, classi di funzioni Riemann integrabili su $[a, b]$, teorema della media integrale, definizione di primitiva e di funzione integrale. Teorema fondamentale del calcolo I e II.
- Definizione di integrale improprio di f continua con un asintoto verticale e definizione di integrale improprio su $[a, +\infty)$. Criteri per integrali impropri di funzioni non negative. Convergenza assoluta di integrali impropri.