GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE - ESERCIZI X

1. Sottospazi affini

Esercizio 1.1 Determinare i seguenti sottospazi affini.

i) Il piano perpendicolare alla retta $(2,2,2)+t(1,2,3)$ e passante per $(1,0,0)$.
ii) Il piano perpendicolare alla retta $y+z-2=2x-y+z=0$ e passante per $(1,2,4)$.
iii) La retta perpendicolare al piano $x+y-z=3$ e passante per $(1,2,3)$.
iv) Il piano in $\mathbb{R}^4$ perpendicolare al piano $x_1+x_2=x_3+x_4=0$ e passante per (1,0,1,0).
v) La retta perpendicolare alle rette $x+y+z-1=x+y=0$ e $(0,0,2)+t(1,-1,-1)$.
vi) La retta perpendicolare alle rette $(1,4,8)+t(1,-1,-2)$ e $(1,2,1)+s(3,1,1)$.
vii) La retta passante per $(1,0,0)$ e incidente alle rette $x-y+z-2=x+z=0$ e $x+2y-z-2=x-z=0$.

Esercizio 1.2 Si considerino le seguenti rette:

$$r: \begin{cases} x-y+z=2 \\ x+z=0 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x+2y-z=0 \\ x-z=0 \end{cases}$$

i) Stabilire la loro posizione reciproca *(Esercizio 5.2, foglio IV)*.
ii) Determinare la distanza tra r e s.
iii) Determinare i punti R e S, rispettivamente su r e s, di minima distanza.
iv) Deteminare l'equazione della retta passante per $(1,0,0)$ e incidente sia a r che a s.

Esercizio 1.3 Si considerino le seguenti rette:

$$r: \begin{cases} x=2+2t \\ y=3t \\ z=t-1 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x=1-2k \\ y=k-1 \\ z=3-k \end{cases}$$

i) Stabilire la loro posizione reciproca *(Esercizio 5.2, foglio IV)*.
ii) Determinare la distanza tra r e s.

2. Matrici ortogonali e isometrie

Esercizio 2.1 Quali delle seguenti matrici sono ortogonali? Per le matrici dipendenti da parametri $h,k\in\mathbb{R}$, trovare i valori di $h,k\in\mathbb{R}$ per cui la matrice è ortogonale.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} k & h \\ h & k \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & h \\ k & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

Esercizio 2.2 Data la seguente trasformazione del piano

$$f(x,y)=\left(\frac{4x+3y}{5}, \frac{3x-4y}{5}\right),$$

stabilire se è un'isometria lineare. In caso affermativo, determinare una matrice ortogonale che la rappresenta.

3. Teorema spettrale

Esercizio 3.1 Per ciascuna delle seguenti matrici simmetriche $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n,n)$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

i) Trovare autovalori e autovettori di A.
ii) Trovare una base ortonormale per ciascun autospazio di A.
iii) Verificare che valgono le conclusioni del Teorema Spettrale: A è diagonalizzabile e gli autospazi sono ortogonali. Di conseguenza, l'unione delle basi ortonormali degli autospazi è una base ortonormale $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^n$ di autovettori di A.
iv) Usare $\mathcal{B}$ per scrivere un'equazione di diagonalizzazione ortogonale:

$$S^T A S = D\,,$$

dove D è una matrice diagonale e $S = \mathcal{M}^{\mathcal{B},\mathcal{E}}_{id_{\mathbb{R}^n}}$ è ortogonale e rappresenta la matrice del cambio di base dalla base $\mathcal{B}$ alla base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^n$.

Esercizio 3.2 *[Esercizio del tema d'esame del 08/09/2023]* Si considerino le seguenti matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Stabilire se le due matrici sono simili.
(b) Stabilire se A o B sono ortogonalmente diagonalizzabili e, nel caso siano ortogonalmente diagonalizzabili, determinare una loro base ortonormale di autovettori.
(c) Sia $\mathbf{v} = (1,0,1)^T$ e si denoti con $\langle\ ,\ \rangle$ il prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^3$. Dimostrare che $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ è ortogonale a $\mathbf{v}$ se e solo se $B\mathbf{x}$ è ortogonale a $\mathbf{v}$. Infine, determinare un vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ tale che $\langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle = 0$ ma $\langle A\mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle \neq 0$.

4. Forme quadratiche

Esercizio 4.1 Data la forma quadratica $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$p(x_1, x_2) = 2x_1^2 - x_2^2 + 4x_1x_2\,.$$

i) Scrivere la matrice simmetrica A associata a p.
ii) Trovare gli autovalori di A e dedurre segno, segnatura e forma canonica di Sylvester di p.
iii) Trovare un isomorfismo $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $p(L(x_1, x_2))$ sia la forma canonica di Sylvester equivalente a p.

Esercizio 4.2 Date le seguenti forme quadratiche

i) $p(x_1, x_2) = -x_1^2 + 2\sqrt{2}x_1x_2 - 2x_2^2$;
ii) $p(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$;
iii) $p(x_1, x_2, x_3) = -x_1x_2 + x_3^2 + x_1^2 + 3x_2x_3$;

deteminare segno, segnatura e forma canonica di Sylvester.