GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE - ESERCIZI V

1. Applicazioni lineari

Esercizio 1.1 Determinare se le seguenti funzioni sono applicazioni lineari.

(1) $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definita da $L\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_1 - 3x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$,

(2) $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definita da $L\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_1 - 3x_2 \\ x_2^2 \end{pmatrix}$,

(3) $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $L\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2x_3 \\ x_1x_3 \\ x_1x_2 \end{pmatrix}$,

(4) $L : \mathbb{R}[t]_{\leq 2} \to \mathbb{R}$ definita da $L(p(t)) = p(1) + p(2)$,

(5) $L : \mathbb{R}[t]_{\leq 2} \to \mathbb{R}^2$ definita da $L(p(t)) = \begin{pmatrix} p(1) - p(0) \\ p(1) - 1 \end{pmatrix}$,

(6) $L : \mathrm{Mat}(2,2)(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ definita da $L\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$,

(7) $L : \mathrm{Mat}(2,2)(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definita da $L\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$,

(8) $L : \mathrm{Mat}(2,2)(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definita da $L\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + d$ (*traccia di una matrice*),

Esercizio 1.2 Sia $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che

$$L(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad L(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

dove $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ denota la base canonica di $\mathbb{R}^2$. Trovare la formula per $L\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Inoltre, stabilire se i vettori $\mathbf{v}_1 = (0,0,0)^T, \mathbf{v}_2 = (3,4,1)^T, \mathbf{v}_3 = (3,-2,0)^T$ appartengono a $\mathrm{Im}(L)$.

Esercizio 1.3 Per ciascuna delle seguenti applicazioni lineari determinare dimensione e una base di immagine e nucleo.

(1) $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da $L(x,y) = (x+y, x-y)$,

(2) $T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dove $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$,

(3) $L : \mathrm{Mat}(2,2)(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definita da $L\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + d$

(4) $L : \mathrm{Mat}(2,2)(\mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}(2,2)$ definita da $L(M) = 2M - 3M^T$.

Esercizio 1.4 Per ciascuna matrice A, determinare i valori $\lambda \in \mathbb{R}$ per cui l'applicazione lineare T_A è iniettiva, suriettiva o un isomorfismo.

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2+\lambda & 1+\lambda \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 1.5 Considerare il sottospazio vettoriale

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \ : \ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = x_2 - x_1 + x_3 = 0 \right\} \subseteq \mathbb{R}^4,$$

e le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \ , \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Trovare una base e la dimensione dei sottospazi $H \subseteq \mathbb{R}^4$, $T_A(H) \subseteq \mathbb{R}^4$ e $T_B(H) \subseteq \mathbb{R}^2$.

Esercizio 1.6 Considerare l'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ data da

$$L \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + z \\ x + 2y + 3z \\ x + 3y + 6z \end{pmatrix} .$$

Verificare che L è invertibile e determinare l'espressione di $L^{-1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

Esercizio 1.7 Trovare immagine e nucleo della composizione delle applicazioni lineari $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ definite da

$$L \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad M \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 - y_2 \\ y_1 + y_2 \\ 2y_1 - y_2 \end{pmatrix} .$$