GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE - ESERCIZI I

1. Rette e Piani

Esercizio 1.1

(a) Trovare una forma parametrica della retta $r_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,:\, 2x_1 + 3x_2 = 1 \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

(b) Trovare una forma cartesiana di $r_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \,:\, s \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

(c) Trovare forme parametrica e cartesiana della retta $r_3 \subseteq \mathbb{R}^2$ passante per $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Esercizio 1.2

(a) Trovare una forma parametrica del piano $\pi = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,:\, 2y - x - 3z = 1 \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

(b) Trovare una forma parametrica della retta $r = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,:\, \begin{cases} x + y + z = -2 \\ x - 2y + z = 1 \end{cases} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

Esercizio 1.3

(a) Trovare una forma parametrica della retta $r \subseteq \mathbb{R}^3$ passante per $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

(b) Trovare una forma parametrica del piano $\pi \subseteq \mathbb{R}^3$ passante per $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 1.4 Trovare una forma cartesiana del piano

$$\pi = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \,:\, t, s \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3 .$$

Esercizio 1.5 Trovare una forma cartesiana della retta

$$r = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \,:\, h \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3 .$$

Esercizio 1.6 Trovare una forma parametrica del piano

$$\pi = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,:\, x + y = 0 \right\} .$$

2. Sistemi lineari e Matrici

Esercizio 2.1 Ridurre le seguenti matrici a scala utilizzando l'algoritmo di Gauss

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2.2 Per ciascuno dei sistemi lineari, scrivere la matrice completa e, applicando l'algoritmo di Gauss o l'algoritmo di Gauss-Jordan, determinare l'insieme delle soluzioni S. Scrivere il risultato nella forma

$$S = \{\mathbf{w} + t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2 + \cdots + t_p\mathbf{v}_p \,:\, t_i \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^n,$$

dove $\mathbf{w}, \mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_p \in \mathbb{R}^n$ sono dei vettori colonna espliciti.

$$(a) \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ -x_1 - x_3 = -3 \\ x_2 + x_3 = 2 \end{cases} \qquad (b) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -1 \\ -x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 9 \end{cases} \qquad (c) \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 5x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 6 \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \end{cases} \qquad (e) \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \qquad (f) \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

3. Algebra delle matrici

Esercizio 3.1 Si considerino le seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \; E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Quali coppie di matrici possono essere sommate?
(b) Quali coppie di matrici possono essere moltiplicate?
(c) Calcolare: $A + C, AB, (EA)B, (BE)C, (AE) + D, EE^T, AC^T$.
(d) Per ciascuna delle seguenti coppie, determinare se è possibile calcolare entrambi i prodotti, e se il risultato è lo stesso.

$$(EA)B \text{ e } E(AB), \qquad AE \text{ e } EA, \qquad CD \text{ e } DC.$$