GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE - ESERCIZI VI

1. Vettore delle coordinate

Esercizio 1.1 Trovare il vettore $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ delle coordinate di $\mathbf{v}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.

(1) $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$,

(2) $\mathbf{v} = (1,2,3) \in \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = \{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\}$,

(3) $\mathbf{v} = (t+1)^2 \in \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$, $\mathcal{B} = \left\{t^2+t+1, t^2+t, t\right\}$,

(4) $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2,2)$, $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$,

2. Matrice rappresentativa

Esercizio 2.1 Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare data da

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ z-y \end{pmatrix} ,$$

scrivere la matrice $\mathcal{M}_T^{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ associata a T rispetto alle seguenti basi:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} , \quad \mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} .$$

Esercizio 2.2 Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$L \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} , \quad L \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad L \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} .$$

- Determinare la matrice $\mathcal{M}_L^{\mathcal{E},\mathcal{E}}$ associata a L rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$.
- Determinare una base e la dimensione di immagine e nucleo di L.
- Determinare se L è iniettiva o suriettiva.
- Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il vettore $\mathbf{v}_k = \begin{pmatrix} k+1 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}$ appartiene a $\mathrm{Im}(L)$.

Esercizio 2.3 [*Esercizio del tema d'esame del 21/06/2023*] Considerare l'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}[t]_{\leq 1}$ definita da

$$L \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = at + a + b ,$$

scrivere la matrice $\mathcal{M}_L^{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ che rappresenta L rispetto alle basi

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{1, t\},$$

Esercizio 2.4 [*Esercizio del tema d'esame del 8/09/2023*] Sia $\mathcal{L} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da

$$\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}, \quad \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

- Dimostrare che la matrice rappresentativa di $\mathcal{L}$ rispetto alle basi canoniche è
$$\mathcal{M}_{\mathcal{L}}^{\mathcal{E},\mathcal{E}} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\1 & 0 & 0 & -1\\0 & -1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$
- Determinare una base per $\mathrm{Ker}(\mathcal{L})$ e una base per $\mathrm{Im}(\mathcal{L})$.
- Determinare una base per $\mathrm{Ker}(\mathcal{L}) \cap \mathrm{Im}(\mathcal{L})$ e una base per $\mathrm{Ker}(\mathcal{L}) + \mathrm{Im}(\mathcal{L})$.

Esercizio 2.5 [*Esercizio del tema d'esame del 7/02/2024*] Sia $k \in \mathbb{R}$ un parametro. Considerare l'applicazione lineare $L_k : \mathbb{R}[x]_{\leq 1} \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$L_k(p(x)) = \begin{pmatrix}p(2)\\p(k) - p(0)\end{pmatrix}.$$

- Determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, una base di $\mathrm{Ker}(L_k)$ e $\mathrm{Im}(L_k)$. Esistono valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui L_k è un isomorfismo?
- Determinare la matrice rappresentativa di L_k rispetto alle basi
$$\mathcal{B} = \{x+1, x\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\}.$$