GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE - ESERCIZI VIII

1. Matrice del cambio di base

Esercizio 1.1 Date le basi di $\mathbb{R}[t]_{\leq 1}$

$$\mathcal{B} = \{2t+1, t-1\}\,, \quad \mathcal{C} = \{-t-1, t\}\,,$$

trovare le matrici del cambio di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ e da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}$.

Esercizio 1.2 Date le basi di $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{B} = \{(1,1,1),(1,2,3),(1,3,6)\}\,, \quad \mathcal{C} = \{(0,1,0),(1,0,0),(1,1,1)\}\,,$$

trovare le matrici del cambio di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ e da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}$.

Esercizio 1.3 Date le basi di $\mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(2,2)$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

trovare le matrici del cambio di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ e da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}$.

2. Endomorfismi

Esercizio 2.1 Per ciuascuna delle seguenti matrici $A \in \mathrm{Mat}(n,n)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

- determinare il polinomio caratteristico, gli autovalori e le molteplicità algebriche;
- determinare gli autospazi e le molteplicità geometriche;
- trovare, se esiste, una base di $\mathbb{R}^n$ di autovettori di A;
- scrivere, se possibile, l'equazione di diagonalizzazione: trovare una matrice diagonale D ed una matrice invertibile S tali che $D = S^{-1}AS$.

Esercizio 2.2 Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo tale che

$$T(e_1) = e_1 + e_2\,, \quad T(e_2) = 3e_1 + 4e_2\,, \quad T(e_3) = 2e_3\,.$$

i) Determinare la matrice A associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$.
ii) Trovare autovalori, autovettori e autospazi di A.

Esercizio 2.3 [*Esercizio del tema d'esame del 5/09/2024*] Si consideri, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ k-1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Determinare i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui A è diagonalizzabile.
- Per $k = 2$, trovare una base di $\mathbb{R}^4$ formata da autovettori di A.

Esercizio 2.4 [*Esercizio del tema d'esame del 7/02/2024*] Sia $V = \left\{A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(2,2) \,:\, A = A^T\right\}$ lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 simmetriche, e si consideri l'endomorfismo $T : V \to V$ definito dalla formula

$$T(A) = M^T A M\,, \qquad \text{dove } M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Determinare la matrice rappresentativa di T rispetto alla base di V
$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$
- Dimostrare che T è diagonalizzabile.
- Determinare le basi degli autospazi di T.

3. Matrici simili

Esercizio 3.1 Considerare le seguenti matrici in $\mathrm{Mat}(3,3)$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Stabilire se A e B sono simili;
- trovare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui A e C sono simili;
- trovare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui A e D sono simili.