GLI INSIEMI

Nozione di insieme → e' assunta come primitiva e non riducibile a concetti piu' elementari.

↳ e' determinata dai suoi elementi

Notazione: A, B, X (maiuscola insieme)

a, b, x (minuscola elemento)

Definizione per tabolazione $A = \{1, 2, 8\}$

N.B. l'ordine e' indifferente $\{1, 2, 8\} \Leftrightarrow \{1, 8, 2\}$

RELAZIONI TRA GLI INSIEMI

- uguaglianza : $A = B$ ogni elemento di A appartiene a B e ogni elemento di B apartiene a A

  $\forall x (x \in A \Rightarrow x \in B)$ e $\forall x (x \in B \Rightarrow x \in A)$

- inclusione : $A \subseteq B$ A e' contenuto in B, e' un sottoinsieme di B

  $\forall x \ (x \in A \Rightarrow x \in B)$

  (stretta) : $A \subset B$ Almeno un elemento di B non appartiene ad A

  $\forall x \ (x \in A \Rightarrow x \in B)$ e $\exists x \in B : x \notin A$

$\in$: se l'elemento è su un piano gerarchico diverso $(1 \in A)$

$\subset$: se l'elemento è su un piano gerarchico uguale $\{3\} \subset \{1, 2, 3\}$

- INsieme vuoto : $\emptyset \rightarrow \emptyset \subseteq A$

INSIEMI NUMERICI

- NUMERI Naturali : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- NUMERI Interi : $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
- NUMERI razionali : $\mathbb{Q} \rightarrow \frac{n}{m}$ $n, m \in \mathbb{Z}$ e $m \neq 0$ (cifre decimali finite o i numeri periodici)
- NUMERI reali : $\mathbb{R} \rightarrow \pi, \sqrt{2}, e$
- NUMERI complessi : $\mathbb{C} \rightarrow a + ib$ (i = unita' immaginaria ; $i^2 = -1$)

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

OPERAZIONI SUGLI INSIEMI

X : Insieme universo

- INTERSEZIONE : $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$

- UNIONE : $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$

- DIFFERENZA : $A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$

- **COMPLEMENTARE**: se $A \subseteq X$ il complementare $A^c = X \setminus A$

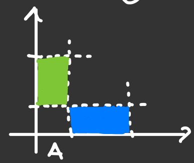
- **PRODOTTO CARTESIANO**: Dati A, B considero un nuovo insieme composto da tutte le coppie ordinate (a,b) $a \in A$, $b \in B$ e $A \times B$

ES. $A = [0,1]$

$B = [1,3]$

$A \times B$

$B \times A$



ALCUNE PROPRIETA'

- $A \cap B = B \cap A$ (commutativa)
- $A \cup B = B \cup A$ (commutativa)
- $A \cap \emptyset = \emptyset$
- $A \cup \emptyset = A$ (elemento nullo)

LOGICA ELEMENTARE

- **Predicato o proprieta'**: "Il numero naturale n e' dispari" → la veridicita' dipende dal caso
  n: variabile libera $p(n)$

- **Enunciato**: "Per ogni numero naturale se n e' dispari allora n^2 e' dispari" $\forall n \in \mathbb{N}$ (n dispari $\Rightarrow n^2$ dispari)
  ↳ La frase e' V o F una volta per tutte

  $p(n)$: dispari
  $q(n^2)$: dispari

  $p(n) \Rightarrow q(n)$
  ipotesi ↓ tesi ↓

- **Dimostrazione diretta**: per Hp n e' dispari $n = 2k+1$ $k \in \mathbb{N}$
  (e' pari $n = 2k$ $k \in \mathbb{N}$)

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2\underbrace{(2k^2+2k)}_{\text{sempre un numero pari}} + 1 \quad k \in \mathbb{N}$$

- **Controesempio**: utili per dimostrare la falsita' di una implicazione. Hp $\forall n \in \mathbb{N}$ se n e' primo $\Rightarrow n$ e' dispari; falsa perche $n = 2$ e pari

- **Dimostrazione indiretta**: L'implicazione $\forall x \in A$ $(p(x) \Rightarrow q(x))$, equivale a $\forall x \in A$ (NON $q(x) \Rightarrow$ NON $p(x)$)

ES. $\forall n \in \mathbb{N}$ (n dispari $\Rightarrow n^2$ dispari)
$\forall n \in \mathbb{N}$ (NON(n^2 dispari) $\Rightarrow$ NON (n dispari))
$\forall n \in \mathbb{N}$ (n^2 pari $\Rightarrow n$ pari)

- IMPLICAZIONE SEMPLICE: $p \Rightarrow q$ → equivale → NON $q \Rightarrow$ NON p
  - p e' condizione sufficiente per q
  - q e' necessaria per p

- IMPLICAZIONE DOPPIA: $p \Leftrightarrow q$
  - $p \Rightarrow q \vee q \Rightarrow p$
  - p e' condizione necessaria e sufficente per q

- DIMOSTRAZIONE PER ASSURDO: "se $r^2 = 2 \Rightarrow r \notin \mathbb{Q}$". Per assurdo suppongo $\exists r \in \mathbb{Q} : r^2 = 2 \to r = \frac{n}{m}$, $n, m \in \mathbb{N}$, $m \neq 0$ semplificata ai minimi termini

  $r^2 = \left(\frac{n}{m}\right)^2 = 2 \to n^2 = 2m^2 \to n^2$ e' pari $\Rightarrow n$ e' pari
  $\to n = 2k$ $k \in \mathbb{Z}$ $\to (2k)^2 = 2m^2 \to 4k^2 = 2m^2 \to 2k^2 = m^2$
  $\Rightarrow$ allora anche m^2 e m e' pari.
  Assurdo! se m e n sono pari $\frac{n}{m}$ non e' semplificata ai minimi termini

ASSIOMI DI CAMPO

Sia K un insieme e $+, \cdot$ due operazioni su K. La terna $(K, +, \cdot)$ e' un campo se la somma gode delle seguenti proprieta' P_1:

1) $(a+b)+c = a+(b+c)$ $\forall a,b,c$ associativa
2) $a+0 = 0+a = a$ $\forall a$ elemento neutro
3) $a+(-a) = 0$ $\forall a$ elemento opposto
4) $a+b = b+a$ $\forall a,b$ commutativa

Il prodotto $(\cdot)$ gode delle seguenti proprieta' P_2:

1) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ $\forall a,b,c$ associativa
2) $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ elemento neutro
3) $a \cdot a^{-1} = 1$ $\forall a \neq 0$ elemento reciproco
4) $a \cdot b = b \cdot a$ $\forall a,b$ commutativa

Inoltre:

$(a+b) \cdot c = ac + bc$ distributiva
$a \cdot (b+c) = ab + ac$ $\forall a,b,c$

Da P_1 e P_2 posso definire la sottrazione: $a-b = a+(-b)$ $\forall a,b$
Da P_1 e P_2 posso definire la divisione: $a/b = a \cdot b^{-1}$ $\forall a, b \neq 0$

RELAZIONE D'ORDINE R IN A

(insieme non vuoto) $A = \mathbb{R}$ $R = \geq$ | $R = >$ non funziona

1) $\forall x \in A$ xRx riflessività — ES. $\forall x \in \mathbb{R}$ $x \geq x$
2) $\forall x,y \in A$ $(xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$ antisimmetria — $\forall x,y \in \mathbb{R}$ $x \geq y \wedge y \geq x \Rightarrow x = y$
3) $\forall x,y,z \in A$ $(xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$ transitività — $\forall x,y,z \in \mathbb{R}$ $x \geq y \wedge y \geq z \Rightarrow x \geq z$
4) $\forall x,y \in A$ $xRy \vee yRx$ dicotomia — $\forall x,y \in \mathbb{R}$ $x \geq y \vee y \geq x$

↳ Relazione d'ordine totale

$A = \{\{1\}, \{3\}, \{1,2\}\} \rightarrow$ NON e' una relazione d'ordine totale

ES. Su $(K, +, \cdot)$ campo consideriamo una relazione d'ordine totale come $\leq$, troviamo le seguenti proprieta' P_3:

- Il campo $(K, +, \cdot)$ e' un campo ordinato se:
  1) $\forall a,b,c \quad a \leq b \Rightarrow a+c \leq b+c$
  2) $\forall a,b,c \quad a \leq b \wedge c \geq 0 \Rightarrow ac \leq bc$

Sia K un campo ordinato allora $1>0$ e

$\forall a,b \quad a \leq b \Leftrightarrow -a \geq -b$

$\forall a,b \quad a < b \Leftrightarrow -a > -b$

$\forall a \neq 0 \quad a > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} > 0$

$\forall a,b,c \quad c>0 \Rightarrow (a \leq b \Leftrightarrow a-c \leq b-c)$

$\forall a,b,c \quad c>0 \Rightarrow (a<b \Leftrightarrow ac<bc)$

$\forall a \quad a^2 > 0$

DIM - $a \leq b \Rightarrow a+c \leq b+c$

scelgo $c = -a-b$

$a+(-a-b) \leq b+(-a-b) \rightarrow -b \leq -a$

COROLLARIO. L'equazione $x^2+1=0$ non ha soluzioni in K ordinato

DIM $(x^2 \geq 0 \wedge 1>0) \Rightarrow x^2+1 > 0+1 > 0 \Rightarrow$ l'equazione non ha soluzione in un campo ordinato

DEFINIZIONE ASSIOMATICA DI $\mathbb{R}$

Un campo e' assiomatico se valgono P_1, P_2, P_3. Ad esempio $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ e' un campo ordinato.

Sia E un insieme contenuto in $\mathbb{R}$

Def. E limitato superiormente se $\exists M : x < M \ \forall x \in E$

limitato inferiormente se $\exists M : x > M \ \forall x \in E$

limitato se $\exists M, m : m < x < M \ \forall x \in E$

Def. $\bar{x}$ e' massimo se $\bar{x} \in E \wedge x \leq \bar{x} \ \forall x \in E$

minimo se $\bar{x} \in E \wedge x \geq \bar{x} \ \forall x \in E$

Oss. il massimo esiste se l'insieme e' limitato superiormente

il minimo esiste se l'insieme e' limitato inferiormente

ES. $E = \mathbb{N}$ $\quad minimo_E = 0$

$massimo_E \nexists$

Def. Sia $E \subseteq K$ $\ \kappa \in K$ si dice maggiorante (minorante) di E se $\kappa \geq x \ \forall x \in E$ $\quad (\kappa \leq x \ \forall x \in E)$

Es. $E = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0 \wedge x^2 < 2\}$ $K \to$ qualsiasi numero che quando si mette nell'insieme ne diventa il massimo (maggiorante) o il minimo (minorante).

Def. Si dice estremo superiore di E il minimo dei maggioranti (se esiste), in tal caso si indica come $\sup_E$.
Si dice estremo inferiore di E il massimo dei minoranti (se esiste), in tal caso si indica come $\inf_E$.

Es. $E = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0 \wedge x^2 < 2\}$ $\exists \inf_E = 0$; $\nexists \sup_E$

$E = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \wedge x^2 < 2\}$

maggioranti : $\{x \in \mathbb{R} : x \geq \sqrt{2}\}$ $\exists \sup_E = \sqrt{2}$ $\nexists$ massimo

minoranti : $\{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$ $\exists \inf_E = 0 =$ minimo

PROPRIETA' DELL'ESTREMO SUPERIORE

- P_4 : Ogni insieme $E \subseteq K$ non vuoto e limitato superiormente possiede un estremo superiore in K

Def. Chiamiamo $\mathbb{R}$ un insieme che soddisfa le proprietà: P_1, P_2, P_3, P_4. (Assioma di completezza / continuità di $\mathbb{R}$)

Def. Retta estesa $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

Si estendono relazioni d'ordine $\forall x \in \overline{\mathbb{R}}$ $-\infty < x < +\infty$

$\overline{\mathbb{R}}$ e' totalmente ordinata risp $\leq$, $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ $+\infty$ e' maggiorante di A
$-\infty$ e' minorante di A

TEOREMA - Estensione nozione inf e sup

se $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ allora $\exists \sup A, \inf A \in \overline{\mathbb{R}}$

- $\sup_A = +\infty \Leftrightarrow A$ NON e' superiormente limitato
- $\inf_A = -\infty \Leftrightarrow A$ NON e' inferiormente limitato
- $\inf \emptyset = +\infty$ massimo dei minoranti $\sup \emptyset = -\infty$ minimo dei maggioranti

INTERVALLO

$I \subseteq \mathbb{R}$. I limitato di estremi a, b $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ chiuso $\begin{cases} \text{Inf} = \min = a \\ \text{Sup} = \max = b \end{cases}$

$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ APERTO $\begin{cases} \text{Inf} = a \\ \text{Sup} = b \end{cases}$

$\nexists$ max e min

- ILLIMITATO $I=[a,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}: x\geq a\}$ Inf $=a$ min $=a$; Sup $=+\infty$ $\nexists$ max

OSS. Gli intervalli per essere tali devo soddisfare la proprietà di connessione: $x_1, x_3 \in I \wedge x_1<x_2<x_3 \Rightarrow x_2 \in I$

ES: $[0,1]\cup(3,4]$ NON è un intervallo

PRINCIPIO DI INDUZIONE

"$\forall n\in\mathbb{N}$ $n>n_0$ vale la proprietà $p(n)$"

DIM:

1) Dimostro che $p(n_0)$ è vera
2) Assumo come ipotesi che $p(n)$ sia vera e cerco di dimostrare che $p(n+1)$ sia vera $p(n)$ VERA $\Rightarrow p(n+1)$ VERA

ES. $2^n>n$ $\forall n\in\mathbb{N}$

se $n=0$ $2^0>0$ $1>0$ VERO

Hp $2^n>n$ $\forall n>N \rightarrow 2^n-n>0$

Ts $2^{n+1}>n+1$ $\forall n>N$

$2^n\cdot 2>n+1 \longrightarrow 2^n(1+1)>n+1 \longrightarrow 2^n+2^n>n+1 \rightarrow 2^n+\overbrace{2^n-n}^{\text{positiva}}>1 \longrightarrow$

$\longrightarrow a_n+2^n>1 \longrightarrow$ nel peggiore dei casi: $\underbrace{\underbrace{a_n}_{+}+1}_{>1}>1$

$\longrightarrow 2^n>n$ $\forall n\in\mathbb{N}$

DISUGUAGLIANZA DI BERNOULLI

TEO. Per ogni intero $n\geq 0$ $x\in\mathbb{R} \wedge x\geq -1$ vale $(1+x)^n\geq 1+nx$

DIM. $n=0$ $p(n) \longrightarrow (1+x)^0\geq 1+0x \Rightarrow 1\geq 1$

Hp. $(1+x)^n\geq 1+nx$

Ts. $p(n+1) \longrightarrow (1+x)^{n+1}\geq 1+(n+1)x \rightarrow (1+x)^{n+1}=(1+x)^n\overbrace{(1+x)}^{\geq 0}>(1+nx)(1+x)=$

$=1+nx+x+nx^2=1+(n+1)x+x^2>1+(n+1)x+0$

VALORE ASSOLUTO

Def. Valore assoluto di $a\in\mathbb{R}$ è il numero non negativo così definito:

$$|a|=\begin{cases} a & \text{se } a\geq 0\\ -a & \text{se } a<0\end{cases}$$

Vale allora che $\forall a>0$ $|x|\leq a \Longleftrightarrow -a\leq x\leq a$

PROPRIETÀ

- Disuguaglianza Triangolare: $\forall x,y\in\mathbb{R}$ $|x+y|\leq|x|+|y|$

DIM. Scrivo
$$-|x|\leq x\leq |x|$$
$$-|y|\leq y\leq |y|$$
$$-|x|-|y|\leq x+y\leq |x|+|y| \longrightarrow -(|x|+|y|)\leq x+y\leq |x|+|y|$$
$$|x+y|\leq |x|+|y|$$

- $|a|-|b| \le |a-b| \quad \forall a,b \in \mathbb{R}$

DIM :

- $|ab| = |a||b| \quad \forall a,b \in \mathbb{R}$
- $|a/b| = \frac{|a|}{|b|} \quad \forall a,b \in \mathbb{R}$
- $|-a| = |a| \quad \forall a \in \mathbb{R}$

RADICI N-ESIME ARITMETICHE

TEO - Sia $y \in \mathbb{R} \wedge y > 0 \wedge n$ intero > 1, $\exists!\, x \in \mathbb{R}$ positivo : $x^n = y$

Tale numero e' la radice n-esima aritmetica di $y \to x = \sqrt[n]{y}$

OSS - $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{x^2} = |x| \longrightarrow$ solo positiva

POTENZE AD ESPONENTE REALE

Estrazione radice n-esima aritmetica e' l'operazione inversa dell' elevazione a potenza intera.

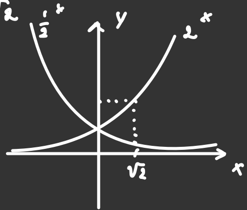
Sia $a > 0 \Rightarrow$ se $n \in \mathbb{N}$ definisco $a^0 = 1$, $a^{n+1} = a^n a$, $a^{-n} = (a^n)^{-1}$

Sia $a > 0 \Rightarrow$ se $n \in \mathbb{Q}$ $r = \frac{m}{n}$ $m,n \in \mathbb{N}$ $n \neq 0$ si pone $y = a^x \Leftrightarrow y^n = a^m$

Dal teorema precedente se $n \ge 1$ intero vale $a^x = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Sia $a > 0 \Rightarrow$ se $x \in \mathbb{R}$ $\quad a^x = \begin{cases} \inf\{a^q : q \in \mathbb{Q},\ q \ge x\} & a \ge 1 \\ \sup\{a^q : q \in \mathbb{Q},\ q \ge x\} & 0 < a < 1 \end{cases}$

ES. $2^{\sqrt{2}}$



$2^q \quad q \ge 2 \quad \inf = \{2^2, 2^{1,5}, 2^{1,42}, 2^{1,415}, \ldots$

FUNZIONE ESPONENZIALE

$x \to a^x \quad D: \mathbb{R} \quad a > 0$

Sia $a < 0$ l'elevazione a potenza e' definita solo in alcuni casi :

$\Rightarrow a^b$ se $b \in \mathbb{Z}$ $\quad$ ES. $(-2)^{-1} = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow a^b$ se $b \in \mathbb{Q}$ $b = \frac{m}{n}$ purche' non sia $\begin{cases} m \text{ dispari} \\ n \text{ pari} \end{cases}$

ES $(-2)^{3/5} = \sqrt[5]{(-2)^3} = \sqrt[5]{-8} \ne \sqrt[5]{8}$

$(-2)^{3/4} = \sqrt[4]{(-2)^3} = \sqrt[4]{-8}$

PROPRIETA' :

$\forall a,b > 0,\ \forall x,y \in \mathbb{R}$

- $a^0 = 1$, $1^x = 1$
- $a^{x+y} = a^x a^y$

- $(a^x)^y = a^{xy}$
- $(ab)^x = a^x b^x$
- $a^{-x} = \frac{1}{a}$

Se $a > 1$ $\quad a^x > a^y \iff x > y$

Se $0 < a < 1$ $\quad a^x > a^y \iff x < y$

LOGARITMI

Considero $a^x = y$ con $a > 0$:

Se $a > 1 \Rightarrow y = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

se $y \leq 0 \Rightarrow S = \varnothing$

TEOREMA: Sia $a > 0$, $a \neq 1$, $y > 0 \Rightarrow \exists!\, x \in \mathbb{R} : a^x = y$. Tale numero e' il logaritmo in base a di y $\quad x = \log_a y$

Per def. vale che $a^{\log_a y} = y$

PROPRIETA':

$\forall x, y > 0 \quad x, y \in \mathbb{R} \quad a > 0;\ a \neq 1;\ a \in \mathbb{R}$

- $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$
- $\log_a(x/y) = \log_a(x) - \log_a(y)$
- $\log_a(x^\alpha) = \alpha \log_a(x) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$
- $\log_b(x) = \dfrac{\log_a(x)}{\log_a(b)} \quad \forall b > 0, \neq 1$