VETTORI E MATRICI

1 VETTORI MATRICI E SISTEMI LINEARI

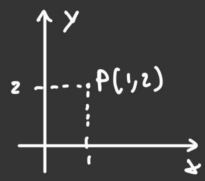
.1 VETTORI IN $\mathbb{R}^2$

$\mathbb{R} \to$ insieme dei numeri reali

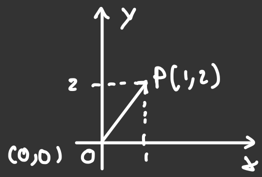
$\mathbb{R}^2 \to$ insieme di coppie (x_1, x_2) di numeri reali appartenenti a $\mathbb{R}$

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

es. ① $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$



② $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ è il segmento che inizia in $(0,0)$ e termina in $(1,2)$



interpretazione degli elementi di $\mathbb{R}^2$

coppia $\longleftrightarrow$ punti $\longleftrightarrow$ segmenti (sono equivalenti)

un elemento di $\mathbb{R}^2$ si chiama vettore (colonna)

Useremo la notazione $\underline{v}, \underline{w}, \underline{u}$ per rappresentare i vettori

Riassumento: un vettore $\underline{v} \in \mathbb{R}^2$ lo possiamo visualizzare in 3 modi

1) coppia di numeri $\underline{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$
2) punto del piano $\underline{v} = P$
3) segmento orientato $\underline{v} = \overrightarrow{OP}$

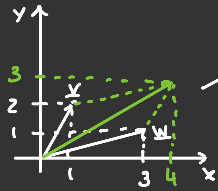
Si può anche scegliere di rappresentare un vettore come $\underline{v} = (x_1, x_2)$ (vettore riga)

Operazioni tra vettori in $\mathbb{R}^2$

- SOMMA : dati $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ definiamo $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}$

  "somma componente per componente"

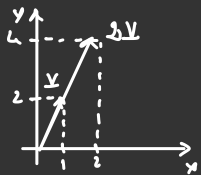
  ES. $\underline{v} + \underline{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$



$\to$ Regola del parallelogramma

- PRODOTTO PER UN NUMERO (SCALARE): dati $\underline{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $c \in \mathbb{R}$
  definiamo $c\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cx_1 \\ cx_2 \end{pmatrix}$ "prodotto componente per componente"

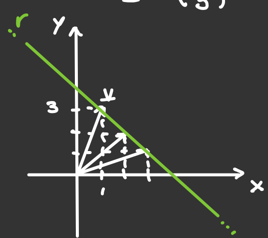
ES. $\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad c = 2 \quad$ $c\underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$



Dati 2 vettori $\underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^2$ consideriamo il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ dato da: $\boxed{r = \{\underline{v} + t\underline{w} : t \in \mathbb{R}^2\} \subseteq \mathbb{R}^2}$ RETTA in $\mathbb{R}^2$ in forma parametrica

t = parametro libero $\longrightarrow$ $\underline{w} \neq 0$ sennò non è una retta
$\underline{w}$ = vettore direzione
$\underline{v}$ = punto che appartiene alla retta

ES. $\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad \underline{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$



$t = 0 \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$t = 1 \quad \underline{v} + \underline{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$t = 2 \quad \underline{v} + 2\underline{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Osservazione: la forma parametrica non è unica!

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t\underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}}_{\text{multiplo della direzione}} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

L'altra forma è quella cartesiana:

$\boxed{r = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : ax_1 + bx_2 + c = 0 \right\} \subseteq \mathbb{R}^2}$ RETTA in forma cartesiana

a, b : coefficienti
$a, b, c \in \mathbb{R}$
c : termine noto
$b \neq 0$

Conversione tra le due forme

ES. (parametrica $\longrightarrow$ cartesiana) : Trovare la forma cartesiana della retta $r : \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$

Imponiamo il passaggio per 2 punti

$t = 1 \quad P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$t = -1 \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} 2a + 2b + c = 0 \\ 0a + 4b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 2b - 4b = 0 \\ c = -4b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ c = -4b \end{cases}$

Quindi $r = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : bx_1 + bx_2 - 4b = 0 \right\}$

$\hookrightarrow x_1 + x_2 - 4 = 0$

ES. (cartesiana $\rightarrow$ parametrica) Trovare l'equazione parametrica della retta: $r = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : 2x_1 - 3x_2 + 1 = 0 \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$

$2x_1 = 3x_2 - 1 \longrightarrow x_1 = \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}$ Risolviamo l'equazione

x_2 : variabile libera $\rightarrow$ $x_2 = t \in \mathbb{R}$ (parametro)

$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{2}t - \frac{1}{2} \\ x_2 = t \end{cases} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}t - \frac{1}{2} \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{2}t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

Quindi $r = \left\{ \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$

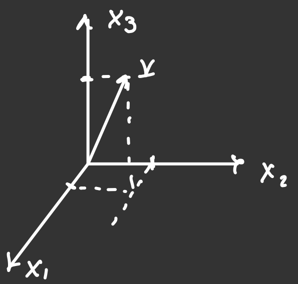
.2 VETTORI IN $\mathbb{R}^3$

$\mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^3 \right\}$ spazio cartesiano

Un elemento di $\underline{v} \in \mathbb{R}^3$ si chiama vettore (colonna) di $\mathbb{R}^3$ e ha 3 interpretazioni:

1) una tripla di numeri $\underline{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$
2) un punto nello spazio $\underline{v} = P$
3) un segmento orientato $\underline{v} = \overrightarrow{OP}$

ES. $\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$



Operazioni tra vettori di $\mathbb{R}^3$

- **SOMMA**: Dati $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ definiamo $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1+y_1\\x_2+y_2\\x_3+y_3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

- **PRODOTTO CON UNO SCALARE**: $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $c \in \mathbb{R}$ definiamo
$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \cdot c = \begin{pmatrix}cx_1\\cx_2\\cx_3\end{pmatrix}$$

Dati $\underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^3$, $\underline{w} \neq \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ consideriamo $r = \{\underline{v} + t\underline{w} : t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$

RETTA in $\mathbb{R}^3$ in forma parametrica

ES. $\underline{v} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ $\underline{w} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ $r = \left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\begin{pmatrix}1+t\\2\\3+2t\end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}\right\}$

ES. Trovare la forma parametrica di $\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 - x_2 + x_3 = 0\right\}$

$2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \longrightarrow x_2 = 2x_1 + x_3$

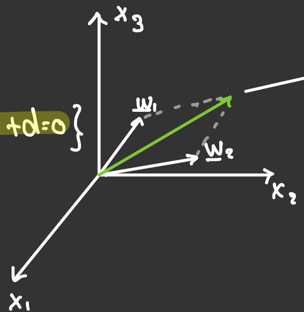
$x_1 = t$
$x_3 = s$

x_1, x_3 variabili libere

$$\begin{cases} x_2 = 2t + s \\ x_1 = t \\ x_3 = s \end{cases} \longleftrightarrow \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2t+s\\t\\s\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2t\\t\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}s\\0\\s\end{pmatrix} = t\underbrace{\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}}_{\underline{w}_1} + s\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}_{\underline{w}_2}$$

$\pi = \{t\underline{w}_1 + s\underline{w}_2 : t, s \in \mathbb{R}\}$

PIANO in $\mathbb{R}^3$



Questa retta fa parte del piano

Ricapitolando: $\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0\right\}$

PIANO in $\mathbb{R}^3$ in FORMA CARTESIANA

$\{\underline{v} + t\underline{w}_1 + s\underline{w}_2 : s, t \in \mathbb{R}\}$

PIANO in $\mathbb{R}^3$ in FORMA PARAMETRICA

$$r = \left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{matrix} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 + d_1 = 0 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 + d_2 = 0 \end{matrix}\right\} \longrightarrow \text{Intersezione fra due piani}$$

RETTA in $\mathbb{R}^3$ in FORMA CARTESIANA

ES. dati $P_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ $P_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ $P_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$. Trovare la forma parametrica e cartesiana del piano passante per P_1, P_2, P_3

$$\begin{matrix} P_1 \in \pi \\ P_2 \in \pi \\ P_3 \in \pi \end{matrix} \quad \begin{cases} a + b + d = 0 \\ a + c + d = 0 \\ b + c + d = 0 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} c = a \\ b = a \\ d = -2a \end{cases} \longleftrightarrow ax_1 + ax_2 + ax_3 - 2a = 0$$

FORMA CARTESIANA

$\pi = \left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 - 2 = 0\right\}$

Risolviamo: $x_1 + x_2 + x_3 - 2 = 0 \longrightarrow x_3 = -x_1 - x_2 + 2$ $\quad x_1 = t,\ x_2 = s$

$$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = s \\ x_3 = -t-s+2 \end{cases} \leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ s \\ -t-s+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ -t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ s \\ -s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\pi = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} : t, s \in \mathbb{R} \right\}$$

.3 VETTORI IN $\mathbb{R}^n$ $\quad n \in \mathbb{N}$

$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$ = insieme delle n-uple ordinate di numeri reali.

Un elemento $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ e' chiamato vettore (colonna) e ha 3 interpretazioni:

1) una n-upla di numeri $\quad \underline{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$
2) il punto nello spazio n-dimensionale $\quad \underline{v} = P$
3) un segmento orientato $\quad \underline{v} = \overrightarrow{OP}$

OPERAZIONI TRA VETTORI DI $\mathbb{R}^n$

- SOMMA: $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$
- PRODOTTO CON UNO SCALARE: $c\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cx_1 \\ \vdots \\ cx_n \end{pmatrix}$

PROPRIETA' DELLE OPERAZIONI $(c, d \in \mathbb{R})$

1) $(\underline{v} + \underline{u}) + \underline{w} = \underline{v} + (\underline{u} + \underline{w})$ Associativa
2) $\underline{v} + \underline{u} = \underline{u} + \underline{v}$ Commutativa
3) $\exists\, \underline{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n : \underline{v} + \underline{0} = \underline{v}$ Esistenza dell'elemento neutro (tipo somma per 0)
4) $\forall\, \underline{v} \in \mathbb{R}^n\ \exists\, \underline{w} \in \mathbb{R}^n : \underline{v} + \underline{w} = \underline{0}$ Esistenza dell'elemento opposto
5) $(cd)\underline{v} = c(d\,\underline{v})$ Associativa
6) $1\,\underline{v} = \underline{v}$
7) $c(\underline{v} + \underline{w}) = c\underline{v} + c\underline{w}$ Distributiva

Seguono dalle corrispondenti proprieta' in $\mathbb{R}$

COMBINAZIONE LINEARE: Dati $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n \in \mathbb{R}^n$ una loro combinazione lineare e' un vettore della forma:

$$c_1\underline{v}_1 + c_2\underline{v}_2 + \dots + c_n\underline{v}_n$$

dove $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$

ES.

$$3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

.4 SISTEMI LINEARI E MATRICI

Una equazione lineare nelle variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$ e' una equazione del tipo $a_1x_1 + a_2x_2 + a_nx_n = b$.
Dove $a_1 a_2, \dots, a_n, b \in N$, b si chiama termine noto mentre $a_1, a_2, \dots, a_n$ sono i coefficenti.
Siamo interessati all'insieme delle soluzioni:

$n=1$ (1 variabile) $ax_1 = b$ e $S = \{x_1 \in \mathbb{R} : ax_1 = b\}$

- se $a_1 \neq 0 \longrightarrow S = \{\frac{b}{a_1}\}$ 1 soluzione
- se $a_1 = 0, b \neq 0 \longrightarrow S = \emptyset$ 0 soluzioni
- se $a_1 = 0, b = 0 \longrightarrow S = \mathbb{R}$ ∞ soluzioni

$n=2$ (2 variabili) $a_1x_1 + a_2x_2 = b$ e $S = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R} : a_1x_1 + a_2x_2 = b\}$

- se $a_1 \neq 0$ $x_1 = -\frac{a_2x_2}{a_1} + \frac{b}{a_1}$ $S = \{\begin{pmatrix} -\frac{a_2}{a_1}t + \frac{b}{a_1} \\ t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}\}$ ∞ soluzioni
  x_2 : variabile libera RETTA PARAMETRICA
  $x_2 = t$ $\hookrightarrow \{\begin{pmatrix} \frac{b}{a_1} \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -\frac{a_2}{a_1} \\ 1 \end{pmatrix}$
- se $a_1 = 0, a_2 \neq 0$ $x_2 = \frac{b}{a_2}$ $S = \{\begin{pmatrix} t \\ \frac{b}{a_2} \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}\}$ ∞ soluzioni RETTA PARAMETRICA
  $x_1 = t$
- se $a_1 = 0, a_2 = 0, b \neq 0$ $S = \emptyset$ 0 soluzioni $\longrightarrow$ avremmo $0 = b$
- se $a_1 = 0, a_2 = 0, b = 0$ $S = \mathbb{R}^2$ ∞ soluzioni

$n \geq 2$ variabili $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$

$$S : \{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n : a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b\}$$

- se $a_i \neq 0$ per qualche indice i ∞ SOLUZIONI
- se $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0, b \neq 0$ 0 SOLUZIONI
- se $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0, b = 0$ ∞ SOLUZIONI ($S = \mathbb{R}^n$)

Un sistema lineare e' un sistema di equazioni lineari.
La forma standard e':

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

b_i = termine noto della i-esima equazione

m equazioni

n variabili

a_{ij} = coefficente della variabile x_j nell'equazione i-esima

i: indice equazione

j: indice variabile

L'insieme delle soluzioni e':

$$S = \left\{ \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n : \underline{x} \text{ soddisfa } \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \right.$$

ES.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} m &= 2 \text{ equazioni} \\ n &= 3 \text{ variabili} \end{aligned}$$

SOLUZIONE PER SOSTITUZIONE

- Risolviamo una equazione rispetto a una variabile, sostituiamo nelle restanti equazioni.
- Ripetiamo fino ad esaurire le equazioni
- Sostituiamo a ritroso

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - x_2 + x_3 \\ x_2 = 2 + 3x_3 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - 3x_3 + x_3 \\ x_2 = 2 + 3x_3 \end{cases} \longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 - 2x_3 \\ x_2 = 2 + 3x_3 \end{cases} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 - 2t \\ 2 + 3t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad S = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} . t \in \mathbb{R} \right\}$$

x_3 : variabile libera

$x_3 = t$

∞ SOLUZIONI

Vogliamo dare una descrizione più rigorosa

Una MATRICE $m \times n$ e' una tabella rettangolare di numeri (Reali) con m righe e n colonne

ES.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & \sqrt{3} \\ \pi & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ matrice } 3 \cdot 4$$

Matrici $m \times 1$ = Vettore colonna

$1 \times n$ = Vettore righa

Dato un sistema lineare in forma standard, la sua matrice completa e' la matrice $m \times (n+1)$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x + y = z \\ z - x + 2 = 0 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 0 \\ -x + 0y + z = 2 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Due sistemi lineari si dicono equivalenti se hanno gli stessi insiemi delle soluzioni

ES. $2x_1 + 3x_2 = 11$ e' equivalente a $8x_1 + 12x_2 = 44$

.5 ALGORITMO | METODO DI GAUSS

Sono operazioni che trasformano un sistema lineare in un atro equivalente. Si può:

1) scambiare due equazioni $EQ_i \longleftrightarrow EQ_j$
2) Moltiplicare un'equazione per uno scalare $c \neq 0$ CEQ_i
3) Aggiungere ad un'equazione un multiplo di un'altra eq. $EQ_i + CEQ_j$ $i \neq j$

Per le matrici:

1) Scambiare 2 righe $R_i \longleftrightarrow R_j$
2) Moltiplicare una righa per uno scalare $c \neq 0$ cR_i
3) Aggiungere ad una riga un mutiplo di un'altra $R_i + CR_j$, $i \neq j$

Una matrice e' a scala se ogni riga non nulla inizia con più zeri della precedente e le righe nulle sono più in basso delle righe non nulle.

ES.
$$\begin{pmatrix} 2 & 11 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Usando le mosse di Gauss e' possibile ridurre una qualsiasi matrice a una matrice a scala. Algoritmo di Gauss.

L'idea e' di "ripoline" una colonna alla volta.

ES.
$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -2 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 5 \\ 0 & 5 & 5 & 15 \\ 0 & 2 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \frac{1}{5}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

SISTEMA:

$$\begin{cases} 2x_2 + 3x_3 = 8 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = -5 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = -5 \\ x_2 + x_3 = 3 \\ x_3 = 2 \end{cases} \longleftrightarrow S = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Un sistema lineare e' a scala se la sua matrice completa e' a scala.

Metodo di Gauss per risolvere i sistemi lineari
- Usare le mosse di Gauss per ridurre il sistema / la matrice completa
- Trovare esplicitamente l'insieme delle soluzioni sostituendo a ritroso.

ES.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ -x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2+R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_2 + x_3 = 3 \\ 0 = -3 \end{cases} \qquad S = \emptyset$$

Il primo elemento non nullo di ogni riga di una matrice a scala si dice pivot.

ES.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ PIVOT

Algoritmo di Gauss-Jordan. Data una matrice A qualsiasi e' possibile utilizzare le mosse di Gauss e ottenere una matrice A' tale che:
- A' e' una matrice a scala
- Tutti i pivot di A' sono uguali a 1
- Ogni pivot e' l'unico elemento non nullo sulla propria colonna

ES.

$$\begin{cases} 2x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 2 \\ -3x_1 + 9x_2 + 3x_3 = -9 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -6 & 2 & -4 & 2 \\ -3 & 9 & 3 & 0 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1/2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 & 1 \\ -3 & 9 & 3 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\xleftrightarrow{R_2+3R_1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & -6 & -6 \end{pmatrix} \xleftrightarrow{R_2/6} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xleftrightarrow{R_1-R_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_4 = 2 \\ x_3 - x_4 = -1 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3x_2 + x_4 + 2 \\ x_3 = x_4 - 1 \\ x_2 = t,\ x_4 = s \end{cases} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3t+s \\ t \\ s-1 \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dato un sistema a scala, le variabili corrispondenti alle colonne con i pivot sono dette variabili pivot (in quello sopra sono x_1, x_3). Le variabili rimanenti sono dette variabili libere (x_2, x_4). Un equazione lineare si dice degenere se tutti i coefficienti sono zero ($0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = b$).

- se $b \neq 0$ $S = \emptyset$ 0 soluzioni
- se $b = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ∞ SOLUZIONI

Osservazione: l'algoritmo di Gauss-Jordan risolve un sistema lineare esprimendo le variabili pivot in funzione delle variabili libere.

TEOREMA: DATO UN sistema lineare a scala, siano n il numero di variabili e m il numero di equazioni. Allora:

- il sistema ha soluzioni $\Leftrightarrow$ non ci sono equazioni del tipo "$0 = 1$" $\Leftrightarrow$ non ci sono pivot nella colonna dei termini noti. ↳ "se e solo se"
- Se il sistema ha soluzioni, l'insieme delle soluzioni ha $n - r$ parametri dove r e' il numero dei pivot
- In particolare se $n = r$ allora il sistema ha una unica soluzione → Non abbiamo parametri es $S = \left\{ \binom{1}{3} \right\}$

nell'esempio alla pagina prima abbiamo 4 variabili (n) e 2 pivot quindi 2 parametri (t, s)

.6 ALGEBRA DELLE MATRICI

Denotiamo con $Mat_{\mathbb{R}}(m,n) = \{\text{matrici } m \times n \text{ con elementi in } \mathbb{R}\}$

ES.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & \pi \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \in Mat_{\mathbb{R}}(2,3)$$

In particolare, $Mat_{\mathbb{R}}(m,1) = \{\text{vettore colonna}\} = \mathbb{R}^m$

$Mat_{\mathbb{R}}(1,n) = \{\text{vettore riga}\} = (\mathbb{R}^n)$

Notazione: per una generica matrice si può scrivere $A = (a_{ij})$

Inoltre con $(A)_{i,j} = a_{ij}$ = riga i e colonna j

ES. $(A)_{2,2} = -1$

- **SOMMA DI MATRICI**: Date $A=(a_{ij}) \in Mat_{\mathbb{R}}(m,n)$ e $B=(b_{ij}) \in Mat_{\mathbb{R}}(m,n)$

$$A+B=(a_{ij}+b_{ij}) \in Mat_{\mathbb{R}}(m,n)$$

la somma componente per componente

ES.

$$B+A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

- **PRODOTTO PER UNO SCALARE**: Date la matrice e un numero $c \in \mathbb{R}$ definiamo $c \cdot A=(ca_{ij}) \in Mat_{\mathbb{R}}(m,n)$

ES.

$$-3A=-3\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & -6 & -9 \\ -12 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le proprietà della somma di matrici e del prodotto di uno scalare sono le stesse 8 proprietà di $\mathbb{R}^n$

ES $\exists 0 \in Mat_{\mathbb{R}}(m,n)$: $0+A=A \quad \forall A \in Mat_{\mathbb{R}}(m,n)$

$(0_{ij})=0 \quad \forall i,j$ (matrice nulla)

- **TRASPOSTA DI UNA MATRICE**: Data $A=(a_{ij}) \in Mat_{\mathbb{R}}(m,n)$ definiamo $A^T=(a_{ji}) \in Mat_{\mathbb{R}}(n,m)$ "scambio righe-colonne"

ES. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

Proprietà: Date 2 matrici A,B $mat_{\mathbb{R}}(m,n)$ $c \in \mathbb{R}$

- $(A^T)^T=A$
- $(A+B)^T=A^T+B^T$
- $(cA)^T=cA^T$

- **PRODOTTO TRA MATRICI**: (prodotto righe per colonne)
  - caso speciale. Vettore riga x vettore colonna

Dati $\underline{a}=(a_1,a_2,\dots,a_n) \in Mat_{\mathbb{R}}(1,n)$

$\underline{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in Mat_{\mathbb{R}}(m,1)$.

Definiamo $\underline{a}\,\underline{b}=(a_1,a_2,\dots,a_n)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}=a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_m$

ES.

$\underline{a}=(1,2,3)$

$\underline{b}=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\longrightarrow$ $\underline{a}\,\underline{b}=1(-1)+2(2)+3(5)=18$

- **caso generale**: date $A=(a_{ij})\in Mat_{\mathbb{R}}(m,p)$ e $B=b_{ij}\in Mat_{\mathbb{R}}(p,n)$. **Definiamo $AB\in Mat_{\mathbb{R}}(m,n)$** ponendo $(AB)_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\dots+a_{ip}b_{pj}=$

$$=\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$$

. Cioe' l'elemento sulla riga i e sulla colonna j di $AB=$ (riga i A)(colonna j B)

Importante **AB e' definito solo quando il numero di colonne di A = numero di righe di B**

ES. $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&3\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot5+2\cdot2&1\cdot3+2\cdot1\\3\cdot5+4\cdot2&3\cdot3+4\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&5\\23&13\end{pmatrix}$

$2\times2 \qquad 2\times2 \qquad 2\times2$

Osservazione: **il prodotto tra matrici non e' commutativo** (in generale $AB\neq BA$)
- a volte AB e' definito e BA no
- a volte AB e' definito e anche BA ma non sono uguali

ES.

$$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&2&3\\1&0&-1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\cdot0+1\cdot1&0\cdot1+1\cdot0&0\cdot2+1\cdot(-1)&0\cdot3+1\cdot4\\1\cdot0+0\cdot1&1\cdot1+0\cdot0&1\cdot2+0\cdot(-1)&1\cdot3+0\cdot4\\1\cdot0+2\cdot1&1\cdot1+2\cdot0&1\cdot2+2\cdot(-1)&1\cdot3+2\cdot4\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&-1&4\\0&1&2&3\\2&1&0&11\end{pmatrix}$$

Proprieta'
- $(AB)C=A(BC)$ **Associativa**
- $A(B+C)=AB+AC$ **Distributiva**
- Importante: **$AB=0$ senza che una delle 2 sia nulla**
- **L'elemento neutro della moltiplicazione**

Definizione: la matrice identita' $n\times n$ e':

$$I_n=\begin{pmatrix}1&0&\dots\\0&1&\dots\\\dots&\dots&0\ 1\end{pmatrix}\rightarrow (I_n)_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\0 & i\neq j\end{cases}=\delta_{ij}$$

La matrice che ha solo 1 sulla diagonale

Definizione: **una matrice $\in Mat_{\mathbb{R}}(n,n)$ si dice matrice QUADRATA numero righe = numero colonne.**
una matrice quadrata dove $A^T=A$ si dice simmetrica

Proprietà: Data una matrice $A \in Mat_{\mathbb{R}}(m \times n)$ allora

$$\underset{m\times m}{I_m} \underset{m\times n}{A} = \underset{m\times n}{A} \underset{n\times n}{I_n} = \underset{m\times n}{A}$$

ES $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$

Prodotto vs Trasposizione: $(\underset{m\times p}{A}\underset{p\times n}{B})^T = \underset{n\times p}{B^T}\underset{p\times m}{A^T}$ dove
$A \in Mat_{\mathbb{R}}(m,p)$, $B \in Mat_{\mathbb{R}}(p,n)$

Dimostrazione: $((AB)^T)_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_{k=1}^{p} a_{jk} b_{ki} = \sum_{k=1}^{p} (A)_{jk} (B)_{ki} =$

$$= \sum_{k=1}^{p} (A^T)_{kj} (B^T)_{ik} = \sum_{k=1}^{p} (B^T)_{ik} \cdot (A^T)_{kj} = (B^T)_{ij} \quad (A^T)_{ij}$$

1.7 FORMA MATRICIALE DEI SISTEMI

Dato un sistema lineare (in forma standard).

Definiamo $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \in Mat(m,n)$ Matrice dei coefficenti

$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ Vettore delle incognite

$\underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$ Vettore dei Termini noti

La matrice $(A|b) \in Mat(m, n+1)$ e' una matrice completa

Allora il sistema si scrive come $A\underline{x} = \underline{b}$

Infatti $A\underline{x} = \underset{m\times n}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mn} \end{bmatrix}} \underset{n\times 1}{\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = \underline{b}$

Def. Il rango di una matrice $A \in Mat(m,n)$ è $rK(A) = \#$pivot in una riduzione a scala di A

ES.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad rK(A) = 1$$

OSS. Esistono diversi modi per ridurre una matrice a scala, ed e' possibile dimostrare che il rango non cambia.
Le mosse di Gauss preservano il rango
Se $A \in Mat(n,m) \to 0 \leq rK(A) \leq \min(m,n)$

TEOREMA (di Rouche - Capelli)
Sia $A\underline{x} = \underline{b}$ un sistema lineare con $A \in Mat(m,n)$, $\underline{b} \in \mathbb{R}^m$
1) Il sistema ha soluzioni $\Leftrightarrow rK(A) = rK(A|\underline{b})$
2) $\exists\, \underline{w}, v_1, \dots, v_s \in \mathbb{R}^m : S = \{\underline{w} + t_1 v_1 + \dots + t_s v_s : t_i \in \mathbb{R}\}$; dove $s = n - rK(A)$
3) Il sistema ha una unica soluzione $\Leftrightarrow rK(A) = rK(A|\underline{b}) = n$

Quindi $rK(A)$ ci dice le soluzioni, per trovarle si usa il metodo di Gauss o di Gauss-Jordan

ES. $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases}$ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ $\underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ $A\underline{b} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

NON HA SOLUZIONI!!

$rK(A) = 1$
$rK(A|\underline{b}) = 2$

ES. $\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = -3 \\ 3x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$ $A\underline{b} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 & 3 & -3 \\ 3 & -3 & 6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longleftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & -3 \end{bmatrix}$ $rK(A) = 2$
$rK(A|\underline{b}) = 2$

IL SISTEMA AMMETTE SOLUZIONI CON $s = n - rK(A) = 2$ PARAMETRI!!

DIM. Usiamo il metodo di Gauss-Jordan trasformando $A\underline{x} = \underline{b}$ in un sistema equivalente $A'\underline{x} = \underline{b}'$ dove $(A'|b')$ e' una riduzione a scala di $(A|\underline{b})$, Allora $rK(A'|b') = rK(A|b)$. Inoltre restringendo l'algoritmo di Gauss-Jordan alle prime n colonne otteniamo che A' e' una riduzione a scala di A', quindi $rK(A) = rK(A')$

1) $A\underline{x} = \underline{b}$ ha soluzione $\Leftrightarrow A'\underline{x} = \underline{b}'$ ha soluzioni $\Leftrightarrow$ non ci sono pivot in $\underline{b}'$ $\Leftrightarrow$ tutti i pivot di $A'|b'$ sono in A' $\Leftrightarrow rK(A'|b') = rK(A') \Leftrightarrow rK(A|\underline{b}) = rK(A)$

2) Il sistema $A'\underline{x} = \underline{b}$ esprime le $rK(A)$ variabili in funzione delle $n - rK(A)$ variabili libere.

3) Segue da 1) e 2)

1.8 SISTEMI LINEARI OMOGENEI

Def. Sia $A \in Mat(m,n)$, il sistema lineare $A\underline{x}=\underline{0}$ e' detto sistema lineare omogeneo. Il suo insieme delle soluzioni e' detto nucleo di A: $Ker(A) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : A\underline{x}=\underline{0}\} \subseteq \mathbb{R}^n$

oss. Un sistema omogeneo ha sempre soluzioni:
1) $0 \in Ker(A)$
2) $rK(A) = rK(A|\underline{0})$

ES. $Ker\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0 \\ x_2+2x_3=0 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2=-2x_3 \\ x_3=t \end{cases} \longleftrightarrow Ker(A)=\left\{t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}\right\}$$

TEO. (Struttura delle soluzioni di un sistema omogeneo)
Sia $A\underline{x}=\underline{b}$ un sistema lineare. Supponiamo che l'insieme delle soluzioni non sia vuoto $S \neq \emptyset$. Sia $\underline{v} \in S$ Allora:

$$S = \underline{v} + Ker(A) = \{\underline{v}+w : w \in Ker(A)\}$$

1.9 MATRICE INVERSA

Data una Matrice $A \in Mat(n,n)$ $\exists B \in Mat(n,n) : AB = I_n$

$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad B=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : AB = I_2 \Longleftrightarrow AB=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

TEO. Sia $A \in Mat(n,n)$. Le seguenti condizioni sono equivalenti:
1) $rK(A)=n$
2) $A\underline{x}=\underline{b}$ ha una unica soluzione
3) $\exists S \in Mat(n,n) : SA=I_n$
4) $\exists D \in Mat(n,n) : DA=I_n$

oss. A priori potrebbe succedere $S \neq D$, in realta' $S=D$ infatti

$$S = SI_n = S(AD) = (SA)D = I_nD = D$$

Quindi A si dice invertibile e $S=D=A^{-1}$ si chiama inversa di A (e' unica) e $AA^{-1}=A^{-1}A=I_n$

Si calcola con i metodi di Gauss-Jordan.

$$(A|I_n) \longrightarrow (I_n|A^{-1})$$

ES. $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad rK(A)=2$

$$\left[\begin{matrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right] \to \left[\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{matrix}\right] \longrightarrow \left[\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\ \begin{matrix} 1 & 0 \\ -1 & 1/2 \end{matrix}\right]$$
$\qquad I_2 \quad A^{-1}$

PROP. $A, B \in Mat(n,n)$ invertibili. Allora:

- AB e' invertibile e $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$
- A^T e' invertibile e $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$