NUMERI COMPLESSI

Def. di $\mathbb{C}$ e struttura del campo.

$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \Rightarrow$ L'insieme delle coppie ordinate nel piano (a,b) di numeri reali.

Su $\mathbb{R}^2$:

- SOMMA : $(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d)$
- PRODOTTO : $(a,b)(c,d) = (ac-bd, ad+bc)$

$\Rightarrow$ Soddisfano la proprieta': commutativa, associativa, distributiva ecc.

- ELEMENTO NEUTRO :
  - SOMMA : $(0,0) \Rightarrow (a,b)+(0,0) = (a,b)$
  - PRODOTTO : $(1,0) \Rightarrow (a,b)(1,0) = (a,b)$
- OPPOSTO :
  - SOMMA : $(-a,-b) \Rightarrow (a,b)+(-a,-b) = (0,0)$
  - PRODOTTO : $\left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right) \Rightarrow (a,b)\left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right) = (1,0)$ (RECIPROCO)

$\Rightarrow$ Sono soddisfatte le proprieta' tali per cui $\mathbb{R}^2$ e' un campo.

Identifichiamo $\mathbb{R}^2$ con il campo complesso $\mathbb{C}$

Oss. $\mathbb{C}$ contiene $\mathbb{C}_0$, ossia $(a,0)$

$\mathbb{C}_0$ e' un sottocampo

- $(a,0)+(b,0) = (a+b,0)$
- $(a,0)(b,0) = (ab,0)$

Posso identificare i numeri reali con i numeri complessi $(a,0)$

$\Rightarrow$ $\mathbb{C}$ ampliamento di $\mathbb{R}$ $(\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C})$

Calcolo il quadrato di $(0,1)$:

- $(0,1)(0,1) = (-1,0)$ $\Rightarrow$ il quadrato di $(0,1)$ mi da un numero reale (-1) negativo
- $(0,1)$ e' una coppia speciale che denotiamo con i = unita' immaginaria

FORMA ALGEBRICA DEI NUMERI COMPLESSI

$(a,b) = (a,0)+(0,b) = (a,0)+(0,1)(b,0) = a+ib \quad a,b \in \mathbb{R} \Rightarrow i^2 = -1$

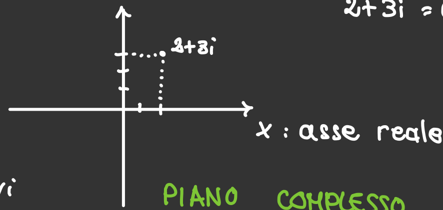
- SOMMA : $(a+ib)+(c+id) = (a+c)+i(b+d)$
- PRODOTTO : $(a+ib)(c+id) = (ac+i(ad)) + (i(bc) + i^2(bd)) \overset{i^2=-1 \Rightarrow}{=} ac + i(ad+bc) - bd$
$= (ac-bd, ad+bc)$

$z = a + ib$

$a = Re(z) \in \mathbb{R}$

$b = Im(z) \in \mathbb{R}$

I numeri sull'asse Y si chiamano immaginari puri.

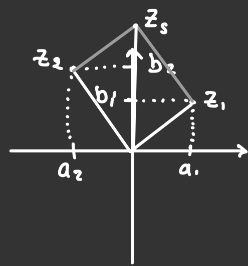


PIANO COMPLESSO DI GAUSS

$2+3i = (2,3)$

$z_1 = a_1 + ib_1$

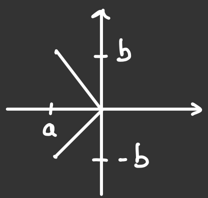
$z_2 = a_2 + ib_2$



$z_s = z_1 + z_2$

OSS. $\mathbb{C}$ non e' ordinato; non e' possibile definire una relazione d'ordine fra numeri complessi

- Coniogato di z: Dato $z = a+ib$, il coniugato di z si def. come $\bar{z} = a - ib$



CIAO!

- SOMMA: $z + \bar{z} = a + ib + a - ib = 2a = 2Re(z)$

  $z - \bar{z} = a + ib - a + ib = 2ib = 2Im(z)$
- PRODOTTO: $z\bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 - i^2b^2 = a^2 + b^2$
- CONIUGATO: $\bar{\bar{z}} = z$; $\bar{z} = z \quad z \in \mathbb{R}$

PROPRIETA' CONIUGATO

- $\overline{(z_1 + z_2)} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
- $\overline{(z_1 z_2)} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
- $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$

MODULO DI z

Si definisce modulo di $z = a + ib$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}$$

OSS. $z = a \Rightarrow |z| = \sqrt{a^2} = |a| \Rightarrow z \in \mathbb{R}$

PROPRIETA'

1) $|z| \geq 0$ e $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

DIM. $\sqrt{a^2+b^2} \geq 0 \ \forall a, b \in \mathbb{R}$, $\sqrt{a^2+b^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$

2) $|z| = |\bar{z}|$

DIM. $\bar{z} = a - ib$ $\quad |z| = \sqrt{a^2+b^2}$

$|\bar{z}| = \sqrt{a^2+(-b)^2} = \sqrt{a^2+b^2}$

3) $|Re(z)| \leq |z|$, $|Im(z)| \leq |z|$, $\quad |z| \leq |Re(z)| + |Im(z)|$

DIM. $Re(z) = a$

$|Re(z)| = |a| \leq \sqrt{a^2+b^2} \rightarrow$ nel peggiore dei casi con $b=0$ ho $a=a$

$|z| = \sqrt{a^2+b^2} \leq \sqrt{a^2+b^2+2|a||b|} = \sqrt{(|a|+|b|)^2} = ||a|+|b|| = |a|+|b| = |Re(z)| + |Im(z)|$

4) $|z_1+z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

$|z_1+z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$

DIM. $||z_1|-|z_2|| \leq |z_1+z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

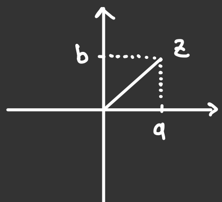
elevo al quadrato

$(|z_1| - |z_2|)^2 \leq |z_1+z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2$ $\qquad z_1 = a+ib$

$\qquad z_2 = c+id$

$(\sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{c^2+d^2})^2 \leq (\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2})^2 \leq (\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2})^2$

SIGNIFICATO GEOMETRICO



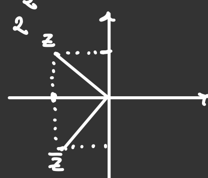
$|z| = \sqrt{a^2+b^2} \Rightarrow$ DISTANZA DALL' ORIGINE

ES. $z = (1+i)^3$ FORMA AGEBRICA, MODULO, CONIUGATO, RAPP. GEOMETRICA

- $z = 1+i^3+3i+3i^2 = 1+i^2 i+3i-3 = -2+2i$
- $|z| = \sqrt{(-2)^2+(2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
- $\bar{z} = -2-2i$

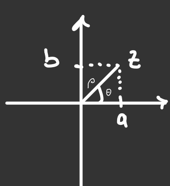
$Re(z) = -2$

$Im(z) = 2$



FORMA TRIGONOMETRICA

$z = a+ib$



$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$

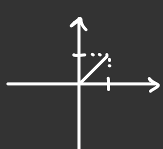
$\rho = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$

$\theta = \arg(z)$ $\quad \cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ $\quad \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ $\quad tg\theta = \frac{b}{a}$

$\theta = (-\pi, \pi]$

ES.

$z = 1+i$



$z = \rho(\cos\theta + \sin\theta)$ $\quad \rho = |z| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$tg\,\theta = 1$ $\quad \sin\theta = \cos\theta$ $\quad \theta = \frac{\pi}{4}$

$z = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}) =$

PRODOTTO TRA NUMERI COMPLESSI

$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ $\quad w = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$

$\Rightarrow zw = \rho r(\cos(\theta+\varphi) + i\sin(\theta+\varphi))$

DIM. $zw = \rho r(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\varphi + i\sin\varphi) =$

$= \rho r(\cos\theta\cos\varphi + i\sin\theta\cos\varphi + i\sin\theta\cos\varphi + i^2\sin\theta\sin\varphi) =$

$= \rho r(\cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi + i(\sin\theta\cos\varphi + \sin\theta\cos\varphi)) =$

$= \rho r(\cos(\theta+\varphi) + i\sin(\theta+\varphi))$

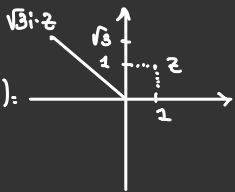
MOLTIPLICARE z PER w SIGNIFICA OPERARE SU z UNA DILATAZIONE O CONTRAZIONE DEL MODULO DI r UNA ROTAZIONE DI UN ANGOLO φ

ES. $z = 1+i$

$|z| = \sqrt{2}$

$z = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) =$

$\rho = \sqrt{2}$ $\quad \theta = \frac{\pi}{4}$



$w = \sqrt{3}i$

$|w| = \sqrt{3}$

$\varphi = \frac{\pi}{2}$

$w \cdot z = \sqrt{6}(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi)$

COROLLARIO (FORMULA DI MOIVRE)

Sia $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \in \mathbb{C}$ e sia $n \geq 1 \in \mathbb{N}$

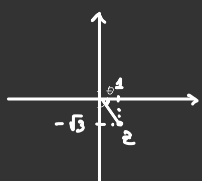
$\Rightarrow z^n = \rho^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$

DIM Applico prec. formula (wz) con $w = z$

ES. $(1 - i\sqrt{3})^9$

$z = 1 - i\sqrt{3}$

$z^9 = ?$



$a = 1$

$b = \sqrt{3}$

$\rho = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$

$tg\,\theta = \frac{b}{a} = -\sqrt{3} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{3}$

$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b}}$

$z = 2(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3}))$

DE MOIVRE

$z^9 = 2^9(\cos(9(-\frac{\pi}{3})) + i\sin(9(-\frac{\pi}{3})) =$

$= 2^9(\cos(-3\pi) + i\sin(-3\pi)$

$= -2^9$

IDENTITA' DI EULERO

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

al variare di θ rappresenta una circonferenz con $c=0$ e $r=1$

$\Rightarrow e^{i\pi} = -1$

$\boxed{z = \rho e^{i\theta}}$ $\longrightarrow$ FORMA ESPONENZIALE DI NUMERO COMPLESSO

$w = re^{i\varphi}$

$zw = \rho e^{i\theta} r e^{i\varphi} = \rho r e^{i(\theta+\varphi)} = \rho r(\cos(\theta+\varphi) + i\sin(\theta+\varphi))$

$z^n = (\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

ES. $z = 1 - i\sqrt{3}$

$z = \rho e^{i(-\frac{\pi}{3})} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

$z^9 = (\rho e^{i(-\frac{\pi}{3})})^9 = 2^9 e^{-i3\pi} = 2^9(\cos(-3\pi) + i\sin(-3\pi)) = -2^9$

ES. $A = \{z : 1 < |z| < 2,\ \frac{\pi}{6} < \arg(z) < \frac{\pi}{3}\}$

$B = \{iz : z \in A\}$

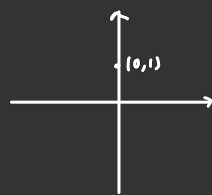
A)

ROTAZONE
DI $\pi/2$ (90°)

$i \rightarrow \rho?$

$a = 0 \quad \varphi?$

$b = 1$



$\rho = 1 \qquad i = 1e^{i\pi/2}$

$\varphi = \frac{\pi}{3}$

$iz = e^{i\pi/2} re^{i\theta} = re^{i(\theta + \pi/2)}$

RADICI N-ESIME DI NUMERI COMPLESSI

Def. Dato $w \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N} \geq 2$, una radice n.esima di w e' un numero complesso z t.c.

$$z^n = w$$

TEO. Dati $w = re^{i\varphi} \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N} \geq 2$, le radici n-esime di w sono tutti e soli i numeri complessi del tipo:

$$z_k = \rho e^{i\theta_k} \quad \text{con} \quad \rho = \sqrt[n]{r}$$

$$\theta_k = \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \quad 0 < k < n-1$$

Infatti: $z_k^n = \rho^n e^{in\theta_k} = (\sqrt[n]{r})^n e^{in\frac{\varphi + 2k\pi}{n}} = (\sqrt[n]{r})^n e^{i(\varphi + 2k\pi)} = re^{i\varphi} = w$

SIGNIFICATO GEOMETRICO

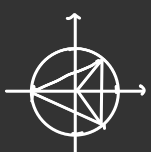
Nel campo complesso, le radici sono i vertici di un poligono regolare di n lati, inscritto in un cerchio di centro O e raggio $\rho = \sqrt[n]{r}$.

Ogni radice si ottiene dalla precedente moltiplicando per $e^{i\frac{2\pi}{n}}$, quindi ruotando la precedente di un angolo $\frac{2\pi}{r} = \varphi$

ES. $z^3 = -1 = w$

$a = -1$

$b = 0$



$r = 1 = |w| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2}$

$\varphi = \pi$

$w = -1 = 1e^{\pi}$

$z_k = \rho e^{i\theta_k}$

$\rho = \sqrt[n]{r} = \sqrt[3]{1} = 1$

$\theta_k = \frac{\varphi + 2k\pi}{n} = \frac{\pi + 2k\pi}{3}$

$k = 0, 1, 2$

$\begin{cases} \theta_0 = \pi/3 \\ \theta_1 = \pi \\ \theta_2 = \frac{5}{3}\pi \end{cases}$

$\theta_0 \rightarrow z_0 = \rho e^{i\theta_0} = e^{i\pi/3} = \cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\theta_1 \rightarrow z_1 = e^{i\pi} = -1$

$\theta_2 \rightarrow z_2 = e^{i\frac{5}{3}\pi} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

EQ. 2° GR IN $\mathbb{C}$

$az^2 + bz + c = 0 \quad a, b, c \in \mathbb{C}$

ES. $z^2 + 2iz - \sqrt{3}i$

$z_{1/2} = -i \pm \sqrt{i^2 + \sqrt{3}i} = -i \pm \sqrt{-1+\sqrt{3}i} =$

$r = \sqrt{1+3} = 2 \qquad \varphi = \frac{2}{3}\pi$

$a = -1$

$b = \sqrt{3}$

$-1+\sqrt{3}i = 2e^{i\frac{2}{3}\pi}$

$= -i \pm \sqrt{2e^{i 2/3 \pi}} = -i \pm \sqrt{2}e^{i\pi/3} =$

$= -i \pm \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) =$

$= \pm\frac{\sqrt{2}}{2} + i\left(-1 \pm \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$

TEO. FONDAMENTALE ALGEBRICO.

Un' eq. polinomiale nella forma:

$a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0 = 0 \quad (a_n \neq 0)$

con $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ ha precisamente n radici in campo complesso, ognuno di esse contata con la sua molteplicità.

ES. $z^5 + z^3 = 0 \quad n = 5$

$z^3(z^2 + 1) = 0$

$z \cdot z \cdot z\,(z^2 - i^2) = 0$

$z \cdot z \cdot z\,(z+i)(z-i) = 0$ so $z_{1,2,3} = 0,\ z_4 = i,\ z_5 = -i$

PROPRIETA'. Se $p(z)$ ha coefficienti reali ($a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$) se w e' radice non reale $\Rightarrow \overline{w}$ e' una radice con la stessa molteplicità.

OSS. Se $p(z)$ ha grado dispari almeno una radice e' reale

ES. $z^3 = -1$

$z^3 + 1 = 0$

$(z+1)(z^2 - z + 1) = 0$

$\nearrow z+1 = 0 \Rightarrow z = -1$

$\searrow z^2 - z + 1 \Rightarrow z_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{3i^2}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

ES. LUOGHI GEOMETRICI

$(z + \bar{z} - |z|^2) \in \mathbb{R}^+ / \{0\}$

$z = x + iy$

$\bar{z} = x - iy$

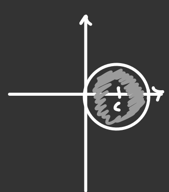
$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$x + \cancel{iy} + x - \cancel{iy} - (\sqrt{x^2+y^2})^2 = 2x - x^2 - y^2 \in \mathbb{R}^+ / \{0\}$

$\mathrm{Re}(2x - x^2 - y^2) > 0$

$2x - x^2 - y^2 > 0$

$x^2 + y^2 - 2x < 0$



1) $x^2 + y^2 - 2x = 0 \quad C(1,0) \quad r = 1$

2) $x^2 + y^2 - 2x < 0$

ES. $Re(z^2+z\bar{z}+iz+1)=0$ LUOGO GEOMETRICO

ES. $z^3=\bar{z}$

1) $(x+iy)^2+(x+iy)(x-iy)+i(x+iy)+1$

$x^2+2xiy-y^2+x^2+y^2+i(x+iy)+1$

$x^2-\cancel{y^2}+x^2+\cancel{y^2}-y+1 \Rightarrow y=2x^2-1$

2) $z^3=\bar{z}$

$$z^3=(x+iy)^3=\sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k}x^{3-k}(iy)^k=1\cdot x^3\cdot 1+3\cdot x^2(iy)+3\cdot x(iy)^2+1\cdot 1(iy)^3$$

$$=x^3+3ix^2y-3xy^2-iy^3=(x^3-3xy^2)+i(3x^2y-y^3)$$

$x^3-3xy=x \Rightarrow x^2-3y^2=1 \Rightarrow x^2-9x^2-3=1 \Rightarrow x^2=-\frac{1}{2}$ non ha soluzioni reali quindi $x=0$ (nessuna componente reale)

$3x^2y-y^3=-y \Rightarrow 3x^2-y^2=-1 \Rightarrow y^2=3x^2-1 \Rightarrow y^2=+1$

$\Rightarrow y=\pm 1 \Rightarrow z=\pm i$

caso $z=i$

$z^3=i^3=\bar{z}=-i$ ✓

caso $z=-i$

$z^3=-i^3=\bar{z}=-i$ ✓