Analisi I

Marco Macherelli

October 2024

Contents

1 Definizione Assiomatica di R

Sia E un insieme contenuto in R:

- **Def.** E è limitato superiormente se $\exists M : x < M \ \forall x \in E$
- **Def.** E è limitato inferiormente se $\exists m : x > m \ \forall x \in E$
- **Def.** E è limitato se $\exists M, m : m < x < M \ \forall x \in E$
- **Def.** $\bar{x}$ è massimo se $\bar{x} \in E \ \wedge \ x \leq \bar{x} \ \forall x \in E$ (esiste se E è limitato superiormente)
- **Def.** $\bar{x}$ è minimo se $\bar{x} \in E \ \wedge \ x \geq \bar{x} \ \forall x \in E$ (esiste se E è limitato inferiormente)

Sia $E \subseteq K, \ k \in K$:

- **Def.** Si dice *maggiorante* di E se $k \geq x \ \forall x \in E$
- **Def.** Si dice *minorante* di E se $k \leq x \ \forall x \in E$
- **Def.** Si dice *estremo superiore* di E il minimo dei maggioranti
- **Def.** Si dice *estremo inferiore* di E il massimo dei minoranti

2 Principio di Induzione

Sia $n_0 \in N$. Se vale la proprietà $P(n)$ per ogni $n \geq n_0$, allora:

1. Dimostro che $P(n_0)$ è vera
2. Assumo come ipotesi che $P(n)$ sia vera e cerco di dimostrare che $P(n+1)$ sia vera

3 Disuguaglianza di Bernoulli

Teorema. Per ogni intero $n \geq 0$ e $x \in R$ tale che $x \geq -1$, vale:

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

Dimostrazione (per induzione):

- **Base.** Per $n = 0$, $P(n) \to (1+x)^0 \geq 1+0x \to 1 \geq 1$ (vera)
- **Induzione.** Supponiamo che $(1+x)^n \geq 1+nx$ sia vera. Mostriamo che $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$:

  $(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1+nx+x+nx^2 = 1+(n+1)x+x^2 \geq 1+(n+1)x+0$

4 Disuguaglianza Triangolare

$$\forall x, y \in R, \quad |x+y| \leq |x|+|y|$$

Dimostrazione:

$-|x| \leq x \leq |x|$ e $-|y| \leq y \leq |y| \to -|x|-|y| \leq x+y \leq |x|+|y| \to -(|x|+|y|) \leq x+y \leq |x|+|y|$

$$\Rightarrow |x+y| \leq |x|+|y|$$

5 Numeri Complessi

Definizione: Identifichiamo il campo C come ampliamento di R che soddisfa le seguenti proprietà:

- **Somma:** $(a, b)+(c, d) = (a+c, b+d)$
- **Elemento Neutro:** $(0, 0)$
- **Elemento Opposto:** $(-a, -b)$
- **Prodotto:** $(a, b)(c, d) = (ac-bd, ad+bc)$
- **Elemento Neutro:** $(1, 0)$
- **Inverso:** $\left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right)$

5.1 Forma Algebrica e Coniugato

$$z = (a, b) \to a + ib \text{ dove } i^2 = -1$$
$$\bar{z} = (a, b) \to a - ib \text{ dove } i^2 = -1 \text{ (coniugato di } z\text{)}$$

Proprietà:

- **Somma:** $z + \bar{z} = 2a \to 2\Re(z),\ \forall z \in C$
- **Prodotto:** $z - \bar{z} = 2ib \to 2\Im(z),\ \forall z \in C$
- **Coniugato:** $\bar{\bar{z}} = z,\ \forall z \in C$
- $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
- $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$

5.2 Modulo di z

Definizione: Modulo di $z = a + ib \to |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \in R$ **Proprietà:**

- $|z| \geq 0$ perché $\sqrt{a^2 + b^2} \geq 0\ \forall a, b \in R$
- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$ perché $\sqrt{a^2 + b^2} = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$
- $|z| = |\bar{z}|$ perché $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + (-b)^2}$
- $|\Re(z)| \leq |z|,\ |\Im(z)| \leq |z|,\ |\Re(z)| + |\Im(z)| \geq |z|$
- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Significato geometrico: distanza di z dall'origine.

5.3 Forma Trigonometrica ed Esponenziale

Dato $z = a + ib$, abbiamo:

$$z = \rho(\cos\theta + i \sin\theta) = \rho e^{i\theta} \text{ dove:}$$

$$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2},\ \theta = \arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}},\ \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}},\ \tan\theta = \frac{b}{a},\ \theta \in [-\pi, \pi]$$

6 Prodotto tra Numeri Complessi

Dati $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ e $w = r(\cos\phi + i\sin\phi)$, abbiamo:

$$zw = \rho r\left(\cos(\theta+\phi) + i\sin(\theta+\phi)\right)$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned}
\rho r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)\left(\cos\phi + i\sin\phi\right) &= \rho r\left(\cos\theta\cos\phi + i\sin\phi\cos\theta + i\sin\theta\cos\phi + i^2\sin\theta\sin\phi\right) \\
&= \rho r\left(\cos\theta\cos\phi + i\left(\sin\phi\cos\theta + \sin\theta\cos\phi\right) - \sin\theta\sin\phi\right) \\
&= \rho r\left(\cos(\theta+\phi) + i\sin(\theta+\phi)\right)
\end{aligned}$$

Moltiplicare z per w significa effettuare su z una contrazione/dilatazione del modulo di r e una rotazione di angolo ϕ.

7 Formula di De Moivre

Sia $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \in C$ e sia $n \geq 1 \in N$, allora:

$$z^n = \rho^n\left(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right)$$

Si dimostra utilizzando la dimostrazione precedente ponendo $w = z$.

8 Radici N-Esime di Numeri Complessi

Definizione: Dato $w \in C$, con $n \geq 2 \in N$, una radice n-esima di w è un numero complesso z tale che:

$$z^n = w$$

Teorema: Le radici n-esime di w sono tutti e soli i numeri complessi del tipo:

$$z_k = \rho e^{in\theta} \quad \text{con} \quad \rho = \sqrt[n]{|w|} \quad \text{dove} \quad 0 \leq k < n$$
$$\theta_k = \frac{\phi + 2k\pi}{n}$$

Significato geometrico: Nel campo complesso, le radici sono i vertici di un poligono regolare di n lati, inscritto in un cerchio di centro O e raggio $\rho = \sqrt[n]{|w|}$. Ogni radice si ottiene dalla precedente moltiplicando per $e^{i\frac{2\pi}{n}}$, quindi ruotando la precedente di un angolo $\phi = \frac{2\pi}{r}$, dove $r = |z|$.

9 Teorema Fondamentale Algebrico

Un'equazione polinomiale nella forma:

$$a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0 = 0 \quad \text{con} \quad a_n \neq 0 \text{ e } a_0, \ldots, a_n \in C$$

ha precisamente n radici.

Proprietà: Se $p(z)$ ha coefficienti reali $a_0, \ldots, a_n \in N$ e se w è una radice non reale, allora $\bar{w}$ è una radice con la stessa molteplicità.

Osservazione: Se $p(z)$ ha grado dispari, almeno una radice è reale.

10 Funzione

Dati due insiemi A e B (non vuoti), una funzione è una qualsiasi legge che ad ogni elemento di A associa uno e un solo elemento di B:

$$f : A \to B$$

Definizioni:

- **Immagine** di f: è un sottoinsieme di B, $Im(f) = f(A) = \{b \in B : f(a) = b\}$
- **Controimmagine** di f: dato $C \subseteq B$, $f^{-1}(C) = \{a \in A : f(a) \in C\}$
- f è **iniettiva** se $\forall a_1, a_2 \in A,\ a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$; $\forall b \in B,\ f^{-1}(b)$ contiene al più un elemento
- f è **suriettiva** se $\forall b \in B,\ f^{-1}(b)$ contiene almeno un elemento
- f è **biunivoca** se $\forall b \in B,\ f^{-1}(b)$ contiene esattamente un elemento

11 Funzione Composta

Data $f : A \to B$ e $g : A' \to B'$, si definisce h la funzione composta:

$$h = g \circ f : A \to B' \quad \text{dove} \quad h(x) = g(f(x))$$

12 Funzione Inversa

Data $f : A \to B$ funzione biunivoca, allora:

$$\forall b \in B,\ \exists! a \in A : f(a) = b$$

Si definisce **funzione inversa** $f^{-1} : B \to A$, $\forall b \in B\ b \to a$ se $f(a) = b$. Diremo **identità** quella funzione $I_A : A \to A$ dove $f^{-1} \circ f = I_A$.

13 Funzioni Simmetriche

Data $f : D \to R$, dove $D = [-a, a]$:

- f è **pari** se $f(x) = f(-x)\ \forall x \in D \Rightarrow$ Grafico simmetrico rispetto all'asse x
- f è **dispari** se $f(x) = -f(-x)\ \forall x \in D \Rightarrow$ Grafico simmetrico rispetto all'origine

14 Funzioni Periodiche

La funzione f si dice **periodica** in periodo $T > 0$ se T è il più piccolo numero reale positivo tale che:

$$f(x+T) = f(x)\ \forall x \in D$$

15 Funzioni Parte Intera e Mantissa

Definizione: Dato $x \in R$, si definisce **parte intera** di x ($[x]$), il più grande numero intero $n \leq x$.

Si definisce **mantissa** la parte decimale di $x \in R$:

$$((x)) = x - [x]$$

16 Funzioni Iperboliche

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$
$$\tanh(x) = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Proprietà:

- $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
- $\sinh(x+y) = \sinh(x)\cosh(y) + \sinh(y)\cosh(x)$
- $\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$
- $\sinh(2x) = 2\sinh(x)\cosh(x)$
- $\cosh(2x) = \cosh^2(x) + \sinh^2(x)$

17 Successione Numerica

Si definisce successione numerica $f : N \to R \Rightarrow \{a_n\} \subseteq R$. Il numero $l \in R$ si dice limite di $\{a_n\}$ se:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l$$

Teorema di unicità del limite: Se $a_n \to l$ e $a_n \to l' \Rightarrow l = l'$.

Definizioni:

- a_n è **convergente** a $l \in R$ se $\forall \epsilon > 0, \exists N \in N : |a_n - l| < \epsilon\ \forall n \geq N$
- a_n è **divergente** se $\forall n > 0, \exists N \in N : |a_n| > M\ \forall n \geq N$

- a_n è **oscillante** se $\lim a_n$
- a_n è **infinitesima** se $a_n \to 0$ per $n \to +\infty$
- a_n è **infinita** se $a_n \to \pm\infty$ per $n \to +\infty$

Proposizioni:

- Sia $\{a_n\}$ limitata e $\{b_n\}$ infinitesima $\Rightarrow \{a_n b_n\}$ infinitesima
- Sia $\{a_n\}$ limitata e $\{b_n\}$ divergente $\Rightarrow \{a_n b_n\}$ divergente

18 Teorema dei 2 Carabinieri

Dati $a_n \leq b_n \leq c_n$, se $a_n \to l$ e $c_n \to l$ si ha che $b_n \to l$. Conseguentemente si ha che:

- Se $a_n \leq b_n\ \forall n \geq N$ e $a_n \to +\infty$ si ha che $b_n \to +\infty$
- Se $a_n \leq b_n\ \forall n \geq N$ e $b_n \to -\infty$ si ha che $a_n \to -\infty$

19 Teorema di Monotonia

Se $\{a_n\}$ è una successione monotona crescente allora:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : n \in N\}$$

Se $\{a_n\}$ è una successione monotona decrescente allora:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n : n \in N\}$$

20 Teorema del Numero di Nepero

La successione $a_n = \left(a + \frac{1}{n}\right)^n$ è convergente. In generale:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e \quad \text{(limite notevole)}$$

21 Confronti e Stime Asintotiche

Considerando $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ infinite si ha:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} 0 & \text{se } \{a_n\} \text{ è infinita di ordine inferiore rispetto a } \{b_n\} \\ l \in R & \text{se } \{a_n\} \text{ è infinita dello stesso ordine di } \{b_n\} \\ +\infty & \text{se } \{a_n\} \text{ è infinita di ordine superiore rispetto a } \{b_n\} \\ \text{non confrontabili} & \text{se } \{a_n\} \text{ e } \{b_n\} \text{ infiniti non confrontabili} \end{cases}$$

Considerando $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ infinitesime si ha:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} 0 & \text{se } \{a_n\} \text{ è infinitesimo di ordine superiore rispetto a } \{b_n\} \\ l \in R & \text{se } \{a_n\} \text{ è infinitesimo dello stesso ordine di } \{b_n\} \\ +\infty & \text{se } \{a_n\} \text{ è infinitesimo di ordine inferiore rispetto a } \{b_n\} \\ \text{non confrontabili} & \text{se } \{a_n\} \text{ e } \{b_n\} \text{ infinitesimi non confrontabili} \end{cases}$$

22 Successioni Asintotiche

Se:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \quad \text{allora } \{a_n\} \text{ e } \{b_n\} \text{ sono asintotiche}$$

dato che hanno lo stesso comportamento per $n \to +\infty$ e si denotano con $\{a_n\} \sim \{b_n\}$.

23 Criterio del Rapporto

Sia $a_n > 0$ definitivamente (per $\forall n > N$). Se esiste:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$$

- Se $l < 1$ allora la successione è infinitesima
- Se $l > 1$ allora la successione è infinita

24 Gerarchia degli Infiniti

In generale vale:

$$(\log_a n)^\beta < n^\alpha < b^n < n! < n^n$$

Per determinare la gerarchia si usa il criterio del rapporto:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0 \quad \text{date } \alpha > 0 \text{ e } a > 1$$

Da criterio del rapporto abbiamo:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} \to \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^\alpha}{a^{n+1}} \cdot \frac{1}{\frac{n^\alpha}{a^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{a^n a} \cdot \frac{a^n}{n^\alpha} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{a^n a} = \frac{1}{a} \to$$

Dato che $a > 1$, si ha $\frac{1}{a} < 1$ e che $\frac{n^\alpha}{a^n} \to 0$ per $n \to +\infty$.

Definizione: Date due successioni a_n e b_n, diremo che: a_n è **o-piccolo** di b_n e scriviamo $a_n = o(b_n)$ se:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Da gerarchia degli infiniti infatti } n^\alpha = o(a^n)$$

25 Serie Numeriche

Definizione: Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali. Definiamo la successione $\{s_k\}$ ponendo:

$$s_k = \sum_{n=0}^{k} a_n$$

Si dice che la somma della serie è il limite di $\{s_k\}$:

$$\lim_{k \to \infty} s_k$$

Se tale limite esiste e finito, esso è la somma della serie. Inoltre, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è detta convergente, divergente o irregolare se $\{s_k\}$ è convergente, divergente o irregolare.

25.1 Teorema: Condizione necessaria alla convergenza

Se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, allora $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$.

Dimostrazione:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \bar{s} < +\infty \implies \lim_{k \to \infty} s_k = \bar{s} \in R$$

Si ha quindi:

$$s_k = \sum_{n=0}^{k} a_n \quad \text{e} \quad s_{k+1} = \sum_{n=0}^{k+1} a_n = \sum_{n=0}^{k} a_n + a_{k+1} = s_k + a_{k+1}$$

Per $k \to \infty$, otteniamo:

$$\bar{s} = \bar{s} + \lim_{k \to \infty} a_{k+1} \implies \lim_{k \to \infty} a_{k+1} = 0$$

25.2 Teorema della linearità

Se le serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ sono regolari e la somma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ ha significato, allora:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (ca_n) = c \sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \forall c \in R$$

26 Serie Geometrica

Sia $a_n = q^n$, quindi:

$$\sum_{n=0}^{k} q^n \quad \text{e} \quad \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} q^n$$

- Se $q = 1$, allora $\sum_{n=0}^{k} 1 = +\infty$. - Se $q \neq 1$, abbiamo:

$$s_k = \sum_{n=0}^{k} q^n = 1 + q^1 + q^2 + \ldots + q^k$$

Moltiplicando per q, otteniamo:

$$qs_k = q^1 + q^2 + \ldots + q^{k+1}$$

Calcolando la differenza:

$$s_k - qs_k = 1 - q^{k+1} \implies s_k(1-q) = 1 - q^{k+1}$$

Quindi:

$$s_k = \frac{1 - q^{k+1}}{1-q}$$

E quindi il limite:

$$\lim_{k\to\infty} s_k = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \text{se } |q| < 1 \text{ (convergente)} \\ +\infty & \text{se } q > 1 \text{ (divergente)} \\ \text{irregolare} & \text{se } q \leq 1 \end{cases}$$

27 Serie Telescopica

Sia $a_n = b_n - b_{n+1}$, quindi:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (b_n - b_{n+1})$$

La serie è:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = b_0 - \lim_{k\to\infty} b_k$$

Dimostrazione:

$$\sum_{n=0}^{k} (b_n - b_{n+1}) = b_0 - b_{k+1} \implies \lim_{k\to\infty} (b_0 - b_{k+1}) = b_0 - \lim_{k\to\infty} b_{k+1}$$

28 SERIE ARMONICA

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

Condizione necessaria:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Dimostrazione:

$$\log(x+1) < x \quad \forall x > 0 \implies x = \frac{1}{n} \implies 0 < \log(1+\frac{1}{n}) \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \in N^+$$

Abbiamo:

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{k} \log(1+\frac{1}{n}) = \sum_{n=1}^{k}(\log(n+1)-\log(n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \log(1+\frac{1}{n}) = -[\log(n)-\log(k)] \to +\infty$$

Inoltre:

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} \sim \log(k) \quad \text{per } k \to +\infty$$

e quindi:

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} = \log(k) + \gamma + o(1) \quad \text{con } \gamma = 0.57721\ldots$$