Analisi I

Marco Macherelli

Ottobre 2024

Contenuti

1 Definizione Assiomatica di $\mathbb{R}$

Sia E un insieme contenuto in $\mathbb{R}$:

- **Def.** E è limitato superiormente se $\exists M : x < M \; \forall x \in E$
- **Def.** E è limitato inferiormente se $\exists m : x > m \; \forall x \in E$
- **Def.** E è limitato se $\exists M, m : m < x < M \; \forall x \in E$
- **Def.** $\bar{x}$ è massimo se $\bar{x} \in E \; \wedge \; x \leq \bar{x} \; \forall x \in E$ (esiste se E è limitato superiormente)
- **Def.** $\bar{x}$ è minimo se $\bar{x} \in E \; \wedge \; x \geq \bar{x} \; \forall x \in E$ (esiste se E è limitato inferiormente)

Sia $E \subseteq K, \; k \in K$:

- **Def.** Si dice *maggiorante* di E se $k \geq x \; \forall x \in E$
- **Def.** Si dice *minorante* di E se $k \leq x \; \forall x \in E$
- **Def.** Si dice *estremo superiore* di E il minimo dei maggioranti
- **Def.** Si dice *estremo inferiore* di E il massimo dei minoranti

2 Principio di Induzione

Sia $n_0 \in \mathbb{N}$. Se vale la proprietà $P(n)$ per ogni $n \geq n_0$, allora:

1. Dimostro che $P(n_0)$ è vera
2. Assumo come ipotesi che $P(n)$ sia vera e cerco di dimostrare che $P(n+1)$ sia vera

2.1 Disuguaglianza di Bernoulli

Teorema. Per ogni intero $n \geq 0$ e $x \in \mathbb{R}$ tale che $x \geq -1$, vale:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

Dimostrazione (per induzione):

- **Base.** Per $n = 0$, $P(n) \rightarrow (1+x)^0 \geq 1 + 0x \rightarrow 1 \geq 1$ (vera)
- **Induzione.** Supponiamo che $(1+x)^n \geq 1 + nx$ sia vera.
  Mostriamo che: $(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) =$$

$$1 + nx + x + nx^2 = 1 + (n+1)x + x^2 \geq 1 + (n+1)x + 0$$

2.2 Disuguaglianza Triangolare

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |x+y| \leq |x| + |y|$$

Dimostrazione:

$$-|x| \leq x \leq |x| \text{ e } -|y| \leq y \leq |y| \rightarrow -|x| - |y| \leq x + y \leq |x| + |y| \rightarrow -(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$$

$$\Rightarrow |x+y| \leq |x| + |y|$$

3 Numeri Complessi

Definizione: Identifichiamo il campo $\mathbb{C}$ come ampliamento di $\mathbb{R}$ che soddisfa le seguenti proprietà:

- **Somma:** $(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$
- **Elemento Neutro:** $(0,0)$
- **Elemento Opposto:** $(-a,-b)$
- **Prodotto:** $(a,b)(c,d) = (ac - bd, ad + bc)$
- **Elemento Neutro:** $(1,0)$
- **Inverso:** $\left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right)$

3.1 Forma Algebrica e Coniugato

$$z = (a,b) \rightarrow a + ib \text{ dove } i^2 = -1$$

$$\bar{z} = (a,b) \rightarrow a - ib \text{ dove } i^2 = -1 \text{ (coniugato di } z\text{)}$$

Proprietà:

- **Somma:** $z + \bar{z} = 2a \rightarrow 2\mathrm{Re}(z), \ \forall z \in \mathbb{C}$
- **Prodotto:** $z - \bar{z} = 2ib \rightarrow 2\mathrm{Im}(z), \ \forall z \in \mathbb{C}$
- **Coniugato:** $\bar{\bar{z}} = z, \ \forall z \in \mathbb{C}$
- $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z_1} + \bar{z_2}$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z_1} \cdot \bar{z_2}$
- $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$

3.2 Modulo di z

Definizione: Modulo di $z = a + ib \to |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}$ **Proprietà:**

- $|z| \geq 0$ perché $\sqrt{a^2 + b^2} \geq 0 \ \forall a, b \in \mathbb{R}$
- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$ perché $\sqrt{a^2 + b^2} = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$
- $|z| = |\bar{z}|$ perché $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + (-b)^2}$
- $|\text{Re}(z)| \leq |z|, \ |\text{Im}(z)| \leq |z|, \ |\text{Re}(z)| + |\text{Im}(z)| \geq |z|$
- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Significato geometrico: distanza di z dall'origine.

3.3 Forma Trigonometrica ed Esponenziale

Dato $z = a + ib$, abbiamo:

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho e^{i\theta} \text{ dove:}$$

$$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \ \theta = \arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \ \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \ \tan\theta = \frac{b}{a}, \ \theta \in [-\pi, \pi]$$

3.4 Prodotto tra Numeri Complessi

Dati $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ e $w = r(\cos\phi + i\sin\phi)$, abbiamo:

$$zw = \rho r \left(\cos(\theta + \phi) + i\sin(\theta + \phi)\right)$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned}
\rho r \left(\cos\theta + i\sin\theta\right)\left(\cos\phi + i\sin\phi\right) &= \rho r \left(\cos\theta\cos\phi + i\sin\phi\cos\theta + i\sin\theta\cos\phi + i^2\sin\theta\sin\phi\right) \\
&= \rho r \left(\cos\theta\cos\phi + i\left(\sin\phi\cos\theta + \sin\theta\cos\phi\right) - \sin\theta\sin\phi\right) \\
&= \rho r \left(\cos(\theta + \phi) + i\sin(\theta + \phi)\right)
\end{aligned}$$

Moltiplicare z per w significa effettuare su z una contrazione/dilatazione del modulo di r e una rotazione di angolo ϕ.

3.5 Formula di De Moivre

Sia $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \in \mathbb{C}$ e sia $n \geq 1 \in \mathbb{N}$, allora:

$$z^n = \rho^n \left(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right)$$

Si dimostra utilizzando la dimostrazione precedente ponendo $w = z$.

3.6 Radici N-Esime di Numeri Complessi

Definizione: Dato $w \in \mathbb{C}$, con $n \geq 2 \in \mathbb{N}$, una radice n-esima di w è un numero complesso z tale che:

$$z^n = w$$

Teorema: Le radici n-esime di w sono tutti e soli i numeri complessi del tipo:

$$z_k = \rho e^{in\theta} \quad \text{con} \quad \rho = \sqrt[n]{|w|} \quad \text{dove} \quad 0 \leq k < n$$

$$\theta_k = \frac{\phi + 2k\pi}{n}$$

Significato geometrico: Nel campo complesso, le radici sono i vertici di un poligono regolare di n lati, inscritto in un cerchio di centro O e raggio $\rho = \sqrt[n]{|w|}$. Ogni radice si ottiene dalla precedente moltiplicando per $e^{i\frac{2\pi}{n}}$, quindi ruotando la precedente di un angolo $\phi = \frac{2\pi}{r}$, dove $r = |z|$.

3.7 Teorema Fondamentale Algebrico

Un'equazione polinomiale nella forma:

$$a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0 = 0 \quad \text{con} \quad a_n \neq 0 \text{ e } a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$$

ha precisamente n radici.

Proprietà: Se $p(z)$ ha coefficienti reali $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$ e se w è una radice non reale, allora $\bar{w}$ è una radice con la stessa molteplicità.

Osservazione: Se $p(z)$ ha grado dispari, almeno una radice è reale.

4 Funzione

Dati due insiemi A e B (non vuoti), una funzione è una qualsiasi legge che ad ogni elemento di A associa uno e un solo elemento di B:

$$f : A \to B$$

Definizioni:

- **Immagine** di f: è un sottoinsieme di B, $Im(f) = f(A) = \{b \in B : f(a) = b\}$
- **Controimmagine** di f: dato $C \subseteq B$, $f^{-1}(C) = \{a \in A : f(a) \in C\}$
- f è **iniettiva** se $\forall a_1, a_2 \in A,\ a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$; $\forall b \in B,\ f^{-1}(b)$ contiene al più un elemento
- f è **suriettiva** se $\forall b \in B,\ f^{-1}(b)$ contiene almeno un elemento
- f è **biunivoca** se $\forall b \in B,\ f^{-1}(b)$ contiene esattamente un elemento

4.1 Funzione Composta

Data $f : A \to B$ e $g : A' \to B'$, si definisce h la funzione composta:

$$h = g \circ f : A \to B' \quad \text{dove} \quad h(x) = g(f(x))$$

4.2 Funzione Inversa

Data $f : A \to B$ funzione biunivoca, allora:

$$\forall b \in B,\ \exists! a \in A : f(a) = b$$

Si definisce **funzione inversa** $f^{-1} : B \to A$, $\forall b \in B\ b \to a$ se $f(a) = b$. Diremo **identità** quella funzione $\mathbb{I}_A : A \to A$ dove $f^{-1} \circ f = \mathbb{I}_A$.

4.3 Funzioni Simmetriche

Data $f : D \to \mathbb{R}$, dove $D = [-a, a]$:

- f è **pari** se $f(x) = f(-x)\ \forall x \in D \Rightarrow$ Grafico simmetrico rispetto all'asse x
- f è **dispari** se $f(x) = -f(-x)\ \forall x \in D \Rightarrow$ Grafico simmetrico rispetto all'origine

4.4 Funzioni Periodiche

La funzione f si dice **periodica** in periodo $T > 0$ se T è il più piccolo numero reale positivo tale che:

$$f(x + T) = f(x)\ \forall x \in D$$

4.5 Funzioni Parte Intera e Mantissa

Definizione: Dato $x \in \mathbb{R}$, si definisce **parte intera** di x ($[x]$), il più grande numero intero $n \leq x$.

Si definisce **mantissa** la parte decimale di $x \in \mathbb{R}$:

$$((x)) = x - [x]$$

4.6 Funzioni Iperboliche

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$
$$\tanh(x) = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Proprietà:

- $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
- $\sinh(x+y) = \sinh(x)\cosh(y) + \sinh(y)\cosh(x)$
- $\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$
- $\sinh(2x) = 2\sinh(x)\cosh(x)$
- $\cosh(2x) = \cosh^2(x) + \sinh^2(x)$

5 Successione Numerica

Si definisce successione numerica $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \Rightarrow \{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$. Il numero $l \in \mathbb{R}$ si dice limite di $\{a_n\}$ se:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l$$

Teorema di unicità del limite: Se $a_n \to l$ e $a_n \to l' \Rightarrow l = l'$.

Definizioni:

- a_n è **convergente** a $l \in \mathbb{R}$ se $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : |a_n - l| < \epsilon \ \forall n \geq N$
- a_n è **divergente** se $\forall n > 0, \exists N \in \mathbb{N} : |a_n| > M \ \forall n \geq N$
- a_n è **oscillante** se $\nexists \lim a_n$
- a_n è **infinitesima** se $a_n \to 0$ per $n \to +\infty$
- a_n è **infinita** se $a_n \to \pm\infty$ per $n \to +\infty$

Proposizioni:

- Sia $\{a_n\}$ limitata e $\{b_n\}$ infinitesima $\Rightarrow \{a_n b_n\}$ infinitesima
- Sia $\{a_n\}$ limitata e $\{b_n\}$ divergente $\Rightarrow \{a_n b_n\}$ divergente

5.1 Teorema dei 2 Carabinieri

Dati $a_n \leq b_n \leq c_n$, se $a_n \to l$ e $c_n \to l$ si ha che $b_n \to l$. Conseguentemente si ha che:

- Se $a_n \leq b_n \ \forall n \geq N$ e $a_n \to +\infty$ si ha che $b_n \to +\infty$
- Se $a_n \leq b_n \ \forall n \geq N$ e $b_n \to -\infty$ si ha che $a_n \to -\infty$

5.2 Teorema di Monotonia

Se $\{a_n\}$ è una successione monotona crescente allora:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

Se $\{a_n\}$ è una successione monotona decrescente allora:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

5.3 Teorema del Numero di Nepero

La successione $a_n = \left(a + \frac{1}{n}\right)^n$ è convergente. In generale:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e \quad \text{(limite notevole)}$$

5.4 Confronti e Stime Asintotiche

Considerando $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ infinite si ha:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} 0 & \text{se } \{a_n\} \text{ è infinita di ordine inferiore rispetto a } \{b_n\} \\ l \in \mathbb{R} & \text{se } \{a_n\} \text{ è infinita dello stesso ordine di } \{b_n\} \\ +\infty & \text{se } \{a_n\} \text{ è infinita di ordine superiore rispetto a } \{b_n\} \\ \text{non confrontabili} & \text{se } \nexists \{a_n\} \text{ e } \{b_n\} \text{ infiniti non confrontabili} \end{cases}$$

Considerando $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ infinitesime si ha:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} 0 & \text{se } \{a_n\} \text{ è infinitesimo di ordine superiore rispetto a } \{b_n\} \\ l \in \mathbb{R} & \text{se } \{a_n\} \text{ è infinitesimo dello stesso ordine di } \{b_n\} \\ +\infty & \text{se } \{a_n\} \text{ è infinitesimo di ordine inferiore rispetto a } \{b_n\} \\ \text{non confrontabili} & \text{se } \nexists \{a_n\} \text{ e } \{b_n\} \text{ infinitesimi non confrontabili} \end{cases}$$

5.5 Successioni Asintotiche

Se:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \quad \text{allora } \{a_n\} \text{ e } \{b_n\} \text{ sono asintotiche}$$

dato che hanno lo stesso comportamento per $n \to +\infty$ e si denotano con $\{a_n\} \sim \{b_n\}$.

5.5.1 Criterio del Rapporto

Sia $a_n > 0$ definitivamente (per $\forall n > N$). Se esiste:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$$

- Se $l < 1$ allora la successione è infinitesima
- Se $l > 1$ allora la successione è infinita

5.5.2 Gerarchia degli Infiniti

In generale vale:

$$(\log_a n)^\beta < n^\alpha < b^n < n! < n^n$$

Per determinare la gerarchia si usa il criterio del rapporto:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0 \quad \text{date } \alpha > 0 \text{ e } a > 1$$

Da criterio del rapporto abbiamo:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} \to \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^\alpha}{a^{n+1}} \cdot \frac{1}{\frac{n^\alpha}{a^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{a^n a} \cdot \frac{a^n}{n^\alpha} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{a^n a} = \frac{1}{a} \to$$

Dato che $a > 1$, si ha $\frac{1}{a} < 1$ e che $\frac{n^\alpha}{a^n} \to 0$ per $n \to +\infty$.

Definizione: Date due successioni a_n e b_n, diremo che: a_n è **o-piccolo** di b_n e scriviamo $a_n = o(b_n)$ se:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Da gerarchia degli infiniti infatti } n^\alpha = o(a^n)$$

6 Serie Numeriche

Definizione: Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali. Definiamo la successione $\{s_k\}$ ponendo:

$$s_k = \sum_{n=0}^{k} a_n$$

Si dice che la somma della serie è il limite di $\{s_k\}$:

$$\lim_{k\to\infty} s_k$$

Se tale limite esiste e finito, esso è la somma della serie. Inoltre, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è detta convergente, divergente o irregolare se $\{s_k\}$ è convergente, divergente o irregolare.

6.1 Teorema: Condizione necessaria alla convergenza

Se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, allora $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Dimostrazione:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \bar{s} < +\infty \implies \lim_{k\to\infty} s_k = \bar{s} \in \mathbb{R}$$

Si ha quindi:

$$s_k = \sum_{n=0}^{k} a_n \quad \text{e} \quad s_{k+1} = \sum_{n=0}^{k+1} a_n = \sum_{n=0}^{k} a_n + a_{k+1} = s_k + a_{k+1}$$

Per $k \to \infty$, otteniamo:

$$\bar{s} = \bar{s} + \lim_{k\to\infty} a_{k+1} \implies \lim_{k\to\infty} a_{k+1} = 0$$

6.2 Teorema della linearità

Se le serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ sono regolari e la somma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ ha significato, allora:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (ca_n) = c \sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

6.3 Serie Geometrica

Sia $a_n = q^n$, quindi:

$$\sum_{n=0}^{k} q^n \quad \text{e} \quad \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} q^n$$

- Se $q = 1$, allora $\sum_{n=0}^{k} 1 = +\infty$. - Se $q \neq 1$, abbiamo:

$$s_k = \sum_{n=0}^{k} q^n = 1 + q^1 + q^2 + \ldots + q^k$$

Moltiplicando per q, otteniamo:

$$qs_k = q^1 + q^2 + \ldots + q^{k+1}$$

Calcolando la differenza:

$$s_k - qs_k = 1 - q^{k+1} \implies s_k(1-q) = 1 - q^{k+1}$$

Quindi:

$$s_k = \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q}$$

E quindi il limite:

$$\lim_{k\to\infty} s_k = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \text{se } |q| < 1 \text{ (convergente)} \\ +\infty & \text{se } q > 1 \text{ (divergente)} \\ \text{irregolare} & \text{se } q \le 1 \end{cases}$$

6.4 Serie Telescopica

Sia $a_n = b_n - b_{n+1}$, quindi:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (b_n - b_{n+1})$$

La serie è:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = b_0 - \lim_{k\to\infty} b_k$$

Dimostrazione:

$$\sum_{n=0}^{k} (b_n - b_{n+1}) = b_0 - b_{k+1} \implies \lim_{k\to\infty} (b_0 - b_{k+1}) = b_0 - \lim_{k\to\infty} b_{k+1}$$

6.5 Serie Armonica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

Condizione necessaria:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Dimostrazione:

$$\log(x+1) < x \quad \forall x > 0 \implies x = \frac{1}{n} \implies 0 < \log(1 + \frac{1}{n}) \le \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^+$$

Abbiamo:

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{k} \log(1 + \frac{1}{n}) = \sum_{n=1}^{k} (\log(n+1) - \log(n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + \frac{1}{n}) = -[\log(n) - \log(k)] \to +\infty$$

Inoltre:

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} \sim \log(k) \quad \text{per } k \to +\infty$$

e quindi:

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} = \log(k) + \gamma + o(1) \quad \text{con } \gamma = 0.57721\ldots$$

6.5.1 Serie Armonica Generalizzata

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} \textit{diverge} & \text{se } \alpha \le 1 \\ \textit{converge} & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$$

6.5.2 Serie Armonica Modificata

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha \ln{(n)}^\beta} = \begin{cases} \textit{diverge} & \text{se } \begin{cases} \alpha \le 1 \text{ e } \forall \beta \\ \alpha = 1 \text{ e } \beta \le 1 \end{cases} \\ \textit{converge} & \text{se } \begin{cases} \alpha > 1 \text{ e } \forall \beta \\ \alpha = 1 \text{ e } \beta > 1 \end{cases} \end{cases}$$

6.6 Serie a Termini Non Negativi

Definizione: La $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ si dice a termini non negativi se:

- $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- Definitivamente, $a_n \geq 0 \quad \forall n \geq N$

Non può essere irregolare, infatti s_k è crescente, quindi $\lim_{k\to\infty} s_k = \sup\{a_n\}$.

6.6.1 Criterio del Confronto

Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ tali che $0 \leq a_n \leq b_n$ definitivamente. Allora:

- Se $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n < +\infty$, allora $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n < +\infty$.
- Se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n > +\infty$, allora $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n > +\infty$.

Dimostrazione: Considero $s_k = \sum_{n=0}^{k} a_n$ e $t_k = \sum_{n=0}^{k} b_n$ (con $\exists \lim s_k$ e $\exists \lim t_k$):

- $s_k \leq t_k$ definitivamente.
- $0 \leq a_n \leq b_n$.

Se $\lim_{k\to\infty} t_k = l \in \mathbb{R}$:

- Da teorema del confronto, $s \leq t < +\infty \Rightarrow s = \lim_{k\to\infty} s_k = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n < +\infty$.
- Se $\lim_{k\to\infty} s_k = +\infty$, allora $+\infty = s_k \leq t_k \Rightarrow s < t \Rightarrow t = +\infty$.

6.6.2 Criterio del Confronto Asintotico

Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni non negative definitivamente, con $b_n > 0$ tali che $a_n \sim b_n$. Allora:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = +\infty \iff \sum_{n=0}^{+\infty} b_n = +\infty,$$

ovvero $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ hanno lo stesso comportamento per $n \to +\infty$.

Dimostrazione: Poiché $a_n \sim b_n$, allora:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \Rightarrow \forall \epsilon > 0 : \left| \frac{a_n}{b_n} - 1 \right| < \epsilon \text{ definitivamente.}$$

Questo implica:

$$1 - \epsilon < \frac{a_n}{b_n} < 1 + \epsilon \quad \text{con } b_n > 0 \Rightarrow (1-\epsilon)b_n < a_n < (1+\epsilon)b_n.$$

Applicando il criterio del confronto:

- Se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n < +\infty$, allora $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n < +\infty$.
- Se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = +\infty$, allora $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = +\infty$.

6.6.3 Criterio del Rapporto

Sia $\{a_n\}$ una successione tale che $a_n > 0$ definitivamente. Se $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, allora:

- Se < 1, allora $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n < +\infty$.
- Se > 1, allora $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = +\infty$.

Dimostrazione:

- Se $l < 1$: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$. Per ogni $\epsilon > 0$:

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 \right| < \epsilon \text{ definitivamente.}$$

  Scegliendo ϵ tale che $l + \epsilon < 1$, otteniamo:

$$a_{N+1} < (l+\epsilon)a_N \quad \text{e quindi } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n < +\infty.$$

- Se $l > 1$: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$. Scegliendo $\epsilon = l - 1 > 0$, abbiamo:

$$a_{n+1} > a_n \quad \text{per } n \geq N \Rightarrow a_n \nrightarrow 0 \text{ per } n \to +\infty.$$

6.6.4 Criterio della Radice

Sia $\{a_n\}$ una successione tale che $a_n \geq 0$ definitivamente. Se $\exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$, allora:

- Se < 1, allora $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n < +\infty$.
- Se > 1, allora $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = +\infty$.

6.7 Serie a termini di segno definito

Definizione: una serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ si dice assolutamente convergente se converge $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$.

6.7.1 Teorema della convergenza assoluta

Se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge assolutamente, allora $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge semplicemente. Quindi vale:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| < +\infty \implies 0 \leq \left| \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| < +\infty$$

6.8 Serie a termini di segno alterno

Criterio di Leibniz: Sia data la serie $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n$ con $a_n \geq 0$, $a_n \to 0$, $a_{n+1} \leq a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ o per $n \geq N$. Allora:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n < +\infty \text{ (La serie converge semplicemente)}$$

Dimostrazione: Sia $s_k = \sum_{n=0}^{k}(-1)^n a_n$.

$$1) \; s_{2k} = \sum_{n=0}^{2k}(-1)^n a_n$$

$$s_{2k+2} = \sum_{n=0}^{2k+2}(-1)^n a_n = \sum_{n=0}^{2k}(-1)^n a_n + (-1)^{2k+1}a_{2k+1} + (-1)^{2k+2}a_{2k+2} =$$

$$s_{2k} + (-1)^{2k+1}a_{2k+1} + (-1)^{2k+2}a_{2k+2} \to \text{per ipotesi } a_{n+1} \leq a_n \text{ quindi se}$$

$$n = 2k+1 \to a_{2k+2} - a_{2k+1} \leq 0 \to s_{2k+2} \leq s_{2k} \to s_{2k} \text{ decrescente}, s_{2k} \leq s_0 \, \forall k \geq 0$$

$$2) \; s_{2k+1} = \sum_{n=0}^{2k+1}(-1)^n a_n$$

$$s_{2k+3} = \sum_{n=0}^{2k+3}(-1)^n a_n = \sum_{n=0}^{2k+1}(-1)^n a_n + (-1)^{2k+2}a_{2k+2} + (-1)^{2k+3}a_{2k+3} =$$

$$s_{2k+1} + a_{2k+2} - a_{2k+3} \to \text{per ipotesi } a_{n+1} \leq a_n \text{ quindi se}$$

$$n = 2k+2 \to a_{2k+3} \leq a_{2k+2} \to s_{2k+3} \geq s_{2k+1} \to s_{2k+1}$$

$$3)\ s_{2k+1} = s_{2k} + (-1)^{2k+1} a_{2k+1} \to s_1 \leq \ldots \leq s_{2k+1} = s_{2k} - a_{2k+1} \leq s_{2k} \leq \ldots \leq s_0$$

$$\{s_{2k+1}\} \text{ e } \{s_{2k}\} \text{ sono } \{Monotone, Limitate\} \implies convergenti.$$

$$s_{2k+1} = s_{2k} - a_{2k+1}$$

$$\lim_{k\to\infty} s_{2k+1} = \lim_{k\to\infty} s_{2k} - \lim_{k\to\infty} a_{2k+1} \text{ (per ipotesi } a_n \to 0) = \lim_{k\to\infty} s_{2k} = \bar{s} \in \mathbb{R} < +\infty$$

6.8.1 Corollario: errore

L'errore che si commette approssimando la serie con la somma parziale s_k è tale che $|Err| = |\bar{s} - s_k| \leq a_{k+1}$.

Dimostrazione:

$$s_{2k} \leq \bar{s} \to s_{2k} + (-1)^{2k+1} a_{2k+1} \leq \bar{s} \to s_{2k} - \bar{s} \leq a_{2k+1}$$

$$s_{2k} \geq \bar{s} \to s_{2k-1} + (-1)^{2k} a_{2k} \geq \bar{s} \to a_{2k} - \bar{s} \leq s_{2k-1}$$

7 Limiti di Funzioni

Data: $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}, x \to c \in \mathbb{R}$

7.1 Successionale del limite

Si dice che $\lim_{x\to c} f(x) = l$ con $c, l \in \mathbb{R}$ se, per ogni successione (k_n) di punti $k_n \neq c$ tale che $k_n \to c$ (con $n \to \infty$), si ha:

$$\lim_{n\to\infty} f(k_n) = l.$$

7.1.1 Teorema di Unicità del Limite

Definizione: Se $\exists \lim_{x\to c} f(x) = l \implies l$ è unico
Dimostrazione: Supponiamo $\lim_{x\to c} f(x) = l_1$ e $\lim_{x\to c} f(x) = l_2$ con $l_1 \neq l_2$.
$\to$ Dalla definizione di limite, esiste una successione $(x_n) \to c$ tale che $f(x_n) \to l_1$ e $f(x_n) \to l_2$.
$\to$ Contraddice il Teorema di unicità del limite per le successioni $\implies l_1 \neq l_2$

7.2 Topologia del Limite

Si considera $\lim_{x\to c} = l$

- Se $c, l \in \mathbb{R} : \forall \epsilon > 0\ \exists \delta : |f(x) - l| < \epsilon,\ \forall x \neq c : |x - c| < \delta$
- Se $c \in \mathbb{R},\ l = +\infty : \forall M > 0\ \exists \delta > 0 : f(x) > M,\ \forall x \neq c : |x - c| < \delta$
- Se $c = +\infty,\ l \in \mathbb{R} : \forall \epsilon > 0\ \exists H > 0 : |f(x) - l| < \epsilon,\ \forall x > H$
- Se $c = +\infty,\ l = +\infty : \forall M > 0\ \exists H > 0 : f(x) > M,\ \forall x > M$

7.3 Intorno di un punto $c \in \mathbb{R}$

Si dice intervallo di un punto $c \in \mathbb{R}$:

- Un intervallo aperto che contiene c: $(c - \delta, c + \delta)$
- Un intervallo aperto che "contiene" $\pm\infty$: $(H, +\infty)$ o $(-\infty, H)$

7.3.1 Intervallo Generale

$$\lim_{x\to c} f(x) = l : \ c, l \in \mathbb{R} \iff \forall \text{ intorno di } l\ (J_l)\ \exists \text{ intorno di } c\ (\mathbb{I}_c) \text{ tale che } f(x) \in J_l,\ \forall x \neq c \in \mathbb{I}_c$$

7.4 Punto di Accumulazione

Sia $A \subseteq \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}$ è un punto di accumulazione per A se $\forall \mathbb{I}_c$ si ha $\mathbb{I}_c \cap A \setminus \{c\} \neq \emptyset$
Si dice **Punto Isolato** è un punto non di accumulazione

7.5 Teorema del Confronto (2 carabinieri)

Definizione:

$$\text{Sia } \lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = l,\ \text{se } f(x) \leq h(x) \leq g(x) \text{ in un intorno di } c,\ c \in \mathbb{R},\ \implies \lim_{x\to c} h(x) = l.$$

Dimostrazione:

Usando la definizione successionale del limite, scelgo $x_n \neq c$, $x_n \to c$, $c \in \mathbb{R}$.

$$\text{Se } \lim_{x\to c} f(x) = l \implies f(x_n) = l \text{ per } n \to +\infty$$

$$\text{Se } \lim_{x\to c} g(x) = l \implies g(x_n) = l \text{ per } n \to +\infty$$

Se $x_n \to c$. avremo: $f(x_n) \leq h(x_n) \leq g(x_n)\ \forall n > N \implies$ Da Teorema dei 2 carabinieri $h(x_n) \to l$ per $n \to +\infty$

Corollario:

Se $g(x) \to 0$ per $x \to c$ e $0 \leq |h(x)| \leq g(c)$ in un intorno di c $\implies h(x) \to 0$ per $x \to c$

7.6 Teorema di Permanenza del Segno

$$\text{Se } \lim_{x\to c} f(x) = l > 0 \implies \exists \mathbb{I}_c \text{ tale che } f(x) > 0\ \forall x > 0 \in \mathbb{I}_c \setminus \{c\}$$

$$\text{Se } \lim_{x\to c} f(x) = l,\ f(x) \geq 0 \implies \forall x \in \mathbb{I}_c \setminus \{c\},\ l \geq 0$$

7.7 Teorema dell'Algebra dei Limiti

Se $f(x) \to l_1$, $g(x) \to l_2$ per $x \to c$, $c \in \overline{\mathbb{R}}$, l_1, $l_2 \in \mathbb{R}$. Allora:

- $f(x) \pm g(x) \to l_1 + l_2$ per $x \to c$
- $f(x)g(x) \to l_1 l_2$ per $x \to c$
- $\frac{f(x)}{g(x)} \to \frac{l_1}{l_2}$ per $x \to c$

7.8 Limite Destro e Sinistro

Se $c \in \mathbb{R}$ e $l \in \overline{\mathbb{R}}$ si dice :

$$\lim_{x\to c^\pm} f(x) = l \to \text{ limite } \begin{cases} destro \\ sinistro \end{cases} \text{ di } f(x) \text{ per } x \to c, \text{ se } \forall \{x_n\} \text{ tale che } \begin{cases} x_n \to x^+ \\ x_n \to x^- \end{cases}$$

con $x_n \neq c$ si ha $f(x_n) = l$ per $n \to +\infty$

Nota Bene: $\exists \lim_{x\to c} f(x) \iff \lim_{x\to c^+} f(x) = \lim_{x\to c^-} f(x)$

8 Funzioni Continue

Sia $f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{I}$, f è continua in c se $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)\ \forall c \in \mathbb{I}$

8.1 Teorema di Continuità delle Funzioni Elementari

Enunciato: le funzioni elementari (potenze ad esponente reale, esponenziali, logaritmiche, goniometriche) sono continue nel loro dominio.

Dimostrazione: $\sin x$ continuo $\forall x \in \mathbb{R}$

So che $\sin x$ è continuo in $c = 0$, voglio provarlo $\forall c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\lim_{h \to 0} \sin(c+h) = \sin c = f(c)$$

$$\sin(c+h) - \sin c = \sin c \cos h + \cos c \sin h - \sin c = \sin c(\cos h - 1) + \cos c \sin h \to$$

$0 \leq |\sin(c+h) - \sin c| \leq |\sin c||(\cos h - 1)| + |\cos c||\sin h| \to$ Dove $\cos h - 1 \to 0$ per $h \to 0$ e $\sin h \to 0$ per $h \to 0$

8.2 Teorema dell'Algebra delle Funzioni Continue

Enunciato: Siano f e g definite in I_c, $c \in \mathbb{R}$ e continue in c. Allora:

- $f(x) + g(x) \implies$ Continua in c
- $f(x)g(x) \implies$ Continua in c
- $\frac{f(x)}{g(x)} \implies$ Continua in c, purché $g(c) \neq 0$

Ne discende che $\tan x$, $\cot x$, polinomi, quozienti di polinomi, ..., sono continue in tutto il loro dominio.

8.3 Teorema della continuità composta

Enunciato: Siano g una funzione definita in I_c e continua in c, f una funzione definita in I_d con $d = g(c)$ e continua in $d \implies f \circ g \begin{cases} \text{È definita almeno in } I_c \\ \text{È continua in c} \end{cases}$

Dimostrazione: $f \circ g = f(g(x))$

Se g è continua in c $\implies \lim_{x \to c} g(x) = g(c)$ *

Se f è continua in c $\implies \lim_{t \to d} f(t) = f(d)$ **

Calcolo la composta: $\lim_{x \to c} f(g(c))$

Quindi: Pongo $t = g(x)$ da precedente se $x \to c \overset{*}{\implies} t \to g(c)$, $t = g(x) \to g(c) = d$

$$\lim_{x \to c} f(g(x)) = \lim_{t \to d} f(t) \overset{**}{=} f(d) = f(g(x))$$