Ingegneria dell'Automazione, Elettrica, Elettronica, Informatica e delle Telecomunicazio - Politecnico di Milano

Analisi Matematica I - primo appello - 11 gennaio 2024 - A

DOMANDE A RISPOSTA MULTIPLA

Per ogni quesito, indicare con una croce l'unica risposta corretta.
Per annullare una risposta già data, racchiudere la croce in un cerchio.

1. [punti 2] Sia $z = 1 + i$. Allora, nel piano complesso, z^{83}

   (a) sta nel primo quadrante;
   (b) sta nel secondo quadrante; ✓
   (c) sta nel terzo quadrante;
   (d) sta nel quarto quadrante;
   (e) sta sull'asse reale.

2. [punti 2] La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(1 - \frac{n^2}{e^n}\right)$

   (a) converge; ✓
   (b) diverge a $+\infty$;
   (c) diverge a $-\infty$;
   (d) è irregolare;
   (e) nessuna delle altre risposte è corretta.

3. [punti 1] $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (2 + \sin n) \log \frac{1}{n}$

   (a) $= +\infty$;
   (b) $= -\infty$; ✓
   (c) $= 0$;
   (d) $= 1$;
   (e) non esiste.

4. [punti 1] Sia $P_9 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un polinomio di grado 9. È certamente vero che

   (a) l'equazione $P_9(x) = 8$ ha almeno una soluzione; ✓
   (b) $\lim_{x\to+\infty} P_9(x) = +\infty$;
   (c) P_9 è una funzione dispari;
   (d) P_9 ammette almeno un punto di massimo e un punto di minimo;
   (e) nessuna delle altre risposte è corretta.

5. [punti 1] Sia $f(x) = (x + 1)^2|x + 1|$. È vero che

   (a) f è derivabile in tutto $\mathbb{R}$; ✓
   (b) f non è derivabile solo in $x = -1$;

(c) f non è derivabile solo in $x = 0$;
(d) f non è derivabile solo in $x = 0$ e in $x = -1$;
(e) nessuna delle altre risposte è corretta.

6. [punti 2] Il limite
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(2x) - 1 + 2x^2}{x^\alpha}$$
esiste finito ed è diverso da zero se e solo se
   (a) $\alpha = 1$;
   (b) $\alpha \in (2, 3)$;
   (c) $\alpha = 4$; ✓
   (d) $\alpha > 4$;
   (e) nessuna delle altre risposte è corretta.

7. [punti 1] Al variare di $\alpha > 0$, l'integrale improprio
$$\int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{x^\alpha}\right) \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}} dx$$
converge se e solo se
   (a) $\alpha > \frac{2}{3}$; ✓
   (b) $\alpha > 1$;
   (c) $\alpha < 1$;
   (d) $\alpha < \frac{2}{3}$;
   (e) nessuna delle altre risposte è corretta.

TEORIA

Teoria 1. [punti 4] Enunciare i criteri di convergenza per le serie a termini di segno variabile ed uno a scelta dei criteri per le serie a termini positivi.

Teoria 2. [punti 4] Dare la definizione di primitiva di una funzione $f : I \to \mathbb{R}$, dove I è un intervallo. Enunciare e dimostrare uno dei teoremi fondamentali del calcolo a scelta (I o II).

ESERCIZI

Esercizio 1. [punti 3]

- Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione
$$\frac{z}{\bar{z}} = i.$$
- Disegnare poi nel piano complesso l'insieme delle soluzioni del sistema
$$\begin{cases} \dfrac{z}{\bar{z}} = i \\ |z - i| \le 1\,. \end{cases}$$

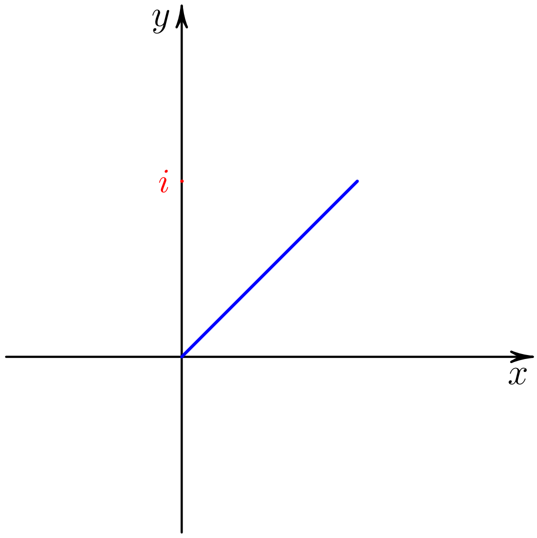
SOLUZIONE.

- Osserviamo che deve essere $z \neq 0$. Ponendo $z = \rho e^{i\theta}$ otteniamo

$$\frac{z}{\bar{z}} = i \qquad \text{se e solo se} \qquad \rho \neq 0 \;\text{ e }\; e^{i2\theta} = e^{i\pi/2} \qquad \text{se e solo se} \qquad \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \rho > 0.$$

  Troviamo quindi i numeri complessi $z = x(1+i)$, al variare di $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$.

- I punti che risolvono $|z - i| \leq 1$ vivono nel disco di raggio 1 centro $(0, 1)$. L'insieme cercato è quindi:



Esercizio 2. (3 punti) Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, studiare il carattere della serie numerica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha^n \frac{\log n}{n}.$$

SOLUZIONE.
Studiamo la convergenza assoluta della serie, quindi la convergenza della serie con termine generale

$$|a_n| = |\alpha|^n \frac{\log n}{n}.$$

Utilizzando il criterio del rapporto otteniamo

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|\alpha|^{n+1} \log(n+1)}{n+1} \frac{n}{|\alpha|^n \log n} = |\alpha \frac{\log(n+1)}{\log n} \frac{n}{n+1} \to |\alpha|, \qquad \text{se } n \to 0.$$

Se $|\alpha| > 1$, la serie non converge ($a_n \not\to 0$). Nel caso $|\alpha| < 1$, la serie converge assolutamente, quindi semplicemente.
Studiamo i casi $\alpha = 1$ e $\alpha = -1$.

Se $\alpha = 1$, $a_n = \frac{\log n}{n}$. Quindi la serie diverge a $+\infty$.

Se $\alpha = -1$, $a_n = (-1)^n \frac{\log n}{n}$. Poiché $\frac{\log n}{n} \downarrow 0$, dal criterio di Leibniz otteniamo che la serie converge. Infatti, per la gerarchia degli infiniti $\frac{\log n}{n} \to 0$, mentre, associando a $\frac{\log n}{n}$ la funzione $f(x) = \frac{\log x}{x}$ e derivando, otteniamo

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{\log x}{x^2} = \frac{1 - \log x}{x^2} < 0, \qquad \text{per ogni } x > e,$$

da cui $\frac{\log(n+1)}{n+1} < \frac{\log n}{n}$, per ogni $n > 3$.

In conclusione, la serie converge per $\alpha \in [-1, 1)$ non converge altrimenti.

Esercizio 3. [punti 3] Calcolare l'integrale

$$\int_4^9 \frac{\log\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\,dx\,.$$

SOLUZIONE.
Utilizzando il cambio di variabile $\sqrt{x}=t$ e integrando per parti, otteniamo

$$\int_4^9 \frac{\log\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\,dx = \int_2^3 \log t dt = \big[t\log t\big]_2^3 - \int_2^3 1dt = \big[t\log t - t\big]_2^3 = 3\log 3 - 2 - 2\log 2 + 2 = \log\frac{9}{4} - 1.$$

Esercizio 4. [punti 4] Studiare la funzione f definita da

$$f(x) = (x+2)^{\frac{2}{3}}(x-3)^{\frac{1}{3}}$$

e disegnarne un grafico qualitativo (in particolare, è richiesta la determinazione degli eventuali asintoti, mentre non è richiesto lo studio della convessità).

SOLUZIONE.
Il dominio di f è $\mathbb{R}$. $f(x)=0$ se e solo se $x=-2,3$, $f(x)>0$ se e solo se $x>3$ ed è negativa altrove. Non ci sono simmetrie.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x = \pm\infty,$$

inoltre, essendo

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = 1$$

e

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pm\infty}\Big(f(x)-x\Big) &= \lim_{x\to\pm\infty} x\bigg(\Big(1+\frac{2}{x}\Big)^{2/3}\Big(1-\frac{3}{x}\Big)^{1/3}-1\bigg)\\ &= \lim_{x\to\pm\infty} x\bigg(\Big(1+\frac{4}{3x}+o\Big(\frac{1}{x}\Big)\Big)\Big(1-\frac{1}{x}+o\Big(\frac{1}{x}\Big)\Big)-1\bigg) = \lim_{x\to\pm\infty} x\Big(\frac{4}{3x}-\frac{1}{x}+o\Big(\frac{1}{x}\Big)\Big) = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

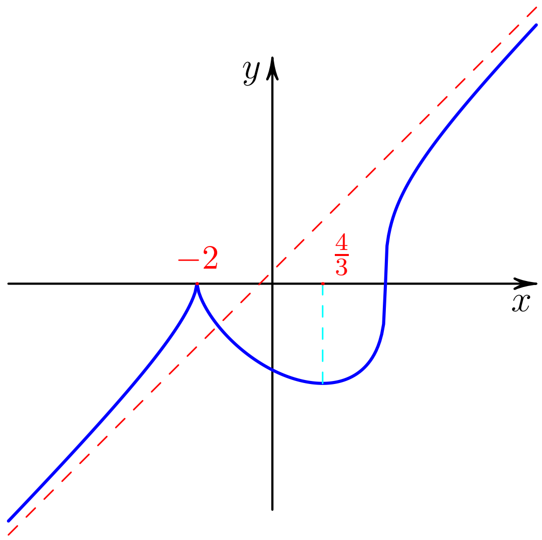
otteniamo che la retta di equazione $y=x+\frac{1}{3}$ è di asintoto obliquo per f per $x\to\pm\infty$.

$$f'(x) = \frac{2}{3}\frac{(x-3)^{1/3}}{(x+2)^{1/3}} + \frac{1}{3}\frac{(x+2)^{2/3}}{(x-3)^{2/3}} = \frac{1}{3}\Big(\frac{x+2}{x-3}\Big)^{2/3}\frac{3x-4}{x+2} = \frac{1}{3}\frac{3x-4}{(x-3)^{2/3}(x+2)^{1/3}}$$

Essendo

$$\lim_{x\to3} f'(x) = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to-2^{\pm}} f'(x) = \mp\infty,$$

f non è derivabile in $x=-2$ e in $x=3$ che risultano rispettivamente un flesso a tangente verticale e una cuspide. $f'(x)>0$ se e solo se $x>\frac{4}{3}$ o $x<-2$, $f'(x)=0$ se e solo se $x=\frac{4}{3}$ ed f è negativa altrove. Quindi f cresce in $(-\infty,-2)$ e in $(\frac{4}{3},+\infty)$ e decresce in $(-,\frac{4}{3})$. Il punto $x=\frac{4}{3}$ è di minimo locale e vale $f(\frac{4}{3}) = -\frac{5}{3}\sqrt[3]{4}$. Alla luce dei limiti di f per $x\to\pm\infty$, non esistono massimo e minimo assoluti ($\sup f=+\infty$ e $\inf f=-\infty$). Un grafico qualitativo di f è:



y
x
−2
4
3