Analisi I

Marco Macherelli

Dicembre 2024

Contenuti

1 Definizione Assiomatica di $\mathbb{R}$

Sia E un insieme contenuto in $\mathbb{R}$:

- **Def.** E è limitato superiormente se $\exists M : x < M \; \forall x \in E$
- **Def.** E è limitato inferiormente se $\exists m : x > m \; \forall x \in E$
- **Def.** E è limitato se $\exists M, m : m < x < M \; \forall x \in E$
- **Def.** $\bar{x}$ è massimo se $\bar{x} \in E \;\wedge\; x \leq \bar{x} \; \forall x \in E$ (esiste se E è limitato superiormente)
- **Def.** $\bar{x}$ è minimo se $\bar{x} \in E \;\wedge\; x \geq \bar{x} \; \forall x \in E$ (esiste se E è limitato inferiormente)

Sia $E \subseteq K,\; k \in K$:

- **Def.** Si dice *maggiorante* di E se $k \geq x \; \forall x \in E$
- **Def.** Si dice *minorante* di E se $k \leq x \; \forall x \in E$
- **Def.** Si dice *estremo superiore* di E il minimo dei maggioranti
- **Def.** Si dice *estremo inferiore* di E il massimo dei minoranti

2 Principio di Induzione

Sia $n_0 \in \mathbb{N}$. Se vale la proprietà $P(n)$ per ogni $n \geq n_0$, allora:

1. Dimostro che $P(n_0)$ è vera
2. Assumo come ipotesi che $P(n)$ sia vera e cerco di dimostrare che $P(n+1)$ sia vera

2.1 Disuguaglianza di Bernoulli

Teorema. Per ogni intero $n \geq 0$ e $x \in \mathbb{R}$ tale che $x \geq -1$, vale:

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

Dimostrazione (per induzione):

- **Base.** Per $n=0$, $P(n) \to (1+x)^0 \geq 1+0x \to 1 \geq 1$ (vera)
- **Induzione.** Supponiamo che $(1+x)^n \geq 1+nx$ sia vera.
  Mostriamo che: $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) =$$

$$1+nx+x+nx^2 = 1+(n+1)x+x^2 \geq 1+(n+1)x+0$$

2.2 Disuguaglianza Triangolare

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |x+y| \leq |x|+|y|$$

Dimostrazione:

$$-|x| \leq x \leq |x| \text{ e } -|y| \leq y \leq |y| \to -|x|-|y| \leq x+y \leq |x|+|y| \to -(|x|+|y|) \leq x+y \leq |x|+|y|$$

$$\Rightarrow |x+y| \leq |x|+|y|$$

3 Numeri Complessi

Definizione: Identifichiamo il campo $\mathbb{C}$ come ampliamento di $\mathbb{R}$ che soddisfa le seguenti proprietà:

- **Somma:** $(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d)$
- **Elemento Neutro:** $(0,0)$
- **Elemento Opposto:** $(-a,-b)$
- **Prodotto:** $(a,b)(c,d) = (ac-bd, ad+bc)$
- **Elemento Neutro:** $(1,0)$
- **Inverso:** $\left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right)$

3.1 Forma Algebrica e Coniugato

$$z = (a,b) \to a+ib \text{ dove } i^2 = -1$$

$$\bar{z} = (a,b) \to a-ib \text{ dove } i^2 = -1 \text{ (coniugato di } z\text{)}$$

Proprietà:

- **Somma:** $z+\bar{z} = 2a \to 2\mathrm{Re}(z), \ \forall z \in \mathbb{C}$
- **Prodotto:** $z-\bar{z} = 2ib \to 2\mathrm{Im}(z), \ \forall z \in \mathbb{C}$
- **Coniugato:** $\bar{\bar{z}} = z, \ \forall z \in \mathbb{C}$
- $\overline{z_1+z_2} = \bar{z_1}+\bar{z_2}$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z_1} \cdot \bar{z_2}$
- $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$

3.2 Modulo di z

Definizione: Modulo di $z = a + ib \to |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}$ **Proprietà:**

- $|z| \geq 0$ perché $\sqrt{a^2 + b^2} \geq 0 \; \forall a, b \in \mathbb{R}$
- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$ perché $\sqrt{a^2 + b^2} = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$
- $|z| = |\bar{z}|$ perché $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + (-b)^2}$
- $|\text{Re}(z)| \leq |z|, \; |\text{Im}(z)| \leq |z|, \; |\text{Re}(z)| + |\text{Im}(z)| \geq |z|$
- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Significato geometrico: distanza di z dall'origine.

3.3 Forma Trigonometrica ed Esponenziale

Dato $z = a + ib$, abbiamo:

$$z = \rho(\cos\theta + i \sin\theta) = \rho e^{i\theta} \text{ dove:}$$

$$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \; \theta = \arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \; \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \; \tan\theta = \frac{b}{a}, \; \theta \in [-\pi, \pi]$$

3.4 Prodotto tra Numeri Complessi

Dati $z = \rho(\cos\theta + i \sin\theta)$ e $w = r(\cos\phi + i \sin\phi)$, abbiamo:

$$zw = \rho r \left(\cos(\theta + \phi) + i \sin(\theta + \phi)\right)$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned}
\rho r \left(\cos\theta + i \sin\theta\right)\left(\cos\phi + i \sin\phi\right) &= \rho r \left(\cos\theta\cos\phi + i \sin\phi\cos\theta + i \sin\theta\cos\phi + i^2 \sin\theta\sin\phi\right) \\
&= \rho r \left(\cos\theta\cos\phi + i\left(\sin\phi\cos\theta + \sin\theta\cos\phi\right) - \sin\theta\sin\phi\right) \\
&= \rho r \left(\cos(\theta + \phi) + i \sin(\theta + \phi)\right)
\end{aligned}$$

Moltiplicare z per w significa effettuare su z una contrazione/dilatazione del modulo di r e una rotazione di angolo ϕ.

3.5 Formula di De Moivre

Sia $z = \rho(\cos\theta + i \sin\theta) \in \mathbb{C}$ e sia $n \geq 1 \in \mathbb{N}$, allora:

$$z^n = \rho^n \left(\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)\right)$$

Si dimostra utilizzando la dimostrazione precedente ponendo $w = z$.

3.6 Radici N-Esime di Numeri Complessi

Definizione: Dato $w \in \mathbb{C}$, con $n \geq 2 \in \mathbb{N}$, una radice n-esima di w è un numero complesso z tale che:

$$z^n = w$$

Teorema: Le radici n-esime di w sono tutti e soli i numeri complessi del tipo:

$$z_k = \rho e^{in\theta} \quad \text{con} \quad \rho = \sqrt[n]{|w|} \quad \text{dove} \quad 0 \leq k < n$$

$$\theta_k = \frac{\phi + 2k\pi}{n}$$

Significato geometrico: Nel campo complesso, le radici sono i vertici di un poligono regolare di n lati, inscritto in un cerchio di centro O e raggio $\rho = \sqrt[n]{|w|}$. Ogni radice si ottiene dalla precedente moltiplicando per $e^{i\frac{2\pi}{n}}$, quindi ruotando la precedente di un angolo $\phi = \frac{2\pi}{r}$, dove $r = |z|$.

3.7 Teorema Fondamentale Algebrico

Un'equazione polinomiale nella forma:

$$a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0 = 0 \quad \text{con} \quad a_n \neq 0 \text{ e } a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$$

ha precisamente n radici.

Proprietà: Se $p(z)$ ha coefficienti reali $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$ e se w è una radice non reale, allora $\bar{w}$ è una radice con la stessa molteplicità.

Osservazione: Se $p(z)$ ha grado dispari, almeno una radice è reale.

4 Funzione

Dati due insiemi A e B (non vuoti), una funzione è una qualsiasi legge che ad ogni elemento di A associa uno e un solo elemento di B:

$$f : A \to B$$

Definizioni:

- **Immagine** di f: è un sottoinsieme di B, $Im(f) = f(A) = \{b \in B : f(a) = b\}$
- **Controimmagine** di f: dato $C \subseteq B$, $f^{-1}(C) = \{a \in A : f(a) \in C\}$
- f è **iniettiva** se $\forall a_1, a_2 \in A,\ a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$; $\forall b \in B,\ f^{-1}(b)$ contiene al più un elemento
- f è **suriettiva** se $\forall b \in B,\ f^{-1}(b)$ contiene almeno un elemento
- f è **biunivoca** se $\forall b \in B,\ f^{-1}(b)$ contiene esattamente un elemento

4.1 Funzione Composta

Data $f : A \to B$ e $g : A' \to B'$, si definisce h la funzione composta:

$$h = g \circ f : A \to B' \quad \text{dove} \quad h(x) = g(f(x))$$

4.2 Funzione Inversa

Data $f : A \to B$ funzione biunivoca, allora:

$$\forall b \in B,\ \exists! a \in A : f(a) = b$$

Si definisce **funzione inversa** $f^{-1} : B \to A$, $\forall b \in B\ b \to a$ se $f(a) = b$. Diremo **identità** quella funzione $\mathbb{I}_A : A \to A$ dove $f^{-1} \circ f = \mathbb{I}_A$.

4.3 Funzioni Simmetriche

Data $f : D \to \mathbb{R}$, dove $D = [-a, a]$:

- f è **pari** se $f(x) = f(-x)\ \forall x \in D \Rightarrow$ Grafico simmetrico rispetto all'asse x
- f è **dispari** se $f(x) = -f(-x)\ \forall x \in D \Rightarrow$ Grafico simmetrico rispetto all'origine

4.4 Funzioni Periodiche

La funzione f si dice **periodica** in periodo $T > 0$ se T è il più piccolo numero reale positivo tale che:

$$f(x + T) = f(x)\ \forall x \in D$$

4.5 Funzioni Parte Intera e Mantissa

Definizione: Dato $x \in \mathbb{R}$, si definisce **parte intera** di x ($[x]$), il più grande numero intero $n \leq x$.

Si definisce **mantissa** la parte decimale di $x \in \mathbb{R}$:

$$((x)) = x - [x]$$

4.6 Funzioni Iperboliche

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$
$$\tanh(x) = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Proprietà:

- $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
- $\sinh(x+y) = \sinh(x)\cosh(y) + \sinh(y)\cosh(x)$
- $\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$
- $\sinh(2x) = 2\sinh(x)\cosh(x)$
- $\cosh(2x) = \cosh^2(x) + \sinh^2(x)$

5 Successione Numerica

Si definisce successione numerica $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \Rightarrow \{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$. Il numero $l \in \mathbb{R}$ si dice limite di $\{a_n\}$ se:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l$$

Teorema di unicità del limite: Se $a_n \to l$ e $a_n \to l' \Rightarrow l = l'$.

Definizioni:

- a_n è **convergente** a $l \in \mathbb{R}$ se $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : |a_n - l| < \epsilon \; \forall n \geq N$
- a_n è **divergente** se $\forall n > 0, \exists N \in \mathbb{N} : |a_n| > M \; \forall n \geq N$
- a_n è **oscillante** se $\nexists \lim a_n$
- a_n è **infinitesima** se $a_n \to 0$ per $n \to +\infty$
- a_n è **infinita** se $a_n \to \pm\infty$ per $n \to +\infty$

Proposizioni:

- Sia $\{a_n\}$ limitata e $\{b_n\}$ infinitesima $\Rightarrow \{a_n b_n\}$ infinitesima
- Sia $\{a_n\}$ limitata e $\{b_n\}$ divergente $\Rightarrow \{a_n b_n\}$ divergente

5.1 Teorema dei 2 Carabinieri

Dati $a_n \leq b_n \leq c_n$, se $a_n \to l$ e $c_n \to l$ si ha che $b_n \to l$. Conseguentemente si ha che:

- Se $a_n \leq b_n \; \forall n \geq N$ e $a_n \to +\infty$ si ha che $b_n \to +\infty$
- Se $a_n \leq b_n \; \forall n \geq N$ e $b_n \to -\infty$ si ha che $a_n \to -\infty$

5.2 Teorema di Monotonia

Se $\{a_n\}$ è una successione monotona crescente allora:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

Se $\{a_n\}$ è una successione monotona decrescente allora:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

5.3 Teorema del Numero di Nepero

La successione $a_n = \left(a + \frac{1}{n}\right)^n$ è convergente. In generale:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e \quad \text{(limite notevole)}$$

5.4 Confronti e Stime Asintotiche

Considerando $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ infinite si ha:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} 0 & \text{se } \{a_n\} \text{ è infinita di ordine inferiore rispetto a } \{b_n\} \\ l \in \mathbb{R} & \text{se } \{a_n\} \text{ è infinita dello stesso ordine di } \{b_n\} \\ +\infty & \text{se } \{a_n\} \text{ è infinita di ordine superiore rispetto a } \{b_n\} \\ \text{non confrontabili} & \text{se } \nexists \{a_n\} \text{ e } \{b_n\} \text{ infiniti non confrontabili} \end{cases}$$

Considerando $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ infinitesime si ha:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} 0 & \text{se } \{a_n\} \text{ è infinitesimo di ordine superiore rispetto a } \{b_n\} \\ l \in \mathbb{R} & \text{se } \{a_n\} \text{ è infinitesimo dello stesso ordine di } \{b_n\} \\ +\infty & \text{se } \{a_n\} \text{ è infinitesimo di ordine inferiore rispetto a } \{b_n\} \\ \text{non confrontabili} & \text{se } \nexists \{a_n\} \text{ e } \{b_n\} \text{ infinitesimi non confrontabili} \end{cases}$$

5.5 Successioni Asintotiche

Se:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \quad \text{allora } \{a_n\} \text{ e } \{b_n\} \text{ sono asintotiche}$$

dato che hanno lo stesso comportamento per $n \to +\infty$ e si denotano con $\{a_n\} \sim \{b_n\}$.

5.5.1 Criterio del Rapporto

Sia $a_n > 0$ definitivamente (per $\forall n > N$). Se esiste:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$$

- Se $l < 1$ allora la successione è infinitesima
- Se $l > 1$ allora la successione è infinita

5.5.2 Gerarchia degli Infiniti

In generale vale:

$$(\log_a n)^\beta < n^\alpha < b^n < n! < n^n$$

Per determinare la gerarchia si usa il criterio del rapporto:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0 \quad \text{date } \alpha > 0 \text{ e } a > 1$$

Da criterio del rapporto abbiamo:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} \to \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^\alpha}{a^{n+1}} \cdot \frac{1}{\frac{n^\alpha}{a^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{a^n a} \cdot \frac{a^n}{n^\alpha} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{a^n a} = \frac{1}{a} \to$$

Dato che $a > 1$, si ha $\frac{1}{a} < 1$ e che $\frac{n^\alpha}{a^n} \to 0$ per $n \to +\infty$.

Definizione: Date due successioni a_n e b_n, diremo che: a_n è **o-piccolo** di b_n e scriviamo $a_n = o(b_n)$ se:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Da gerarchia degli infiniti infatti } n^\alpha = o(a^n)$$

6 Serie Numeriche

Definizione: Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali. Definiamo la successione $\{s_k\}$ ponendo:

$$s_k = \sum_{n=0}^{k} a_n$$

Si dice che la somma della serie è il limite di $\{s_k\}$:

$$\lim_{k\to\infty} s_k$$

Se tale limite esiste e finito, esso è la somma della serie. Inoltre, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è detta convergente, divergente o irregolare se $\{s_k\}$ è convergente, divergente o irregolare.

6.1 Teorema: Condizione necessaria alla convergenza

Se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, allora $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Dimostrazione:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \bar{s} < +\infty \implies \lim_{k\to\infty} s_k = \bar{s} \in \mathbb{R}$$

Si ha quindi:

$$s_k = \sum_{n=0}^{k} a_n \quad \text{e} \quad s_{k+1} = \sum_{n=0}^{k+1} a_n = \sum_{n=0}^{k} a_n + a_{k+1} = s_k + a_{k+1}$$

Per $k \to \infty$, otteniamo:

$$\bar{s} = \bar{s} + \lim_{k\to\infty} a_{k+1} \implies \lim_{k\to\infty} a_{k+1} = 0$$

6.2 Teorema della linearità

Se le serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ sono regolari e la somma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ ha significato, allora:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (ca_n) = c \sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

6.3 Serie Geometrica

Sia $a_n = q^n$, quindi:

$$\sum_{n=0}^{k} q^n \quad \text{e} \quad \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} q^n$$

- Se $q = 1$, allora $\sum_{n=0}^{k} 1 = +\infty$. - Se $q \neq 1$, abbiamo:

$$s_k = \sum_{n=0}^{k} q^n = 1 + q^1 + q^2 + \ldots + q^k$$

Moltiplicando per q, otteniamo:

$$qs_k = q^1 + q^2 + \ldots + q^{k+1}$$

Calcolando la differenza:

$$s_k - qs_k = 1 - q^{k+1} \implies s_k(1-q) = 1 - q^{k+1}$$

Quindi:

$$s_k = \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q}$$

E quindi il limite:

$$\lim_{k\to\infty} s_k = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \text{se } |q| < 1 \text{ (convergente)} \\ +\infty & \text{se } q > 1 \text{ (divergente)} \\ \text{irregolare} & \text{se } q \leq 1 \end{cases}$$

6.4 Serie Telescopica

Sia $a_n = b_n - b_{n+1}$, quindi:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(b_n - b_{n+1})$$

La serie è:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = b_0 - \lim_{k\to\infty} b_k$$

Dimostrazione:

$$\sum_{n=0}^{k}(b_n - b_{n+1}) = b_0 - b_{k+1} \implies \lim_{k\to\infty}(b_0 - b_{k+1}) = b_0 - \lim_{k\to\infty} b_{k+1}$$

6.5 Serie Armonica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

Condizione necessaria:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Dimostrazione:

$$\log(x+1) < x \quad \forall x > 0 \implies x = \frac{1}{n} \implies 0 < \log(1 + \frac{1}{n}) \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^+$$

Abbiamo:

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{k} \log(1 + \frac{1}{n}) = \sum_{n=1}^{k}(\log(n+1) - \log(n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + \frac{1}{n}) = -[\log(n) - \log(k)] \to +\infty$$

Inoltre:

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} \sim \log(k) \quad \text{per } k \to +\infty$$

e quindi:

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} = \log(k) + \gamma + o(1) \quad \text{con } \gamma = 0.57721\ldots$$

6.5.1 Serie Armonica Generalizzata

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} diverge & \text{se } \alpha \leq 1 \\ converge & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$$

6.5.2 Serie Armonica Modificata

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha \ln{(n)}^\beta} = \begin{cases} diverge & \text{se } \begin{cases} \alpha \leq 1 \text{ e } \forall\beta \\ \alpha = 1 \text{ e } \beta \leq 1 \end{cases} \\ converge & \text{se } \begin{cases} \alpha > 1 \text{ e } \forall\beta \\ \alpha = 1 \text{ e } \beta > 1 \end{cases} \end{cases}$$

6.6 Serie a Termini Non Negativi

Definizione: La $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ si dice a termini non negativi se:

- $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- Definitivamente, $a_n \geq 0 \quad \forall n \geq N$

Non può essere irregolare, infatti s_k è crescente, quindi $\lim_{k\to\infty} s_k = \sup\{a_n\}$.

6.6.1 Criterio del Confronto

Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ tali che $0 \leq a_n \leq b_n$ definitivamente. Allora:

- Se $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n < +\infty$, allora $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n < +\infty$.
- Se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n > +\infty$, allora $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n > +\infty$.

Dimostrazione: Considero $s_k = \sum_{n=0}^{k} a_n$ e $t_k = \sum_{n=0}^{k} b_n$ (con $\exists \lim s_k$ e $\exists \lim t_k$):

- $s_k \leq t_k$ definitivamente.
- $0 \leq a_n \leq b_n$.

Se $\lim_{k\to\infty} t_k = l \in \mathbb{R}$:

- Da teorema del confronto, $s \leq t < +\infty \Rightarrow s = \lim_{k\to\infty} s_k = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n < +\infty$.
- Se $\lim_{k\to\infty} s_k = +\infty$, allora $+\infty = s_k \leq t_k \Rightarrow s < t \Rightarrow t = +\infty$.

6.6.2 Criterio del Confronto Asintotico

Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni non negative definitivamente, con $b_n > 0$ tali che $a_n \sim b_n$. Allora:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = +\infty \iff \sum_{n=0}^{+\infty} b_n = +\infty,$$

ovvero $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ hanno lo stesso comportamento per $n \to +\infty$.

Dimostrazione: Poiché $a_n \sim b_n$, allora:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \Rightarrow \forall \epsilon > 0 : \left| \frac{a_n}{b_n} - 1 \right| < \epsilon \text{ definitivamente.}$$

Questo implica:

$$1 - \epsilon < \frac{a_n}{b_n} < 1 + \epsilon \quad \text{con } b_n > 0 \Rightarrow (1-\epsilon)b_n < a_n < (1+\epsilon)b_n.$$

Applicando il criterio del confronto:

- Se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n < +\infty$, allora $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n < +\infty$.
- Se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = +\infty$, allora $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = +\infty$.

6.6.3 Criterio del Rapporto

Sia $\{a_n\}$ una successione tale che $a_n > 0$ definitivamente. Se $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, allora:

- Se < 1, allora $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n < +\infty$.
- Se > 1, allora $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = +\infty$.

Dimostrazione:

- Se $l < 1$: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$. Per ogni $\epsilon > 0$:

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 \right| < \epsilon \text{ definitivamente.}$$

  Scegliendo ϵ tale che $l + \epsilon < 1$, otteniamo:

$$a_{N+1} < (l+\epsilon)a_N \quad \text{e quindi } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n < +\infty.$$

- Se $l > 1$: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$. Scegliendo $\epsilon = l - 1 > 0$, abbiamo:

$$a_{n+1} > a_n \quad \text{per } n \geq N \Rightarrow a_n \nrightarrow 0 \text{ per } n \to +\infty.$$

6.6.4 Criterio della Radice

Sia $\{a_n\}$ una successione tale che $a_n \geq 0$ definitivamente. Se $\exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$, allora:

- Se < 1, allora $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n < +\infty$.
- Se > 1, allora $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = +\infty$.

6.7 Serie a termini di segno definito

Definizione: una serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ si dice assolutamente convergente se converge $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$.

6.7.1 Teorema della convergenza assoluta

Se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge assolutamente, allora $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge semplicemente. Quindi vale:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| < +\infty \implies 0 \leq \left| \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| < +\infty$$

6.8 Serie a termini di segno alterno

Criterio di Leibniz: Sia data la serie $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n$ con $a_n \geq 0$, $a_n \to 0$, $a_{n+1} \leq a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ o per $n \geq N$. Allora:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n < +\infty \text{ (La serie converge semplicemente)}$$

Dimostrazione: Sia $s_k = \sum_{n=0}^{k}(-1)^n a_n$.

$$1)\ s_{2k} = \sum_{n=0}^{2k}(-1)^n a_n$$

$$s_{2k+2} = \sum_{n=0}^{2k+2}(-1)^n a_n = \sum_{n=0}^{2k}(-1)^n a_n + (-1)^{2k+1}a_{2k+1} + (-1)^{2k+2}a_{2k+2} =$$

$$s_{2k} + (-1)^{2k+1}a_{2k+1} + (-1)^{2k+2}a_{2k+2} \to \text{per ipotesi } a_{n+1} \leq a_n \text{ quindi se}$$

$$n = 2k+1 \to a_{2k+2} - a_{2k+1} \leq 0 \to s_{2k+2} \leq s_{2k} \to s_{2k} \text{ decrescente}, s_{2k} \leq s_0\, \forall k \geq 0$$

$$2)\ s_{2k+1} = \sum_{n=0}^{2k+1}(-1)^n a_n$$

$$s_{2k+3} = \sum_{n=0}^{2k+3}(-1)^n a_n = \sum_{n=0}^{2k+1}(-1)^n a_n + (-1)^{2k+2}a_{2k+2} + (-1)^{2k+3}a_{2k+3} =$$

$$s_{2k+1} + a_{2k+2} - a_{2k+3} \to \text{per ipotesi } a_{n+1} \leq a_n \text{ quindi se}$$

$$n = 2k+2 \to a_{2k+3} \leq a_{2k+2} \to s_{2k+3} \geq s_{2k+1} \to s_{2k+1}$$

$$3)\ s_{2k+1} = s_{2k} + (-1)^{2k+1} a_{2k+1} \to s_1 \leq \ldots \leq s_{2k+1} = s_{2k} - a_{2k+1} \leq s_{2k} \leq \ldots \leq s_0$$

$$\{s_{2k+1}\} \text{ e } \{s_{2k}\} \text{ sono } \{Monotone, Limitate\} \implies convergenti.$$

$$s_{2k+1} = s_{2k} - a_{2k+1}$$

$$\lim_{k\to\infty} s_{2k+1} = \lim_{k\to\infty} s_{2k} - \lim_{k\to\infty} a_{2k+1} \text{ (per ipotesi } a_n \to 0) = \lim_{k\to\infty} s_{2k} = \bar{s} \in \mathbb{R} < +\infty$$

6.8.1 Corollario: errore

L'errore che si commette approssimando la serie con la somma parziale s_k è tale che $|Err| = |\bar{s} - s_k| \leq a_{k+1}$.

Dimostrazione:

$$s_{2k} \leq \bar{s} \to s_{2k} + (-1)^{2k+1} a_{2k+1} \leq \bar{s} \to s_{2k} - \bar{s} \leq a_{2k+1}$$

$$s_{2k} \geq \bar{s} \to s_{2k-1} + (-1)^{2k} a_{2k} \geq \bar{s} \to a_{2k} - \bar{s} \leq s_{2k-1}$$

7 Limiti di Funzioni

Data: $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}, x \to c \in \mathbb{R}$

7.1 Successionale del limite

Si dice che $\lim_{x\to c} f(x) = l$ con $c, l \in \mathbb{R}$ se, per ogni successione (k_n) di punti $k_n \neq c$ tale che $k_n \to c$ (con $n \to \infty$), si ha:

$$\lim_{n\to\infty} f(k_n) = l.$$

7.1.1 Teorema di Unicità del Limite

Definizione: Se $\exists \lim_{x\to c} f(x) = l \implies l$ è unico
Dimostrazione: Supponiamo $\lim_{x\to c} f(x) = l_1$ e $\lim_{x\to c} f(x) = l_2$ con $l_1 \neq l_2$.
$\to$ Dalla definizione di limite, esiste una successione $(x_n) \to c$ tale che $f(x_n) \to l_1$ e $f(x_n) \to l_2$.
$\to$ Contraddice il Teorema di unicità del limite per le successioni $\implies l_1 \neq l_2$

7.2 Topologia del Limite

Si considera $\lim_{x\to c} = l$

- Se $c, l \in \mathbb{R} : \forall \epsilon > 0\ \exists \delta : |f(x) - l| < \epsilon,\ \forall x \neq c : |x - c| < \delta$
- Se $c \in \mathbb{R},\ l = +\infty : \forall M > 0\ \exists \delta > 0 : f(x) > M,\ \forall x \neq c : |x - c| < \delta$
- Se $c = +\infty,\ l \in \mathbb{R} : \forall \epsilon > 0\ \exists H > 0 : |f(x) - l| < \epsilon,\ \forall x > H$
- Se $c = +\infty,\ l = +\infty : \forall M > 0\ \exists H > 0 : f(x) > M,\ \forall x > M$

7.3 Intorno di un punto $c \in \mathbb{R}$

Si dice intervallo di un punto $c \in \mathbb{R}$:

- Un intervallo aperto che contiene c: $(c - \delta, c + \delta)$
- Un intervallo aperto che "contiene" $\pm\infty$: $(H, +\infty)$ o $(-\infty, H)$

7.3.1 Intervallo Generale

$\lim_{x\to c} f(x) = l :\ c, l \in \mathbb{R} \iff \forall$ intorno di l (J_l) $\exists$ intorno di c $(\mathbb{I}_c)$ tale che $f(x) \in J_l,\ \forall x \neq c \in \mathbb{I}_c$

7.4 Punto di Accumulazione

Sia $A \subseteq \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}$ è un punto di accumulazione per A se $\forall \mathbb{I}_c$ si ha $\mathbb{I}_c \cap A \setminus \{c\} \neq \emptyset$
Si dice **Punto Isolato** è un punto non di accumulazione

7.5 Teorema del Confronto (2 carabinieri)

Definizione:

$$\text{Sia } \lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = l, \text{ se } f(x) \leq h(x) \leq g(x) \text{ in un intorno di } c,\ c \in \mathbb{R}, \implies \lim_{x\to c} h(x) = l.$$

Dimostrazione:

Usando la definizione successionale del limite, scelgo $x_n \neq c$, $x_n \to c$, $c \in \mathbb{R}$.

$$\text{Se } \lim_{x\to c} f(x) = l \implies f(x_n) = l \text{ per } n \to +\infty$$

$$\text{Se } \lim_{x\to c} g(x) = l \implies g(x_n) = l \text{ per } n \to +\infty$$

Se $x_n \to c$. avremo: $f(x_n) \leq h(x_n) \leq g(x_n)\ \forall n > N \implies$ Da Teorema dei 2 carabinieri $h(x_n) \to l$ per $n \to +\infty$

Corollario:

$$\text{Se } g(x) \to 0 \text{ per } x \to c \text{ e } 0 \leq |h(x)| \leq g(c) \text{ in un intorno di c } \implies h(x) \to 0 \text{ per } x \to c$$

7.6 Teorema di Permanenza del Segno

$$\text{Se } \lim_{x\to c} f(x) = l > 0 \implies \exists \mathbb{I}_c \text{ tale che } f(x) > 0\ \forall x > 0 \in \mathbb{I}_c \setminus \{c\}$$

$$\text{Se } \lim_{x\to c} f(x) = l,\ f(x) \geq 0 \implies \forall x \in \mathbb{I}_c \setminus \{c\},\ l \geq 0$$

7.7 Teorema dell'Algebra dei Limiti

Se $f(x) \to l_1$, $g(x) \to l_2$ per $x \to c$, $c \in \overline{\mathbb{R}}$, $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$. Allora:

- $f(x) \pm g(x) \to l_1 + l_2$ per $x \to c$
- $f(x)g(x) \to l_1 l_2$ per $x \to c$
- $\frac{f(x)}{g(x)} \to \frac{l_1}{l_2}$ per $x \to c$

7.8 Limite Destro e Sinistro

Se $c \in \mathbb{R}$ e $l \in \overline{\mathbb{R}}$ si dice :

$$\lim_{x\to c^{\pm}} f(x) = l \to \text{ limite } \begin{cases} destro \\ sinistro \end{cases} \text{ di } f(x) \text{ per } x \to c, \text{ se } \forall \{x_n\} \text{ tale che } \begin{cases} x_n \to x^+ \\ x_n \to x^- \end{cases}$$

con $x_n \neq c$ si ha $f(x_n) = l$ per $n \to +\infty$

Nota Bene: $\exists \lim_{x\to c} f(x) \iff \lim_{x\to c^+} f(x) = \lim_{x\to c^-} f(x)$

8 Funzioni Continue

Sia $f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{I}$, f è continua in c se $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)\ \forall c \in \mathbb{I}$

8.1 Teorema di Continuità delle Funzioni Elementari

Enunciato: le funzioni elementari (potenze ad esponente reale, esponenziali, logaritmiche, goniometriche) sono continue nel loro dominio.

Dimostrazione: $\sin x$ continuo $\forall x \in \mathbb{R}$

So che $\sin x$ è continuo in $c = 0$, voglio provarlo $\forall c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\lim_{h\to 0} \sin(c+h) = \sin c = f(c)$$

$$\sin(c+h) - \sin c = \sin c \cos h + \cos c \sin h - \sin c = \sin c(\cos h - 1) + \cos c \sin h \rightarrow$$

$0 \le |\sin(c+h) - \sin c| \le |\sin c||(\cos h - 1)| + |\cos c||\sin h| \rightarrow$ Dove $\cos h - 1 \to 0$ per $h \to 0$ e $\sin h \to 0$ per $h \to 0$

8.2 Teorema dell'Algebra delle Funzioni Continue

Enunciato: Siano f e g definite in I_c, $c \in \mathbb{R}$ e continue in c. Allora:

- $f(x) + g(x) \implies$ Continua in c
- $f(x)g(x) \implies$ Continua in c
- $\frac{f(x)}{g(x)} \implies$ Continua in c, purché $g(c) \neq 0$

Ne discende che $\tan x$, $\cot x$, polinomi, quozienti di polinomi, ..., sono continue in tutto il loro dominio.

8.3 Teorema della continuità composta

Enunciato: Siano g una funzione definita in I_c e continua in c, f una funzione definita in I_d con $d = g(c)$ e continua in $d \implies f \circ g \begin{cases} \text{È definita almeno in } I_c \\ \text{È continua in c} \end{cases}$

Dimostrazione: $f \circ g = f(g(x))$

$$\text{Se } g \text{ è continua in c} \implies \lim_{x\to c} g(x) = g(c) \ *$$

$$\text{Se } f \text{ è continua in c} \implies \lim_{t\to d} f(t) = f(d) \ **$$

$$\text{Calcolo la composta: } \lim_{x\to c} f(g(c))$$

$$\text{Quindi: Pongo } t = g(x) \text{ da precedente se } x \to c \overset{*}{\implies} t \to g(c),\ t = g(x) \to g(c) = d$$

$$\lim_{x\to c} f(g(x)) = \lim_{t\to d} f(t) \overset{**}{=} f(d) = f(g(x))$$

8.4 Punti di Discontinuità

I punti di discontinuità si suddividono in 3 specie:

- **Discontinuità eliminabile:**

  $$\text{Se } \lim_{x\to c} f(x) = l \neq f(c),\ l \in \mathbb{R}$$

- **Discontinuità di salto:**

  $$\text{Se } \lim_{x\to c_+} f(x) = l^+ \neq \lim_{x\to c_-} f(x) = l^-,\ l^+, l^- \in \mathbb{R}$$

- **Discontinuità di seconda specie:** Se non esiste almeno 1 dei 2 limiti

8.4.1 Prolungamento per continuità

Se f(x) non è definita in c ma $\exists \lim_{x\to c} f(x) = l$ f può essere prolungata per continuità:

$$\overline{f}(\text{x}) = \begin{cases} f(x) \text{ se } x \neq c \\ l \text{ se } x \neq c \end{cases}$$

8.4.2 Asintoti

Si dice che f ha u asintoto:

- **Verticale:** di equazione $x = c$ se $\lim_{x\to c} f(x) = \pm\infty$
- **Orizzontale:** di equazione $y = l$ se $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = l$
- **Obliquo:** di equazione $y = mc + q, m \neq 0, q \in \mathbb{R}$ se $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - mx - q = 0$. Per $x \to \pm\infty$ f(x) ammette asintoto obliquo se:
  - $\exists$ finito $m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \neq 0$, ossia f(x) asintotica ad una retta per $x \to \infty$
  - $\exists$ finito $q = \lim_{x\to\infty} f(x) - mx$

8.5 Teorema degli Zeri

Enunciato: Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}, f$ continua su [a,b] e $f(a)f(b) < 0 \implies \exists c \in (a, b) : f(c) = 0$
Dimostrazione (Tramite il metodo di bisezione)**:** Pongo $c_1 = \frac{a+b}{2}$:

- Se $f(c_1) = 0 \implies$ Teorema dimostrato
- Se $f(c_1) \neq 0 \to$ Guardo il segno
  - Se $f(c_1)f(a) > 0 \to$ Intervallo [a, c_1]
  - Se $f(c_1)f(a) < 0 \to$ Intervallo [c_1, b]

Iterando trovo una successione di Intervalli $[a_n, b_n]$ tali che:

- $a_n \leq a_{n+1}$ e $b_n \geq b_{n+1}$, $\{a_n\}$ successione crescente e $\{b_n\}$ successione decrescente
- $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$
- $f(a_n)f(b_n) < 0$

$\{a_n\}$, $\{b_n\}$ monotone illimitate $\in [a, b] \implies$ *convergenti* $\begin{cases} a_n \to l_1 \\ b_n \to l_2 \end{cases}$ per $n \to +\infty$

- Dalla seconda proprietà ho: $\lim_{n\to+\infty} b_n - a_n = \lim_{n\to+\inf} \frac{b-a}{2^n} = 0 \to \lim_{n\to+\infty} b_n - a_n = l_1 - l_2 = 0 \to l_1 = l_2 = l$. Visto che f è continua $\implies f(a_n)f(b_n) \to f(l)f(l) = f(l)^2$ per n $\to +\infty$
- Dalla terza proprietà ho: $f(a_n)f(b_n) < 0$ e $f(a_n)(b_n) \to f(l)^2 \implies$ Teorema di permanenza del segno $f(l)^2 \leq 0 \to f(l)^2 = 0 \implies f(l) = 0 \implies$ l è lo zero cercato.

8.6 Punti di Massimo e Minimo

Massimo: Si definisce massimo di una funzione f il max valore di f(x) : $\underset{x\in\mathbb{D}}{maxf} = max\{f(x) : x \in \mathbb{D}\}$
Minimo: Si definisce minimo di una funzione f il min valore di f(x) : $\underset{x\in\mathbb{D}}{minf} = min\{f(x) : x \in \mathbb{D}\}$
Pto di Massimo: Un punto $x_0 \in \mathbb{D}$ in $f(x_0) = maxf$ si dice punto di max e vale: $f(x_0) \geq f(x)\ \forall x \in \mathbb{D}$
Pto di Minimo: Un punto $x_0 \in \mathbb{D}$ in $f(x_0) = minf$ si dice punto di min e vale: $f(x_0) \leq f(x)\ \forall x \in \mathbb{D}$

8.7 Teorema di Weierstrass

Enunciato: Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continua su $[a, b] \implies f$ ammette max e min su $[a, b]$, ossia $\exists x_M, x_m \in [a, b]$ punto di max e min rispettivamente tali che:

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M), \forall x \in [a, b]$$

Dimostrazione: Data $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e $\Lambda = \underset{x\in[a,b]}{supf(x)}$

- Suddivido $[a, b]$ in 2 Intervalli uguali: $\underset{x\in[a_1,b_1]}{supf(x)} = \underset{x\in[a_2,b_2]}{supf(x)}$

  ... Iterando

- $[a_n, b_n]$ con $\{a_n\}\{b_n\}$ sono monotone e limitate $\implies$ convergenti
  - Avendo $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \to a_n, b_n \implies$ convergono a $x_0 \in [a, b]$
  - $\underset{x\in[a_n,b_n]}{supf(x)} = \Lambda$
- Se $\Lambda < +\infty$:
  - $\forall n\ \exists t_n \in [a_n, b_n] : \Lambda - \frac{1}{t_n} < f(t_n) \leq \Lambda$
  - Se $a_n \to x_0$ e $b_n \to x_0$ per $n \to +\infty$: $a_n \leq t_n \leq b_n \implies t_n \to x_o$ per $n \to +\infty \to \lim_{n\to+\infty} f(t_n) = \Lambda$
  - Ma f è continua in $[a, b] \implies \lim_{n\to+\infty} f(t_n) = f(x_0) \implies \Lambda = f(x_0)$
  - Dove $\Lambda = \underset{x\in[a,b]}{supf(x)} = f(x_0) \implies f(x_0) = \underset{x\in[a,b]}{maxf(x)}$
- Se $\Lambda = +\infty$
  - $\forall n\ \exists t_n \in [a_n, b_n] : f(t_n) \geq n$
  - Se $a_n \to x_0$ e $b_n \to x_0$ per $n \to +\infty$: $a_n \leq t_n \leq b_n \implies t_n \to x_o$ per $n \to +\infty \to \lim_{n\to+\infty} f(t_n) = +\infty$
  - Ma f è continua in $[a, b] \implies \lim_{n\to+\infty} f(t_n) = f(x_0) \implies f(x_0) = +\infty$, è assurdo $\implies \Lambda < +\infty$

8.8 Teorema dei Valori Intermedi

Enunciato: Sia $\mathbb{I}$ un intervallo e $f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$, continua $\forall x \in \mathbb{I}$, allora $Imf(x)$ è un intervallo.
Dimostrazione: Siamo $y_1, y_2 \in f(\mathbb{I})$ e $y_1 < z < y_2 \to z \in f(\mathbb{I})$, siano poi $c, d \in \mathbb{I}$ tale che $f(c) = y_1$ e $f(d) = y_2 \implies y_1 < z < y_2$
Considero: $g(x) = f(x) - z$ (Traslazione della funzione verso il basso)
$\to g(x)$ è continua su $[a, b] = [min\{c, d\}, max\{c, d\}] = \mathbb{I}$ e $g(a)g(b) < 0$
$\implies \exists x \in [a, b] : g(x) = 0$
$\implies f(x) = z \implies x \in \mathbb{I} \implies z \in f(\mathbb{I})$
Osservazione: Funzioni continue su [a,b] chiuso e limitato hanno immagine [m,M] chiuso e limitato

8.9 Teorema di Permanenza del Segno

Enunciato: Sia f continua in c e $f(c) = l > 0 \implies \exists \mathbb{I}_c : f(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{I}_c\ \cap \mathbb{D}$
Dimostrazione: Essendo f continua in c si ha $\lim_{x\to c} f(x) = f(c) = l > 0 \implies$ Appendice del teorema di permanenza del segno

9 Derivata di Una Funzione

Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, f è derivabile in $x_0 \in (a, b)$ se $\exists$ finito

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Tale limite è la derivata prima di f in x_0 e la indichiamo: $f'(x_0), \frac{df}{dx}|_{x=x_0}, \dot{f}(x_0)$. Il significato geometrico è il coefficiente angolare della retta tangente a $x_0 \to y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$
Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione tale che $\mathbb{I}' = \{x \in (a, b) : f$ derivabile in $x\}$. Allora si chiama funzione derivata di f, la funzione $f' : \mathbb{I}' \to \mathbb{R}$

9.1 Teorema della Continuità

Enunciato: Se f è derivabile in in punto $x_0 \implies f$ è continua in x_0
Dimostrazione: $f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} h \sim f'(x_0)h = 0 \implies \lim_{h\to 0} f'(x_0)h = 0 \implies \lim_{h\to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$
Osservazione: Se f non continua in x_0, non è derivabile in x_0

9.2 Derivate Destra e Sinistra

Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}, x_0 \in (a, b)$ se $\exists$ finito $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. Allora f si dice derivabile a $\begin{cases} destra \\ sinistra \end{cases}$

e il limite si dice derivata $\begin{cases} destra\ f'_+(x_0) \\ sinistra\ f'_-(x_0) \end{cases}$

s Se f è derivabile in x_0 allora $f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$
Se f non è derivabile in x_0 allora:

- **Punto Angoloso:** $\exists$ limiti $f'_+(x_0), f'_-(x_0) \in \overline{\mathbb{R}}$ con almeno uno dei due limiti finiti $f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$
- **Punto a Tangente Verticale:** $\exists$ limite $f'(x_0) = \pm\infty$
- **Punto di Cuspide:** $\exists$ limiti $f'_+(x_0), f'_-(x_0) \in \{-\infty + \infty\}$ e hanno segno opposto

Osservazione: Nel caso di funzione definita per $x \geq x_0$ se $f'_+(x_0) = +\infty$ si ha un punto a tangente verticale. Nel caso $f'_+(x_0), f'_-(x_0)$ non esistono si ha un punto di non derivabilità

9.3 Calcolo delle Derivate

Da Teorema sull'algebra dei limiti

9.3.1 Teorema della Derivata della Somma e Prodotto per uno Scalare

Enunciato: Sia $\mathbb{I}$ intervallo, x interno a $\mathbb{I}$ se $f, g : (\mathbb{I} \to \mathbb{R})$ sono derivabili in x e $\lambda \in \mathbb{R}$ allora anche $f + g$ e λf sono derivabili in x e vale $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$ e $(\lambda f(x))' = \lambda f'(x)$

9.3.2 Teorema della Derivata della Composizione

Enunciato: Sia $g \circ f$ la composizione di due funzioni f e g, se f è derivabile in x e g derivabile in $y = f(x)$, Allora $g \circ f$ è derivabile in x e vale $(f \circ f)'(x) = g'(x) \circ f'(x)$

9.3.3 Teorema della Derivata del Prodotto

Enunciato: Siano $f, g : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ derivabili in x allora anche fg è derivabile in x e vale $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

9.3.4 Teorema della Derivata del Quoziente

Enunciato: Siano $f, g : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ derivabili in x e $g(x) \neq 0$ allora $\frac{f}{g}$ è derivabile in x e vale $(\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$

9.4 Teorema di Monotonia per f

Enunciato: Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione monotona crescente allora $\forall c \in (a, b)$ $\exists$ finiti:

- $\lim_{x\to c^-} f(x) = sup\{f(x) : x \in (a, b),\ x < c\}$
- $\lim_{x\to c^+} f(x) = inf\{f(x) : x \in (a, b),\ x > c\}$

Ai due estremi a,b esistono i limiti eventualmente infiniti
Conseguenza: le funzioni monotone hanno al più punti di discontinuità di salto

9.5 Relazione tra Funzione Derivata e Inversa

Sia $f : A \to B$ iniettiva $(a_1 \neq a_2 \implies f(a_1) \neq f(a_2))$ allora è possibile definire la sua inversa $f^{-1} : f(a) \to A$.

9.5.1 Teorema di Invertibilità I

Enunciato: Sia $f : A \to \mathbb{R}$ strettamente monotona in $A \implies f$ è invertibile in A e la sua inversa è strettamente monotona

Dimostrazione: Se $a_1 \neq a_2 \begin{cases} a_1 > a_2 \implies f(a_1) > f(a_2) \\ a_1 < a_2 \implies f(a_1) < f(a_2) \end{cases} \implies f(a_1) \neq f(a_2)$, f è iniettiva e invertibile e f strettamente crescente.
Siano $y = f(x) \to x = f^{-1}(y)$, voglio dimostrare che $f^{-1}(y)$ è monotona crescente.
Sia $b_1 < b_2$ ossia $b_1 = f(a_1) < f(a_2) = b_2$, la nostra tesi: $a_1 < a_2$ ossia $a_1 = f^{-1}(b_1) < f^{-1}(b_2) = a_2$.
Per Assurdo $a_1 \geq a_2$ ossia $a_1 = f^{-1}(b_1) \geq f^{-1}(b_2) = a_2$, essendo $a_1 \geq a_2 \implies f(a_1) \geq f(a_2)$ ossia che $b_1 \geq b_2$, il che è Assurdo rispetto alle ipotesi.
Osservazione: La monotonia stretta è condizione sufficiente all'invertibilità ma non necessaria

9.5.2 Teorema di Invertibilità II

Enunciato: Sia $f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}, \mathbb{I}$ intervallo, f continua su $\mathbb{I}$, allora f è invertibile su $\mathbb{I} \iff f$ è strettamente monotona. Inoltre f^{-1} è strettamente monotona e continua.
Dimostrazione: f strettamente monotona $\implies f$ è invertibile. Se f è invertibile e continua su $\mathbb{I}$ volgiamo dimostrare che f è strettamente monotona.
Per Assurdo f non strettamente monotona $\implies x_1 < x_2 < x_3$ in $\mathbb{I}$ tale che $f(x_1) < f(x_2), f(x_2) > f(x_3)$ oppure $f(x_1) > f(x_2), f(x_2) < f(x_3)$.
f è invertibile $\implies f$ è iniettiva $\implies f(x_1) \neq f(x_3) \begin{cases} f(x_1) < f(x_3) \\ f(x_1) > f(x_3) \end{cases} \implies x_1 < x_2 < x_3 \to f(x_1) < f(x_2) < f(x_3)$.
Visto che f è continua vale il teorema dei valori intermedi $\exists x_0 \in (x_1, x_2) : f(x_0) = f(x_3)$ ma poiché $x_0 < x_2 < x_3 \implies x_0 \neq x_3$ ne segue che f non può essere invertibile. Assurdo, va dimostrata f continua strettamente monotona invertibile $\implies g = f^{-1}$ continua strettamente monotona invertibile.
Dal teorema di monotonia si ha che g monotona $\implies g$ continua o con punti di salto. In questo secondo caso l'immagine di g non è un intervallo (Unione di intervalli disgiunti), Assurdo perchè l'immagine di g è un intervallo, allora non ci possono essere punti di salto $\implies f$ continua.
Conseguenze: f elementare continua su intervallo $\implies f$ ha inversa continua.

9.5.3 Teorema della Derivata dell'Inversa

Enunciato: Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ continua e invertibile su (a,b) e $g = f^{-1}$ la sua inversa definita da $f(a, b)$, supponiamo $\exists f'(x_0) \neq 0$ per un $x_0 \in (a, b) \implies g$ è derivabile in $y_0 = f(x_0)$ e $g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.
Dimostrazione: Definizione di derivata di f in x_0: $f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \lim_{y\to y_0} \frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} = \lim_{y\to y_0} \frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0} \implies$ per definizione $\begin{cases} y = f(x), y_0 = f(x_0) \\ x = f^{-1}(y), x_0 = f^{-1}(y_0) \end{cases}$
da teorema precedente $f^{-1}(y)$ è continua $\implies$ se $y \to y_0 \implies f^{-1}(y) \to f^{-1}(y_0) \implies x \to x_0 \implies$ se $y \to y_0 \implies x \to x_0$, $\lim_{y\to y_0} \frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$, se esiste finito, allora $\exists g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$

9.6 Teorema della Derivata di $f(x)^{g(x)}$

$$(f(x)^{g(x)})' = (e^{log f(x)^{g(x)}})' = (e^{g(x) log f(x)})' = e^{g(x) log f(x)}(g(x) log f(x))'$$

9.7 Punti di Estremo Relativo

Definizione: Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x_0 \in A, x_0$ si dice punto di massimo relativo/locale quando esiste un intorno $\mathbb{I}_{x_0}$ tale che $f(x_0) > f(x), \forall x \in \mathbb{I}_{x_0} \cap A$.
Definizione: Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x_0 \in A, x_0$ si dice punto di minimo relativo/locale quando esiste un intorno $\mathbb{I}_{x_0}$ tale che $f(x_0) < f(x), \forall x \in \mathbb{I}_{x_0} \cap A$.
Osservazione: Se un punto è di massimo/minimo per f su $A \implies$ è anche di massimo/minimo relativo e si distinguono le due cose parlando di massimo/minimo assoluto

9.8 Punti Stazionari

Definizione: x_0 è un punto stazionario per $f \iff f'(x_0) = 0$

9.8.1 Teorema di Fermat

Enunciato: Sia $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}, x_0 \in (a,b)$ estremo relativo in cui f è derivabile, allora x_0 è un punto stazionario ($f'(x_0) = 0$)
Dimostrazione (per massimo relativo)**:** Sia x_0 punto di massimo relativo per z in $\mathbb{I}_{x_0}$ da definizione di punto di massimo relativo allora: $f(x_0) \geq f(z), \forall x \in \mathbb{I}_{x_0} \implies f(x_0) - f(z) \geq 0$:

- se $z < x_0$: $\frac{f(z)-f(x_0)}{z-x_0} \geq 0 \to f'(x_0) = \lim_{z \to x_0^+} \frac{f(z)-f(x_0)}{z-x_0} \geq 0$, da teorema di permanenza del segno
- se $z > x_0$: $\frac{f(z)-f(x_0)}{z-x_0} \leq 0 \to f'(x_0) = \lim_{z \to x_0^-} \frac{f(z)-f(x_0)}{z-x_0} \leq 0$, da teorema di permanenza del segno

f derivabile in $x_0 \implies f'_-(x_0) = f'_+(x_0) \implies f'(x_0) = 0$

9.8.2 Punto di Flesso

Definizione: Sia f derivabile in $x_0, r(x_0)$ la retta tangente in $(x_0, f(x_0), x_0$ è detto punto di flesso se

$$\exists \delta > 0 : f(x) - r_0(x) < \delta, \text{ dove } r_0(x) : y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

è rispettivamente non negativa e non positiva in $(x_0 - \delta, x_0)$ e $(x_0, x_0 + \delta)$

9.8.3 Teorema di Rolle

Enunciato: Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua su $[a,b]$ e derivabile in (a,b) e tale che $f(a) = f(b) \implies \exists \xi \in (a,b) : f'(\xi) = 0$
Dimostrazione:

- se f è costante $\implies$ esistono infiniti $\xi \in (a,b)$ tale che $f'(\xi) = 0$
- se f non è costante $\implies$ vale il teorema di Weierstrass $\implies \exists x_m, x_M \in [a,b]$:
  - se $x_m \neq a,b \implies x_m$ punto stazionario per il teorema di Fermat ($f'(x_m) = 0$) con $\xi = x_m$
  - se $x_M \neq a,b \implies x_M$ punto stazionario per il teorema di Fermat ($f'(x_M) = 0$) con $\xi = x_M$

9.8.4 Teorema di Lagrange

Enunciato: Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua su $[a,b]$ e derivabile in $(a,b) \implies \exists \xi \in (a,b) : f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ coefficiente angolare della retta secante $(a, f(a)), (b, f(b))$
Dimostrazione: $h(x) = f(x) - (x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

- $h(x)$ continua su $[a,b]$ e derivabile su (a,b)
- $h(a) = h(b)$?
  - $h(a) = f(a) - (a-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f(a)$
  - $h(b) = f(b) - \cancel{(b-a)}\frac{f(b)-f(a)}{\cancel{b-a}} = f(a)$
- $\exists \xi \in (a,b) : h'(\xi) = 0 \to h'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \to h'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \to f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

9.8.5 Teorema di Cauchy

Enunciato: Siano $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, continue in $[a,b]$ e derivabili in $(a,b) \implies \exists \xi \in (a,b) : f'(\xi)(g(b) - g(a)) = g'(\xi)(f(b) - f(a))$
Osservazione: Se $g(x) = x$ diventa teorema di Lagrange
Dimostrazione: $h(x) = f'(x)(g(b) - g(a)) - g'(x)(f(b) - f(a))$
Proposizione: Sia $f' = 0$ in un intervallo $\mathbb{I} \implies f$ è costante su $\mathbb{I}$
Dimostrazione: Se f non fosse costante $\implies \exists a, b \in \mathbb{I}$ tali che $a < b \implies f(a) \neq f(b) \implies$ dal teorema di Lagrange $\exists \xi \in (a,b)$ tale che $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \neq 0$, Assurdo, va contro le ipotesi

9.9 Test di Monotonia I

Enunciato: Sia $f[a,b] \to \mathbb{R}$ continua su $[a,b]$ e derivabile in (a,b):

- $f(x)$ è crescente in $[a,b] \implies f'(x) \geq 0\ \forall x \in (a,b)$
- $f(x)$ è decrescente in $[a,b] \implies f'(x) \leq 0\ \forall x \in (a,b)$

Dimostrazione: $x_0, z \in (a,b)$, $z > x_0$:

- $f(x)$ è crescente $f(z) > f(x) \implies \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \geq 0 \to \lim_{z\to x} \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \geq 0, \forall x \in (a,b)$
- $f(x)$ è decrescente $f(z) < f(x) \implies \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq 0 \to \lim_{z\to x} \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq 0, \forall x \in (a,b)$

Osservazione: Se f è strettamente crescente/decrescente non è vero in generale che $f'(x) > 0/f'(x) < 0$ strettamente

9.10 Test di Monotonia II

Enunciato: Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua su $[a,b]$ e derivabile in (a,b):

- se $f'(x) \geq 0\ \forall x \in (a,b) \implies f$ crescente in $[a,b]$
- se $f'(x) \leq 0\ \forall x \in (a,b) \implies f$ decrescente in $[a,b]$
- se $f'(x) > 0\ \forall x \in (a,b) \implies f$ strettamente crescente in $[a,b]$
- se $f'(x) < 0\ \forall x \in (a,b) \implies f$ strettamente crescente in $[a,b]$

Dimostrazione: Sia $f' > 0\ \forall x \in (a,b)$ e $x.z \in [a,b] : x < z$ da teorema di Lagrange
$\exists \xi \in (x,z) : f'(\xi) = \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \iff f(z) - f(x) > +f'(\xi)(z-x) > 0 \implies f(z) > f(x)$
$\implies f$ strettamente crescente

Osservazione: Da test di Monotonia I e II:

- f è crescente in $[a,b] \iff f'(x) \geq 0\ \forall x \in (a,b)$
- f è decrescente in $[a,b] \iff f'(x) \leq 0\ \forall x \in (a,b)$

9.11 Teorema di De l'Hôpital

Enunciato: Siano f e g funzioni derivabili in (a,b) con $g \neq 0$ e $g' \neq 0$ in a, b, Allora se:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = g(x) = 0 \text{ oppure } \lim_{x\to a^+} f(x) = g(x) = \pm\infty$$

Allora se:

$$\exists \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}} \implies \exists \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

Dimostrazione: Siano $f(x) \to 0$ per $x \to a^+$ e $g(x) \to 0$ per $c \to a^+$:

- Prolungo per continuità $f(x), g(x)$ in a ponendo $f(a) = 0, g(a) = 0$
- Considero $x_n \to a_+$ per $x \to +\infty$
- Considero $h(x) = f(x_n)g(x) - g(x_n)f(x)$
- Osservo che $h(a) = f(x_n)g(a) - g(x_n)f(a) = 0 = h(x_n) = f(x_n)g(x_n) - g(x_n)f(x_n)$
  $\implies h(a) = h(x_n) = 0$
- $h(x)$ continua in $[a, x_n]$ ed è derivabile in (a, x_n)
- Dalle ultime due $\implies$ ipotesi del teorema di Rolle $\implies \exists \xi_n \in (a, x_n) : h'(\xi_n) = 0$
  - $h'(x) = f(x_n)g'(x) - g(x_n)f'(x) \implies \exists \xi_n \in (a, x_n) : h'(\xi_n) = 0$
  - $\iff f(x_n)g'(\xi_n) - g(x_n)f'(\xi_n) = 0$
  - $\iff f(x_n)g'(\xi_n) = g(x_n)f'(\xi_n)$
  - $\frac{f(x_n)}{g(x_n} = \frac{f'(x_n)}{g'(x_n)} \to$ dato che $x_n \to a^+$ per $n \to +\infty$, dato che $a \leq \xi \leq x_n \implies a \leq \xi \leq a^+$
  - $\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} = l \implies \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x_n)}{g'(x_n)} = l$

Osservazione: il teorema vale anche se $a = -\infty$ oppure ponendo b^- al posto di a^+, con b^- che può essere anche: $b^- = +\infty$

9.12 Teorema del Limite della Derivata

Enunciato: Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua in a e derivabile in (a, b), Allora se:

$$\exists \lim_{x \to a^+} f'(x) \implies \exists f'_+(a) = \lim_{x \to a^+} f'(x)$$

Dimostrazione:

$$\text{Sia } f'(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{0}{0} \overset{H}{=} \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x \to a^+} f'(x) = f'_+(a)$$

9.13 Derivate di Ordini Successivi

Definizione: Sia f derivabile in $\mathbb{I}$. Se esiste la derivata di $f'(x)$ in $x \implies (f')'$ ed è la derivata seconda di f in x. Si nota con f'', $\frac{d^2 f}{dx^2}$. Analogamente definisco le derivate di ordine k per induzione, fino alla derivata k-esima: $f^{(k)}$.
Definizione: Sia $\mathbb{I}$ un intervallo, $\forall k \in \mathbb{N}$, l'insieme $C^k(\mathbb{I})$ è l'insieme delle funzioni k-volte derivabili su $\mathbb{I}$ tali che la derivata k-esima sia continua.
Osservazione: L'esistenza della derivata k-esima implica la continuità della derivata (k-1)-esima.
Definizione: $C^\infty(\mathbb{I}) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k \to$ lo spazio delle funzioni la cui derivata k-esima esiste per ogni k: $e^x, \sin x$...

9.14 Teorema di Darboux

Enunciato: Sia $f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$, derivabile in $\mathbb{I}$, per ogni coppi adi punti $a < b \in \mathbb{I}$, f' assume nell'intervallo (a, b) tutti i valori strettamente compresi tra $f'(a)$ e $f'(b)$.
Conseguenza: f' sotto queste ipotesi o è continua o ha discontinuità di seconda specie
Osservazione: Se $f \in C^1(\mathbb{I})$ si applica il teorema dei valori intermedi

9.15 Derivata Seconda e Convessità

Definizione: Sia $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ è detta convessa se $\forall x, y \in (a, b)$ e $\forall \lambda \in (0, 1)$ vale:

$$(\lambda x + (a - \lambda)y \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

Definizione: Sia $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ è detta concava se $\forall x, y \in (a, b)$ e $\forall \lambda \in (0, 1)$ vale:

$$(\lambda x + (a - \lambda)y \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

9.15.1 Significato Geometrico

f convessa su $[a, b]$ se per ogni intervallo chiuso $[c, d]$ contenuto in $[a, b]$:

$$f(x) \leq r_{c,d} \ \forall x \in [c, d] \text{ (se la funzione sta sotto alla retta secante)}$$

Osservazione: Dalla definizione se f è convessa in $[a, b] \implies f$ è continua su (a,b)
Definizione: Una funzione su un intervallo $\mathbb{I}$ è detta convessa se lo è in ogni intervallo $[a, b] \subset \mathbb{I}$

9.15.2 Teorema della Relazione tra Tangente e Convessità

Enunciato: Sia f convessa in $[a, b]$, se f è derivabile in $x_0 \in [a, b]$, allora: f giace sopra la retta tangente in x_0, ossia: $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \ \forall x \in [a, b]$

9.15.3 Punto di Cambio Concavità

Definizione: $x_0 \in (a, b)$ è un punto di cambio concavità se f è convessa in $[a, x_0)$ e concava in $(x_0, b]$
Osservazione: Da precedente teorema si deduce che un punto di cambio concavità in cui f sia derivabile risulta essere un particolare punto di flesso
Corollario: Se f è derivabile 2 volte in x_0 e x_0 è punto di cambio concavità $\implies f''(x_0) = 0$

Corollario: Sia f derivabile in $[a, b]$ e 2 volte in (a, b) $\implies$ f convessa in $[a, b]$ $\iff$ $f''(x) > 0$ $\forall x \in (a, b)$
Osservazione: Se f è derivabile 2 volte in (a, b) gli eventuali punti di concavità vanno cercati tra le soluzioni di $f''(x) = 0$, ma non tutti i punti dove la derivata seconda si annulla sono di cambio concavità

10 Taylor

10.1 Algebra o-piccolo

Definizione: Date 2 funzioni f e g si dice $f = o(g)$ per $x \to x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ $\iff$ $\lim_{x\to x_0} \frac{f}{g} = 0$.
Se g è infinitesima si dice che f è un infinitesimo di ordine superiore

10.1.1 Proprietà o-piccolo

- $o(f) \pm o(f) = o(f)$
- $o(cf) = co(f) = o(f)$
- $o(f + o(f)) = o(f)$
- $o(o(f)) = o(f)$
- $o(f) \to$ Qualsiasi quantità che tende a 0
- $[o(f)^n] = o(f)^n$
- $fo(g) = o(fg)$
  - **Dimostrazione:** $\lim_{x\to x_0} \frac{fo(g)}{fg} = \lim_{x\to x_0} \frac{o(g)}{g} = 0$

10.1.2 Teorema della Relazione tra o-piccolo e Asintotico

Enunciato: Per $x \to x_0$ abbiamo $f(x) \sim g(x)$ $\iff$ $f(x) = g(x) + o(g(x))$
Dimostrazione:

- Da definizione di asintotico: $\lim_{x\to x_0} \frac{f}{g} = 1$
- Da definizione di o-piccolo: $\lim_{x\to x_0} \frac{f-g}{g} = \lim_{x\to x_0} \frac{f}{g} - 1 = 1 - 1 = 0$

10.2 Approssimazione di Funzioni

Linearizzazione di f ad un intorno di x_0. **Definizione:** La funzione $f : \mathbb{A} \to \mathbb{R}$ si dice differenziabile in x_0 interno ad $\mathbb{A}$ se:

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} : f(x) = f(x_0) + \lambda(x - x_0) + o(x - x_0) \text{ per } x \to x_0$$

Teorema: f è differenziabile in x_0 $\iff$ f è derivabile in x_0, in tal caso $\lambda = f'(x_0)$

10.3 Polinomi di Taylor

In generale:

- se f è continua in $x_0 \in \mathbb{R}$:
  - $f(x) = f(x_0) + o(1)$ per $x \to x_0$
  - $f(x) - f(x_0) = o(1)$
  - $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{1} = 0$
- se f è derivabile in $x_0 \in \mathbb{R}$:
  - $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$ per $x \to x_0$
  - $f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = o(x - x_0)$

- $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0$

- Volgio generalizzare a funzioni n volte derivabili in $x_0 \in \mathbb{R}$:
  - Trovare un polinomio di grado $n > 1$ tale che
  - $f(x) = T_n(x) + o(x - x_0)^n$ per $x \to x_0$

10.3.1 Teorema Formula di Taylor

Enunciato: Sia f definita in un intorno di $x_0 \in \mathbb{R}$ derivabile n volte in x_0

$$\implies \exists! \text{ polinomio } T_n \text{ di grado } \le n : f(x) = T_n + o(x - x_0)^n \text{ per } x \to x_0$$

$$\text{con } T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) \text{ per } k = 0, 1, ..., n \text{ e quindi:}$$

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Dimostrazione: A meno di una traslazione suppongo $x_0 = 0$
$T_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \to$ Polinomio di McLaurin, vale che $T_n^{(k)}(0) = f^k(0)\ \forall k = 0, ..., n$
Si vuol dimostrare che: $f(x) - T_n(x) = o(x^n)$ per $x \to x_0$, ossia: $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-T_n(x)}{x^n} = 0$, già dimostrata per $k = 0, 1$ si vuol dimostrare per $k \ge 2$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - T_n(x)}{x^n} = \frac{0}{0} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{f'(x) - T_n'(x)}{nx^{n-1}} = \frac{0}{0} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{f''(x) - T_n''(x)}{n(n-1)x^{n-2}} = \frac{0}{0} \overset{H}{=} ... \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{f^{(n-1)}(x) - T_n^{(n-1)}(x)}{n!x} = \frac{0}{0}$$

Osservazione: $f^{(n-1)}(x)$ è derivabile in 0, ma in generale non in un intorno di 0, quindi De l'Hopital ha bisogno della derivabilità in un intorno:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0) + T_n^{(n-1)}(0) - T_n^{(n-1)}(x)}{n!x} = \lim_{x\to 0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0)}{n!x} - \lim_{x\to 0} \frac{T_n^{(n-1)}(x) - T_n^{(n-1)}(0)}{n!x} =$$

$$= \frac{1}{n!}\left[\lim_{x\to 0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0)}{x - x_0} - \lim_{x\to 0} \frac{T_n^{(n-1)}(x) - T_n^{(n-1)}(0)}{x - x_0}\right] = \frac{1}{n!}(f^{(n)}(0) - T_n^{(n)}(0)) = 0$$

Corollario (unicità di $T_n(x)$) **:** Suppongo per assurdo che $\exists P_n(x)$ di grado $\le n : \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-P_n(x)}{x^n} = 0$, sottraggo $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-T_n(x)}{x^n}$ a $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-P_n(x)}{x^n} \to \lim_{x\to 0} \left[\frac{f(x)-P_n(x)}{x^n} - \frac{f(x)-T_n(x)}{x^n}\right] =$
$= \lim_{x\to 0} \frac{T_n(x)-P_n(x)}{x^n} = 0$, Assurdo! Solo quando $T_n - P_n = 0 \to T_n = P_n$

10.3.2 Teorema Formula di Taylor con Resto di Lagrange

Enunciato: Sia $f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$, derivabile $n + 1$ volte in $\mathbb{I}$ e sia $T_n(x)$ polinomio di Taylor di f centrato in $x_0 \in \mathbb{I}$ se:

$$x \in \mathbb{I} \implies \exists \xi \in (x_0, x) : f(x) = T_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

10.3.3 Criterio della Derivata n-esima

Sia f derivabile n-volte in x_0 e:
$\begin{cases} f'(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \\ f^{(n)} \neq 0 \end{cases}$ $\to$ da Taylor $f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o(x - x_0)^n$
In particolare se:

- n è pari e $f^{(n)}(x_0) < 0 \implies x_0$ punto di massimo relativo
- n è pari e $f^{(n)}(x_0) > 0 \implies x_0$ punto di minimo relativo
- n è dispari $\implies x_0$ punto a tangente orizzontale

11 Integrali

Data $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, limitata e non negativa è possibile trovare l'area di:

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b, o \le y \le f(x)\}? \ \to A(B)$$

Dato che f è limitata: $\exists m, M : m \le f(x) \le M \ \forall x \in [a, b]$. Proviamo ad approssimare l'area di $A(B)$:

- Considero una porzione ρ di $[a, b]$ in $(n + 1)$ punti ordinati: $a_0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ per qualche $n \in \mathbb{N}^+$
- In ogni sotto-intervallo $[x_{k-1}, x_k], k = 1, ..., n$ prendiamo l'estremo superiore e inferiore di f:

$$m_k = \underset{[x_{k-1},x_k]}{inf}(f(x)),\ M_k = \underset{[x_{k-1},x_k]}{sup}(f(x)),\ m < m_k \le M_k < M$$

- $\forall k = 1, ..., n$ calcolo l'area dei rettangoli approssimati:

$$A_m = m_k(x_k - x_{k-1}),\ A_M = M_k(x_k - x_{k-1})$$

Definizione: Chiamo somma superiore $S_f(\rho) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1})$ la somma dei rettangoli superiori
Definizione: Chiamo somma inferiore $s_f(\rho) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1})$ la somma dei rettangoli inferiori

11.1 Integrazione Secondo Riemann

Definizione: Definiamo somma superiore di Riemann $S_f = inf\{S_f(\rho) : \rho$ qualunque partizione di $[a, b]\}$
Definizione: Definiamo somma inferiore di Riemann $s_f = sup\{s_f(\rho) : \rho$ qualunque partizione di $[a, b]\}$
Osservazione: Tutta la costruzione può essere replicata anche con f negativa
Definizione: Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}, f$ limitata, diremo che f è integrabile secondo Riemann se:

$$s_f = S_f \to \int_a^b f(x)\,dx \text{ ed è detto integrale definito di f su [a,b]}$$

Osservazione: Per costruzione se $f \ge 0$ si ottiene $A(B)) = \int_a^b f(x)\,dx$
Definizione: Definiamo $R(a, b)$ la classe di funzioni Riemann integrabili su (a, b)

11.1.1 Classi di Funzioni Riemann Integrabili

Teorema: Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continua in $[a, b] \implies f$ è integrabile su $[a, b]$, $(f \in R(a, b))$
Teorema: Se f è monotona su $[a, b] \implies f \in R(a, b)$
Osservazione: Non è necessario che f sia continua per essere integrabile
Teorema: Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata, se f ha un numero finito di punti di discontinuità $\implies f \in R(a, b)$
Osservazione: Scrivo $[a, b]$ come unione finita di intervalli chiusi consecutivi, ponendo agli estremi i punti di discontinuità:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \int_{c_2}^{b} f(x)\,dx, \text{ dove } c_1 \text{ e } c_2 \text{ punti di discontinuità}$$

11.2 Proprietà degli Integrali

Proposizione (linearità dell'integrale)**:** Siano $f, g \in R(a, b)$ e $\alpha \in \mathbb{R} \implies f + g, \alpha f \in R(a, b)$, vale:

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Proposizione (additività dell'integrale)**:** Sia $a < c < b$, sia $f \in R(a, b) \iff f \in R(a, c)$ e $f \in R(a, c)$, vale:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

11.2.1 Teorema del Confronto Integrale

Enunciato: Siano $f, g \in R(a,b)$, allora se $f \leq g$ in $[a,b] \implies \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.
Osservazione: In particolare se $f \geq 0$ in $a, b \implies \int_a^b f(x)\,dx \geq 0$
Corollario (disuguaglianza del modulo)**:** Sia $f \in R(a,b) \implies |\int_a^b f(x)\,dx| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$
Dimostrazione: Vale $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$, applico il teorema del confronto integrale:

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx \iff |\int_a^b f(x)\,dx| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

11.2.2 Simmetrie:

Sia $a > 0$ e $f \in R(-a,a)$, allora:

- se f è pari $\implies \int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_{-a}^a f(x)\,dx$
- se f è dispari $\implies \int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$

11.3 Teorema della Media Integrale

Enunciato: Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f \in C^0([a,b])$ allora:

$$\exists c \in [a,b] : \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c) = ⨍_a^b f(x)\,dx$$

11.3.1 Significato Geometrico

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(c)$$

Dimostrazione: se $f \in C^0([a,b]) \implies$ Weierstrass $\exists m, M : m \leq f(x) \leq M\ \forall x \in [a,b]$. Dal teorema del confronto integrale:

$$m(b-a) = \int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx = M(b-a)$$

$$m\cancel{(b-a)} \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M\cancel{(b-a)} \text{ essendo } b-a > 0$$

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M \implies ⨍_a^b f(x)\,dx \in [m, M]$$

Dal teorema dei valori intermedi $\implies Im(f[a,b]) = [m,M] \implies \exists c \in [a,b] : f(c) = ⨍_a^b f(x)\,dx$

11.4 Primitiva di una Funzione

Definizione: Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, una funzione derivabile $\implies F : [a,b] \to \mathbb{R}$ è una primitiva di f se $F'(x) = f(x)\ \forall x \in [a,b]$
Osservazione: Non tutte le funzioni ammettono primitive, infatti avere una primitiva significa avere una derivata. Se f ha un punto di salto, allora non ha primitiva.
Osservazione: Se F è una primitiva allora sarà una primitiva anche $F + c, c \in \mathbb{R}$

11.5 Funzione Integrale

Definizione: Sia $f \in R(a,b)$ la funzione:$I(x) : \int_a^x f(t)\,dt$ è detta funzione integrale
Osservazione: Se $I(x)$ e $H(x)$ sono due funzioni integrali della stessa f, si ha che:

$$I(x) - H(x) = \int_a^x f(t)\,dt - \int_{a'}^x f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{a'} f(t)\,dt = \int_a^{a'} f(t)\,dt = c$$

Ossia I e H differiscono per una costante.
Osservazione: $\forall x, y \in I$ si ha $I(x) - I(y) = \int_y^x f(t)\,dt$

11.6 Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale I

Enunciato: Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}, f \in C^0([a,b])$, la sua funzione integrale $I(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ è derivabile in $[a,b]$ e $I'(x) = f(x)$, ossia è una primitiva di $f(x)$
Dimostrazione: Sia $x_0 \in [a,b]$, scrivo il rapporto incrementale di $I(x)$:

$$\frac{I(x) - I(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0}\left[\int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt\right] = \frac{1}{x - x_0}\left[\int_a^x f(t)\,dt + \int_{x_0}^a f(t)\,dt\right]$$

$$= \frac{1}{x - x_0}\left[\int_{x_0}^x f(t)\,dt\right] = \fint_{x_0}^x f(t)\,dt$$

Da teorema della media integrale

$$\implies \exists c \in [x_0, x] : \fint_{x_0}^x f(t)\,dt = f(c) \implies \frac{I(x) - I(x_0)}{x - x_0} = f(c) = f(x_0)\ c \in [x_0, x]$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{I(x) - I(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} f(c) \text{ se } c \in [x, x_0] \text{ quando } x \to x_0 \implies c \to x_0 \lim_{x \to x_0} f(c) = f(x_0) \text{ è un valore finito}$$

$$\implies \text{esiste finito } \lim_{x \to x_0} \frac{I(x) - I(x_0)}{x - x_0} = I'(x_0) \implies I(x) \text{ derivabile } \forall x_0 \in [a,b]$$

Osservazione: Non è necessario che f sia continua affinché la funzione integrale sia primitiva

11.7 Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale II

Enunciato: Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}, f \in C^0([a,b])$ e sia F una primitiva, allora:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = \big[F(x)\big]_a^b$$

Dimostrazione: Considero la funzione:

$$g(y) = \int_a^y f(x)\,dx - F(y)\ \forall y \in [a,b]. \text{ Da teorema precedente } g(y) \text{ è derivabile in } [a,b] \implies$$

$$g'(y) = f(y) - F'(y) = f(y) - f(y) = 0\ \forall y \in [a,b]. \text{ Da proposizione su derivata nulla su } [a,b]$$

$$\implies g(y) \text{ costante } \forall y \in [a,b]. \text{ Calcolo: } \begin{cases} g(a) = \cancel{\int_a^a f(x)\,dx} - F(a) = -F(a) \\ g(b) = \int_a^b f(x)\,dx - F(b) \end{cases}$$

$$\implies g(a) = g(b) \implies \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

11.7.1 Estensione del Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale

Enunciato: Sia $f \in C^0([a,b])$ e siano $g, h : [\alpha, \beta] \to [a,b]$ derivabili, la funzione:

$$J(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,dt$$

è ben definita su $[\alpha, \beta]$ soddisfa: $J(x) = F(h(x)) - F(g(x))$, quindi $J(x)$ è derivabile su $[\alpha, \beta]$ e

$$J'(x) = f(h(x))h'(x) - f(g(x))g'(x)$$

Definizione: Sia $f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}, f \in C^0([a,b])$, l'insieme di tutte le primitive di $f(x)$ viene chiamato integrale indefinito di f e si denota con:

$$\int f(x)\,dx$$

11.8 Tecniche di Integrazione