

Nombre Alejandro Martinez 2230666

Fecha día mes año

Profesor Samuel Rico Hurtado 2230653

Materia

Institución

Curso

Nota

① Calcule la trayectoria que da la distancia mas corta entre 2 puntos sobre la superficie de un cono invertido, con angulo de vertice  $\alpha$ . Use coordenadas cilindricas.

R//

$$I = \int_{P_1}^{P_2} ds$$

$$ds = |\vec{ds}| = |\nabla s \cdot d\vec{s}|$$

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2}$$

$$\text{Restriccion: } z = r \cot(\alpha)$$

$$dz = dr \cot(\alpha)$$

$$\Rightarrow I = \int_{P_1}^{P_2} \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2 + dr^2 \cot^2(\alpha)}$$

$$= \int_{P_1}^{P_2} \sqrt{c \csc^2(\alpha) + r^2 \theta'^2} dr$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \theta'} (\sqrt{c \csc^2(\alpha) + r^2 \theta'^2}) \right) - \frac{\partial}{\partial \theta} (\sqrt{c \csc^2(\alpha) + r^2 \theta'^2}) = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{2 \ddot{\theta} r^2}{c \csc^2(\alpha) + r^2 \theta'^2} \right) \right) = 0$$

Por lo tanto la anterior expresion es constante y procedemos a despejar theta( $\theta$ )

$$\frac{\dot{\theta}^2 r^2}{\sqrt{c \csc^2(\alpha) + r^2 \theta'^2}} = c \Rightarrow \theta'^2 = \frac{c^2 \csc^2(\alpha)}{r^2 (r^2 - c)}$$

$$\Rightarrow \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int \frac{(c) \csc(\alpha)}{r \sqrt{r^2 - c^2}} dr$$

$$\int \frac{dr}{r \sqrt{r^2 - c^2}} = \frac{1}{c} \cos^{-1} \left( \frac{c}{r} \right) + C$$

$$\Rightarrow \theta - \theta_0 = \csc(\alpha) \int \frac{1}{r \sqrt{r^2 - c^2}} dr$$



$$\theta_r = \theta_0 \pm \csc(\alpha) \cos^{-1}\left(\frac{c}{r}\right)$$

② Calcule el valor mínimo de la integral

$$I = \int_0^1 [(y')^2 + 12xy] dx$$

donde la función  $y(x)$  satisface  $y(0) = 0$  y  $y(1) = 1$

R//

$$I = \int_0^1 [(y')^2 + 12xy] dx$$

$$y(0) = 0 \quad A = (y')^2 + 12xy$$

$$y(1) = 1$$

Aplicando las condiciones de Euler:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial}{\partial y'} (A) \right) - \frac{\partial}{\partial y} (A) = 0$$

$$= 2y' = 12x \Rightarrow \int_{y_0}^{y'} dy' = 6 \int_0^x dx$$

$$\Rightarrow y' = 3x^2 + C_1 \Rightarrow \int_{y_0}^y dy = \int 3x^2 + C_1$$

$$\Rightarrow y = x^3 + C_1 x + C_2 \left. \begin{array}{l} y(0) = 0 \quad C_1 = 0 \\ y(1) = 1 \quad C_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y = x^3$$

reemplazamos en la integral

$$I = \int_0^1 x^3 dx = 1$$

③ Restricción:  $x^2 + y^2 - a^2 = 0 \Rightarrow$  es constante

$$I = \int_{P_1}^{P_2} ds = \int_{P_1}^{P_2} \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2} = \int \sqrt{a^2 + z^2} d\theta$$

Aplicando las condiciones de Euler para  $SI=0$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{z}}{\sqrt{a^2 - z^2}} \right) - 0 = 0 \Rightarrow \frac{\dot{z}}{\sqrt{a^2 - z^2}} = c = \text{cte}$$

$$\Rightarrow \dot{z} = m, \quad m = \frac{\sqrt{a^2 c^2}}{\sqrt{1 - c^2}}$$

$$\Rightarrow \int dz = m \int d\theta \Rightarrow \underline{z = \theta m + c_1}$$

sujeto a:

$$\left. \begin{array}{l} z(0) = 0 \\ z(2\pi) = \pi \end{array} \right\} \begin{array}{l} c_1 = 0 \\ m = 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \underline{z = \theta}$$

④ Un cuerpo se deja caer desde una altura  $h$  y alcanza el suelo en un tiempo  $T$ . La ecuación de movimiento concebiblemente podría tener cualquiera de las formas

$$y = h - g_1 t, \quad y = h - \frac{1}{2} g_2 t^2, \quad y = h - \frac{1}{4} g_3 t^3$$

donde  $g_1, g_2$  y  $g_3$  son constantes apropiadas. Demuestre que la forma correcta es aquella que produce el mínimo valor de la acción.

R//

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) dt$$

$$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{1}{2} m \dot{y}^2 - mgy \right) dt$$



Para hacer  $\delta S = 0 \Rightarrow \mathcal{L}$  debe cumplir

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{y} = -g \Rightarrow y = h - \frac{1}{2} g t^2$$

$$\dot{y}(0) = 0, y(0) = h$$

⑤ El lagrangiano de una partícula de masa  $m$  es

$$\mathcal{L} = \frac{m^2 \dot{x}^4}{12} + m \dot{x}^2 f(x) - f^2(x)$$

donde  $f(x)$  es una función diferenciable de  $x$ . Encuentre la ecuación de movimiento

$$\mathcal{L} = \frac{m^2 \dot{x}^4}{12} + m \dot{x}^2 f(x) - f^2(x)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \frac{1}{3} m^2 \dot{x}^3 + 2m \dot{x} f(x) \quad [1]$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) = m^2 \dot{x}^2 \ddot{x} + 2m \ddot{x} f(x) + 2m \dot{x}^2 \frac{df(x)}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = m \dot{x}^2 \frac{df(x)}{dx} - 2f(x) \frac{df(x)}{dx}$$

Reemplazando en la ecuación de Euler queda:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$$

$$m^2 \dot{x}^2 \ddot{x} + 2m \ddot{x} f(x) + 2m \dot{x}^2 \frac{df(x)}{dx} - m \dot{x}^2 \frac{df(x)}{dx} + 2f(x) \frac{df(x)}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{x} m (\dot{x}^2 m + 2 \dot{x} \frac{df(x)}{dx}) + \frac{df(x)}{dx} (2f(x) + \dot{x}^2 m) = 0$$

Por lo tanto no se puede resolver a priori.

**Pregunta:** ¿Que tipo de relacion describe el termino  $m\dot{x}^2/2$  en un Lagrangiano  $\mathcal{L} = T - V$ ?

⑥  $\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{ab}(q_c) \dot{q}^a \dot{q}^b$   $\det(g_{ab}) \neq 0$   
 $g^{ab} g_{bc} = \delta^a_c$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$$

Calculamos  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^a}$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^a} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}^a} \left( \frac{1}{2} g_{bc} \dot{q}^b \dot{q}^c \right)$$

$$= \frac{1}{2} g_{bc} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^a} (\dot{q}^b \dot{q}^c) = \frac{1}{2} g_{bc} \left( \dot{q}^c \frac{\partial \dot{q}^b}{\partial \dot{q}^a} + \dot{q}^b \frac{\partial \dot{q}^c}{\partial \dot{q}^a} \right)$$

$$= \frac{1}{2} g_{bc} (\dot{q}^c \delta_a^b + \dot{q}^b \delta_a^c)$$

$$= \frac{1}{2} g_{ac} \dot{q}^c + \frac{1}{2} g_{ba} \dot{q}^b$$

cambiamos el indice mudo  $c \rightarrow b$  en el primer termino

$$= \frac{1}{2} g_{ab} \dot{q}^b + \frac{1}{2} g_{ba} \dot{q}^b$$

el tensor metrico es simetrico por lo que:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^a} = g_{ab} \dot{q}^b$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^a} \right) = \frac{d}{dt} (g_{ab} \dot{q}^b)$$

$$= \dot{g}_{ab} \dot{q}^b + g_{ab} \ddot{q}^b$$



haciendo la regla de la cadena para  $g_{ab}$  tenemos

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \right) = \frac{\partial g_{ab}}{\partial q^c} \dot{q}^c \dot{q}^b + g_{ab} \ddot{q}^b$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} &= \frac{1}{2} \dot{q}^b \dot{q}^c \frac{\partial}{\partial \dot{q}^a} (g_{bc}) \\ &= \frac{1}{2} \dot{q}^b \dot{q}^c \frac{\partial g_{bc}}{\partial \dot{q}^a} \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ec. de Lagrange tenemos

$$\frac{\partial g_{ab}}{\partial q^c} \dot{q}^c \dot{q}^b + g_{ab} \ddot{q}^b - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{bc}}{\partial q^a} \dot{q}^b \dot{q}^c = 0$$

multiplicamos todo por  $g^{ad}$

$$\ddot{q}^d + g^{ad} \left( \frac{\partial g_{ab}}{\partial q^c} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{bc}}{\partial q^a} \right) \dot{q}^b \dot{q}^c = 0$$

obtenemos:

$$\ddot{q}^a + \Gamma_{bc}^a \dot{q}^b \dot{q}^c = 0$$