Nombre Alejandro Martinez 2230666
Profesor Samuel Rico Hurtado 2230653
Institución

Fecha día mes año
Materia
Curso Nota

1 Calcule la trayectoria que da la distancia mas corta entre 2 puntos sobre la superficie de un cono invertido, con angulo de vertice α. Use coordenadas cilindricas.

R//

$$I = \int_{P_1}^{P_2} ds \qquad ds = |\vec{ds}| = |\nabla s \cdot d\vec{s}|$$

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2}$$

Restriccion: $z = r\cot(\alpha)$

$dz = dr\cot(\alpha)$

$$\Longrightarrow I = \int_{P_1}^{P_2} \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2 + dr^2\cot^2(\alpha)}$$

$$= \int_{P_1}^{P_2} \sqrt{\csc^2(\alpha) + r^2\dot{\theta}^2}\, dr$$

$$\longrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot\theta}\left(\sqrt{\csc^2(\alpha) + r^2\dot\theta^2}\right)\right) - \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sqrt{\csc^2(\alpha) + r^2\dot\theta^2}\right) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{2\dot\theta r^2}{\sqrt{\csc^2(\alpha) + r^2\dot\theta^2}}\right)\right) = 0$$

Por lo tanto la anterior expresion es constante y procedemos a despejar theta (θ)

$$\frac{\dot\theta r^2}{\sqrt{\csc^2(\alpha) + r^2\dot\theta^2}} = c \Longrightarrow \dot\theta^2 = \frac{c^2\csc^2(\alpha)}{r^2(r^2 - c)}$$

$$\Longrightarrow \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int \frac{(c)\csc(\alpha)}{r\sqrt{r^2 - c^2}}\, dr$$

$$\int \frac{dr}{r\sqrt{r^2 - c^2}} = \frac{1}{c}\cos^{-1}\left(\frac{c}{r}\right) + C$$

$$\Longrightarrow \theta - \theta_0 = \csc(\alpha) \int \frac{1}{r\sqrt{r^2 - c^2}}\, dr$$

$\theta_r = \theta_0 \pm \csc(\alpha)\cos^{-1}\left(\frac{c}{r}\right)$

(2) Calcule el valor minimo de la integral

$$I = \int_0^1 [(y')^2 + 12xy]\,dx$$

donde la funcion $y(x)$ satisface $y(0)=0$ y $y(1)=1$

R//

$$I = \int_0^1 [(y')^2 + 12xy]\,dx$$

$y(0)=0$ $\quad A = (y')^2 + 12xy$

$y(1)=1$

Aplicando las condiciones de Euler:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial}{\partial y'}(A)\right) - \frac{\partial}{\partial y}(A) = 0$$

$$= 2y' = 12x \implies \int_{y_0}^{y'} dy' = 6\int_0^x x\,dx$$

$$\implies y' = 3x^2 + C_1 \implies \int_{y_0}^{y} dy = \int 3x^2 + C_1$$

$$\left.\begin{array}{ll} \implies y = x^3 + C_1 x + C_2 & \\ y(0)=0 & C_1 = 0 \\ y(1)=1 & C_2 = 0 \end{array}\right\} \implies y = x^3$$

reemplazamos en la integral:

$$I = \int_0^1 x^3\,dx = 1$$

3 Restriccion: $x^2+y^2-a=0 \Rightarrow$ es constante

$$I=\int_{P_1}^{P_2} ds=\int_{P_1}^{P_2}\sqrt{dr^2+r^2d\theta^2+dz^2}=\int\sqrt{a^2+\dot{z}^2}\,d\theta$$

Aplicando las condiciones de Euler para $\delta I=0$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{z}}{\sqrt{a^2-\dot{z}^2}}\right)-0=0 \Rightarrow \frac{\dot{z}}{\sqrt{a^2+\dot{z}^2}}=c=cte$$

$$\Rightarrow \dot{z}=m \quad , \quad m=\frac{\sqrt{a^2c^2}}{\sqrt{1-c^2}}$$

$$\Rightarrow \int dz=m\int d\theta \Longrightarrow \underbrace{z=\theta m+c_1}$$

sujeto a:

$$\left.\begin{array}{l} z(0)=0 \\ z(w)=\pi \end{array}\right\} \begin{array}{l} c_1=0 \\ m=1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{z=\theta}}$$

4 Un cuerpo se deja caer desde una altura h y alcanza el suelo en un tiempo T. La ecuacion de movimiento concebiblemente podria tener cualquiera de las formas

$$y=h-g_1t \quad , \quad y=h-\frac{1}{2}g_2t^2 \quad , \quad y=h-\frac{1}{4}g_3t^3$$

donde g_1, g_2 y g_3 son constantes apropiadas. Demuestre que la forma correcta es aquella que produce el minimo valor de la accion.

R//

$$S=\int_{t_1}^{t_2}\mathcal{L}(q_i,\dot{q}_i,t)\,dt$$

$$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{1}{2}m\dot{y}^2-mgy\right)dt$$

para hacer $\delta S = 0 \Rightarrow \mathcal{L}$ debe cumplir

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$$

$$\Rightarrow \dot{y} = -y \Longrightarrow \boxed{y = h - \frac{1}{2} g t^2}$$

$$\dot{y}(0) = 0 , \quad y(0) = h$$

5 El lagrangiano de una particula de masa m es

$$\mathcal{L} = \frac{m^2 \dot{x}^4}{12} + m \dot{x}^2 f(x) - f^2(x)$$

donde f(x) es una funcion diferenciable de x. Encuentre la ecuacion de movimiento

R//
$$\mathcal{L} = \frac{m^2 \dot{x}^4}{12} + m \dot{x}^2 f(x) - f^2(x)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \frac{1}{3} m^2 \dot{x}^3 + 2m \dot{x} f(x)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) = m^2 \dot{x}^2 \ddot{x} + 2m \ddot{x} f(x) + 2m \dot{x}^2 \frac{df(x)}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = m \dot{x}^2 \frac{df(x)}{dx} - 2 f(x) \frac{df(x)}{dt}$$

Reemplazando en la ecuacion de Euler queda:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$$

$$m^2 \dot{x}^2 \ddot{x} + 2m \ddot{x} f(x) + 2m \dot{x}^2 \frac{df(x)}{dt} - m \dot{x}^2 \frac{df(x)}{dt} + 2 f(x) \frac{df(x)}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{x} m \left(\dot{x}^2 m + 2\dot{x} \frac{df(x)}{dt} \right) + \frac{df(x)}{dt} \left(2f(x) + \dot{x}^2 m \right) = 0$$

Nombre Fecha día mes año
Profesor Materia
Institución Curso Nota

Por lo tanto no se puede resolver a priori.

Pregunta: ¿Que tipo de relacion describe el termino $m\dot{x}^2 r(x)$ en un Lagrangiano $\mathcal{L} = T - V$?

⑥ $$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{ab}(q_c)\,\dot{q}^a \dot{q}^b \qquad \det(g_{ab}) \neq 0$$

$$g^{ab} g_{bc} = \delta^a{}_c$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$$

calculamos $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^a}$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^a} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}^a}\left(\frac{1}{2} g_{bc}\,\dot{q}^b \dot{q}^c\right)$$

$$= \frac{1}{2} g_{bc} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^a}\left(\dot{q}^b \dot{q}^c\right) = \frac{1}{2} g_{bc}\left(\dot{q}^c \frac{\partial \dot{q}^b}{\partial \dot{q}^a} + \dot{q}^b \frac{\partial \dot{q}^c}{\partial \dot{q}^a}\right)$$

$$= \frac{1}{2} g_{bc}\left(\dot{q}^c \delta^b{}_a + \dot{q}^b \delta^c{}_a\right)$$

$$= \frac{1}{2} g_{ac}\,\dot{q}^c + \frac{1}{2} g_{ba}\,\dot{q}^b$$

cambiamos el indice mudo $c \to b$ en el primer termino

$$= \frac{1}{2} g_{ab}\,\dot{q}^b + \frac{1}{2} g_{ba}\,\dot{q}^b$$

el tensor metrico es simetrico por lo que:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^a} = g_{ab}\,\dot{q}^b$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^a}\right) = \frac{d}{dt}\left(g_{ab}\,\dot{q}^b\right)$$

$$= \dot{g}_{ab}\,\dot{q}^b + g_{ab}\,\ddot{q}^b$$

haciendo la regla de la cadena para g_{ab} tenemos

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^a}\right) = \frac{\partial g_{ab}}{\partial q^c}\dot{q}^c\dot{q}^b + g_{ab}\ddot{q}^b$$

$$\frac{\partial L}{\partial q^a} = \frac{1}{2}\dot{q}^b\dot{q}^c\frac{\partial}{\partial q^a}(g_{bc})$$

$$= \frac{1}{2}\dot{q}^b\dot{q}^c\frac{\partial g_{bc}}{\partial q^a}$$

Sustituyendo en la ec. de Lagrange tenemos

$$\frac{\partial g_{ab}}{\partial q^c}\dot{q}^c\dot{q}^b + g_{ab}\ddot{q}^b - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{bc}}{\partial q^a}\dot{q}^b\dot{q}^c = 0$$

multiplicamos todo por g^{ad}

$$\ddot{q}^d + g^{ad}\left(\frac{\partial g_{ab}}{\partial q^c} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{bc}}{\partial q^a}\right)\dot{q}^b\dot{q}^c = 0$$

obtenemos:

$$\ddot{q}^a + \Gamma^a_{bc}\dot{q}^b\dot{q}^c = 0$$