《算法设计与分析》

1-算法分析基础 (Fundementals)

杨启哲

上海师范大学信机学院计算机系

2023 年 9 月 9 日

主要内容

- 从 Fibonacci 数列开始

- 算法分析基础

主要内容

- 从 Fibonacci 数列开始
- 算法分析基础

Fibonacci 数列

12 世纪，意大利数学家斐波那契（Leonardo Fibonacci）如下描述了兔子生长的数目:

- 第一个月初有一对刚出生的兔子。
- 第二个月后（第三个月初）它们可以生育。
- 每月每对可生育的兔子会诞生下一对新兔子。
- 兔子永不死去。

Leonardo Fibonacci(1170-1250)

Fibonacci 数列

12 世纪，意大利数学家斐波那契（Leonardo Fibonacci）如下描述了兔子生长的数目：

- 第一个月初有一对刚出生的兔子。
- 第二个月后（第三个月初）它们可以生育。
- 每月每对可生育的兔子会诞生下一对新兔子。
- 兔子永不死去。

Leonardo Fibonacci(1170-1250)

易得每个月的兔子数量是如下的数列：$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$

Fibonacci 数列

12 世纪，意大利数学家斐波那契（Leonardo Fibonacci）如下描述了兔子生长的数目：

- 第一个月初有一对刚出生的兔子。
- 第二个月后（第三个月初）它们可以生育。
- 每月每对可生育的兔子会诞生下一对新兔子。
- 兔子永不死去。

Leonardo Fibonacci(1170-1250)

易得每个月的兔子数量是如下的数列：$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$

斐波那契数列 (Fibonacci sequence)

斐波那契数列 F_n 的定义如下:

$$F_n = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ 1 & n = 1 \\ F_{n-1} + F_{n-2} & n \geqslant 2 \end{cases}$$

Fibonacci 数列

如何计算 Fibonacci 数列?

如何计算 Fibonacci 数列?

通项公式?

Fibonacci 数列通项公式

$$F_n = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot [(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n]$$

如何计算 Fibonacci 数列?

通项公式?

Fibonacci 数列通项公式

$$F_n = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot [(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n]$$

计算机如何计算一个无理数，甚至是无理数的幂?

如何计算 Fibonacci 数列?

通项公式?

Fibonacci 数列通项公式

$$F_n = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot [(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n]$$

计算机如何计算一个无理数，甚至是无理数的幂?

我们可以让计算机取迭代从而避免无理数的计算。

第一个算法

第一个算法：$\mathrm{Fib}_1(n)$

输入： 正整数 n

输出： 第 n 个 Fibonacci 数 F_n

if n=0 **then**
    return 0
else if n=1 **then**
    return 1
end if
return $\mathrm{Fib}_1(n-1)+\mathrm{Fib}_1(n-2)$

三个问题

面对一个算法，我们需要考虑如下三个问题:

1. 这个算法是正确的么?
2. 这个算法需要耗费多少时间?
3. 有更快的算法么?

三个问题

上海师范大学 Shanghai Normal University

面对一个算法，我们需要考虑如下三个问题:

1. **这个算法是正确的么?**
2. 这个算法需要耗费多少时间?
3. 有更快的算法么?

三个问题

面对一个算法，我们需要考虑如下三个问题：

1. 这个算法是正确的么？
2. **这个算法需要耗费多少时间？**
3. 有更快的算法么？

$\mathrm{Fib}_1(n)$ 的运行时间

令 $T(n)$ 为运行 $\mathrm{Fib}_1(n)$ 所需要执行的基本操作次数。

- 当 $n < 2$ 时，可以发现该算法执行的操作次数非常少，因此此时 $T(n) \leqslant 2$。
- 当 $n \geqslant 2$ 时，$\mathrm{Fib}_1(n)$ 执行的基本操作次数为

$$T(n) = T(n-1) + T(n-2) + 3$$

$\mathrm{Fib}_1(n)$ 的运行时间

令 $T(n)$ 为运行 $\mathrm{Fib}_1(n)$ 所需要执行的基本操作次数。

- 当 $n < 2$ 时，可以发现该算法执行的操作次数非常少，因此此时 $T(n) \leqslant 2$。
- 当 $n \geqslant 2$ 时，$\mathrm{Fib}_1(n)$ 执行的基本操作次数为

$$T(n) = T(n-1) + T(n-2) + 3$$

$T(n)$ 有多大?

$\text{Fib}_1(n)$ 的运行时间

令 $T(n)$ 为运行 $\text{Fib}_1(n)$ 所需要执行的基本操作次数。

- 当 $n < 2$ 时，可以发现该算法执行的操作次数非常少，因此此时 $T(n) \leqslant 2$。
- 当 $n \geqslant 2$ 时，$\text{Fib}_1(n)$ 执行的基本操作次数为

$$T(n) = T(n-1) + T(n-2) + 3$$

$T(n)$ 有多大?

很不幸，$T(n)$ 比斐波那契数列的第 n 项还要大！（$T(n) \geqslant F_n$，它是一个指数算法！）

$\mathrm{Fib}_1(n)$ 的运行时间

令 $T(n)$ 为运行 $\mathrm{Fib}_1(n)$ 所需要执行的基本操作次数。

- 当 $n < 2$ 时，可以发现该算法执行的操作次数非常少，因此此时 $T(n) \leqslant 2$。
- 当 $n \geqslant 2$ 时，$\mathrm{Fib}_1(n)$ 执行的基本操作次数为

$$T(n) = T(n-1) + T(n-2) + 3$$

$T(n)$ 有多大?

很不幸，$T(n)$ 比斐波那契数列的第 n 项还要大！（$T(n) \geqslant F_n$，它是一个指数算法！）

如果用该算法计算 F_{400}，则需要执行 $T(400) \approx 2^{277}$ 次基本操作！

目前最快的超级计算机Frontier每秒可以执行约 10^{18} 次基本操作, 这意味着即使在这台机器上 $\mathrm{Fib}_1(400)$ 也要耗时 2^200 秒，而地球诞生至今也不过经过了 2^{60} 秒。

三个问题

面对一个算法，我们需要考虑如下三个问题：

1. 这个算法是正确的么？
2. 这个算法需要耗费多少时间？
3. **有更快的算法么？**

第二个算法

第二个算法：$\mathrm{Fib}_2(n)$

输入: 正整数 n

输出: 第 n 个 Fibonacci 数 F_n

```
if n=0 then
    return 0
end if
Define Array f[0, ..., n]
f[0] ← 0, f[1] ← 1
for i ← 2 to n do
    f[i] ← f[i − 1] + f[i − 2]
end for
return f[n]
```

关于 $\mathrm{Fib}_2(n)$

- 这个算法是正确的么?

关于 $\mathrm{Fib}_2(n)$

- 这个算法是正确的么？　　显然正确

关于 $\mathrm{Fib}_2(n)$

- 这个算法是正确的么？　　显然正确

- 这个算法需要耗费多少时间？

关于 $\mathrm{Fib}_2(n)$

- 这个算法是正确的么？　　显然正确

- 这个算法需要耗费多少时间？
  由于存储下来了之前的结果，在 $\mathrm{Fib}_2(n)$ 中，循环仅执行了 $n-1$ 次。因此 $\mathrm{Fib}_2(n)$ 的基本操作次数关于 n 是线性的。

关于 $\mathrm{Fib}_2(n)$

- 这个算法是正确的么？　　显然正确

- 这个算法需要耗费多少时间？
  由于存储下来了之前的结果，在 $\mathrm{Fib}_2(n)$ 中，循环仅执行了 $n-1$ 次。因此 $\mathrm{Fib}_2(n)$ 的基本操作次数关于 n 是线性的。
  $\mathrm{Fib}_2(n)$ 是一个多项式时间的算法，我们可以很快的计算出 F_{400} 了！

关于 $\mathrm{Fib}_2(n)$

- 这个算法是正确的么?　　显然正确

- 这个算法需要耗费多少时间?
  由于存储下来了之前的结果，在 $\mathrm{Fib}_2(n)$ 中，循环仅执行了 $n-1$ 次。因此 $\mathrm{Fib}_2(n)$ 的基本操作次数关于 n 是线性的。
  $\mathrm{Fib}_2(n)$ 是一个多项式时间的算法，我们可以很快的计算出 F_{400} 了!

- 有更快的算法么?

运用矩阵的一些运算，我们可以发现 F_1, F_2, F_0 满足下列等式

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \end{bmatrix}$$

同样地，我们有：

$$\begin{bmatrix} F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^2 \cdot \begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \end{bmatrix}$$

因此，我们可以求得相应的一般式：

$$\begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n \cdot \begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \end{bmatrix}$$

第三个算法

令 $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 为相应的矩阵，如果我们可以求得 X^n，则可以很快的求出相应的 F_n。

如何求 X^n?

第三个算法

令 $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 为相应的矩阵，如果我们可以求得 X^n，则可以很快的求出相应的 F_n。

如何求 X^n？

二分！通过不断的二分，我们可以只用 $O(\log n)$ 次矩阵乘法就可以求得 X^n。

$$X^{23}$$
$$X \times (X^{11})^2$$
$$X \times (X^5)^2$$
$$X \times (X^2)^2$$
$$(X)^2$$

二分计算 X^{23} 的流程

第三个算法：$\mathrm{Fib}_3(n)$

输入： 正整数 n

输出： 第 n 个 Fibonacci 数 F_n

1: **Define** $X \leftarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $Y \leftarrow \begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \end{bmatrix}$

2: **Calculate:** $X \leftarrow X^n$

3: $Y \leftarrow X$

4: **return** Y_{11}

关于 $\mathrm{Fib}_3(n)$

根据我们之前的讨论，$\mathrm{Fib}_3(n)$ 只需要进行 $O(\log n)$ 次算术操作并可以获得 F_n，那么我们是否可以说它是一个更快的算法，并且相比于 $\mathrm{Fib}_2(n)$ 提升了指数级的效率?

关于 $\mathrm{Fib}_3(n)$

根据我们之前的讨论，$\mathrm{Fib}_3(n)$ 只需要进行 $O(\log n)$ 次算术操作并可以获得 F_n，那么我们是否可以说它是一个更快的算法，并且相比于 $\mathrm{Fib}_2(n)$ 提升了指数级的效率?

并不可以!

关于 $\mathrm{Fib}_3(n)$

根据我们之前的讨论，$\mathrm{Fib}_3(n)$ 只需要进行 $O(\log n)$ 次算术操作并可以获得 F_n，那么我们是否可以说它是一个更快的算法，并且相比于 $\mathrm{Fib}_2(n)$ 提升了指数级的效率？

并不可以！

不同的基本操作次数

尽管看上去 $\mathrm{Fib}_3(n)$ 只用了对数次算术操作，但是与 $\mathrm{Fib}_2(n)$ 相比:

- $\mathrm{Fib}_2(n)$ 的基本操作是加法。
- $\mathrm{Fib}_3(n)$ 的基本操作是乘法。

乘法操作和加法操作一样快么？

重新考虑两个数的加法，事实上如果两个长度为 n 的二进制数相加，我们需要进行 $O(n)$ 次基本操作。

$$
\begin{array}{r}
1\;1\;0\;1\;0\;0\;1\;0\;1\;1 \\
+\quad 1\;1\;0\;1\;1\;1\;0\;0\;1\;0 \\
\hline
1\;1\;0\;1\;0\;1\;1\;1\;1\;0\;1
\end{array}
$$

图: 二进制数相加举例

重新考虑两个数的加法，事实上如果两个长度为 n 的二进制数相加，我们需要进行 $O(n)$ 次基本操作。

$$
\begin{array}{r}
1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1 \\
+\quad 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0 \\
\hline
1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1
\end{array}
$$

图: 二进制数相加举例

因此对于 $Fib_2(n)$ 来说，其需要进行 $O(n^2)$ 次基本操作。

$\mathrm{Fib}_2(n)$ 与 $\mathrm{Fib}_3(n)$

而对于 $\mathrm{Fib}_3(n)$ 来说，其需要进行 $O(\log n)$ 次乘法操作，假设一次乘法操作需要 $M(n)$ 次基本操作，则 $\mathrm{Fib}_3(n)$ 的基本操作次数为$O(M(n)\log n)$。

而对于 $\mathrm{Fib}_3(n)$ 来说，其需要进行 $O(\log n)$ 次乘法操作，假设一次乘法操作需要 $M(n)$ 次基本操作，则 $\mathrm{Fib}_3(n)$ 的基本操作次数为 $O(M(n)\log n)$。

所以是否存在：

$$M(n)\log n < n^2?$$

而对于 $\mathrm{Fib}_3(n)$ 来说，其需要进行 $O(\log n)$ 次乘法操作，假设一次乘法操作需要 $M(n)$ 次基本操作，则 $\mathrm{Fib}_3(n)$ 的基本操作次数为$O(M(n)\log n)$。

所以是否存在：

$$M(n)\log n < n^2?$$

这取决于 $M(n)$ 是否能比 $O(n^2)$ 更快，即我们能否以少于 $O(n^2)$ 次基本操作的代价完成两个长度为 n 的二进制数的乘法。

而对于 $\mathrm{Fib}_3(n)$ 来说，其需要进行 $O(\log n)$ 次乘法操作，假设一次乘法操作需要 $M(n)$ 次基本操作，则 $\mathrm{Fib}_3(n)$ 的基本操作次数为$O(M(n)\log n)$。

所以是否存在：

$$M(n)\log n < n^2?$$

这取决于 $M(n)$ 是否能比 $O(n^2)$ 更快，即我们能否以少于 $O(n^2)$ 次基本操作的代价完成两个长度为 n 的二进制数的乘法。

我们将在后续的课程给出答案。

总结

总结

- 了解清楚我们所面对的问题。

运行时间

如何来衡量算法的运行时间?

总结

- 了解清楚我们所面对的问题。
- 给出一个解决方案，也就是相应的算法。

运行时间

如何来衡量算法的运行时间？

总结

总结

- 了解清楚我们所面对的问题。
- 给出一个解决方案，也就是相应的算法。
- 对于给出的算法，我们需要考虑如下三个问题：
  1. 这个算法是正确的么？
  2. 这个算法需要耗费多少时间？
  3. 有更快的算法么？

总结

总结

- 了解清楚我们所面对的问题。
- 给出一个解决方案，也就是相应的算法。
- 对于给出的算法，我们需要考虑如下三个问题：
  1. 这个算法是正确的么？
  2. 这个算法需要耗费多少时间？
  3. 有更快的算法么？

运行时间

如何来衡量算法的运行时间？

主要内容

Shanghai Normal University 上海师范大学

- 从 Fibonacci 数列开始
- 算法分析基础

算法分析基础

算法时间估计

算法时间估计

如果仅关注于一个算法对于某个输入运行了多少秒是没有意义的，因为即使考虑的是同一个问题，算法的运行时间会受到各个因素的影响，比如：

- 硬件上来说，CPU、内存、缓存等都会影响算法的运行时间。
- 软件上来说，使用的语言、编译器、操作系统等也都会影响算法的运行时间。
- 随着科技的发展，计算机的速度只会运行的越来越快。

算法时间估计

上海师范大学 Shanghai Normal University

如果仅关注于一个算法对于某个输入运行了多少秒是没有意义的，因为即使考虑的是同一个问题，算法的运行时间会受到各个因素的影响，比如：

- 硬件上来说，CPU、内存、缓存等都会影响算法的运行时间。
- 软件上来说，使用的语言、编译器、操作系统等也都会影响算法的运行时间。
- 随着科技的发展，计算机的速度只会运行的越来越快。

独立性

因此在考察算法的运行时间时，我希望我们得到的结果是独立的，这是指：

- 独立于所使用的语言、编译器、操作系统等。
- 独立于科技的发展。

算法时间估计

我们需要一些数学的方法。回想在计算 Fibonacci 数的例子里，我们看到，通过一些基本运算的次数来估计算法的运行时间是很有必要的。

算法时间估计

我们需要一些数学的方法。回想在计算 Fibonacci 数的例子里，我们看到，通过一些基本运算的次数来估计算法的运行时间是很有必要的。

算法的运行时间

一个算法的运行时间可以理解为：

$$\text{运行时间} = \sum_{\text{所有的操作}} \text{操作次数} \times \text{该操作所需的时间}$$

算法时间估计

上海师范大学 Shanghai Normal University

我们需要一些数学的方法。回想在计算 Fibonacci 数的例子里，我们看到，通过一些基本运算的次数来估计算法的运行时间是很有必要的。

算法的运行时间

一个算法的运行时间可以理解为：

$$\text{运行时间} = \sum_{\text{所有的操作}} \text{操作次数} \times \text{该操作所需的时间}$$

但我们有必要去考虑所有的操作么？

一个例子 (I)

上海师范大学 Shanghai Normal University

1-SUM

输入: 数组 $a[n]$

输出: 数组中元素为 0 的个数

```
count ← 0
for i ← 1 to n do
    if a[i]==0 then
        count ← count + 1
    end if
end for
return count
```

一个例子 (I)

Shanghai Normal University

1-SUM

输入： 数组 $a[n]$

输出： 数组中元素为 0 的个数

```
count ← 0
for i ← 1 to n do
    if a[i]==0 then
        count ← count + 1
    end if
end for
return count
```

在这样一个算法中，有如下的操作：变量声明，变量赋值，小于判断，相等判断，加法

一个例子 (II)

1-SUM 的运行次数

因此对于上述算法中的任一次运行，可能的操作次数为：

- 变量声明：2 次
- 变量赋值：2 次
- 小于判断：$n+1$ 次
- 相等判断：n 次
- 加法：$n \sim 2n$ 次

我们只需要估计其中一个基本运算甚至某些度量，保证其他运算至多是它的常数倍即可。

1-SUM 的运行次数

因此对于上述算法中的任一次运行，可能的操作次数为:

- 变量声明：2 次
- 变量赋值：2 次
- 小于判断：$n+1$ 次
- 相等判断：n 次
- 加法：$n \sim 2n$ 次

但我们可以看到，整个算法进行了 n 次循环，任何一个操作执行的次数都是 n 的常数倍，因此我们只需要考虑循环的次数即可。

一个例子 (II)

1-SUM 的运行次数

因此对于上述算法中的任一次运行，可能的操作次数为：

- 变量声明：2 次
- 变量赋值：2 次
- 小于判断：$n+1$ 次
- 相等判断：n 次
- 加法：$n \sim 2n$ 次

但我们可以看到，整个算法进行了 n 次循环，任何一个操作执行的次数都是 n 的常数倍，因此我们只需要考虑循环的次数即可。

我们只需要估计其中一个基本运算甚至某些度量，保证其他运算至多是它的常数倍即可。

关注大规模的输入

再次回顾计算 Fibonacci 数列的例子，即使是 $\mathrm{Fib}_1(n)$，在计算很小的输入时我们也能很快的获得答案，效率甚至会比 $\mathrm{Fib}_2(n), \mathrm{Fib}_3(n)$ 都要更快。

第一个算法：$\mathrm{Fib}_1(n)$

输入： 正整数 n

输出： 第 n 个 Fibonacci 数 F_n

if n=0 **then**
    return 0
else if n=1 **then**
    return 1
end if
return $\mathrm{Fib}_1(n-1) + \mathrm{Fib}_1(n-2)$

第二个算法：$\mathrm{Fib}_2(n)$

输入： 正整数 n

输出： 第 n 个 Fibonacci 数 F_n

if n=0 **then**
    return 0
end if
Define Array $f[0, \ldots, n]$
$f[0] \leftarrow 0, f[1] \leftarrow 1$
for $i \leftarrow 2$ to n **do**
    $f[i] \leftarrow f[i-1] + f[i-2]$
end for
return $f[n]$

第三个算法：$\mathrm{Fib}_3(n)$

输入： 正整数 n

输出： 第 n 个 Fibonacci 数 F_n

Define $X \leftarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $Y \leftarrow \begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \end{bmatrix}$
Calculate: $X \leftarrow X^n$
$Y \leftarrow X$
return Y_{11}

关注大规模的输入

再次回顾计算 Fibonacci 数列的例子，即使是 $\mathrm{Fib}_1(n)$，在计算很小的输入时我们也能很快的获得答案，效率甚至会比 $\mathrm{Fib}_2(n), \mathrm{Fib}_3(n)$ 都要更快。

第一个算法：$\mathrm{Fib}_1(n)$

输入：正整数 n

输出：第 n 个 Fibonacci 数 F_n

```
if n=0 then
    return 0
else if n=1 then
    return 1
end if
return Fib_1(n−1) + Fib_1(n−2)
```

第二个算法：$\mathrm{Fib}_2(n)$

输入：正整数 n

输出：第 n 个 Fibonacci 数 F_n

```
if n=0 then
    return 0
end if
Define Array f[0,...,n]
f[0] ← 0, f[1] ← 1
for i ← 2 to n do
    f[i] ← f[i−1] + f[i−2]
end for
return f[n]
```

第三个算法：$\mathrm{Fib}_3(n)$

输入：正整数 n

输出：第 n 个 Fibonacci 数 F_n

- **Define** $X \leftarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $Y \leftarrow \begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \end{bmatrix}$
- **Calculate:** $X \leftarrow X^n$
- $Y \leftarrow X$
- **return** Y_{11}

因此，小规模输入的运行时间没有意义，我们要考虑的时大规模输入的情况下算法的运行时间。

估计算法运行时间的考虑因素

- 我们关注的衡量标准是独立的，与机器等无关。
- 我们需要关注的是相对的、近似的时间，而不是绝对时间。
- 我们需要关注的是大规模输入的情况，而不是小规模输入的情况。

输入规模 (Input Size)

比较下述两个算法:

算法 First

输入: 数组 $a[n], a[j] = j, 1 \leqslant j \leqslant n$

输出: 数组中元素为 0 的个数

```
sum ← 0
for i ← 1 to n do
    sum ← sum + a[i]
end for
return sum
```

算法 Second

输入: 正整数 n

输出: $\sum_{j=1}^{n} j$

```
sum ← 0
for i ← 1 to n do
    sum ← sum + i
end for
return sum
```

	First	Second
输入规模	n	$\log n$
运行时间	n	n
相互关系	线性	指数

输入规模 (Input Size)

不同的输入规模对于算法的运行时间有着不同的影响!

一些常用的输入规模的测度

- 排序和搜索问题：数组或表中元素的个数。
- 图问题：图中顶点的个数和边的个数。
- 计算几何；点、边、线段或者多边形等的数目。
- 矩阵运算：输入矩阵的维数。
- 数论算法和密码学：用来表示输入数的位数 (一般为 $\log n$)

最好运行时间，平均运行时间和最坏运行时间

在有序数组中搜索相应的元素

给定一个有序数组 $A[1, \ldots, n]$ 和一个元素 x，请问 x 是否在数组中？存在的话请返回相应的下标，否则请返回 -1。

在有序数组中搜索相应的元素

给定一个有序数组 $A[1, \ldots, n]$ 和一个元素 x，请问 x 是否在数组中？存在的话请返回相应的下标，否则请返回 -1。

我们下面提供两个不同的搜索算法，一个即从头开始搜索，我们称为线性搜索 (Linear Search)，另一个则是二分搜索 (Binary Search)。

一个搜索的例子

线性搜索 LinearSearch

输入: 有序数组 $a[1,\ldots,n]$ 和元素 X

输出: x 在数组中的下标,不存在则返回 -1

```
j ← 1
while j < n and x ≠ a[j] do
    j ← j + 1
end while
if x = a[j] then
    return j
else
    return −1
end if
```

一个搜索的例子

线性搜索 LinearSearch

输入: 有序数组 $a[1,...,n]$ 和元素 X

输出: x 在数组中的下标,不存在则返回 -1

while $j < n$ **and** $x \neq a[j]$ **do**
    $j \leftarrow j + 1$
end while
if $x = a[j]$ **then**
    return j
else
    return -1
end if

二分搜索 BinarySearch

输入: 有序数组 $a[1,...,n]$ 和元素 X

输出: x 在数组中的下标,不存在则返回 -1

$low \leftarrow 1,\ high \leftarrow n,\ j \leftarrow 0$
while $low \leqslant high$ **and** $j = 0$ **do**
    $mid \leftarrow \lfloor (low + high)/2 \rfloor$
    if $x = a[mid]$ **then**
        $j \leftarrow mid$
    else if $x < a[mid]$ **then**
        $high \leftarrow mid - 1$
    else $low \leftarrow mid + 1$
    end if
end while
return j

特殊的实例

考察如下的一个 n 元数组：

$$1, 2, 3, \ldots, n-1, n$$

寻找不同的 x

可以看到，在面对不同的 x 的时候，有的时候 LinearSearch 会更快些，有的时候 BinarySearch 会更快些。

特殊的实例

上海师范大学 Shanghai Normal University

考察如下的一个 n 元数组：

$$1, 2, 3, \ldots, n-1, n$$

寻找不同的 x

- $x = 1$ 时，LinearSearch 需要执行 1 次基本操作，BinarySearch 需要执行 $\log n$ 次基本操作。

可以看到，在面对不同的 x 的时候，有的时候 LinearSearch 会更快些，有的时候 BinarySearch 会更快些。

特殊的实例

上海师范大学 Shanghai Normal University

考察如下的一个 n 元数组:

$$1, 2, 3, \ldots, n-1, n$$

寻找不同的 x

- $x = 1$ 时，LinearSearch 需要执行 1 次基本操作，BinarySearch 需要执行 $\log n$ 次基本操作。
- $x = n$ 时，LinearSearch 需要执行 n 次基本操作，BinarySearch 需要执行 $\log n$ 次基本操作。

可以看到，在面对不同的 x 的时候，有的时候 LinearSearch 会更快些，有的时候 BinarySearch 会更快些。

特殊的实例

考察如下的一个 n 元数组:

$$1, 2, 3, \ldots, n-1, n$$

寻找不同的 x

- $x = 1$ 时，LinearSearch 需要执行 1 次基本操作，BinarySearch 需要执行 $\log n$ 次基本操作。
- $x = n$ 时，LinearSearch 需要执行 n 次基本操作，BinarySearch 需要执行 $\log n$ 次基本操作。
- $x = n/2$ 时，LinearSearch 需要执行 $n/2$ 次基本操作，BinarySearch 需要执行 1 次基本操作。

特殊的实例

上海师范大学 Shanghai Normal University

考察如下的一个 n 元数组:

$$1, 2, 3, \ldots, n-1, n$$

寻找不同的 x

- $x = 1$ 时，LinearSearch 需要执行 1 次基本操作，BinarySearch 需要执行 $\log n$ 次基本操作。
- $x = n$ 时，LinearSearch 需要执行 n 次基本操作，BinarySearch 需要执行 $\log n$ 次基本操作。
- $x = n/2$ 时，LinearSearch 需要执行 $n/2$ 次基本操作，BinarySearch 需要执行 1 次基本操作。

可以看到，在面对不同的 x 的时候，有的时候 LinearSearch 会更快些，有的时候 BinarySearch 会更快些。

定义 1 **[最好运行时间].**

算法的最好运行时间指的是在所有输入规模为 n 的输入中，时间最短的那个。

最好运行时间，平均运行时间和最坏运行时间

定义 1 **[最好运行时间].**

算法的最好运行时间指的是在所有输入规模为 n 的输入中，时间最短的那个。

定义 2 **[最坏运行时间].**

算法的最小运行时间指的是在所有输入规模为 n 的输入中，时间最长的那个。

最好运行时间，平均运行时间和最坏运行时间

上海师范大学 Shanghai Normal University

定义 1 **[最好运行时间].**

算法的最好运行时间指的是在所有输入规模为 n 的输入中，时间最短的那个。

定义 2 **[最坏运行时间].**

算法的最小运行时间指的是在所有输入规模为 n 的输入中，时间最长的那个。

定义 3 **[平均运行时间].**

算法的平均运行时间指的是在所有输入规模为 n 的输入中，算法的平均运行时间。

搜索的例子

在 LinearSearch 和 BinarySearch 中，算法运行的最好时间，最坏时间、平均时间都分别是什么？

	LinearSearch	BinarySearch
最好运行时间		
最坏运行时间		
平均运行时间		

搜索的例子

在 LinearSearch 和 BinarySearch 中，算法运行的最好时间，最坏时间、平均时间都分别是什么？

	LinearSearch	BinarySearch
最好运行时间	1	1
最坏运行时间		
平均运行时间		

搜索的例子

在 LinearSearch 和 BinarySearch 中，算法运行的最好时间，最坏时间、平均时间都分别是什么？

	LinearSearch	BinarySearch
最好运行时间	1	1
最坏运行时间	n	$\log n$
平均运行时间		

在 LinearSearch 和 BinarySearch 中，算法运行的最好时间，最坏时间、平均时间都分别是什么？

	LinearSearch	BinarySearch
最好运行时间	1	1
最坏运行时间	n	$\log n$
平均运行时间	$O(n)$	$O(\log n)$

搜索的例子

在 LinearSearch 和 BinarySearch 中，算法运行的最好时间，最坏时间、平均时间都分别是什么？

	LinearSearch	BinarySearch
最好运行时间	1	1
最坏运行时间	n	$\log n$
平均运行时间	$O(n)$	$O(\log n)$

平均时间的分析需要一些概率论的知识，我们这里先不给出详细的证明。

渐进符号

阶的增长

前面我们讨论到，其实我们只对算法在大规模的输入上的运行时间感兴趣。那么假设一个算法的运行时间 $T(n)$ 满足:

$$T(n) = 2n^3 + 192832n^2 + 1223n + 322\log n + 293239$$

我们是否需要关注后面那些复杂的项数?

前面我们讨论到，其实我们只对算法在大规模的输入上的运行时间感兴趣。那么假设一个算法的运行时间 $T(n)$ 满足：

$$T(n) = 2n^3 + 192832n^2 + 1223n + 322\log n + 293239$$

我们是否需要关注后面那些复杂的项数？

不需要！ 当 n 足够大的时候，后面都将比 n^3 小，因此我们会有 $T(n) < 3n^3$。

上海师范大学 Shanghai Normal University

前面我们讨论到，其实我们只对算法在大规模的输入上的运行时间感兴趣。那么假设一个算法的运行时间 $T(n)$ 满足:

$$T(n) = 2n^3 + 192832n^2 + 1223n + 322\log n + 293239$$

我们是否需要关注后面那些复杂的项数?

不需要! 当 n 足够大的时候，后面都将比 n^3 小，因此我们会有 $T(n) < 3n^3$。

因此对应这样一个算法，它的运行时间主要是由 n^3 这一项决定的，甚至在很多时候我们可以忽略掉这一项上的系数。(尽管有的时候非常重要) 换句话说，n^3 是可以用来衡量该算法运行时间的一个指标，即某种渐近运行时间，我们也称之为它的阶。

上海师范大学 Shanghai Normal University

定义 4 **[大 O 符号].**

令 $f(n), g(n)$ 是两个从自然数集合到非负实数集合的两个函数，如果存在一个自然数 n_0 和常数 $c > 0$，使得

$$\forall n \geqslant n_0,\ f(n) \leqslant cg(n)$$

则称 $f(n)$ 是 $O(g(n))$ 的。

因此如果 $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)}$ 存在，那么:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} \neq \infty \text{ 蕴含着} f(n) = O(g(n))$$

定义 4 **[大 O 符号].**

令 $f(n), g(n)$ 是两个从自然数集合到非负实数集合的两个函数，如果存在一个自然数 n_0 和常数 $c > 0$，使得

$$\forall n \geqslant n_0,\ f(n) \leqslant cg(n)$$

则称 $f(n)$ 是 $O(g(n))$ 的。

因此如果 $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)}$ 存在，那么:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} \neq \infty \text{ 蕴含着} f(n) = O(g(n))$$

补充说明

大 O 符号不严格的说，可以视为提供了某种上界，即 f 的大小不会比 g 的某个常数倍大。

一些例子 (I)

上海师范大学 Shanghai Normal University

例 5.

1. $n^2 + 3n + 1 = O(n^2)$.
2. $\log n^2 = O(\log n)$.
3. $\log n! = O(n \log n)$.
4. $2n^{0.0001} + 3(\log n)^{100} = O(n^{0.0001})$.
5. $2^n + 100n^{100} = O(2^n)$.
6. $n^n + 2^n + 4n^5 = O(2^{n \log n})$.
7. $n^2 + 3n + 1 = O(n^3)$.

定义 6 **[大 Ω 符号].**

令 $f(n), g(n)$ 是两个从自然数集合到非负实数集合的两个函数，如果存在一个自然数 n_0 和常数 $c > 0$，使得

$$\forall n \geqslant n_0,\ f(n) \geqslant cg(n)$$

则称 $f(n)$ 是 $\Omega(g(n))$ 的。

因此如果 $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)}$ 存在，那么:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} \neq 0 \text{ 蕴含着} f(n) = \Omega(g(n))$$

定义 6 **[大 Ω 符号].**

令 $f(n), g(n)$ 是两个从自然数集合到非负实数集合的两个函数，如果存在一个自然数 n_0 和常数 $c > 0$，使得

$$\forall n \geqslant n_0,\ f(n) \geqslant cg(n)$$

则称 $f(n)$ 是 $\Omega(g(n))$ 的。

因此如果 $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)}$ 存在，那么:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} \neq 0 \text{ 蕴含着} f(n) = \Omega(g(n))$$

补充说明

大 Ω 符号不严格的说，可以视为提供了某种下界，即 f 的大小不会比 g 的某个常数倍小。

一些例子 (II)

上海师范大学 Shanghai Normal University

例 7.

1. $n^2 + 3n + 1 = \Omega(n^2)$.
2. $\log n^k = \Omega(\log n)$.
3. $\log n! = \Omega(n \log n)$.
4. $n! = \Omega(2^n)$.

例 7.

1. $n^2 + 3n + 1 = \Omega(n^2)$.
2. $\log n^k = \Omega(\log n)$.
3. $\log n! = \Omega(n \log n)$.
4. $n! = \Omega(2^n)$.

由定义可知：$f = O(g) \Leftrightarrow g = \Omega(f)$

一些例子 (II)

例 7.

1. $n^2 + 3n + 1 = \Omega(n^2)$.
2. $\log n^k = \Omega(\log n)$.
3. $\log n! = \Omega(n \log n)$.
4. $n! = \Omega(2^n)$.

由定义可知：$f = O(g) \Leftrightarrow g = \Omega(f)$

是否存在 f, g，使得 $f = O(g)$ 并且 $f = \Omega(g)$?

定义 8 **[大 Θ 符号].**

令 $f(n), g(n)$ 是两个从自然数集合到非负实数集合的两个函数，如果存在一个自然数 n_0 和常数 $c_1, c_2 > 0$，使得

$$\forall n \geqslant n_0,\ c_1 g(n) \leqslant f(n) \leqslant c_2 g(n)$$

则称 $f(n)$ 是 $\Theta(g(n))$ 的。

因此如果 $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)}$ 存在，那么：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c \text{ 蕴含着} f(n) = \Theta(g(n))$$

其中 c 是一个大于 0 的常数。

定义 8 **[大 Θ 符号].**

令 $f(n), g(n)$ 是两个从自然数集合到非负实数集合的两个函数，如果存在一个自然数 n_0 和常数 $c_1, c_2 > 0$，使得

$$\forall n \geqslant n_0,\ c_1 g(n) \leqslant f(n) \leqslant c_2 g(n)$$

则称 $f(n)$ 是 $\Theta(g(n))$ 的。

因此如果 $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)}$ 存在，那么：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c \text{ 蕴含着} f(n) = \Theta(g(n))$$

其中 c 是一个大于 0 的常数。

显然,$f(n) = \Theta(g(n))$ 当且仅当 $f(n) = O(g(n))$，$f(n) = \Omega(g(n))$。

例 9.

1. $n^2 + 3n + 1 = \Theta(n^2)$.
2. $\log n^2 = \Theta(\log n)$.
3. $\log n! = \Theta(n \log n)$.
4. $2n^{0.0001} + 3(\log n)^{100} = \Theta(n^{0.0001})$.
5. $2^n + 100n^{100} = \Theta(2^n)$.
6. $n^n + 2^n + 4n^5 = \Theta(2^{n \log n})$.

定义 10 **[小 o 符号].**

令 $f(n), g(n)$ 是两个从自然数集合到非负实数集合的两个函数，如果存在一个自然数 n_0 和常数 $c > 0$，使得

$$\forall n \geqslant n_0,\ f(n) < cg(n)$$

则称 $f(n)$ 是 $o(g(n))$ 的。

因此如果 $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)}$ 存在，那么:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \text{ 蕴含着} f(n) = o(g(n))$$

定义 10 **[小 o 符号].**

令 $f(n), g(n)$ 是两个从自然数集合到非负实数集合的两个函数，如果存在一个自然数 n_0 和常数 $c > 0$，使得

$$\forall n \geqslant n_0,\ f(n) < cg(n)$$

则称 $f(n)$ 是 $o(g(n))$ 的。

因此如果 $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)}$ 存在，那么：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \text{ 蕴含着} f(n) = o(g(n))$$

补充说明

小 o 符号不严格的说，可以视为提供了某种更大的关系，即相比于 g 在 n 足够大时可以忽略掉 f 的大小。

一些例子 (IV)

小 O 符号可以更清楚的表示上界的关系。比如在之前的例子中，我们有:

- $n^2 + 3n + 1 = O(n^2)$.
- $n^2 + 3n + 1 = O(n^3)$.

一些例子 (IV)

小 O 符号可以更清楚的表示上界的关系。比如在之前的例子中，我们有:

- $n^2 + 3n + 1 = O(n^2)$.
- $n^2 + 3n + 1 = O(n^3)$.

但事实上，我们可以更清楚的表示这种关系，即:

$$n^2 + 3n + 1 = o(n^3) \text{ 但是} n^2 + 3n + 1 \neq o(n^2)$$

一些例子 (IV)

小 O 符号可以更清楚的表示上界的关系。比如在之前的例子中，我们有:

- $n^2 + 3n + 1 = O(n^2)$.
- $n^2 + 3n + 1 = O(n^3)$.

但事实上，我们可以更清楚的表示这种关系，即:

$$n^2 + 3n + 1 = o(n^3) \text{ 但是} n^2 + 3n + 1 \neq o(n^2)$$

例 11.

1. $\log n! = o(\log n)$.
2. $n \log n = o(n)$.

同样的，我们可以更精确的来描述一些下界的关系。

定义 12 **[小 ω 符号].**

令 $f(n), g(n)$ 是两个从自然数集合到非负实数集合的两个函数，如果存在一个自然数 n_0 和常数 $c > 0$，使得

$$\forall n \geqslant n_0,\ f(n) > cg(n)$$

则称 $f(n)$ 是 $o(g(n))$ 的。

因此如果 $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)}$ 存在，那么：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty \text{ 蕴含着} f(n) = \omega(g(n))$$

一些运算技巧

运算技巧

1. $\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2} = \Theta(n^2)$。
2. $\sum_{j=0}^{n} c^j = \frac{c^{n+1}-1}{c-1} = \Theta(c^n)$。
3. $f(x)$ 递增时 $\int_{m-1}^{n} f(x)dx \leqslant \sum_{j=m}^{n} f(j) \leqslant \int_{m}^{n+1} f(x)dx$。
4. $f(x)$ 递减时 $\int_{m}^{n+1} f(x)dx \leqslant \sum_{j=m}^{n} f(j) \leqslant \int_{m-1}^{n} f(x)dx$。
5. $\sum_{j=1}^{n} j^k = \Theta(n^{k+1})$。
6. $H_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} = \Theta(\ln n) = \Theta(\log n)$。
7. $\sum_{j=1}^{n} \log j = \Theta(n \log n)$

定义 13 **[复杂性类].**

令 R 时复杂性函数集合上定义的一个等价关系:

$$fRg \text{ 当且仅当} f(n) = \Theta(g(n))$$

由该等价关系导出的等价性类被称为复杂性类。

定义 13 **[复杂性类].**

令 R 时复杂性函数集合上定义的一个等价关系:

$$fRg \text{ 当且仅当} f(n) = \Theta(g(n))$$

由该等价关系导出的等价性类被称为复杂性类。

我们也用 $f \prec g$ 表示 $f(n) = o(g(n))$，则有:

$$1 \prec \log\log n \prec \log n \prec n^{0.75} \prec n \prec n\log n \prec n^{1.5} \prec 2^n \prec n! \prec 2^{2^n} \cdots$$

上海师范大学 Shanghai Normal University

假设一台电脑每秒可以执行 10^6 次基本操作，那么我们可以估计出不同阶下的运行速度：

阶	名称	算法实例	$n = 1000$	$n = 2000$
1	常数	返回数组某个位置的元素	立即	立即
$\log n$	对数	二分搜索	立即	立即
n	线性	线性搜索	立即	立即
$n \log n$	线性对数 (linearithmic)	归并排序	立即	立即
n^2	平方 (quadratic)	选择排序	~ 1 秒	~ 2 秒
2^n	指数 (exponential)	汉诺威塔 (Hanoi)	几乎永久	几乎永久

空间复杂性

我们前面关注的都是算法的时间复杂性:

- 对于运行时间来说，越快越好。

空间复杂性

我们前面关注的都是算法的时间复杂性:

- 对于运行时间来说，越快越好。

同样，算法也有空间复杂性，对其消耗的空间进行分析:

- 对于运行空间来说，越少越好。

空间复杂性

我们前面关注的都是算法的时间复杂性:

- 对于运行时间来说，越快越好。

同样，算法也有空间复杂性，对其消耗的空间进行分析:

- 对于运行空间来说，越少越好。

空间复杂性与时间复杂性的关系

空间复杂性 $\leqslant$ 时间复杂性

练习 (I)

f 和 g 满足什么关系， $f = O(g), f = \Omega(g), f = \Theta(g), f = o(g), f = \omega(g)$?

1. $f(n) = n - 100,\ g(n) = n - 200$
2. $f(n) = n^{1/2},\ g(n) = n^{2/3}$
3. $f(n) = 100n + \log n,\ g(n) = n + (\log n)^2$
4. $f(n) = \log 2n,\ g(n) = \log 3n$
5. $f(n) = 10 \log n,\ g(n) = \log n^2$
6. $f(n) = \sqrt{n},\ g(n) = (\log n)^{10}$
7. $f(n) = (\log n)^{\log n},\ g(n) = \frac{n}{\log n}$
8. $f(n) = n^{1/2},\ g(n) = 5^{\log_2 n}$
9. $f(n) = \sum_{i=1}^{n} i^k,\ g(n) = n^{k+1}$

练习 (II)

请分析下列算法的时间复杂性:

算法 1.9: Count2

输入: 正整数 n

输出: 第 5 步的执行次数 count

1: $\text{count} \leftarrow 0$
2: **for** $i \leftarrow 1$ to n **do**
3:     $m \leftarrow \lfloor \frac{n}{i} \rfloor$
4:     **for** $j \leftarrow 1$ to m **do**
5:         $\text{count} \leftarrow \text{count} + 1$
6:     **end for**
7: **end for**
8: **return** count

练习 (III)

请分析下列算法的时间复杂性:

算法 1.10: Count3

输入: $n = 2^k$, k 为正整数

输出: 第 5 步的执行次数 count

```
1: count ← 0
2: i ← 1
3: while i ⩽ n do
4:     for j ← 1 to i do
5:         count ← count + 1
6:     end for
7:     i ← 2i
8: end while
9: return count
```

练习 (IV)

请分析下列算法的时间复杂性:

算法 1.11: Count4

输入: $n = 2^k$, k 为正整数

输出: 第 4 步的执行次数 count

1: $\text{count} \leftarrow 0$
2: **while** $n \geqslant 1$ **do**
3:     **for** $j \leftarrow 1$ to n **do**
4:         $\text{count} \leftarrow \text{count} + 1$
5:     **end for**
6:     $n \leftarrow \frac{n}{2}$
7: **end while**
8: **return** count

练习 (V)

请分析下列算法的时间复杂性:

算法 1.11: Count5

输入: $n = 2^{2^k}$, k 为正整数

输出: 第 6 步的执行次数 count

```
1: count ← 0
2: for i ← 1 to n do
3:     j ← 2
4:     while j ⩽ n do
5:         j ← j²
6:         count ← count + 1
7:     end while
8: end for
9: return count
```

总结

本节内容

- 算法的时间估计, 输入规模
- 最好运行时间，平均运行时间和最坏运行时间
- 渐进符号

总结

上海师范大学 Shanghai Normal University

本节内容

- 算法的时间估计, 输入规模
- 最好运行时间，平均运行时间和最坏运行时间
- 渐进符号

第一周作业

本周作业和编程作业都已经发布到课程主页上。

截至时间：2023 年 9 月 18 日周一晚上 12:00。