上海师范大学 Shanghai Normal University

《线性代数》

行列式 (Determinants)

杨启哲

上海师范大学信机学院计算机系

2024 年 5 月 11 日

主要内容

上海师范大学 Shanghai Normal University

- 什么是行列式
- 行列式的性质
- 行列式的计算
- 行列式更多的性质
- 行列式的正式定义
- 行列式的展开

什么是行列式

什么是行列式?

第一次学行列式的时候，碰到的两个问题:

- 什么是行列式?
- 行列式有什么用?

国内的教材

上海师范大学 Shanghai Normal University

目　　录

学到的知识

上海师范大学
Shanghai Normal University

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{(A)} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$A_i = \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{detA_1}{detA}$$

$$x_2 = \frac{detA_2}{detA}$$

$$\vdots$$

$$x_n = \frac{detA_n}{detA}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^2 a_{11} A_{11} + \cdots + (-1)^{n+1} a_{1n} A_{1n}$$

$$= (-1)^2 a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{n+1} a_{1n} \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

但是

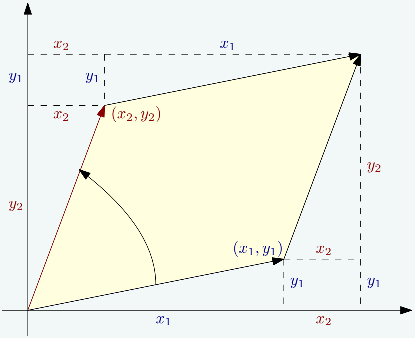
为什么?

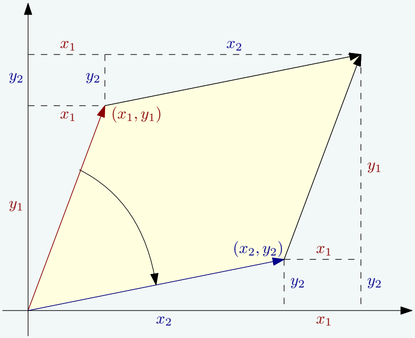
上海师范大学 Shanghai Normal University

我们以 2×2 的行列式为例：

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

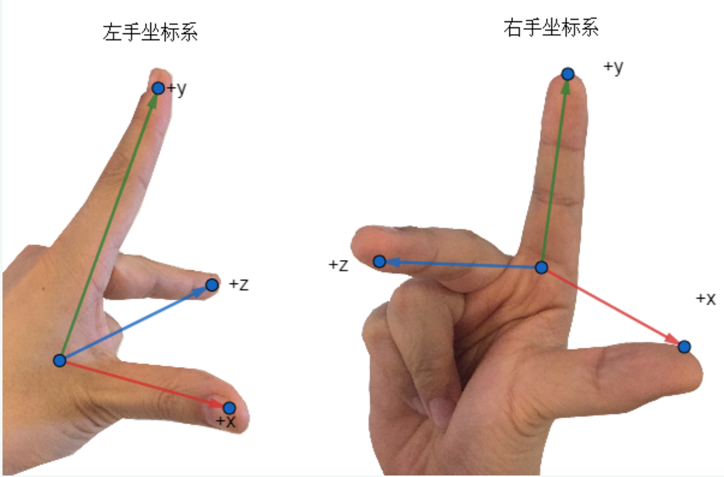
向量 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) 围成的平行四边形的有向面积





三维空间的有向体积

左手系 VS 右手系



n 维空间的有向体积

对于 n 维空间 n 个向量构成的多面体:

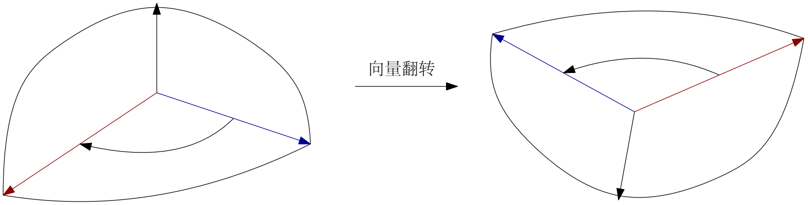
$$a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_j, \cdots a_n, \quad \text{记其体积为 } D(a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_j, \cdots a_n)$$

我们将其两个向量对换位置:

$$a_1, \cdots, {\color{red}a_j}, \cdots, {\color{red}a_i}, \cdots a_n, \quad \text{记其体积为 } D(a_1, \cdots, {\color{red}a_j}, \cdots, {\color{red}a_i}, \cdots a_n)$$

我们应当有:

$$D(a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_j, \cdots a_n) = -D(a_1, \cdots, {\color{red}a_j}, \cdots, {\color{red}a_i}, \cdots a_n)$$



行列式的一个前瞻

行列式想求取的是:

在 n 维空间的 n 个向量张成的平行六面体 (n-dimensional parallelepiped) 的有向体积。

但行列式的值，存储了对应方阵的很多信息。

- (Pivot Formula)，我们将证明 $\det A$ 和 A 中所有首元的乘积的绝对值相同。
- (Big Formula), 我们将说明 $\det A$ 是 $n!$ 个不同元素组合之和。
- (Cofactor Expansion)，我们将证明 $\det A$ 是 A 中一些子行列式的线性组合。

从而我们可以得到很多矩阵的性质。

1. (Invertibility)，A 可逆当且仅当 $\det A \neq 0$。
2. (Rank)，A 的秩等于 A 的行列式的非零子式的个数。
3. (Cramer Rules)，我们可以用行列式来求解线性方程组。
4. (Eigenvalues)，这是我们接下来要讨论的内容。
5. $\cdots$

令 $A = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$ 是一个 $n \times n$ 的矩阵，方阵 A 的行列式 $\det(A)$是由 $a_1, \cdots, a_n$ 在 n 维空间长成的平行六面体 (n-dimensional parallelepiped) 的有向体积。

我们希望通过其的基本性质最终给出行列式对应的值，即最终一步一步得到 $\det(A)$ 相当于关于 $a_1, \cdots, a_n$ 的函数:

$$\det(A) = D(a_1, \cdots, a_n)$$

行列式的性质

对于 $\mathbb{R}^n$ 的如下 n 个向量:

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \cdots, \quad e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

则我们有:

$$D(e_1, \cdots, e_n) = 1$$

这也就是

- $\det(I) = 1$。

对于 n 个 $\mathbb{R}^n$ 的向量

$$a_1, \cdots, a_n$$

我们有:

$$D(a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_j, \cdots a_n) = -D(a_1, \cdots, a_j, \cdots, a_i, \cdots a_n)$$

这也就是:

- 交换两列改变行列式的符号:

$$\det(\begin{bmatrix} a_1 \cdots a_i \cdots a_j \cdots a_n \end{bmatrix}) = -\det(\begin{bmatrix} a_1 \cdots a_j \cdots a_i \cdots a_n \end{bmatrix})$$

行列式的值应当对于每列都是线性的:

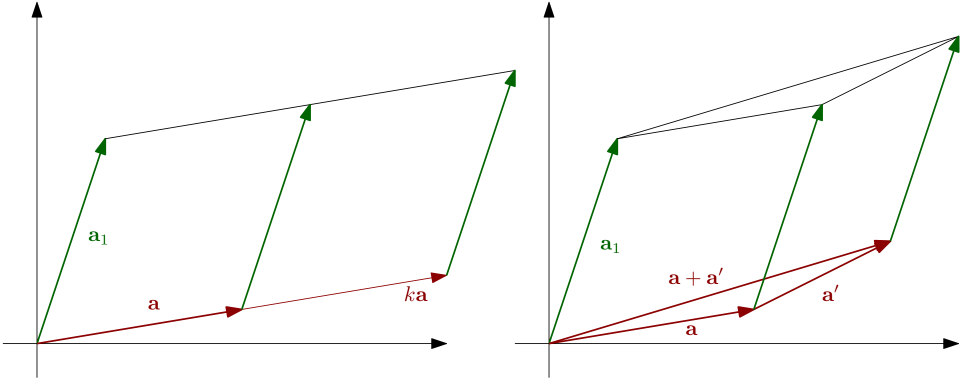
- $D(a_1, \cdots, ca_i, \cdots, a_n) = cD(a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_n)$。
- $D(a_1, \cdots, a_i + a_i', \cdots, a_n) = D(a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_n) + D(a_1, \cdots, a_i', \cdots, a_n)$。

这也就是:

- 行列式的值对于每一列都是满足线性的:

$$\det(\begin{bmatrix} a_1 \cdots (ca_i + da_i') \cdots a_n \end{bmatrix}) = c\det(\begin{bmatrix} a_1 \cdots a_i \cdots a_n \end{bmatrix}) + d\det(\begin{bmatrix} a_1 \cdots a_i' \cdots a_n \end{bmatrix})$$

基本性质 (III) 在 2 维的几何解释



记 S_1 是 a, a_1 张成的平行四边形的有向面积，S_2 是 ka, a_1 张成的平行四边形的有向面积,S_3 是 a', a_1 张成的平行四边形的有向面积,S_4 是 $a+a', a_1$ 张成的平行四边形的有向面积，则:

$$S_2 = kS_1$$

$$S_4 = S_1 + S_3$$

我们的目标

回顾我们目前所做的，对于 n 维空间的 n 个向量 $a_1, \cdots, a_n$，我们希望定义一个函数 D, 满足下列性质:

- $D(e_1, \cdots, e_n) = 1$
- $D(a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_j, \cdots a_n) = -D(a_1, \cdots, a_j, \cdots, a_i, \cdots a_n)$
- $D(a_1, \cdots, ca_i + da_i', \cdots, a_n) = cD(a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_n) + dD(a_1, \cdots, a_i', \cdots, a_n)$

我们希望说明:

D是存在的且唯一的

而这就是我们想要的行列式，即:

$$\det(A) = \det(\begin{bmatrix} a_1 \cdots a_n \end{bmatrix}) = D(a_1, \cdots, a_n)$$

我们也会将其记作:

$$|A| \text{ 或者 } \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

在接下来的内容中，我们将分不加区分的使用 $n \times n$ 的矩阵 A 和其 n 个对应的列向量 $a_1, \cdots, a_n$。

定理 1.

- 如果 A 存在一个列向量是 0，则 $\det(A) = 0$。
- 如果 A 存在两列向量相同，则 $\det(A) = 0$。
- 如果 A 存在一列是其他列的倍数，则 $\det(A) = 0$。

证明. 不妨假设 A 的第一列是 $a_1 = \mathbf{0}$，则我们有:

$$D(a_1', \cdots, a_n) = D(a_1 + a_1', \cdots, a_n) = D(a_1, \cdots, a_n) + D(a_1', \cdots, a_n)$$

从而:

$$\det(A) = D(a_1, \cdots, a_n) = D(\mathbf{0}, \cdots, a_n) = 0$$

Shanghai Normal University

证明.

- 如果 A 存在两列向量相同，不妨记为 $a_i = a_j$，则我们有:

  $$D(a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_j, \cdots a_n) = -D(a_1, \cdots, a_j, \cdots, a_i, \cdots a_n) = -D(a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_j, \cdots a_n)$$

  从而:

  $$\det(A) = D(a_1, \cdots, a_n) = 0$$

- 如果 A 存在一列是其他列的倍数，不妨记为 $a_i = ca_j$，则我们有:

  $$\det(A) = D(a_1, \cdots, ca_j, \cdots, a_j, \cdots a_n) = cD(a_1, \cdots, a_j, \cdots, a_j, \cdots, a_n) = 0$$

$\square$

定理 2.

如果 $\mathrm{rank}(A) < n$, 则 $\det(A) = 0$。

证明. 由 $\mathrm{rank}(A) < n$ 可知 $a_1, \cdots, a_n$ 是线性相关的，即存在 $1 \leqslant i_0 < i_1 < \cdots < i_k \leqslant n$ 和 $c_1, \ldots, c_k$ 使得:

$$a_{i_0} = c_1 a_{i_1} + \cdots c_k a_{i_k}$$

从而我们有:

$$\begin{aligned}
\det(A) =& D(a_1, \cdots, a_{i_0}, \cdots, a_n) \\
=& D(a_1, \cdots, c_1 a_{i_1} + \cdots c_k a_{i_k}, \cdots, a_n) \\
=& \sum_{j=1}^{k} c_j D(a_1, \cdots, a_{i_j}, \cdots, a_{i_j}, \cdots, a_n) \\
=& 0
\end{aligned}$$

□

定理 3.
将矩阵的某些列的线性组合加到另一列上 (其他列不改变)，行列式的值保持不变。

证明. 利用:

- $D(a_1, \cdots, ca_j, \cdots, a_j, \cdots a_n) = cD(a_1, \cdots, a_j, \cdots, a_j, \cdots, a_n) = 0$

可知:

$$D(a_1, \cdots, a_i + \sum_{i=1}^{n} c_i a_i, \cdots, a_n) = D(a_1, \cdots, a_n)$$

$\square$

定理 4.

令 A 是一个 $n \times n$ 的对角矩阵:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

则我们有:

$$\det(A) = a_1 a_2 \cdots a_n$$

定理 5.

令 A 是一个 $n \times n$ 的三角矩阵 (triangluar matrix):

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{或者} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

则我们有:

$$\det(A) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

阶段总结

- 行列式的几何意义。
- 行列式需要满足的基本性质。
- 由这些性质衍生的一些性质。

我们的目标

考虑一个 $\mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ 的函数 D，其满足下列三个性质:

- $D(e_1,\cdots,e_n)=1$
- $D(a_1,\cdots,a_i,\cdots,a_j,\cdots a_n)=-D(a_1,\cdots,a_j,\cdots,a_i,\cdots a_n)$
- $D(a_1,\cdots,ca_i+da_i',\cdots,a_n)=cD(a_1,\cdots,a_i,\cdots,a_n)+dD(a_1,\cdots,a_i',\cdots,a_n)$

我们希望说明，这样的函数D 存在而且唯一，从而其就是对应的行列式 $\det(A)$。

我们的思路

为了证明这样的 D 存在且唯一，我们希望：

- 通过 D 的性质，我们尝试计算出对于任意的 $n \times n$ 的矩阵 A，其对应的函数值。
- 如果对于每个 $n \times n$ 的矩阵 A，我们都能计算出一个唯一的函数值，那么我们就可以说明 D 是存在且唯一的。

行列式的计算

令 $i, j \in [n]$，我们将第 j 列的 l 倍加到第 i 列上，我们有：

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} + la_{1j} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} + la_{nj} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

则我们有：

$$\det(A') = \det(A)$$

列交换

令 $i, j \in [n]$，我们将第 j 列和第 i 列互换，我们有：

$$A' = \begin{Bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{Bmatrix}$$

则我们有：

$$\det(A') = -\det(A)$$

列乘法

令 $i \in [n]$ 和 $l \in \mathbb{R}$，我们将第 i 列乘以 l 倍，我们有:

$$A' = \begin{Bmatrix} a_{11} & \cdots & la_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & la_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{Bmatrix}$$

则我们有:

$$\det(A') = l\det(A)$$

计算任意 $n \times n$ 矩阵的行列式的值

计算行列式 A 的值

1. 我们对 A 进行初等列变换，或者等价地说，对 A^T 进行初等行变换。最终我们可以得到一个 A^T 的行阶梯形 R。从而 R^T 是一个下三角矩阵。令其对角线的元素为 $d_1, \cdots, d_n$，则我们有：
$$\det(R^T) = d_1 \cdots d_n$$
2. 我们根据 A 变成 R^T 的过程，注意到这个过程中得每一步都是列变换，从而根据前面得结论一步步反推得到 $\det(A)$ 的值。

定理 6.

$\mathrm{rank}(A) = n$ 当且仅当 $\det(A) \neq 0$。

考察 2×2 的矩阵:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

我们有:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & d - \frac{cb}{a} \end{bmatrix}$$

从而:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & d - \frac{cb}{a} \end{vmatrix} = a \cdot (d - \frac{cb}{a}) = ad - bc$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -4 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 8 & 3 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -4 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & 8 & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & -2 & \frac{7}{2} \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

则我们有:

$$\det\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-4) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -2 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 2 \cdot (-4) \cdot \frac{1}{2} = -4$$

一些例子 (III)

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -\frac{5}{2} & -4 & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ 5 & -\frac{5}{2} & -4 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -\frac{5}{2} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{3}{2} & -\frac{7}{5} & -\frac{9}{10} \\ 5 & -\frac{5}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -\frac{5}{2} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{3}{2} & -\frac{7}{5} & 0 \\ 5 & -\frac{5}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

从而:

$$\det(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{bmatrix}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -\frac{5}{2} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{3}{2} & -\frac{7}{5} & 0 \\ 5 & -\frac{5}{2} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-\frac{5}{2}) \cdot (-\frac{7}{5}) \cdot 0 = 0$$

$$\begin{bmatrix} a & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & a \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a} & 0 & \cdots & a \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a} & 0 & \cdots & a-\frac{1}{a} \end{bmatrix}$$

从而:

$$\det(\begin{bmatrix} a & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & a \end{bmatrix}) = \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a} & 0 & \cdots & a-\frac{1}{a} \end{vmatrix} = a^{n-1}(a-\frac{1}{a}) = a^n - a^{n-2}$$

回顾一下我们对 $\det A$ 的计算:

1. 根据我们的理解，$\det A$ 如果存在，一定要满足三条基本性质。
2. 我们推得了关于 $\det A$ 的一些其他性质。
3. 通过上述的讨论，我们知道了初等列变换对 $\det A$ 的影响。
4. 而通过初等列变换，我们可以将 A 转变成一个下三角矩阵 L.
5. 我们知道 $\det(L)$ 是多少，从而根据 3 和 4，我们可以从 $\det L$ 得到 $\det(A)$ 的值。

上述的过程说明了 $\det A$ 的存在性

- 我们描绘了行列式想计算的内容

  在 n 维空间的 n 个向量张成的平行六面体 (n-dimensional parallelepiped) 的有向体积
- 由此出发，我们假定了 $\det(A)$ 该满足的三条性质
  1. $D(e_1, \cdots, e_n) = 1$
  2. $D(a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_j, \cdots a_n) = -D(a_1, \cdots, a_j, \cdots, a_i, \cdots a_n)$
  3. $D(a_1, \cdots, ca_i + da_i', \cdots, a_n) = cD(a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_n) + dD(a_1, \cdots, a_i', \cdots, a_n)$
- 我们通过这三条性质推导了一些其他性质。
- 我们通过初等列变换，将 A 转变成一个下三角矩阵 L，从而得到了 $\det(A)$ 的值。这一构造过程，说明了 $\det(A)$ 的存在性。

行列式更多的性质

我们将证明:

定理 7 **[Transpose].**

令 A 是一个 $n \times n$ 的矩阵，我们有:

$$\det(A) = \det(A^{\top})$$

定理 8 **[Product of Determinants].**

令 A 是一个 $n \times n$ 的矩阵，B 是一个 $n \times n$ 的矩阵，我们有:

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

这也说明，对矩阵的初等行变换对行列式的影响跟初等列变换是完全相同的

推论 9.

给定一个正交矩阵 Q，我们有:

$$\det(Q) = \pm 1$$

这说明，在 $\mathbb{R}^n$ 中由 n 个标准正交 (orthonormal) 基向量构成的平行六面体的体积是 1。

证明. 注意到:

$$Q^T Q = I$$

从而我们有:

$$1 = \det(I) = \det(Q)\det(Q^T) = \det(Q)\det(Q) = (\det(Q))^2 \quad \Longrightarrow \quad \det(Q) = \pm 1$$

$\square$

引理 10.

令 A 是一个 $n \times n$ 的矩阵，E 是一个 $n \times n$ 的初等矩阵，则我们有：

$$\det(AE) = \det(A)\det(E)$$

推论 11.

令 A 是一个 $n \times n$ 的矩阵，$E_1, \cdots, E_k$ 是 $n \times n$ 的初等矩阵，则我们有：

$$\det(AE_1E_2\cdots E_k) = \det(A)\det(E_1)\det(E_2)\cdots\det(E_k)$$

特别的：

$$\det(E_1E_2\cdots E_k) = \det(E_1)\det(E_2)\cdots\det(E_k)$$

回顾三种初等矩阵

注意到 E 是下列三种矩阵的一种：

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}}_{E_{ij}(k)}, \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}}_{P_{ij}}, \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & k & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}}_{D_i(k)}$$

注意到 AE 是对 A 进行相应的列变换操作，所以我们只需要检查每种初等矩阵是否满足 $\det(AE) = \det(A)\det(E)$ 即可。

引理10的证明-$E_{ij}(k)$ 的情况

令 $A = \left[a_1, \cdots, a_n\right]$，注意到：

$$AE_{ij}(k) = \left[a_1, \cdots, a_i + ka_j, \cdots, a_j, \cdots, a_n\right]$$

从而我们有：

$$\begin{aligned}
\det(E_{ij}(k)) &= \det(I) = 1 \\
\det(AE_{ij}(k)) &= D(a_1, \cdots, a_i + ka_j, \cdots, a_j, \cdots, a_n) \\
&= D(a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_j, \cdots, a_n) + kD(a_1, \cdots, a_j, \cdots, a_j, \cdots, a_n) \\
&= \det(A)
\end{aligned}$$

即：

$$\det(AE_{ij}(k)) = \det(A)\det(E_{ij}(k))$$

令 $A = \begin{bmatrix} a_1, \cdots, a_n \end{bmatrix}$，注意到：

$$AP_{ij} = \begin{bmatrix} a_1, \cdots, a_j, \cdots, a_i, \cdots, a_n \end{bmatrix}$$

从而我们有：

$$\begin{aligned} \det(P_{ij}) &= -\det(I) = -1 \\ \det(AP_{ij}) &= D(a_1, \cdots, a_j, \cdots, a_i, \cdots, a_n) \\ &= -D(a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_j, \cdots, a_n) \\ &= -\det(A) \end{aligned}$$

即：

$$\det(AP_{ij}) = \det(A)\det(P_{ij})$$

引理10的证明-$D_i(k)$ 的情况

令 $A = \begin{bmatrix} a_1, \cdots, a_n \end{bmatrix}$，注意到:

$$AD_i(k) = \begin{bmatrix} a_1, \cdots, {\color{red}ka_i}, \cdots, a_j, \cdots, a_n \end{bmatrix}$$

从而我们有:

$$\begin{aligned}
\det(D_i(k)) &= k\det(I) = k \\
\det(AD_i(k)) &= D(a_1, \cdots, {\color{red}ka_i}, \cdots, a_j, \cdots, a_n) \\
&= kD(a_1, \cdots, {\color{red}a_i}, \cdots, a_j, \cdots, a_n) \\
&= k\det(A)
\end{aligned}$$

即:

$${\color{red}\det(AD_i(k)) = \det(A)\det(D_i(k))}$$

回顾 Gauss–Jordan 消元法：

$$\color{red}{D\cdots E\cdots P\cdots E}\begin{bmatrix} A & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & A^{-1} \end{bmatrix}$$

我们有：

定理 12.

每个可逆矩阵都可以由一系列的初等矩阵的乘积得到。

定理 7 **[Transpose].**

令 A 是一个 $n \times n$ 的矩阵，我们有：

$$\det(A) = \det(A^T)$$

证明.

1. 对于每个初等矩阵 E，我们有 $\det(E) = \det(E^T)$。
2. 如果 A 不是可逆的，则 $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A^T) < n$，从而
$$\det(A) = \det(A^T) = 0$$
3. 如果 A 是可逆的，则存在一系列的初等矩阵 $E_1, \cdots E_l$ 使得：
$$A = E_1 \cdots E_l$$
从而 $A^T = E_l^T \cdots E_1^T$，因此：
$$\begin{aligned}\det(A) &= \det(E_1) \cdots \det(E_l) \\ &= \det(E_1^T) \cdots \det(E_l^T) = \det(E_l^T) \cdots \det(E_1^T) = \det(E_l^T \cdots E_1^T) = \det(A^T)\end{aligned}$$

定理8的证明

我们现在来证明:

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

证明. 如果 B 是可逆的，则存在一系列的初等矩阵 $E_1, \cdots E_k$ 使得:

$$B = E_1 \cdots E_k$$

从而:

$$\begin{aligned}\det(AB) = \det(AE_1 \cdots E_k) &= \det(A)\det(E_1)\cdots\det(E_k) \\ &= \det(A)\det(E_1 \cdots E_k) = \det(A)\det(B)\end{aligned}$$

如果 B 不是可逆的，则 AB 也不可逆，否则:

$$I = (AB)^{-1}AB = ((AB)^{-1}A)B$$

所以此时我们有:

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) = 0$$

□

一个运用-Cramer 法则 (I)

我们来展示 $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ 的一个运用。考察下列的方程组:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \quad \text{即} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \text{(记作 } Ax = b\text{)}$$

注意到:

$$A \begin{bmatrix} x_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_3 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ax & Ae_2 & Ae_3 & \cdots & Ae_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

记下列矩阵为 A_1:

$$\begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

注意到:

$$\begin{vmatrix} x_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_3 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = x_1$$

则我们有:

$$\det(A)x_1 = \det(A_1), \quad \text{即:} \quad x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}$$

一个运用-Cramer 法则 (III)

对于任意的 $i \in [n]$，令 A_i 是将 A 的第 i 列替换成 b 后的矩阵，则我们有:

$$A\begin{bmatrix} 1 & \cdots & x_1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & x_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & x_n & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ae_1 \cdots Ax \cdots Ae_n \end{bmatrix} = A_i \quad \Longrightarrow \det(A)x_i = \det(A_i)$$

从而方程组 $Ax = b$ 的解可以表示为:

$$x = \begin{bmatrix} \frac{\det(A_1)}{\det(A)} \\ \vdots \\ \frac{\det(A_n)}{\det(A)} \end{bmatrix}$$

这就是克拉默法则 (Cramer's Rule)

另一个应用-det(A) 跟首元的关系

令可逆矩阵 A 的首元为 $p_1, \cdots, p_n$，通过 Gauss 消元法我们可以将矩阵 A 变为如下的行阶梯形矩阵:

$$U = \begin{bmatrix} p_1 & * & \cdots & * \\ 0 & p_2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_n \end{bmatrix}$$

由于上述过程只使用了行加法和行交换操作 (列加法或者列交换)，从而我们有:

$$\det(A) = \det(U) = p_1 p_2 \cdots p_n \text{ 或者 } \det(A) = -\det(U) = -p_1 p_2 \cdots p_n$$

即:

$$|\det(A)| = |p_1 p_2 \cdots p_n|$$

行列式的正式定义

考虑一个 $n \times n$ 的矩阵:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

注意到其每个列向量:

$$a_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix} = a_{1j} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + a_{nj} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$$

从而由行列式的线性性，我们有:

$$D(a_1, \cdots, a_n) = D(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i, \cdots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{i1} D(e_1, \cdots, a_n)$$

如果我们将矩阵的每一列都按上述方式展开，则：

$$D(a_1,\cdots,a_n)=\sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\cdots\sum_{i_n}^{n}a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n}D(e_{i_1},e_{i_2},\cdots,e_{i_n})$$

上述等式一共有n^n项。由行列式的性质，如果存在 $i_k=i_j$，则我们有：

$$D(e_{i_1},e_{i_2},\cdots,e_{i_k},\cdots,e_{i_j},\cdots e_{i_n})=0$$

从而上述等式可以转化为：

$$D(a_1,\cdots,a_n)=\sum_{i_1\in[n]}\sum_{\substack{i_2\in[n]\\ i_2\neq i_1}}\cdots\sum_{\substack{i_n\in[n]\\ i_n\neq i_1,\cdots,i_n\neq i_{n-1}}}a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n}D(e_{i_1},e_{i_2},\cdots,e_{i_n})$$

我们来观察一下这个式子:

$$D(a_1,\cdots,a_n)=\sum_{i_1\in[n]}\sum_{\substack{i_2\in[n]\\ i_2\neq i_1}}\cdots\sum_{\substack{i_n\in[n]\\ i_n\neq i_1,\cdots,i_n\neq i_{n-1}}} a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n}D(e_{i_1},e_{i_2},\cdots,e_{i_n})$$

事实上, $i_1,\cdots,i_n$是 $1,\cdots,n$ 的一个置换。

例 8.

- $1,3,2,4$ 就是 $1,2,3,4$ 的一个置换。
- c,d,e,a,b 是 a,b,c,d,e 的一个置换。

定义 9 **[Permutation].**

固定一个 $n \in \mathbb{N}$，一个 $[n]$ 的置换 (Permutation) 是一个 $[n] \to [n]$ 的双射函数 (bijective function)σ，并且我们定义：

$$\mathrm{Perm}(n) = \{\sigma \mid \sigma \text{是 } [n] \text{ 的一个置换。}\}$$

从而我们可以将上述表达式改写为：

$$\begin{aligned} D(a_1, \cdots, a_n) &= \sum_{i_1 \in [n]} \sum_{\substack{i_2 \in [n] \\ i_2 \neq i_1}} \cdots \sum_{\substack{i_n \in [n] \\ i_n \neq i_1, \cdots, i_n \neq i_{n-1}}} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} D(e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_n}) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathrm{Perm}(n)} a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} D(e_{\sigma}(1), \cdots, e_{\sigma(n)}) \end{aligned}$$

我们需要搞清楚 $D(e_{\sigma}(1),\cdots,e_{\sigma(n)})$ 是什么，注意到：

$$P=\left[e_{\sigma}(1),\cdots,e_{\sigma(n)}\right]$$

是一个置换矩阵。

1. P 可以通过若干次列交换操作变成单位矩阵 I。
2. 每次列交换操作改变其行列式的符号。
3. 从而 $\det(P)=(-1)^{k}$，这里 k 是列交换的次数。

注意!

这里的 k 是不唯一的!

1. 我们希望定义 $\det A$ 来表示：由 $a_1, \cdots, a_n$ 在 n 维空间长成的平行六面体 (n-dimensional parallelepiped) 的有向体积。
2. 我们发现 $\det A$ 需要满足三个基本的性质：
   - $D(e_1, \cdots, e_n) = 1$
   - $D(a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_j, \cdots a_n) = -D(a_1, \cdots, a_j, \cdots, a_i, \cdots a_n)$
   - $D(a_1, \cdots, ca_i + da_i', \cdots, a_n) = cD(a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_n) + dD(a_1, \cdots, a_i', \cdots, a_n)$
3. 通过这三个基本的性质，我们计算出了行列式的表达：

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in Perm(n)} a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} D(e_\sigma(1), \cdots, e_{\sigma(n)})$$

$$= \sum_{\sigma \in Perm(n)} (-1)^{k_\sigma} a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

这里 k_σ 是置换矩阵 $\left[e_\sigma(1), \cdots, e_{\sigma(n)}\right]$ 变成单位矩阵 I 所需要的列交换的次数。但我们还面临一个问题：

k_σ 并不唯一，所以我们不能用上述式子作为 $\det(A)$ 的定义。

逆序数 (Inversion numbers)(I)

令 $\sigma:[n]\to[n]$ 是一个置换，我们用如下的方式进行简写：

$$\sigma(1)\sigma(2)\cdots\sigma(n)$$

比如，我们称：

$$4213\text{就是 } 1234 \text{ 的一个置换。}$$

观察这些置换的特点：

- 其中存在在前面但是更大的数，比如在 4213 中，4 在 2 前面，但是 $4>2$.

我们称这样的一堆数为逆序对，而一个置换中的逆序对的个数为这个置换的逆序数 (Inversion Number)

定义 10 **[Inversion numbers].**

给定一个置换 $\sigma = \sigma(1)\sigma(2)\cdots\sigma(n)$，其逆序数 (Inversion number)$\tau(\sigma)$定义为：

$$\tau(\sigma) = |\{(p, q) \mid 1 \leqslant p < q \leqslant n \text{ 并且 } \sigma(p) > \sigma(q)\}|$$

例 11.

- $\tau(4213) = 4.$
- $\tau(1324) = 1$
- $\tau(3241) = 3.$

观察到：

$$\tau(4213)=4 \implies 4213 \to 2413 \to 2143 \to 2134 \to 1234$$

$$\tau(1324)=1 \implies 1324 \to 1234$$

$$\tau(3241)=3 \implies 3214 \to 2314 \to 2134 \to 1234$$

逆序数恰好可以作为一个将置换 $\sigma=\sigma(1)\sigma(2)\cdots\sigma(n)$ 变回 $123\cdots n$ 的个数！

定理 12.

给定置换矩阵

$$P=\left[e_\sigma(1),\cdots,e_{\sigma(n)}\right]$$

我们可以通过 $\tau(\sigma)$ 次列交换将其变回单位矩阵 I。

这意味着我们可以用 $\tau(\sigma)$ 来定义 k_σ！

定理12的证明. 注意到对于一个置换 σ，我们有：

$$\tau(\sigma)=\sum_{i=1}^{n}|\{t \mid t>i \text{ 并且 } \sigma(i)>\sigma(t)\}|$$

从而对于置换矩阵我们可以定义如下的列交换操作, 初始令 $k=n$:

1. 不妨令 $k=\sigma(t)$，令 $t_1<t_2<\cdots<t_j$ 是满足 $k>\sigma(t_i)$ 的位置。依次将第 k 列与第 t_i 列进行交换，共交换 j 次。
2. 令 $k=k-1$，重复上述过程。

注意到上述列交换的总数恰好是置换 σ 的逆序数 (为什么？)，从而定理得证。 □

现在我们就可以得到行列式的正式定义了。

定义 13.

令 A 是一个 $n \times n$ 的矩阵，我们定义：

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathrm{Perm}(n)} (-1)^{\tau(\sigma)} a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

定理 14.

$\det(A)$ 满足下列性质：

- $D(e_1, \cdots, e_n) = 1$
- $D(a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_j, \cdots a_n) = -D(a_1, \cdots, a_j, \cdots, a_i, \cdots a_n)$
- $D(a_1, \cdots, ca_i + da_i', \cdots, a_n) = cD(a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_n) + dD(a_1, \cdots, a_i', \cdots, a_n)$

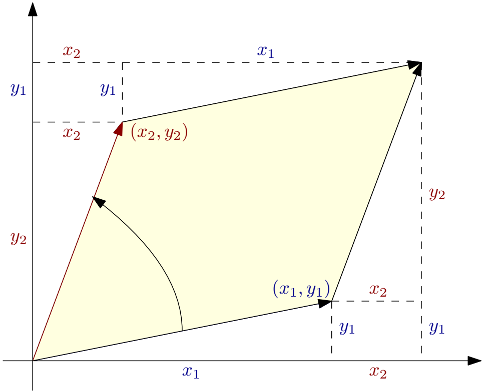
例子-2×2 的情况

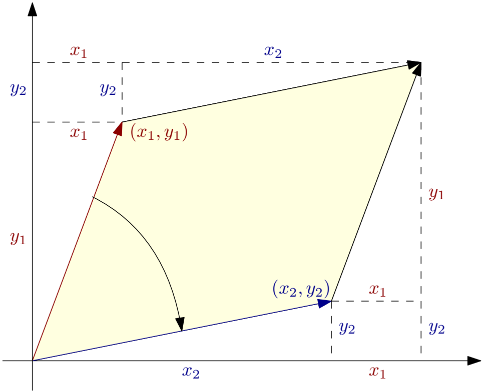
对于一个 2×2 的矩阵：

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix}$$

一共有 $12, 21$ 两种不同的置换，从而我们有：

$$\det(A) = (-1)^{\tau(12)} x_1 y_2 + (-1)^{\tau(21)} x_2 y_1 = x_1 y_2 - x_2 y_1$$





例子-3 × 3 的情况 (I)

对于一个 3×3 的矩阵:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$$

其一共有 $123, 132, 213, 231, 312, 321$ 六种不同的置换，并且:

$$\tau(123)=0,\ \tau(132)=1,\ \tau(213)=1,\ \tau(231)=2,\ \tau(312)=2,\ \tau(321)=3$$

从而我们有:

$$\begin{aligned}\det(A)=&(-1)^{\tau(123)}a_{11}a_{22}a_{33}+(-1)^{\tau(132)}a_{11}a_{23}a_{32}+(-1)^{\tau(213)}a_{12}a_{21}a_{33}\\ &+(-1)^{\tau(231)}a_{12}a_{23}a_{31}+(-1)^{\tau(312)}a_{13}a_{21}a_{32}+(-1)^{\tau(321)}a_{13}a_{22}a_{31}\\ =&a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}\end{aligned}$$

例子-3×3 的情况 (II)

这也就是书本中常见的三阶行列式计算的记忆方式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{aligned} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{aligned}$$

定理 15 **[Uniqueness].**

$\det(A)$ 是唯一一个 $\underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{n个} \to \mathbb{R}^n$ 的函数满足下述三个性质:

- $D(e_1, \cdots, e_n) = 1$
- $D(a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_j, \cdots a_n) = -D(a_1, \cdots, a_j, \cdots, a_i, \cdots a_n)$
- $D(a_1, \cdots, ca_i + da_i', \cdots, a_n) = cD(a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_n) + dD(a_1, \cdots, a_i', \cdots, a_n)$

证明. 我们前面已经证明，满足这三个性质的函数具备如下的性质:

$$D(a_1, \cdots, a_n) = \sum_{\sigma \in \mathrm{Perm}(n)} (-1)^{k_\sigma} a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

根据前面的讨论，k_σ 可以用 $\tau(\sigma)$ 来替代，从而:

$$D(a_1, \cdots, a_n) = \sum_{\sigma \in \mathrm{Perm}(n)} (-1)^{\tau(\sigma)} a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} = \det(A)$$

这就完成了唯一性的证明。 □

行列式的展开

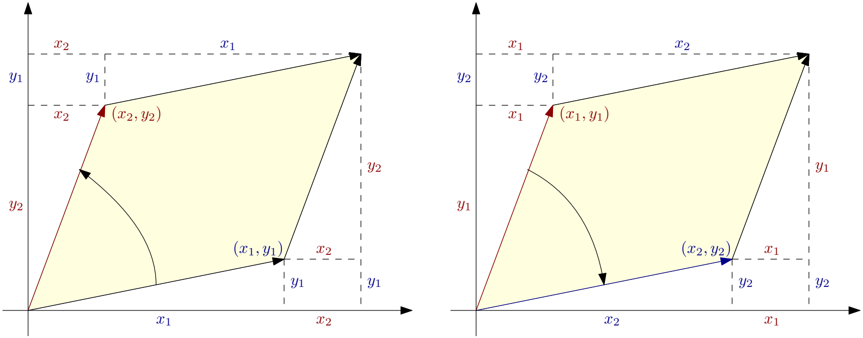
回顾 2×2 的行列式

对于一个 2×2 的矩阵:

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix}$$

一共有 12, 21 两种不同的置换，从而我们有:

$$\det(A) = (-1)^{\tau(12)} x_1 y_2 + (-1)^{\tau(21)} x_2 y_1 = x_1 y_2 - x_2 y_1$$



这可以看成是 $\det(A)$代数余子式展开 (Cofactor Expansion)的一个特殊情况。

令 A 是一个 $n \times n$ 的矩阵，并且 $n \geqslant 2$。对于任意的 $i, j \in [n]$，我们定义：

M_{ij} 是将 A 第 i 行第 j 列的元素删去后得到的 $n-1 \times n-1$ 的矩阵。

定义 16 **[Cofactor].**

下列数：

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij})$$

称之为代数余子式 (Cofactor)，特别的 $\det(M_{ij})$ 称之为余子式。

定理 17.

1. $\det(\begin{bmatrix} a \end{bmatrix}) = a$.
2. 对于任意的 $n \geqslant 2$，并且 A 是一个 $n \times n$ 的矩阵:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

我们有:

$$\det(A) = a_{11}C_{11} + \cdots + a_{1n}C_{1n}$$

定理17的证明 (I)

我们对其第一列展开:

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} 0 & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

所以我们只需要郑敏，对任意的 $i \in [n]$ 有:

$$
\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1} C_{i1} = (-1)^{i+1} a_{i1} \det(M_{i1}) = (-1)^{i-1} a_{i1} \det(M_{i1})
$$

定理17的证明 (II)

对其第 i 行向上交换 $i-1$ 次可得:

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ 0 & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdots = (-1)^{i-1}\begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

所以我们只要证明:

$$\begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}\det(M_{i1})$$

通过行列式的性质，我们注意到:

$$\begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{i1} & O_{1\times(n-1)} \\ O_{(n-1)\times 1} & M_{i1} \end{vmatrix}$$

也就是要证明:

$$\begin{vmatrix} a_{i1} & O_{1\times(n-1)} \\ O_{(n-1)\times 1} & M_{i1} \end{vmatrix} = a\det(M_{i1})$$

引理 18.

我们有: $\det(A) = \begin{vmatrix} a & O \\ O & B \end{vmatrix} = a\det(B)$

证明.

$$
\begin{aligned}
\det(A) = \begin{vmatrix} a & O \\ O & B \end{vmatrix} &= \sum_{\sigma \in \mathrm{Perm}(n)} (-1)^{\tau(\sigma)} a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} \\
&= \sum_{\substack{\sigma \in \mathrm{Perm}(n) \\ \sigma(1)=1}} (-1)^{\tau(\sigma)} a\, a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} \\
&= a \sum_{\substack{\sigma \in \mathrm{Perm}(n) \\ \sigma(1)=1}} (-1)^{\tau(\sigma)} b_{\sigma(2)-1,1} \cdots b_{\sigma(n)-1,n} \\
&= a \sum_{\delta \in \mathrm{Perm}(n-1)} (-1)^{\tau(\delta)} b_{\delta(1),1} \cdots b_{\delta(n-1),n-1} = a\det(B)
\end{aligned}
$$

$\square$

定理 19.

1. $\det(\begin{bmatrix} a \end{bmatrix}) = a$.
2. 对于任意的 $n \geqslant 2$，并且 A 是一个 $n \times n$ 的矩阵:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & \color{red}{a_{1i}} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \color{red}{\vdots} & \ddots & \vdots \\ a_{11} & \cdots & \color{red}{a_{ni}} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

我们有:

$$\color{red}{\det(A) = a_{1i}C_{1i} + \cdots + a_{1i}C_{1i}}$$

思路

只需要将第 j 列做 $j-1$ 次列交换换到第 1 列即可。

定理19的证明

定理19的证明. 通过 $i-1$ 次列交换，我们可以将第 i 列逐步换到第 1 列，即：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} a_{1i} & a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ a_{ni} & a_{11} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

从而：

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} &= (-1)^{i-1} \begin{vmatrix} a_{1i} & a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ a_{ni} & a_{11} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{i-1}(a_{1i}C'_{11} + a_{2i}C'_{12} + \cdots + a_{ni}C'_{1n}) \\
&= (-1)^{i-1}(a_{1i}(-1)^{1+1}\det(M_{1i}) + a_{2i}(-1)^{2+1}\det(M_{2i}) + \\
&\cdots + a_{ni}(-1)^{n+1}\det(M_{ni})) \\
&= (-1)^{1+i}a_{1i}\det(M_{1i}) + (-1)^{2+i}a_{2i}\det(M_{2i}) + \cdots + (-1)^{n+i}a_{ni}\det(M_{ni}) \\
&= a_{1i}C_{1i} + \cdots + a_{1i}C_{1i}
\end{aligned}$$

定理 20.

1. $\det(\begin{bmatrix} a \end{bmatrix}) = a$.
2. 对于任意的 $n \geqslant 2$，并且 A 是一个 $n \times n$ 的矩阵:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

我们有:

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + \cdots + a_{in}C_{in}$$

证明. 只要注意到 $\det(A) = \det(A^{\mathsf{T}})$ 即可。 $\square$

一些例子 (I)

计算下列行列式:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

证明. 我们根据其第一列展开:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 24 - 12 - 8 - 6 = -2$$

$\square$

我们也可以按第二列进行展开:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -12 + 2 * 5 = -2$$

也可以选择按第第二行展开:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -12 + 2 * 5 = -2$$

记下列的矩阵为 D_n：

$$D_n = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

计算 $\det(D_n)$

证明. 我们按第一行展开:

$$\det(D_n) = 2\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ \cdots & 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}(-1)\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ \cdots & 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}(-1)(-1)\begin{vmatrix} 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2\det(D_{n-1}) - \det(D_{n-2})$$

□

我们有:

$$\det(D_n) = 2\det(D_{n-1}) - \det(D_{n-2})$$

注意到:

$$\det(D_1) = \begin{vmatrix} 2 \end{vmatrix} = 2, \quad \det(D_2) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3$$

我们可以根据上述递推式得到:

$$\det(D_n) = n + 1$$

$\square$

下列是 Vandermonde 矩阵:

$$V_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

证明其行列式值为:

$$\det(V_n) = \Pi_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}(x_j - x_i)$$

证明. 我们通过归纳法来计算 $\det(V_n)$。

- $n = 2$ 时，我们有:

$$\det(V_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1$$

上海师范大学 Shanghai Normal University

考虑 n 的时候，我们的策略是先用行变换将第一列除了第一个元素全部变为 0，再将行列式按第一列展开，即：

$$
\begin{bmatrix}
1 & 1 & \cdots & 1 \\
x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\
x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}
\end{bmatrix}
\to
\begin{bmatrix}
1 & 1 & \cdots & 1 \\
x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\
0 & x_2^{n-2}(x_2-x_1) & \cdots & x_2^{n-2}(x_n-x_1)
\end{bmatrix}
$$

$$
\to \cdots \to
\begin{bmatrix}
1 & 1 & \cdots & 1 \\
0 & x_2-x_1 & \cdots & x_n-x_1 \\
0 & x_2(x_2-x_1) & \cdots & x_n(x_n-x_1) \\
0 & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & x_2^{n-2}(x_2-x_1) & \cdots & x_2^{n-2}(x_n-x_1)
\end{bmatrix}
$$

一些例子 (III)-续

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & \cdots & x_n(x_n - x_1) \\ 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & \cdots & x_2^{n-2}(x_n - x_1) \end{bmatrix}$$

从而我们有:

$$\det(V_n) = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ x_2(x_2 - x_1) & \cdots & x_n(x_n - x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & \cdots & x_2^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix} = (x_2 - x_1) \cdots (x_n - x_1) \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

由归纳假设我们有:

$$\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix} = \Pi_{2\leqslant j\leqslant i\leqslant n}(x_j - x_i)$$

从而我们有:

$$\det(V_n) = (x_2 - x_1)\cdots(x_n - x_1)\Pi_{2\leqslant j\leqslant i\leqslant n}(x_j - x_i) = \Pi_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}(x_j - x_i)$$

$\square$

我们已经阐述了克拉默法则 (Cramer's Rule)在解方程中的作用。现在让我们来用它解决一下 A^{-1}。注意到 $A^{-1} = \begin{bmatrix} x_1 \cdots x_n \end{bmatrix}$ 等价于如下 n 个方程组:

$$Ax_1 = e_1, Ax_2 = e_2, \cdots, Ax_n = e_n$$

特别的:

$$Ax_1 = A\begin{bmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

从而，通过 Cramer's Rule 我们有对任意的 $i \in [n]$:

$$x_{i1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & 1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,i-1} & 0 & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & 0 & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \frac{C_{1i}}{\det(A)}$$

回到 Cramer 法则-求 A^{-1}(II)

更一般的来说，对于 $j \in [n]$

$$Ax_j = A\begin{bmatrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

同样通过 Cramer's Rule 我们有对任意的 $i \in [n]$:

$$x_{ij} = \frac{1}{\det(A)}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & 0 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{j,i-1} & 1 & a_{j,i+1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & 0 & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \frac{C_{ji}}{\det(A)}$$

回到 Cramer 法则-求 A^{-1}(III)

从而我们有:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

定义 21 **[Adjugate Matrix].**

称下列矩阵:

$$A^* = \begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

为 A 的伴随矩阵 (Adjugate Matrix)。

定理 22.

$AA^* = \det(A)I$

总结-关于行列式

- 转置矩阵、矩阵乘法和行列式的关系。
  - $\det(A) = \det(A)^{T}$, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
  - 行列式跟首元的关系:

$$\det(A) = \det(U) = p_1 p_2 \cdots p_n \text{ 或者 } \det(A) = -\det(U) = -p_1 p_2 \cdots p_n$$

- 行列式的正式定义，The Big Formula:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathrm{Perm}(n)} (-1)^{\tau(\sigma)} a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

- 代数余子式，行列式按行 (列) 展开:

$$\det(A) = a_{1i} C_{1i} + \cdots + a_{1i} C_{1i}$$

- Cramer's Rule，用行列式解方程，求矩阵的逆，伴随矩阵。