



上海师范大学
Shanghai Normal University

《线性代数》

4-向量空间 (Vector Space)

杨启哲

上海师范大学信机学院计算机系

2024 年 3 月 10 日



定义 1

[可逆矩阵 (Invertible Matrix)].

称一个方阵 A (A 是一个 $n \times n$ 的矩阵) 是可逆的 (invertible), 如果存在一个矩阵 A^{-1} , 使得:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

定义 1

[可逆矩阵 (Invertible Matrix)].

称一个方阵 A (A 是一个 $n \times n$ 的矩阵) 是可逆的 (invertible), 如果存在一个矩阵 A^{-1} , 使得:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

引理 2.

如果方阵 A 是可逆的, 那么其逆矩阵是唯一的。

定义 1

[可逆矩阵 (Invertible Matrix)].

称一个方阵 A (A 是一个 $n \times n$ 的矩阵) 是可逆的 (invertible), 如果存在一个矩阵 A^{-1} , 使得:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

引理 2.

如果方阵 A 是可逆的, 那么其逆矩阵是唯一的。

引理 3.

如果方阵 A 是可逆的, 则对于任意的 b , 方程 $Ax = b$ 有唯一解。

定义 1

[可逆矩阵 (Invertible Matrix)].

称一个方阵 A (A 是一个 $n \times n$ 的矩阵) 是可逆的 (invertible), 如果存在一个矩阵 A^{-1} , 使得:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

引理 2.

如果方阵 A 是可逆的, 那么其逆矩阵是唯一的。

引理 3.

如果方阵 A 是可逆的, 则对于任意的 b , 方程 $Ax = b$ 有唯一解。

推论 4.

如果 $Ax = 0$ 存在一个非零解, 那么 A 不是可逆的。

定义 5

[转置矩阵 (Transpose Matrix)].

给定一个 $m \times n$ 的矩阵 A , 其转置矩阵 A^T 是一个 $n \times m$ 的矩阵, 其满足:

$$(A^T)(i, j) = A(j, i)$$

定义 5

[转置矩阵 (Transpose Matrix)].

给定一个 $m \times n$ 的矩阵 A , 其转置矩阵 A^T 是一个 $n \times m$ 的矩阵, 其满足:

$$(A^T)(i, j) = A(j, i)$$

定义 6.

置换矩阵 P 是将单位矩阵 I 的行重排列得到的矩阵。

定义 5

[转置矩阵 (Transpose Matrix)].

给定一个 $m \times n$ 的矩阵 A , 其转置矩阵 A^T 是一个 $n \times m$ 的矩阵, 其满足:

$$(A^T)(i, j) = A(j, i)$$

定义 6.

置换矩阵 P 是将单位矩阵 I 的行重排列得到的矩阵。

引理 7.

$$P^{-1} = P^T.$$



主要内容



上海师范大学
Shanghai Normal University

› 向量空间

› 子空间



- 第 6 章 6.1

► 向量空间

特殊的向量空间

定义 8.

空间 \mathbb{R}^n 包含了所有如下的 n 维列向量 v :

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

其中对于任意的 $i \in [n]$, $v_i \in \mathbb{R}$, 这里的 \mathbb{R} 是实数集。

定义 8.

空间 \mathbb{R}^n 包含了所有如下的 n 维列向量 v :

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

其中对于任意的 $i \in [n]$, $v_i \in \mathbb{R}$, 这里的 \mathbb{R} 是实数集。

定义 9.

空间 \mathbb{C}^n 包含了所有如下的 n 维列向量 v :

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

其中对于任意的 $i \in [n]$, $v_i \in \mathbb{C}$, 这里的 \mathbb{C} 是复数集。



向量空间的形式化定义 (I)



上海师范大学
Shanghai Normal University

一个向量空间 V 是一个非空集合，其中的元素称之为向量，并且其满足以下两种运算：



向量空间的形式化定义 (I)



上海师范大学
Shanghai Normal University

一个向量空间 V 是一个非空集合，其中的元素称之为向量，并且其满足以下两种运算：

- 向量加法：对于任意的 $u, v \in V$ ， $u + v \in V$ 。

一个向量空间 V 是一个非空集合，其中的元素称之为向量，并且其满足以下两种运算：

- 向量加法：对于任意的 $u, v \in V$ ， $u + v \in V$ 。
- 数与向量的乘法（数乘）：对于任意的 $u \in V$ 和任意的实数 $c \in \mathbb{R}$ ， $cu \in V$ 。

向量空间的形式化定义 (II)

其中的加法满足如下的性质:

向量空间的形式化定义 (II)

其中的加法满足如下的性质:

1. 加法满足交换律:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$$

其中的加法满足如下的性质:

1. 加法满足交换律:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$$

2. 加法满足结合律:

$$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$$

其中的加法满足如下的性质:

1. 加法满足交换律:

$$u + v = v + u$$

2. 加法满足结合律:

$$u + (v + w) = (u + v) + w$$

3. 加法存在一个零元素 (唯一的) $\mathbf{0}$, 其满足 $u + \mathbf{0} = u$ 对任意的 $u \in V$ 。

其中的加法满足如下的性质:

1. 加法满足交换律:

$$u + v = v + u$$

2. 加法满足结合律:

$$u + (v + w) = (u + v) + w$$

3. 加法存在一个零元素 (唯一的) $\mathbf{0}$, 其满足 $u + \mathbf{0} = u$ 对任意的 $u \in V$ 。
4. 加法存在一个负元素 (逆元), 即对于任意的 $u \in V$, 存在一个 $v \in V$, 使得 $u + v = \mathbf{0}$, 特别的, 将 v 记为 $-u$ 。

向量空间的形式化定义 (III)

其中的数乘满足如下的性质:

向量空间的形式化定义 (III)

其中的数乘满足如下的性质:

5. 数乘存在单位元 1, 使得 $1u = u$ 对于任意的 $u \in V$ 。

向量空间的形式化定义 (III)

其中的数乘满足如下的性质:

5. 数乘存在单位元 1, 使得 $1u = u$ 对于任意的 $u \in V$ 。
6. 数乘满足结合律:

$$c_1(c_2u) = (c_1c_2)u$$

其中的数乘满足如下的性质:

5. 数乘存在单位元 1, 使得 $1u = u$ 对于任意的 $u \in V$ 。

6. 数乘满足结合律:

$$c_1(c_2u) = (c_1c_2)u$$

7. 数乘是线性的, 即对于任意的 $c \in \mathbb{R}$ 和 $u, v \in V$ 均有:

$$c(u + v) = cu + cv$$

其中的数乘满足如下的性质:

5. 数乘存在单位元 1, 使得 $1u = u$ 对于任意的 $u \in V$ 。

6. 数乘满足结合律:

$$c_1(c_2u) = (c_1c_2)u$$

7. 数乘是线性的, 即对于任意的 $c \in \mathbb{R}$ 和 $u, v \in V$ 均有:

$$c(u + v) = cu + cv$$

8. 数乘对于加法满足分配律, 即对于任意的 $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ 和 $u \in V$ 均有:

$$(c_1 + c_2)u = c_1u + c_2u$$

例子-矩阵组成的向量空间 (I)

对于 $m, n \geq 1$, 令 $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ 表示所有的 $m \times n$ 的实数矩阵的集合:

- 其中的加法就定义成矩阵的加法。
- 其中的数乘就定义成矩阵的数乘。

例子-矩阵组成的向量空间 (I)

对于 $m, n \geq 1$, 令 $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ 表示所有的 $m \times n$ 的实数矩阵的集合:

- 其中的加法就定义成矩阵的加法。
- 其中的数乘就定义成矩阵的数乘。

可以验证, $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ 是一个向量空间。

例子-矩阵组成的向量空间 (II)

例子-矩阵组成的向量空间 (II)

- 矩阵的加法满足交换律和结合律。

例子-矩阵组成的向量空间 (II)

- 矩阵的加法满足交换律和结合律。
- 其零元为全零矩阵 $\mathbf{0}_{m \times n}$, 即所有的入口都是 0。

例子-矩阵组成的向量空间 (II)

- 矩阵的加法满足交换律和结合律。
- 其零元为全零矩阵 $\mathbf{0}_{m \times n}$, 即所有的入口都是 0。
- 对于任意的 $M \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, 其负元 $-M$ 为: $-M = (-1)M$.

例子-矩阵组成的向量空间 (II)

- 矩阵的加法满足交换律和结合律。
- 其零元为全零矩阵 $\mathbf{0}_{m \times n}$, 即所有的入口都是 0。
- 对于任意的 $M \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, 其负元 $-M$ 为: $-M = (-1)M$.
- 数乘的单位元就是 $1 \in \mathbb{R}$.

例子-矩阵组成的向量空间 (II)

- 矩阵的加法满足交换律和结合律。
- 其零元为全零矩阵 $\mathbf{0}_{m \times n}$, 即所有的入口都是 0。
- 对于任意的 $M \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, 其负元 $-M$ 为: $-M = (-1)M$.
- 数乘的单位元就是 $1 \in \mathbb{R}$.
- 数乘满足结合律和分配律。

例子-矩阵组成的向量空间 (II)

- 矩阵的加法满足交换律和结合律。
- 其零元为全零矩阵 $\mathbf{0}_{m \times n}$, 即所有的入口都是 0。
- 对于任意的 $M \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, 其负元 $-M$ 为: $-M = (-1)M$.
- 数乘的单位元就是 $1 \in \mathbb{R}$.
- 数乘满足结合律和分配律。
- 数乘满足线性性质。



例子-只有一个向量的向量空间



上海师范大学
Shanghai Normal University

有没有只有一个向量的向量空间呢？



例子-只有一个向量的向量空间



上海师范大学
Shanghai Normal University

有没有只有一个向量的向量空间呢？

- 有。



例子-只有一个向量的向量空间



上海师范大学
Shanghai Normal University

有没有只有一个向量的向量空间呢？

- 有。

只有一个元素的向量空间

$$Z = \{0\}$$

是一个向量空间。可以认为 \mathbb{R}^0 是 Z 的一个特殊情况。

例子 $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \dots$

通过前面所叙述的向量加法和数乘，可以验证 \mathbb{R}^n 是一个向量空间。

例子 $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \dots$

通过前面所叙述的向量加法和数乘，可以验证 \mathbb{R}^n 是一个向量空间。

- 所有 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 组成的集合 \mathbb{R}^2 。

通过前面所叙述的向量加法和数乘，可以验证 \mathbb{R}^n 是一个向量空间。

- 所有 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 组成的集合 \mathbb{R}^2 。
- 所有 $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ 组成的集合 \mathbb{R}^3 。

通过前面所叙述的向量加法和数乘，可以验证 \mathbb{R}^n 是一个向量空间。

- 所有 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 组成的集合 \mathbb{R}^2 。
- 所有 $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ 组成的集合 \mathbb{R}^3 。
- ...

通过前面所叙述的向量加法和数乘，可以验证 \mathbb{R}^n 是一个向量空间。

- 所有 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 组成的集合 \mathbb{R}^2 。
- 所有 $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ 组成的集合 \mathbb{R}^3 。
- ...

通过前面所叙述的向量加法和数乘，可以验证 \mathbb{R}^n 是一个向量空间。

- 所有 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 组成的集合 \mathbb{R}^2 。
- 所有 $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ 组成的集合 \mathbb{R}^3 。
- ...

问题 10.

能否将 \mathbb{R}^n 中推广到 \mathbb{R}^∞ 中？

假设我们遵循着 \mathbb{R}^n 的例子推广, 则 \mathbb{R}^∞ 应该是这样的:

假设我们遵循着 \mathbb{R}^n 的例子推广, 则 \mathbb{R}^∞ 应该是这样的:

- $\mathbb{R}^\infty = \{(x_1, x_2, \dots) \mid \text{对所有的 } i, x_i \in \mathbb{R}\}.$

假设我们遵循着 \mathbb{R}^n 的例子推广, 则 \mathbb{R}^∞ 应该是这样的:

- $\mathbb{R}^\infty = \{(x_1, x_2, \dots) \mid \text{对所有的 } i, x_i \in \mathbb{R}\}.$
- $c(x_1, x_2, \dots) = (cx_1, cx_2, \dots).$

假设我们遵循着 \mathbb{R}^n 的例子推广, 则 \mathbb{R}^∞ 应该是这样的:

- $\mathbb{R}^\infty = \{(x_1, x_2, \dots) \mid \text{对所有的 } i, x_i \in \mathbb{R}\}.$
- $c(x_1, x_2, \dots) = (cx_1, cx_2, \dots).$
- $(x_1, x_2, \dots) + (y_1, y_2, \dots) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots).$

假设我们遵循着 \mathbb{R}^n 的例子推广, 则 \mathbb{R}^∞ 应该是这样的:

- $\mathbb{R}^\infty = \{(x_1, x_2, \dots) \mid \text{对所有的 } i, x_i \in \mathbb{R}\}.$
- $c(x_1, x_2, \dots) = (cx_1, cx_2, \dots).$
- $(x_1, x_2, \dots) + (y_1, y_2, \dots) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots).$

假设我们遵循着 \mathbb{R}^n 的例子推广，则 \mathbb{R}^∞ 应该是这样的：

- $\mathbb{R}^\infty = \{(x_1, x_2, \dots) \mid \text{对所有的 } i, x_i \in \mathbb{R}\}$ 。
- $c(x_1, x_2, \dots) = (cx_1, cx_2, \dots)$ 。
- $(x_1, x_2, \dots) + (y_1, y_2, \dots) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots)$ 。

但问题是：

$$(x_1, x_2, \dots)$$

是什么？

假设我们遵循着 \mathbb{R}^n 的例子推广，则 \mathbb{R}^∞ 应该是这样的：

- $\mathbb{R}^\infty = \{(x_1, x_2, \dots) \mid \text{对所有的 } i, x_i \in \mathbb{R}\}.$
- $c(x_1, x_2, \dots) = (cx_1, cx_2, \dots).$
- $(x_1, x_2, \dots) + (y_1, y_2, \dots) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots).$

但问题是：

$$(x_1, x_2, \dots)$$

是什么？ 函数！

定义集合 F :

$$F = F(\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}) = \{f \mid f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}\}$$

- 给定 $f_1, f_2 \in F$, 定义函数 $f_1 + f_2: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ 为:

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

- 对于任意的 $f \in F$ 和 $c \in \mathbb{R}$, 定义函数 $cf: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ 为:

$$(cf)(x) = cf(x)$$

定义集合 F :

$$F = F(\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}) = \{f \mid f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}\}$$

- 给定 $f_1, f_2 \in F$, 定义函数 $f_1 + f_2: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ 为:

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

- 对于任意的 $f \in F$ 和 $c \in \mathbb{R}$, 定义函数 $cf: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ 为:

$$(cf)(x) = cf(x)$$

可以验证, F 是一个向量空间。

一个更奇怪的例子

我们再来看一个例子，考虑如下的集合：

$$V = \mathbb{R}^+ = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ and } x > 0\}$$

一个更奇怪的例子

我们再来看一个例子，考虑如下的集合：

$$V = \mathbb{R}^+ = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ and } x > 0\}$$

- 对于任意的 $x, y \in V$ ，定义加法运算 \oplus ： $x \oplus y$ 为 $x \oplus y = xy$ 。

一个更奇怪的例子

我们再来看一个例子，考虑如下的集合：

$$V = \mathbb{R}^+ = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ and } x > 0\}$$

- 对于任意的 $x, y \in V$ ，定义加法运算 \oplus ： $x \oplus y$ 为 $x \oplus y = xy$ 。
- 对于任意的 $x \in V$ 和 $c \in \mathbb{R}$ ，定义数乘运算 \otimes ： $c \otimes x$ 为 $c \otimes x = x^c$ 。

一个更奇怪的例子

我们再来看一个例子，考虑如下的集合：

$$V = \mathbb{R}^+ = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ and } x > 0\}$$

- 对于任意的 $x, y \in V$ ，定义加法运算 \oplus ： $x \oplus y$ 为 $x \oplus y = xy$ 。
- 对于任意的 $x \in V$ 和 $c \in \mathbb{R}$ ，定义数乘运算 \otimes ： $c \otimes x$ 为 $c \otimes x = x^c$ 。

一个更奇怪的例子

我们再来看一个例子，考虑如下的集合：

$$V = \mathbb{R}^+ = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ and } x > 0\}$$

- 对于任意的 $x, y \in V$ ，定义加法运算 \oplus : $x \oplus y$ 为 $x \oplus y = xy$ 。
- 对于任意的 $x \in V$ 和 $c \in \mathbb{R}$ ，定义数乘运算 \otimes : $c \otimes x$ 为 $c \otimes x = x^c$ 。

可以验证， V 是一个向量空间。



引理 11.

零向量 $\mathbf{0}$ 是唯一的。

引理 11.

零向量 $\mathbf{0}$ 是唯一的。

证明. 反设存在两个零向量 $\mathbf{0}_1, \mathbf{0}_2$, 则有:

$$\mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_1 + \mathbf{0}_2 = \mathbf{0}_2 + \mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_2$$





引理 11.

零向量 $\mathbf{0}$ 是唯一的。

证明. 反设存在两个零向量 $\mathbf{0}_1, \mathbf{0}_2$, 则有:

$$\mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_1 + \mathbf{0}_2 = \mathbf{0}_2 + \mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_2$$



引理 12.

对于任何向量 \mathbf{v} , 其负向量是唯一的。

引理 11.

零向量 $\mathbf{0}$ 是唯一的。

证明. 反设存在两个零向量 $\mathbf{0}_1, \mathbf{0}_2$, 则有:

$$\mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_1 + \mathbf{0}_2 = \mathbf{0}_2 + \mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_2$$



引理 12.

对于任何向量 \mathbf{v} , 其负向量是唯一的。

证明. 反设存在两个负向量 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$, 则有:

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{0} = \mathbf{v}_1 + (\mathbf{v} + \mathbf{v}_2) = (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}) + \mathbf{v}_2 = \mathbf{0} + \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2$$



引理 13

[向量的消去律 (Cancellation Law)].

如果 $u + v = u + w$, 则 $v = w$ 。

引理 13

[向量的消去律 (Cancellation Law)].

如果 $u + v = u + w$, 则 $v = w$ 。

引理 14.

1. $0v = 0$ 。
2. $c0 = 0$ 。
3. $(-1)v = -v$ 。
4. $-(u + v) = (-u) + (-v)$ 。
5. $c(-u) = (-c)u = -(cu)$ 。



阶段总结



上海师范大学
Shanghai Normal University



阶段总结



上海师范大学
Shanghai Normal University

- 向量空间的概念。一些例子。



阶段总结



上海师范大学
Shanghai Normal University

- 向量空间的概念。一些例子。
- 向量空间的性质。



阶段总结



上海师范大学
Shanghai Normal University

- 向量空间的概念。一些例子。
- 向量空间的性质。



- 向量空间的概念。一些例子。
- 向量空间的性质。

接下来我们来关注向量空间的一类特殊子集。

子空间

让我们从一个简单的例子看起。考察 \mathbb{R}^2 中的子集:

让我们从一个简单的例子看起。考察 \mathbb{R}^2 中的子集：

- $L_1 = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ 也是一个向量空间。

让我们从一个简单的例子看起。考察 \mathbb{R}^2 中的子集：

- $L_1 = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ 也是一个向量空间。
- $L_2 = \{(x, x + 1) \mid x \in \mathbb{R}\}$ 不是一个向量空间。

让我们从一个简单的例子看起。考察 \mathbb{R}^2 中的子集：

- $L_1 = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ 也是一个向量空间。
- $L_2 = \{(x, x + 1) \mid x \in \mathbb{R}\}$ 不是一个向量空间。

让我们从一个简单的例子看起。考察 \mathbb{R}^2 中的子集：

- $L_1 = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ 也是一个向量空间。
- $L_2 = \{(x, x + 1) \mid x \in \mathbb{R}\}$ 不是一个向量空间。

显然并不是所有的子集都是向量空间。我们称这样的子集为子空间。

定义 15

[子空间 (Subspace)].

给定一个向量空间 V ，如果 W 是 V 的一个非空子集，并且 W 满足如下两个条件：

1. 对于任意的 $u, v \in W$ ， $u + v \in W$ 。
2. 对于任意的 $c \in \mathbb{R}$ 和 $u \in W$ ， $cu \in W$ 。

则称 W 是 V 的一个子空间。

定义 15

[子空间 (Subspace)].

给定一个向量空间 V ，如果 W 是 V 的一个非空子集，并且 W 满足如下两个条件：

1. 对于任意的 $u, v \in W$ ， $u + v \in W$ 。
2. 对于任意的 $c \in \mathbb{R}$ 和 $u \in W$ ， $cu \in W$ 。

则称 W 是 V 的一个子空间。

定理 16.

如果 W 是向量空间 V 的一个子空间，则 W 对于 V 上定义加法和数乘运算构成一个向量空间。

子空间的例子 (I)

考察如下集合:

$$V = \mathbb{R}^3$$

$$W = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

考察如下集合:

$$V = \mathbb{R}^3$$

$$W = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

则 W 是 V 的一个子空间, 原因在于:

考察如下集合：

$$V = \mathbb{R}^3$$

$$W = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

则 W 是 V 的一个子空间，原因在于：

- 对于任意的 $u = (x_1, y_1, 0), v = (x_2, y_2, 0) \in W$, $u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, 0) \in W$ 。

考察如下集合：

$$V = \mathbb{R}^3$$

$$W = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

则 W 是 V 的一个子空间，原因在于：

- 对于任意的 $u = (x_1, y_1, 0), v = (x_2, y_2, 0) \in W$, $u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, 0) \in W$ 。
- 对于任意的 $c \in \mathbb{R}$ 和 $u = (x, y, 0) \in W$, $cu = (cx, cy, 0) \in W$ 。

定义对角矩阵为:

定义 17

[对角矩阵 (Diagonal Matrix)].

令 $n \geq 1$, $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, 如果对于任意的 $i \neq j$ 均有:

$$A(i, j) = 0$$

则称 A 是一个对角矩阵。

定义对角矩阵为:

定义 17

[对角矩阵 (Diagonal Matrix)].

令 $n \geq 1$, $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, 如果对于任意的 $i \neq j$ 均有:

$$A(i, j) = 0$$

则称 A 是一个对角矩阵。

考虑如下集合:

$$D_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) \mid A \text{ 是对角矩阵.}\}$$

定义对角矩阵为:

定义 17

[对角矩阵 (Diagonal Matrix)].

令 $n \geq 1$, $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, 如果对于任意的 $i \neq j$ 均有:

$$A(i, j) = 0$$

则称 A 是一个对角矩阵。

考虑如下集合:

$$D_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) \mid A \text{ 是对角矩阵.}\}$$

则 $D_n(\mathbb{R})$ 是 $M_{n \times n}(\mathbb{R})$ 的一个子空间。

引理 18.

如果 W 是向量空间 V 的一个子空间, 则 $\mathbf{0} \in W$.

引理 18.

如果 W 是向量空间 V 的一个子空间, 则 $\mathbf{0} \in W$.

证明. 取 $w \in W$, $0w = \mathbf{0} \in W$. □



引理 19.

令 $u, v \in W$, 则所有 u, v 的线性组合 $cu + dv$ 均在 W 中。

引理 19.

令 $u, v \in W$, 则所有 u, v 的线性组合 $cu + dv$ 均在 W 中。

证明. 由子空间的定义, 对于任意的 $c, d \in \mathbb{R}$, 均有:

$$cu, dv \in W$$

引理 19.

令 $u, v \in W$, 则所有 u, v 的线性组合 $cu + dv$ 均在 W 中。

证明. 由子空间的定义, 对于任意的 $c, d \in \mathbb{R}$, 均有:

$$cu, dv \in W$$

从而:

$$cu + dv \in W$$



引理 20.

令 V 是一个向量空间, W 是 V 的一个子集。则 W 是 V 的一个子空间当且仅当: 对于任意的 $k \geq 0$, $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ 和 $v_1, \dots, v_k \in W$ 均有:

$$c_1 v_1 + \dots + c_k v_k \in W$$

特别的, 当 $k = 0$ 时我们令上述和为 0 .

让我们回到矩阵里看看矩阵里的向量空间。

定义 21

[列空间 (Column Space)].

给定一个 $m \times n$ 的矩阵 A , 定义其列空间 $C(A)$ 为:

$$C(A) = \{Ax \mid x \in \mathbb{R}^n\}$$

即 $C(A)$ 是所有由 A 的列向量线性组合而成的集合。

定义 21

[列空间 (Column Space)].

给定一个 $m \times n$ 的矩阵 A , 定义其列空间 $C(A)$ 为:

$$C(A) = \{Ax \mid x \in \mathbb{R}^n\}$$

即 $C(A)$ 是所有由 A 的列向量线性组合而成的集合。

定理 22.

列空间 $C(A)$ 是 \mathbb{R}^m 的一个子空间。



引理 23.

$Ax = b$ 有解当且仅当 $b \in C(A)$ 。

我们可以利用转置矩阵来定义 A 的行空间。

定义 24

[行空间 (Row Space)].

给定一个 $m \times n$ 的矩阵 A ，定义其行空间为矩阵 A^T 的列空间 $C(A^T)$ 。

我们可以利用转置矩阵来定义 A 的行空间。

定义 24

[行空间 (Row Space)].

给定一个 $m \times n$ 的矩阵 A ，定义其行空间为矩阵 A^T 的列空间 $C(A^T)$ 。

引理 25.

矩阵 A 的行空间 $C(A^T)$ 是 \mathbb{R}^n 的一个子空间。

定义 26

[零空间 (Null Space)].

给定一个 $m \times n$ 的矩阵 A , 定义其零空间 $N(A)$ 为:

$$N(A) = \{x \mid Ax = \mathbf{0}\}$$

即 $N(A)$ 是所有满足 $Ax = \mathbf{0}$ 的 x 的集合。

定义 26

[零空间 (Null Space)].

给定一个 $m \times n$ 的矩阵 A , 定义其零空间 $N(A)$ 为:

$$N(A) = \{x \mid Ax = \mathbf{0}\}$$

即 $N(A)$ 是所有满足 $Ax = \mathbf{0}$ 的 x 的集合。

定理 27.

零空间 $N(A)$ 是 \mathbb{R}^n 的一个子空间。

► 生成一个子空间 (I)

令 $S \subseteq V$, 显然我们知道:

- S 不一定是一个子空间。
- S 可能为空。

生成一个子空间 (I)

令 $S \subseteq V$, 显然我们知道:

- S 不一定是一个子空间。
- S 可能为空。

如何取构造一个包含 S 的子空间?

生成一个子空间 (I)

令 $S \subseteq V$, 显然我们知道:

- S 不一定是一个子空间。
- S 可能为空。

如何取构造一个包含 S 的子空间?

$$\text{span}(S) = \{c_1v_1 + \cdots + c_kv_k \mid k \geq 0, c_1, \cdots, c_k \in \mathbb{R}, v_1, \dots, v_k \in S\}$$

定理 28.

令 $S \subseteq V$, 则 $\text{span}(S)$ 是 V 的包含 S 的最小子空间, 即:

1. $\text{span}(S)$ 是 V 的子空间。
2. 令 $W \subseteq V$ 是一个 V 的子空间, 且 $S \subseteq W$, 则 $\text{span}(S) \subseteq W$ 。



阶段总结



上海师范大学
Shanghai Normal University



阶段总结



上海师范大学
Shanghai Normal University

- 子空间的概念、例子以及性质。



阶段总结



上海师范大学
Shanghai Normal University

- 子空间的概念、例子以及性质。
- 矩阵的列空间和零空间。



- 子空间的概念、例子以及性质。
- 矩阵的列空间和零空间。
- 生成一个子空间。