上海师范大学 Shanghai Normal University

《线性代数》

7-解线性方程组 (II)(Solving Linear Equations(II))

杨启哲

上海师范大学信机学院计算机系

2024 年 4 月 12 日

复习：矩阵的列秩与行秩 (I)

定义 1 **[列秩 (Column Rank)].**

给定一个 $m \times n$ 的矩阵 A，其列秩 (Column Rank) 定义为：

$$\mathrm{column}-\mathrm{rank}(A) = \dim(C(A))$$

复习：矩阵的列秩与行秩 (I)

定义 1 **[列秩 (Column Rank)].**

给定一个 $m \times n$ 的矩阵 A，其列秩 (Column Rank) 定义为：

$$\text{column} - \text{rank}(A) = \dim(C(A))$$

定义 2 **[行秩 (Row Rank)].**

矩阵 A 的行秩 (Row Rank) 定义为：

$$\text{row}-\text{rank}(A) = \dim(C(A^T))$$

引理 3.
下面的叙述是等价的：

1. A 的行秩是 n.
2. A^{T} 的列秩是 n.
3. 存在一个矩阵 B，使得 $A^{\mathsf{T}}B = I$。
4. 存在一个矩阵 B，使得 $BA = I$

引理 3.

下面的叙述是等价的：

1. A 的行秩是 n.
2. A^T 的列秩是 n.
3. 存在一个矩阵 B，使得 $A^TB = I$。
4. 存在一个矩阵 B，使得 $BA = I$

定理 4.

给定一个 $m \times n$ 的矩阵，我们有 $\mathrm{row}\text{–}\mathrm{rank}(A) = \mathrm{column}\text{–}\mathrm{rank}(A)$.

复习：高斯若尔当消元法

复习：高斯若尔当消元法

上海师范大学 Shanghai Normal University

1. 考察一个矩阵:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

1. 考察一个矩阵：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

2. 注意到对于任意 $b \in \mathbb{R}^3$，方程 $Ax = b$ 都有解，这是因为通过高斯消元法可以发现 A 有3 个首元。从而我们通过高斯-若尔当消元法可以解出：

$$DE_{12}E_{13}E_{23}P_{23}E_{31}\begin{bmatrix} A & e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}$$

即存在 $B = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}$ 使得 $AB = I$.

1. 考察一个矩阵：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

2. 注意到对于任意 $b \in \mathbb{R}^3$，方程 $Ax = b$ 都有解，这是因为通过高斯消元法可以发现 A 有3 个首元。从而我们通过高斯-若尔当消元法可以解出：

$$DE_{12}E_{13}E_{23}P_{23}E_{31} \begin{bmatrix} A & e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}$$

即存在 $B = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}$ 使得 $AB = I$.

3. 另一方面，如果令 $C = DE_{12}E_{13}E_{23}P_{23}E_{31}$，我们也有 $CA = I$.

复习：高斯若尔当消元法

1. 考察一个矩阵：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

2. 注意到对于任意 $b \in \mathbb{R}^3$，方程 $Ax = b$ 都有解，这是因为通过高斯消元法可以发现 A 有3 个首元。从而我们通过高斯-若尔当消元法可以解出：

$$DE_{12}E_{13}E_{23}P_{23}E_{31}\begin{bmatrix} A & e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}$$

即存在 $B = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}$ 使得 $AB = I$.

3. 另一方面，如果令 $C = DE_{12}E_{13}E_{23}P_{23}E_{31}$，我们也有 $CA = I$.
4. 最终我们可以发现 A 是可逆的，并且：

$$A^{-1} = B = C = DE_{12}E_{13}E_{23}P_{23}E_{31}$$

上海师范大学 Shanghai Normal University

引理 5.

令 A 是一个 $n \times n$ 的矩阵, 下面的叙述是等价的:

1. A 是可逆的。
2. 方程 $Ax = b$ 对任意 $b \in \mathbb{R}^m$ 都有唯一解.
3. $\dim(C(A)) = n$.
4. $\dim(C(A^T)) = n$.
5. 存在矩阵 B 使得 $AB = I$。
6. 存在矩阵 C 使得 $CA = I$。
7. A 有 n 个首元。

主要内容

- 矩阵的秩
- $A\mathrm{x} = \mathbf{0}$ 的解
- $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ 的解

矩阵的秩

行阶梯形

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
\quad \Leftrightarrow \quad
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}
$$

行阶梯形

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad & \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

对于其中每个 $i \in [m]$，我们定义：

$$j_i = \begin{cases} +\infty & \text{如果第 } i \text{ 行是零行} \\ \min\{j \in [n] : a_{ij} \neq 0\} & \text{o.w.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

对于其中每个 $i \in [m]$，我们定义：

$$j_i = \begin{cases} +\infty & \text{如果第 } i \text{ 行是零行} \\ \min\{j \in [n] : a_{ij} \neq 0\} & \text{o.w.} \end{cases}$$

即 a_{ji} 是第 j 行中最左边的不为 0 的系数。

行阶梯形 (Row Echelon Form)

这个方程组，或者说对应的系数矩阵，是行阶梯形的，如果存在 $0 \leqslant r \leqslant m$ 使得：

$$j_1 < j_2 < \cdots < j_r, \quad j_{r+1} = \cdots = j_m = +\infty$$

这也意味着该方程组具有 r 个首元 $a_{1j_1}, \ldots, a_{rj_r}$。

行阶梯形的例子

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 5 \\
1x_2 + 2x_3 &= 3 \\
1x_3 &= 2
\end{aligned}
\quad \Leftrightarrow \quad
\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

行阶梯形的例子

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 5 \\ 1x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 1x_3 &= 2 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

行阶梯形的例子

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 5 \\
1x_2 + 2x_3 &= 3 \\
1x_3 &= 2
\end{aligned}
\quad \Leftrightarrow \quad
\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
4x_1 - 13x_2 + 2x_4 &= 0 \\
11x_2 + x_4 &= 6
\end{aligned}
\quad \Leftrightarrow \quad
\begin{bmatrix} 4 & -13 & 0 & 2 \\ 0 & 11 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}
$$

行阶梯形的例子

$$\begin{aligned} 2x_1+3x_2+4x_3&=5\\ 1x_2+2x_3&=3\\ 1x_3&=2 \end{aligned} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{bmatrix} 2&3&4\\ 0&1&2\\ 0&0&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5\\ 3\\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 4x_1-13x_2+2x_4&=0\\ 11x_2+x_4&=6 \end{aligned} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{bmatrix} 4&-13&0&2\\ 0&11&0&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 4x_1-13x_2+2x_4&=0\\ 11x_2+x_4&=6\\ 0&=7 \end{aligned} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{bmatrix} 4&-13&0&2\\ 0&11&0&1\\ 0&0&0&0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\\ 6\\ 7 \end{bmatrix}$$

高斯消元法的精确描述 (I)

我们维护一个值 $r \leqslant m$ 使得:

高斯消元法的精确描述 (I)

我们维护一个值 $r \leqslant m$ 使得:

R1 第一行到第 r 行已经满足行阶梯形的形式 (Row Echelon Form)，即:

$$j_1 < j_2 < \cdots < j_r \leqslant n$$

高斯消元法的精确描述 (I)

我们维护一个值 $r \leqslant m$ 使得:

R1 第一行到第 r 行已经满足行阶梯形的形式 (Row Echelon Form)，即:

$$j_1 < j_2 < \cdots < j_r \leqslant n$$

R2 对于矩阵中第 $r+1$ 行到第 m 行第 1 列到第 j_r 列是一个全零矩阵，即:

$$a_{ij} = 0, \quad \forall i \in [r+1, m], \forall j \in [1, j_r]$$

高斯消元法的精确描述 (II)

第 1 步

1. 选择最小的 $j \in [n]$ 使得第 j 列有非零的元素，如果这样的 j 不存在，意味着 $A = O$ 并且当 $r = 0$ 时 R1，R2 已经满足，算法结束。

高斯消元法的精确描述 (II)

第 1 步

1. 选择最小的 $j \in [n]$ 使得第 j 列有非零的元素，如果这样的 j 不存在，意味着 $A = O$ 并且当 $r = 0$ 时 R1，R2 已经满足，算法结束。
2. 选择最小的 $i \in [m]$ 使得第 $a_{ij} \neq 0$。

高斯消元法的精确描述 (II)

上海师范大学 Shanghai Normal University

第 1 步

1. 选择最小的 $j \in [n]$ 使得第 j 列有非零的元素，如果这样的 j 不存在，意味着 $A = O$ 并且当 $r = 0$ 时 R1，R2 已经满足，算法结束。
2. 选择最小的 $i \in [m]$ 使得第 $a_{ij} \neq 0$。
3. 将第 1 行与第 i 行进行交换，交换后我们得到在新的第一行中 $a_{1j} \neq 0$, 并且对于所有的 $t \in [1, j-1]$ 都有 $a_{1t} = 0$，此时我们有：$j_1 = j$.

高斯消元法的精确描述 (II)

上海师范大学 Shanghai Normal University

第 1 步

1. 选择最小的 $j \in [n]$ 使得第 j 列有非零的元素，如果这样的 j 不存在，意味着 $A = O$ 并且当 $r = 0$ 时 R1，R2 已经满足，算法结束。
2. 选择最小的 $i \in [m]$ 使得第 $a_{ij} \neq 0$。
3. 将第 1 行与第 i 行进行交换，交换后我们得到在新的第一行中 $a_{1j} \neq 0$, 并且对于所有的 $t \in [1, j-1]$ 都有 $a_{1t} = 0$，此时我们有：$j_1 = j$.
4. 对每个 $i' > 1$，我们将第 i' 行替换成：

$$(\text{row } i') - \frac{a_{i'j}}{a_{1j}} (\text{row } 1)$$

替换之后我们有对于所有的 $i' > 1$，$a_{i'j} = 0$。

高斯消元法的精确描述 (II)

上海师范大学 Shanghai Normal University

第 1 步

1. 选择最小的 $j \in [n]$ 使得第 j 列有非零的元素，如果这样的 j 不存在，意味着 $A = O$ 并且当 $r = 0$ 时 R1，R2 已经满足，算法结束。
2. 选择最小的 $i \in [m]$ 使得第 $a_{ij} \neq 0$。
3. 将第 1 行与第 i 行进行交换，交换后我们得到在新的第一行中 $a_{1j} \neq 0$, 并且对于所有的 $t \in [1, j-1]$ 都有 $a_{1t} = 0$，此时我们有：$j_1 = j$.
4. 对每个 $i' > 1$，我们将第 i' 行替换成：

$$(\text{row } i') - \frac{a_{i'j}}{a_{1j}}(\text{row } 1)$$

替换之后我们有对于所有的 $i' > 1$，$a_{i'j} = 0$。

第 1 步

1. 选择最小的 $j \in [n]$ 使得第 j 列有非零的元素，如果这样的 j 不存在，意味着 $A = O$ 并且当 $r = 0$ 时 R1，R2 已经满足，算法结束。
2. 选择最小的 $i \in [m]$ 使得第 $a_{ij} \neq 0$。
3. 将第 1 行与第 i 行进行交换，交换后我们得到在新的第一行中 $a_{1j} \neq 0$, 并且对于所有的 $t \in [1, j-1]$ 都有 $a_{1t} = 0$，此时我们有：$j_1 = j$.
4. 对每个 $i' > 1$，我们将第 i' 行替换成：

$$(\text{row } i') - \frac{a_{i'j}}{a_{1j}}(\text{row } 1)$$

替换之后我们有对于所有的 $i' > 1$，$a_{i'j} = 0$。

显然此时对于 $r = 1$，R1 和 R2 都是满足的。

高斯消元法的精确描述 (III)

第 $i+1$ 步

此时矩阵对于 $r=i$，R1 和 R2 都是满足的，我们继续进行下一步：

高斯消元法的精确描述 (III)

第 $i+1$ 步

此时矩阵对于 $r=i$，R1 和 R2 都是满足的，我们继续进行下一步：

1. 选择最小的 $j \in [j_i+1, n]$ 使得存在 $i' \in [i+1, m]$ 使得 $a_{i'j} \neq 0$，如果这样的 j 不存在，算法结束。

高斯消元法的精确描述 (III)

第 $i+1$ 步

此时矩阵对于 $r=i$，R1 和 R2 都是满足的，我们继续进行下一步：

1. 选择最小的 $j \in [j_i+1, n]$ 使得存在 $i' \in [i+1, m]$ 使得 $a_{i'j} \neq 0$，如果这样的 j 不存在，算法结束。
2. 选择最小的 $i' \in [i+1, m]$ 使得第 $a_{i'j} \neq 0$。

第 $i+1$ 步

此时矩阵对于 $r=i$，R1 和 R2 都是满足的，我们继续进行下一步：

1. 选择最小的 $j \in [j_i+1, n]$ 使得存在 $i' \in [i+1, m]$ 使得 $a_{i'j} \neq 0$，如果这样的 j 不存在，算法结束。
2. 选择最小的 $i' \in [i+1, m]$ 使得第 $a_{i'j} \neq 0$。
3. 将第 $i+1$ 行与第 i' 行进行交换，交换后我们得到在新的第 $i+1$ 行中 $a_{(i+1)j} \neq 0$，并且对于所有的 $t \in [1, j-1]$ 都有 $a_{(i+1)t} = 0$，此时我们有：$j_{i+1} = j$.

第 $i+1$ 步

此时矩阵对于 $r=i$，R1 和 R2 都是满足的，我们继续进行下一步：

1. 选择最小的 $j \in [j_i+1, n]$ 使得存在 $i' \in [i+1, m]$ 使得 $a_{i'j} \neq 0$，如果这样的 j 不存在，算法结束。
2. 选择最小的 $i' \in [i+1, m]$ 使得第 $a_{i'j} \neq 0$。
3. 将第 $i+1$ 行与第 i' 行进行交换，交换后我们得到在新的第 $i+1$ 行中 $a_{(i+1)j} \neq 0$，并且对于所有的 $t \in [1, j-1]$ 都有 $a_{(i+1)t} = 0$，此时我们有：$j_{i+1} = j$.
4. 对每个 $i' > i+1$，我们将第 i' 行替换成：

$$(\text{row } i') - \frac{a_{i'j}}{a_{(i+1)j}} (\text{row } (i+1))$$

替换之后我们有对于所有的 $i' > i+1$，$a_{i'j} = 0$。

第 $i+1$ 步

此时矩阵对于 $r=i$，R1 和 R2 都是满足的，我们继续进行下一步：

1. 选择最小的 $j \in [j_i+1, n]$ 使得存在 $i' \in [i+1, m]$ 使得 $a_{i'j} \neq 0$，如果这样的 j 不存在，算法结束。
2. 选择最小的 $i' \in [i+1, m]$ 使得第 $a_{i'j} \neq 0$。
3. 将第 $i+1$ 行与第 i' 行进行交换，交换后我们得到在新的第 $i+1$ 行中 $a_{(i+1)j} \neq 0$，并且对于所有的 $t \in [1, j-1]$ 都有 $a_{(i+1)t} = 0$，此时我们有：$j_{i+1} = j$.
4. 对每个 $i' > i+1$，我们将第 i' 行替换成：

$$(\text{row } i') - \frac{a_{i'j}}{a_{(i+1)j}}(\text{row } (i+1))$$

替换之后我们有对于所有的 $i' > i+1$，$a_{i'j} = 0$。

上海师范大学 Shanghai Normal University

第 $i+1$ 步

此时矩阵对于 $r=i$，R1 和 R2 都是满足的，我们继续进行下一步:

1. 选择最小的 $j \in [j_i+1, n]$ 使得存在 $i' \in [i+1, m]$ 使得 $a_{i'j} \neq 0$，如果这样的 j 不存在，算法结束。
2. 选择最小的 $i' \in [i+1, m]$ 使得第 $a_{i'j} \neq 0$。
3. 将第 $i+1$ 行与第 i' 行进行交换，交换后我们得到在新的第 $i+1$ 行中 $a_{(i+1)j} \neq 0$, 并且对于所有的 $t \in [1, j-1]$ 都有 $a_{(i+1)t}=0$，此时我们有: $j_{i+1}=j$.
4. 对每个 $i' > i+1$，我们将第 i' 行替换成:

$$(\text{row } i') - \frac{a_{i'j}}{a_{(i+1)j}}(\text{row } (i+1))$$

替换之后我们有对于所有的 $i' > i+1$，$a_{i'j}=0$。

显然此时对于 $r=i+1$，R1 和 R2 都是满足的。

一个例子 (I)

考察这样一个矩阵:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

第一步的具体过程

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

一个例子 (I)

考察这样一个矩阵:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

第一步的具体过程

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

一个例子 (I)

考察这样一个矩阵:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

第一步的具体过程

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

一个例子 (I)

考察这样一个矩阵:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

第一步的具体过程

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

一个例子 (I)

考察这样一个矩阵:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

第一步的具体过程

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

一个例子 (I)

考察这样一个矩阵:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

第一步的具体过程

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

一个例子 (II)

第二步的具体过程

$$\begin{bmatrix} \color{blue}{0} & \color{red}{2} & \color{blue}{4} & \color{blue}{2} & \color{blue}{0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

一个例子 (II)

第二步的具体过程

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

一个例子 (II)

第二步的具体过程

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

一个例子 (II)

第二步的具体过程

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

第二步的具体过程

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

上海师范大学 Shanghai Normal University

第二步的具体过程

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

一个例子 (III)

第三步的具体过程

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

一个例子 (III)

第三步的具体过程

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

一个例子 (III)

第三步的具体过程

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

一个例子 (III)

第三步的具体过程

$$
\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}
\Rightarrow
\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}
\Rightarrow
\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}
$$

$$
\Rightarrow
\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

第三步的具体过程

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

此时我们有:

$$j_1 = 2, \quad j_2 = 3, \quad j_3 = 5$$

引理 6.

给定一个 $m \times n$ 的矩阵 A，高斯消元法将 A 变成一个有 r 个首元的行阶梯形矩阵 U。

引理 6.

给定一个 $m \times n$ 的矩阵 A，高斯消元法将 A 变成一个有 r 个首元的行阶梯形矩阵 U。

我们利用首元的个数来定义矩阵的秩。

定义 7 **[矩阵的秩 (Rank)].**

给定一个 $m \times n$ 的矩阵 A，其秩 (rank) 定义为：

$$\operatorname{rank}(A) = \text{矩阵 } A \text{ 的首元的个数} = r$$

引理 6.

给定一个 $m \times n$ 的矩阵 A，高斯消元法将 A 变成一个有 r 个首元的行阶梯形矩阵 U。

我们利用首元的个数来定义矩阵的秩。

定义 7 [矩阵的秩 (Rank)].

给定一个 $m \times n$ 的矩阵 A，其秩 (rank) 定义为:

$$\mathrm{rank}(A) = \text{矩阵 } A \text{ 的首元的个数} = r$$

定理 8.

$$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{row{-}rank}(A) = \mathrm{column{-}rank}(A)$$

行最简形

为了证明定理8，我们考虑行最简形矩阵。

上海师范大学 Shanghai Normal University

为了证明定理8，我们考虑行最简形矩阵。

行最简形 (Reduced Row Echelon Form)

回顾一个 $m \times n$ 矩阵 A，定义：

$$j_i = \begin{cases} +\infty & \text{如果第 } i \text{ 行是零行} \\ \min\{j \in [n] : a_{ij} \neq 0\} & \text{o.w.} \end{cases}$$

则称 A 是行最简形的 (Reduced Row Echelon Form)，如果：

1. 其是行阶梯形的，即存在 $0 \leqslant r \leqslant m$ 使得：
$$j_1 < j_2 < \cdots < j_r, \quad j_{r+1} = \cdots = j_m = +\infty$$
2. $a_{1j_1} = \cdots = a_{rj_r} = 1$，即所有的首元都是 1。
3. 对于所有的 $l \in [1, r], i \in [1, l-1] \cup [l+1, m]$，我们都有 $a_{ij_l} = 0$，即在首元的那一列中，除了首元之外的所有元素都是 0。

行最简形的例子

Shanghai Normal University

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

行最简形的例子

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

行最简形的例子

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

定理 9.

高斯若尔当消元法会将矩阵 A 变成一个行最简形矩阵 R。

定理 9.

高斯若尔当消元法会将矩阵 A 变成一个行最简形矩阵 R。

定理 10.

我们有:

1. $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(R)$.
2. $\mathrm{rank}(R) = \mathrm{column-rank}(R) = \mathrm{row-rank}(R)$.

行变换

我们知道高斯若尔当消元法是通过一系列的行变换来实现的，其中一共有三种行变换:

行变换

我们知道高斯若尔当消元法是通过一系列的行变换来实现的，其中一共有三种行变换:

1. 行加法（Row Addition）。

行变换

我们知道高斯若尔当消元法是通过一系列的行变换来实现的，其中一共有三种行变换：

1. 行加法（Row Addition）。
2. 行交换（Row Exchange）。

行变换

我们知道高斯若尔当消元法是通过一系列的行变换来实现的，其中一共有三种行变换：

1. 行加法（Row Addition）。
2. 行交换（Row Exchange）。
3. 行乘法（Row Multiplication）。

行变换

我们知道高斯若尔当消元法是通过一系列的行变换来实现的，其中一共有三种行变换：

1. 行加法（Row Addition）。
2. 行交换（Row Exchange）。
3. 行乘法（Row Multiplication）。

行变换

我们知道高斯若尔当消元法是通过一系列的行变换来实现的，其中一共有三种行变换:

1. 行加法（Row Addition）。
2. 行交换（Row Exchange）。
3. 行乘法（Row Multiplication）。

我们称其为初等行变换 (Row Elementary Operations)。

回顾：行加法

$$E_{ij}(-k)A = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & -k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i - ka_j \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

回顾：行加法

$$E_{ij}(-k)A = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & -k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i - ka_j \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

引理 11.

$E_{ij}^{-1}(-k) = E_{ij}(k)$

回顾：行交换

$$P_{ij}A = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

$$P_{ij}A = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

引理 12.

$P_{ij}^{-1} = P_{ij}$

回顾：行乘法

$$
D_i(k)A = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & k & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ ka_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}
$$

$$D_i(k)A = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & k & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ ka_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

引理 13.

$D_i(k)^{-1} = D_i(\frac{1}{k})$

定理 14.

初等行变换不改变矩阵的行秩和列秩。

行变换的性质 (I)

Shanghai Normal University

定理 14.

初等行变换不改变矩阵的行秩和列秩。

证明. 我们先来证明行变换不改变矩阵的行秩。事实上，令 $A = \begin{bmatrix} a_1^T & a_i^T & \cdots & a_m^T \end{bmatrix}^T$，即令其写成行向量的形式，这里 a_i 是 $1 \times n$ 的行向量。

定理 14.

初等行变换不改变矩阵的行秩和列秩。

证明. 我们先来证明行变换不改变矩阵的行秩。事实上，令 $A = \begin{bmatrix} a_1^T & a_i^T & \cdots & a_m^T \end{bmatrix}^T$，即令其写成行向量的形式，这里 a_i 是 $1 \times n$ 的行向量。则经过一次初等行变换后，矩阵会变成如下的形式:

$$A' = \begin{bmatrix} a_1' \\ \vdots \\ a_i' \\ \vdots \\ a_m' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ ka_i \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \text{或者} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i - ka_j \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \text{或者} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

行变换的性质 (II)

上海师范大学 Shanghai Normal University

$$A' = \begin{bmatrix} a_1' \\ \vdots \\ a_i' \\ \vdots \\ a_m' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ ka_i \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \text{或者} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i - ka_j \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \text{或者} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

行变换的性质 (II)

$$A' = \begin{bmatrix} a_1' \\ \vdots \\ a_i' \\ \vdots \\ a_m' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ ka_i \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \text{或者} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i - ka_j \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \text{或者} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

我们有:

$$C(A^T) = \mathrm{span}(\{a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_j, \ldots, a_m\})$$

行变换的性质 (II)

$$A' = \begin{bmatrix} a'_1 \\ \vdots \\ a'_i \\ \vdots \\ a'_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ ka_i \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \text{或者} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i - ka_j \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \text{或者} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

我们有:

$$\begin{aligned} C(A^T) &= span(\{a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_j, \ldots, a_m\}) \\ &= span(\{a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_i, \ldots, a_m\}) \end{aligned}$$

行变换的性质 (II)

$$A' = \begin{bmatrix} a_1' \\ \vdots \\ a_i' \\ \vdots \\ a_m' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ ka_i \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \text{或者} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i - ka_j \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \text{或者} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

我们有:

$$\begin{aligned} C(A^T) &= \text{span}(\{a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_j, \ldots, a_m\}) \\ &= \text{span}(\{a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_i, \ldots, a_m\}) \\ &= \text{span}(\{a_1, \ldots, ka_i, \ldots, a_j, \ldots, a_m\}) \end{aligned}$$

行变换的性质 (II)

$$A' = \begin{bmatrix} a_1' \\ \vdots \\ a_i' \\ \vdots \\ a_m' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ ka_i \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \text{或者} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i - ka_j \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \text{或者} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

我们有:

$$\begin{aligned} C(A^T) &= span(\{a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_j, \ldots, a_m\}) \\ &= span(\{a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_i, \ldots, a_m\}) \\ &= span(\{a_1, \ldots, ka_i, \ldots, a_j, \ldots, a_m\}) \\ &= span(\{a_1, \ldots, a_i - ka_j, \ldots, a_j, \ldots, a_m\}) \end{aligned}$$

行变换的性质 (II)

$$A' = \begin{bmatrix} a_1' \\ \vdots \\ a_i' \\ \vdots \\ a_m' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ ka_i \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \text{或者} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i - ka_j \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \text{或者} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

我们有:

$$\begin{aligned} C(A^T) &= \mathrm{span}(\{a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_j, \ldots, a_m\}) \\ &= \mathrm{span}(\{a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_i, \ldots, a_m\}) \\ &= \mathrm{span}(\{a_1, \ldots, ka_i, \ldots, a_j, \ldots, a_m\}) \\ &= \mathrm{span}(\{a_1, \ldots, a_i - ka_j, \ldots, a_j, \ldots, a_m\}) \end{aligned}$$

即:

$$\mathrm{row{-}rank}(A) = \dim(C(A^T)) = \dim(C(A'^T)) = \mathrm{row{-}rank}(A')$$

行变换的性质 (III)

我们现在来考虑列秩。

行变换的性质 (III)

我们现在来考虑列秩。

- 事实上，由于我们已经证明列秩和行秩是相等的，所以我们已经可以得到列秩不改变的结论。

行变换的性质 (III)

我们现在来考虑列秩。

- 事实上，由于我们已经证明列秩和行秩是相等的，所以我们已经可以得到列秩不改变的结论。
- 但我们依旧想直接证明一下。我们只在这里考虑列交换的情况，其他的情况大家可以自行练习。

行变换的性质 (III)

我们现在来考虑列秩。

- 事实上，由于我们已经证明列秩和行秩是相等的，所以我们已经可以得到列秩不改变的结论。
- 但我们依旧想直接证明一下。我们只在这里考虑列交换的情况，其他的情况大家可以自行练习。

行变换的性质 (III)

我们现在来考虑列秩。

- 事实上，由于我们已经证明列秩和行秩是相等的，所以我们已经可以得到列秩不改变的结论。
- 但我们依旧想直接证明一下。我们只在这里考虑列交换的情况，其他的情况大家可以自行练习。

我们将 A 写成列向量的形式：

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{a}_1 & \cdots & \mathrm{a}_i & \cdots & \mathrm{a}_j & \cdots & \mathrm{a}_n \end{bmatrix}$$

行变换的性质 (IV)

交换第 i 行和第 j 行后:

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1' & \cdots & a_i' & \cdots & a_j' & \cdots & a_n' \end{bmatrix}$$

行变换的性质 (IV)

上海师范大学 Shanghai Normal University

交换第 i 行和第 j 行后:

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1' & \cdots & a_i' & \cdots & a_j' & \cdots & a_n' \end{bmatrix}$$

- 我们比较一下 a_i 和 a_j:

行变换的性质 (IV)

交换第 i 行和第 j 行后:

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a'_1 & \cdots & a'_i & \cdots & a'_j & \cdots & a'_n \end{bmatrix}$$

- 我们比较一下 a_i 和 a_j:

$$a_i = \begin{bmatrix} a_{i1} & \dots & \color{red}{a_{ik}} & \dots & \color{red}{a_{jk}} & \dots & a_{in} \end{bmatrix}^T$$

行变换的性质 (IV)

交换第 i 行和第 j 行后:

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1' & \cdots & a_i' & \cdots & a_j' & \cdots & a_n' \end{bmatrix}$$

- 我们比较一下 a_i 和 a_j:

$$a_i = \begin{bmatrix} a_{i1} & \dots & a_{ik} & \dots & a_{jk} & \dots & a_{in} \end{bmatrix}^T$$

$$a_i' = \begin{bmatrix} a_{i1} & \dots & a_{jk} & \dots & a_{ik} & \dots & a_{in} \end{bmatrix}^T$$

上海师范大学 Shanghai Normal University

我们现在需要证明:

$$\dim(\mathrm{span}(\{a_1, \ldots, a_n\})) = \dim(\mathrm{span}(\{a_1', \ldots, a_n'\}))$$

行变换的性质 (V)

我们现在需要证明:

$$\dim(\mathrm{span}(\{a_1,\dots,a_n\})) = \dim(\mathrm{span}(\{a_1',\dots,a_n'\}))$$

我们可以发现，对于任意的 $t\in[n]$, $1\leqslant k_1\leqslant k_2\leqslant\cdots\leqslant k_t\leqslant n$ 和任意的 $c_1,\dots,c_t\in\mathbb{R}$, 我们有:

$$\sum_{l\in[t]} c_l a_{k_l} = \mathbf{0} \quad\Leftrightarrow\quad \sum_{l\in[t]} c_l a'_{k_l} = \mathbf{0}$$

上海师范大学 Shanghai Normal University

我们现在需要证明:

$$\dim(\mathrm{span}(\{a_1,\ldots,a_n\}))=\dim(\mathrm{span}(\{a'_1,\ldots,a'_n\}))$$

我们可以发现，对于任意的 $t\in[n]$, $1\leqslant k_1\leqslant k_2\leqslant\cdots\leqslant k_t\leqslant n$ 和任意的 $c_1,\ldots,c_t\in\mathbb{R}$, 我们有:

$$\sum_{l\in[t]} c_l a_{k_l}=\mathbf{0}\quad\Leftrightarrow\quad\sum_{l\in[t]} c_l a'_{k_l}=\mathbf{0}$$

也就是说:

- $a_{k_1},\ldots a_{k_t}$ 是线性相关的当且仅当 $a'_{k_1},\ldots a'_{k_t}$ 是线性相关的。

行变换的性质 (V)

我们现在需要证明:

$$\dim(\mathrm{span}(\{a_1,\dots,a_n\})) = \dim(\mathrm{span}(\{a_1',\dots,a_n'\}))$$

我们可以发现，对于任意的 $t \in [n]$, $1 \leqslant k_1 \leqslant k_2 \leqslant \cdots \leqslant k_t \leqslant n$ 和任意的 $c_1,\dots,c_t \in \mathbb{R}$, 我们有:

$$\sum_{l\in[t]} c_l a_{k_l} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{l\in[t]} c_l a'_{k_l} = \mathbf{0}$$

也就是说:

- $a_{k_1},\dots a_{k_t}$ 是线性相关的当且仅当 $a'_{k_1},\dots a'_{k_t}$ 是线性相关的。
- $a_{k_1},\dots a_{k_t}$ 是 $\mathrm{span}(a_1,\dots,a_n)$ 的一组基当且仅当 $a'_{k_1},\dots a'_{k_t}$ 是 $\mathrm{span}(a_1',\dots,a_n')$ 的一组基。

行变换的性质 (V)

我们现在需要证明:

$$\dim(\mathrm{span}(\{a_1, \ldots, a_n\})) = \dim(\mathrm{span}(\{a'_1, \ldots, a'_n\}))$$

我们可以发现，对于任意的 $t \in [n]$, $1 \leqslant k_1 \leqslant k_2 \leqslant \cdots \leqslant k_t \leqslant n$ 和任意的 $c_1, \ldots, c_t \in \mathbb{R}$, 我们有:

$$\sum_{l \in [t]} c_l a_{k_l} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{l \in [t]} c_l a'_{k_l} = \mathbf{0}$$

也就是说:

- $a_{k_1}, \ldots a_{k_t}$ 是线性相关的当且仅当 $a'_{k_1}, \ldots a'_{k_t}$ 是线性相关的。
- $a_{k_1}, \ldots a_{k_t}$ 是 $\mathrm{span}(a_1, \ldots, a_n)$ 的一组基当且仅当 $a'_{k_1}, \ldots a'_{k_t}$ 是 $\mathrm{span}(a'_1, \ldots, a'_n)$ 的一组基。

我们现在需要证明:

$$\dim(\text{span}(\{a_1, \ldots, a_n\})) = \dim(\text{span}(\{a'_1, \ldots, a'_n\}))$$

我们可以发现，对于任意的 $t \in [n]$, $1 \leqslant k_1 \leqslant k_2 \leqslant \cdots \leqslant k_t \leqslant n$ 和任意的 $c_1, \ldots, c_t \in \mathbb{R}$, 我们有:

$$\sum_{l \in [t]} c_l a_{k_l} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{l \in [t]} c_l a'_{k_l} = \mathbf{0}$$

也就是说:

- $a_{k_1}, \ldots a_{k_t}$ 是线性相关的当且仅当 $a'_{k_1}, \ldots a'_{k_t}$ 是线性相关的。
- $a_{k_1}, \ldots a_{k_t}$ 是 $\text{span}(a_1, \ldots, a_n)$ 的一组基当且仅当 $a'_{k_1}, \ldots a'_{k_t}$ 是 $\text{span}(a'_1, \ldots, a'_n)$ 的一组基。

从而:

$$\dim(C(A)) = \dim(\text{span}(\{a_1, \ldots, a_n\})) = \dim(\text{span}(\{a'_1, \ldots, a'_n\})) = \dim(C(A'))$$

□

定理8的证明

让我们回到定理8。

定理 8.

$$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{row{-}rank}(A) = \mathrm{column{-}rank}(A)$$

定理8的证明

让我们回到定理8。

定理 8.

$$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{row}\text{—}\mathrm{rank}(A) = \mathrm{column}\text{—}\mathrm{rank}(A)$$

证明.

1. 我们将 A 变成行阶梯形矩阵 U，并且假设其有 r 个首元，则 $\mathrm{rank}(A) = r$。

定理8的证明

让我们回到定理8。

定理 8.

$$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{row{-}rank}(A) = \mathrm{column{-}rank}(A)$$

证明.

1. 我们将 A 变成行阶梯形矩阵 U，并且假设其有 r 个首元，则 $\mathrm{rank}(A) = r$。
2. 进一步我们将 U 变换成行最简形，得到 R，其还是有 r 个首元。

定理8的证明

让我们回到定理8。

定理 8.

$$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{row\text{-}rank}(A) = \mathrm{column\text{-}rank}(A)$$

证明.

1. 我们将 A 变成行阶梯形矩阵 U，并且假设其有 r 个首元，则 $\mathrm{rank}(A) = r$。
2. 进一步我们将 U 变换成行最简形，得到 R，其还是有 r 个首元。
3. $\mathrm{rank}(R) = \mathrm{column\text{-}rank}(R) = \mathrm{row\text{-}rank}(R) = r = \mathrm{rank}(A)$.

定理8的证明

让我们回到定理8。

定理 8.

$$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{row{-}rank}(A) = \mathrm{column{-}rank}(A)$$

证明.

1. 我们将 A 变成行阶梯形矩阵 U，并且假设其有 r 个首元，则 $\mathrm{rank}(A) = r$。
2. 进一步我们将 U 变换成行最简形，得到 R，其还是有 r 个首元。
3. $\mathrm{rank}(R) = \mathrm{column{-}rank}(R) = \mathrm{row{-}rank}(R) = r = \mathrm{rank}(A).$
4. 注意到我们只使用了初等行变换，从而：

$$\mathrm{column{-}rank}(A) = \mathrm{column{-}rank}(R), \quad \mathrm{row{-}rank}(A) = \mathrm{row{-}rank}(R)$$

即：

$$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{row{-}rank}(A) = \mathrm{column{-}rank}(A)$$

阶段总结

阶段总结

- 矩阵的秩 $\mathrm{rank}(A) =$ 矩阵的首元个数。

阶段总结

- 矩阵的秩 $\mathrm{rank}(A) =$ 矩阵的首元个数。
- $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{row{-}rank}(A) = \mathrm{column{-}rank}(A).$

阶段总结

- 矩阵的秩 $\mathrm{rank}(A) =$ 矩阵的首元个数。
- $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{row{-}rank}(A) = \mathrm{column{-}rank}(A)$.

- 矩阵的秩 $\mathrm{rank}(A) =$ 矩阵的首元个数。
- $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{row{-}rank}(A) = \mathrm{column{-}rank}(A)$.

引理 9.

令 A 是一个 $n \times n$ 的矩阵, 下面的叙述是等价的:

1. A 是可逆的。
2. 方程 $Ax = b$ 对任意 $b \in \mathbb{R}^m$ 都有唯一解.
3. $\mathrm{rank}(A) = n$.
4. $\mathrm{column{-}rank}(A) = n$.
5. $\mathrm{row{-}rank}(A) = n$.
6. 存在矩阵 B 使得 $AB = I$。
7. 存在矩阵 C 使得 $CA = I$。

关于方程 $Ax = b$

当 A 是可逆矩阵的时候，我们已经足够清楚 $Ax = b$ 的解了。

当 A 是可逆矩阵的时候，我们已经足够清楚 $Ax = b$ 的解了。

问题 10.

那对于任意的 A，比如 A 不是可逆的，或者说 A 不是方阵的情况那?

$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解

定义 11 **[零空间 (Null Space)].**

给定一个 $m \times n$ 的矩阵 A，定义其零空间 $N(A)$ 为：

$$N(A) = \{x \mid Ax = \mathbf{0}\}$$

即 $N(A)$ 是所有满足 $Ax = \mathbf{0}$ 的 x 的集合。

定义 11 **[零空间 (Null Space)].**

给定一个 $m \times n$ 的矩阵 A，定义其零空间 $N(A)$ 为：

$$N(A) = \{x \mid Ax = \mathbf{0}\}$$

即 $N(A)$ 是所有满足 $Ax = \mathbf{0}$ 的 x 的集合。

定理 12.

零空间 $N(A)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子空间。

引理 13.

$N(A) \subseteq \mathbb{R}^n$，从而 $\dim(N(A)) \leqslant n$.

引理 14.

$\dim(C(A)) = n$ 当且仅当 $\dim(N(A)) = 0$。

说明

事实上，这是线性代数基本定理的一个特殊情况:

$$\dim(C(A)) + \dim(N(A)) = n$$

证明. 令

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

引理13的证明

证明. 令

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

则我们有:

$$\dim(C(A)) = \dim(\mathrm{span}(\{a_1, \ldots, a_n\})) = n$$

引理13的证明

证明. 令

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

则我们有:

$$\begin{aligned} \dim(C(A)) = \dim(\mathrm{span}(\{a_1, \ldots, a_n\})) = n \\ \Leftrightarrow a_1, \ldots, a_n \text{是 } C(A) \text{ 的一组基} \end{aligned}$$

引理13的证明

证明. 令

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

则我们有:

$$\begin{aligned} \dim(C(A)) = \dim(\mathrm{span}(\{a_1, \ldots, a_n\})) = n \\ \Leftrightarrow a_1, \ldots, a_n \text{是 } C(A) \text{ 的一组基} \\ \Leftrightarrow a_1, \ldots, a_n \text{线性无关} \end{aligned}$$

证明. 令

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

则我们有:

$$\begin{aligned} \dim(C(A)) &= \dim(\mathrm{span}(\{a_1, \ldots, a_n\})) = n \\ &\Leftrightarrow a_1, \ldots, a_n \text{是 } C(A) \text{ 的一组基} \\ &\Leftrightarrow a_1, \ldots, a_n \text{线性无关} \\ &\Leftrightarrow N(A) = Z \end{aligned}$$

证明. 令

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

则我们有:

$$\begin{aligned} \dim(C(A)) = \dim(\mathrm{span}(\{a_1, \ldots, a_n\})) = n \\ \Leftrightarrow a_1, \ldots, a_n \text{是 } C(A) \text{ 的一组基} \\ \Leftrightarrow a_1, \ldots, a_n \text{线性无关} \\ \Leftrightarrow N(A) = Z \\ \Leftrightarrow \dim(N(A)) = 0 \end{aligned}$$

□

引理13的证明

证明. 令

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

则我们有:

$$\begin{aligned} \dim(C(A)) = \dim(\mathrm{span}(\{a_1, \ldots, a_n\})) = n \\ &\Leftrightarrow a_1, \ldots, a_n \text{是 } C(A) \text{ 的一组基} \\ &\Leftrightarrow a_1, \ldots, a_n \text{线性无关} \\ &\Leftrightarrow N(A) = Z \\ &\Leftrightarrow \dim(N(A)) = 0 \end{aligned}$$

□

问题 15.

一般情况下怎么去计算 $N(A)$ 的一组基。特别的 $\dim(N(A))$?

一些例子 (I)

$$\begin{aligned} x + 2y &= 0 \\ 2x + 4y &= 0 \end{aligned} \implies \begin{aligned} x + 2y &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

一些例子 (I)

$$\begin{aligned} x + 2y &= 0 \\ 2x + 4y &= 0 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} x + 2y &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

我们称 y 是自由的 (free)。所以:

$$N(A) = \{(-2y, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$$

一些例子 (I)

$$\begin{aligned} x + 2y &= 0 \\ 2x + 4y &= 0 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} x + 2y &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

我们称 y 是自由的 (free)。所以:

$$N(A) = \{(-2y, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$$

我们称下列的解是特解 (special solution):

$$s = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

一些例子 (I)

$$\begin{aligned} x + 2y &= 0 \\ 2x + 4y &= 0 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} x + 2y &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

我们称 y 是自由的 (free)。所以:

$$N(A) = \{(-2y, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$$

我们称下列的解是特解 (special solution):

$$s = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- s 是将 y 设为 1 得到的解。

一些例子 (I)

$$\begin{aligned} x + 2y &= 0 \\ 2x + 4y &= 0 \end{aligned} \implies \begin{aligned} x + 2y &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

我们称 y 是自由的 (free)。所以:

$$N(A) = \{(-2y, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$$

我们称下列的解是特解 (special solution):

$$s = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- s 是将 y 设为 1 得到的解。
- $N(A)$ 由所有 s 的线性组合构成，即:

$$N(A) = span(\{s\})$$

$$x + 2y + 3z = 0, \quad \text{i.e.} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$

一些例子 (II)

$$x + 2y + 3z = 0, \quad \text{i.e.} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$

在这个例子中 y 和 z 都是自由变量。所以我们可以选择两个特解:

$$s_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad s_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x + 2y + 3z = 0, \quad \text{i.e. } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$

在这个例子中 y 和 z 都是自由变量。所以我们可以选择两个特解:

$$s_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad s_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

同样我们有:

$$N(A) = \text{span}(\{s_1, s_2\})$$

求零空间的思路

求零空间的思路

1. 将矩阵 A 变成行阶梯形矩阵 U(Row echelon form)。

求零空间的思路

1. 将矩阵 A 变成行阶梯形矩阵 U(Row echelon form)。
2. 寻找到 U 的特解。

求零空间的思路

1. 将矩阵 A 变成行阶梯形矩阵 U(Row echelon form)。
2. 寻找到 U 的特解。

求零空间的思路

1. 将矩阵 A 变成行阶梯形矩阵 U(Row echelon form)。
2. 寻找到 U 的特解。

例 16.

让我们从这几个例子再思考一下。

$$A=\begin{bmatrix}1&2\\3&8\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}A\\2A\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\3&8\\2&4\\6&16\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}A&2A\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&2&4\\3&8&6&16\end{bmatrix}$$

矩阵 A 和矩阵 B

矩阵 A

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

矩阵 A 和矩阵 B

矩阵 A

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

矩阵 A 和矩阵 B

矩阵 A

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

矩阵 A 和矩阵 B

矩阵 A

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

从而我们有:

$$N(A) = Z = \{\mathbf{0}\}$$

矩阵 B

$$Bx = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \\ 2 & 4 \\ 6 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

矩阵 A 和矩阵 B

矩阵 A

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

从而我们有:

$$N(A) = Z = \{\mathbf{0}\}$$

矩阵 B

$$Bx = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \\ 2 & 4 \\ 6 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

矩阵 A

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

从而我们有:

$$N(A) = Z = \{\mathbf{0}\}$$

矩阵 B

$$Bx = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \\ 2 & 4 \\ 6 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

矩阵 A

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

从而我们有:

$$N(A) = Z = \{\mathbf{0}\}$$

矩阵 B

$$Bx = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \\ 2 & 4 \\ 6 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

从而我们有:

$$N(B) = Z = \{\mathbf{0}\}$$

矩阵 C

$$Cx = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 6 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Cx = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 6 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} \color{red}{1} & 2 & 2 & 4 \\ 0 & \color{red}{2} & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

矩阵 C

$$Cx = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 6 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} \color{red}{1} & 2 & 2 & 4 \\ 0 & \color{red}{2} & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

这里存在两个自由变量:

$$\{x_3, x_4\}$$

$$Cx = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 6 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} {\color{red}1} & 2 & 2 & 4 \\ 0 & {\color{red}2} & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

这里存在两个自由变量:

$$\{x_3, x_4\}$$

我们从而可以选择两个特解:

$$s_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad s_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Cx = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 6 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

这里存在两个自由变量:

$$\{x_3, x_4\}$$

我们从而可以选择两个特解:

$$s_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad s_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

使得:

$$N(C) = span(\{s_1, s_2\})$$

首元列和自由列

$$Cx = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 6 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

在其行阶梯形中:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

首元列和自由列

$$Cx = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 6 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

在其行阶梯形中:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

- 我们称首元 (pivot) 所在的列为首元列 (pivot column)，对应的变量 x_1, x_2 称为主变量 (pivot variables)

首元列和自由列

$$Cx = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 6 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

在其行阶梯形中:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

- 我们称首元 (pivot) 所在的列为首元列 (pivot column)，对应的变量 x_1, x_2 称为主变量 (pivot variables)
- 剩余的列则称为自由列 (free columns)，对应的变量 x_3, x_4 称为自由变量 (free variables)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

行最简形下的首元列视角 (I)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} {\color{red}1} & {\color{red}0} & 2 & 0 \\ {\color{red}0} & {\color{red}1} & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \color{red}{1} & \color{red}{0} & 2 & 0 \\ \color{red}{0} & \color{red}{1} & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

在行最简形 (Reduced Row Echelon Form) 下，所有的主元列构成了一个 $r \times r$ 的单位矩阵，其中 $r = \operatorname{rank}(A)$.

行最简形下的首元列视角 (I)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \color{red}{1} & \color{red}{0} & 2 & 0 \\ \color{red}{0} & \color{red}{1} & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

在行最简形 (Reduced Row Echelon Form) 下，所有的主元列构成了一个 $r \times r$ 的单位矩阵，其中 $r = \mathrm{rank}(A)$.

问题 17.

通过不同的初等行变换，我们是否可以得到不同的首元列和自由列？

行最简形下的首元列视角 (II)

$$A = \begin{bmatrix} \color{red}{p} & \color{red}{p} & f & \color{red}{p} & f \\ | & | & | & | & | \\ | & | & | & | & | \\ | & | & | & | & | \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a & 0 & c \\ 0 & 1 & b & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3 个首元列 p

2 个自由列 f

$\text{rank}\ r = 3$

行最简形下的首元列视角 (II)

Shanghai Normal University

$$A = \begin{bmatrix} \color{red}{p} & \color{red}{p} & f & \color{red}{p} & f \\ | & | & | & | & | \\ | & | & | & | & | \\ | & | & | & | & | \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a & 0 & c \\ 0 & 1 & b & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3 个首元列 p

2 个自由列 f

$\operatorname{rank} r = 3$

从而 $Ax = \mathbf{0}$ 等价于:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & a & 0 & c \\ 0 & 1 & b & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad \text{i.e.} \quad \begin{aligned} x_1 + ax_3 + cx_5 &= 0 \\ x_2 + bx_3 + dx_5 &= 0 \\ x_4 + ex_5 &= 0 \end{aligned}$$

主变量和自由变量

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & a & 0 & c \\ 0 & 1 & b & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad \text{i.e.} \quad \begin{aligned} x_1 + ax_3 + cx_5 &= 0 \\ x_2 + bx_3 + dx_5 &= 0 \\ x_4 + ex_5 &= 0 \end{aligned}$$

我们有:

首元	自由变量
x_1, x_2, x_4	x_3, x_5

主变量和自由变量

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & a & 0 & c \\ 0 & 1 & b & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad \text{i.e.} \quad \begin{aligned} x_1 + ax_3 + cx_5 &= 0 \\ x_2 + bx_3 + dx_5 &= 0 \\ x_4 + ex_5 &= 0 \end{aligned}$$

我们有:

首元	自由变量
x_1, x_2, x_4	x_3, x_5

也即，x_3, x_5 是可以任意选择的，而 x_1, x_2, x_4 则由 x_3, x_5 决定:

$$x_1 = -ax_3 - cx_5,$$

$$x_2 = -bx_3 - dx_5,$$

$$x_4 = -ex_5$$

特殊解

$$
\begin{aligned}
x_1 &= -ax_3 - cx_5, \\
x_2 &= -bx_3 - dx_5, \\
x_4 &= -ex_5
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_1 &= -ax_3 - cx_5, \\
x_2 &= -bx_3 - dx_5, \\
x_4 &= -ex_5
\end{aligned}
$$

通过选择自由解 $(x_3, x_5) \in \{(1,0),(0,1)\}$ 我们得到了两个特殊解:

$$
s_1 = \begin{bmatrix} -a \\ -b \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad s_2 = \begin{bmatrix} -c \\ -d \\ 0 \\ -e \\ 1 \end{bmatrix}
$$

特殊解

$$
\begin{aligned}
x_1 &= -ax_3 - cx_5, \\
x_2 &= -bx_3 - dx_5, \\
x_4 &= -ex_5
\end{aligned}
$$

通过选择自由解 $(x_3, x_5) \in \{(1,0),(0,1)\}$ 我们得到了两个特殊解:

$$
s_1 = \begin{bmatrix} -a \\ -b \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad s_2 = \begin{bmatrix} -c \\ -d \\ 0 \\ -e \\ 1 \end{bmatrix}
$$

并且所有 $Ax = \mathbf{0}$ 的解都可以表示成 s_1, s_2 的线性组合

$$x_1 = -ax_3 - cx_5,$$
$$x_2 = -bx_3 - dx_5,$$
$$x_4 = -ex_5$$

通过选择自由解 $(x_3, x_5) \in \{(1,0),(0,1)\}$ 我们得到了两个特殊解:

$$s_1 = \begin{bmatrix} -a \\ -b \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad s_2 = \begin{bmatrix} -c \\ -d \\ 0 \\ -e \\ 1 \end{bmatrix}$$

并且所有 $Ax = \mathbf{0}$ 的解都可以表示成 s_1, s_2 的线性组合（为什么？），即:

$$N(A) = N(R) = span(\{s_1, s_2\})$$

关于 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 一般的描述 (I)

一般来说，令 A 是 $m \times n$ 的矩阵，我们考虑 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的解。我们先使用 Gauss–Jordan 消元法将 A 转化成行最简形 R，即：

$$A\mathbf{x}=\mathbf{0} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 & \cdots & b_{1j_1} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & b_{2n} \\ 0 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{j1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

关于 $Ax = \mathbf{0}$ 一般的描述 (I)

一般来说，令 A 是 $m \times n$ 的矩阵，我们考虑 $Ax = \mathbf{0}$ 的解。我们先使用 Gauss–Jordan 消元法将 A 转化成行最简形 R，即：

$$Ax = \mathbf{0} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 & \cdots & b_{1j_1} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & b_{2n} \\ 0 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{j1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

其 $\operatorname{rank}(A) = r$ 意味着存在 r 个首元:

$$b_{1j_1} = b_{2j_2} = \cdots = b_{rj_r} = 1$$

也就是

一般来说，令 A 是 $m \times n$ 的矩阵，我们考虑 $Ax = \mathbf{0}$ 的解。我们先使用 Gauss–Jordan 消元法将 A 转化成行最简形 R，即：

$$Ax = \mathbf{0} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 & \cdots & b_{1j_1} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & b_{2n} \\ 0 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{j1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

其 $\text{rank}(A) = r$ 意味着存在 r 个首元：

$$b_{1j_1} = b_{2j_2} = \cdots = b_{rj_r} = 1$$

也就是

首元	自由变量
$x_{j_1}, x_{j_2}, \cdots, x_{j_r}$	$x_1, \cdots, x_{j_1-1}, x_{j_1+1}, \cdots, x_{j_2-1}, \cdots, x_{j_r+1}, \cdots, x_n$

$R\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 对应的方程组为:

$$
\begin{aligned}
x_{j_1} + b_{1,j_1+1}x_{j_1+1} + \cdots + b_{1,j_2-1}x_{j_2-1} + b_{1,j_2+1}x_{j_2+1} + \cdots + b_{1n}x_n &= 0 \\
x_{j_2} + b_{2,j_2+1}x_{j_2+1} + \cdots + b_{2n}x_n &= 0 \\
&\vdots \\
x_{j_r} + \cdots + b_{rn}x_n &= 0
\end{aligned}
$$

关于 $Ax = 0$ 一般的描述 (II)

$Rx = \mathbf{0}$ 对应的方程组为:

$$
\begin{aligned}
x_{j_1} + b_{1,j_1+1}x_{j_1+1} + \cdots + b_{1,j_2-1}x_{j_2-1} + b_{1,j_2+1}x_{j_2+1} + \cdots + b_{1n}x_n &= 0 \\
x_{j_2} + b_{2,j_2+1}x_{j_2+1} + \cdots + b_{2n}x_n &= 0 \\
&\vdots \\
x_{j_r} + \cdots + b_{rn}x_n &= 0
\end{aligned}
$$

从而我们可以构造出$n-r$ 个特殊解:

$$
s_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots, s_{j_1-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots, s_{j_1+1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -b_{1,j_1+1} \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots,
$$

这意味着:

$$N(A) = N(R) = span(\{s_1, \cdots, s_{j_1-1}, s_{j_1+1}, \cdots, s_{j_2-1}, \cdots, s_{j_r+1}, \cdots, s_n\})$$

这意味着:

$$N(A) = N(R) = \mathrm{span}(\{s_1, \cdots, s_{j_1-1}, s_{j_1+1}, \cdots, s_{j_2-1}, \cdots, s_{j_r+1}, \cdots, s_n\})$$

定理 18.

对于任意的 $m \times n$ 的矩阵 A，我们有:

$$\mathrm{rank}(A) + \dim(N(A)) = n$$

这意味着:

$$N(A)=N(R)=\mathrm{span}(\{s_1,\cdots,s_{j_1-1},s_{j_1+1},\cdots,s_{j_2-1},\cdots,s_{j_r+1},\cdots,s_n\})$$

定理 18.

对于任意的 $m\times n$ 的矩阵 A，我们有:

$$\mathrm{rank}(A)+\dim(N(A))=n$$

定理 19 [Fundamental Theorem of Linear Algebra, Part I].

令 A 是一个 $m\times n$ 的矩阵并且 $\mathrm{rank}(A)=r$，则:

1. $\dim(C(A))=\dim(C(A^T))=r$。
2. $\dim(N(A))=n-r$，$\dim(N(A^T))=m-r$。

阶段总结

阶段总结

上海师范大学 Shanghai Normal University

- 零空间的基的计算。

阶段总结

上海师范大学
Shanghai Normal University

- 零空间的基的计算。
- 线性代数的基本定理，第一部分

阶段总结

- 零空间的基的计算。
- 线性代数的基本定理，第一部分

阶段总结

- 零空间的基的计算。
- 线性代数的基本定理，第一部分

所以我们目前对于 $A\mathrm{x} = \mathbf{0}$ 的解已经有了一个比较清晰的认识。

- 零空间的基的计算。
- 线性代数的基本定理，第一部分

所以我们目前对于 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解已经有了一个比较清晰的认识。

问题 20.

那对于 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的解呢？

$\mathrm{Ax} = \mathrm{b}$ 的解

三个问题

三个问题

1. 什么时候 $\mathrm{Ax} = \mathrm{b}$ 有解?

三个问题

1. 什么时候 $\mathrm{Ax} = \mathrm{b}$ 有解?
2. 如果 $\mathrm{Ax} = \mathrm{b}$ 有解，其解的结构是什么?

三个问题

1. 什么时候 $Ax = b$ 有解?
2. 如果 $Ax = b$ 有解，其解的结构是什么?
3. 怎么计算 $Ax = b$ 的解?

三个问题

1. 什么时候 $\mathrm{Ax}=\mathrm{b}$ 有解?
2. 如果 $\mathrm{Ax}=\mathrm{b}$ 有解，其解的结构是什么?
3. 怎么计算 $\mathrm{Ax}=\mathrm{b}$ 的解?

三个问题

1. 什么时候 $Ax = b$ 有解?
2. 如果 $Ax = b$ 有解，其解的结构是什么?
3. 怎么计算 $Ax = b$ 的解?

回顾

当 $b = 0$ 的时候，我们已经有了一个比较清晰的认识。其解的结构就是 $N(A)$，一个维度为 $n - \mathrm{rank}(A)$ 的 $\mathbb{R}^n$ 的子空间。

定理 21.

$Ax = b$ 有解当且仅当 $b \in C(A)$

定理 21.

$Ax = b$ 有解当且仅当 $b \in C(A)$

定理 22.

$Ax = b$ 有解当且仅当

$$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}\left(\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix}\right)$$

证明. 将 A 写成列向量的形式，即：

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

证明. 将 A 写成列向量的形式，即:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

则我们有:

$$Ax = b \text{ 有解}$$

第一个问题 (II)

证明. 将 A 写成列向量的形式，即:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

则我们有:

$$\begin{aligned} & Ax = b \text{ 有解} \\ & \iff b \in C(A) = span(\{a_1, \cdots, a_n\}) \end{aligned}$$

证明. 将 A 写成列向量的形式，即：

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

则我们有：

$$\begin{aligned} & Ax = b \text{ 有解} \\ & \Longleftrightarrow b \in C(A) = \mathrm{span}(\{a_1, \cdots, a_n\}) \\ & \Longleftrightarrow \mathrm{span}(\{a_1, \cdots, a_n\}) = \mathrm{span}(\{a_1, \cdots, a_n, b\}) \end{aligned}$$

证明. 将 A 写成列向量的形式，即：

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

则我们有：

$$\begin{aligned} & Ax = b \text{ 有解} \\ & \iff b \in C(A) = \mathrm{span}(\{a_1, \cdots, a_n\}) \\ & \iff \mathrm{span}(\{a_1, \cdots, a_n\}) = \mathrm{span}(\{a_1, \cdots, a_n, b\}) \\ & \iff \dim(\mathrm{span}(\{a_1, \cdots, a_n\})) = \dim(\mathrm{span}(\{a_1, \cdots, a_n, b\})) \end{aligned}$$

证明. 将 A 写成列向量的形式，即:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

则我们有:

$$\begin{aligned} & Ax = b \text{ 有解} \\ & \qquad \iff b \in C(A) = \mathrm{span}(\{a_1, \cdots, a_n\}) \\ & \qquad \iff \mathrm{span}(\{a_1, \cdots, a_n\}) = \mathrm{span}(\{a_1, \cdots, a_n, b\}) \\ & \qquad \iff \dim(\mathrm{span}(\{a_1, \cdots, a_n\})) = \dim(\mathrm{span}(\{a_1, \cdots, a_n, b\})) \\ & \qquad \iff \mathrm{column-rank}(A) = \mathrm{column-rank}(\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix}) \end{aligned}$$

证明. 将 A 写成列向量的形式，即:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

则我们有:

$$\begin{aligned}
& Ax = b \text{ 有解} \\
& \qquad \Longleftrightarrow b \in C(A) = \mathrm{span}(\{a_1, \cdots, a_n\}) \\
& \qquad \Longleftrightarrow \mathrm{span}(\{a_1, \cdots, a_n\}) = \mathrm{span}(\{a_1, \cdots, a_n, b\}) \\
& \qquad \Longleftrightarrow \dim(\mathrm{span}(\{a_1, \cdots, a_n\})) = \dim(\mathrm{span}(\{a_1, \cdots, a_n, b\})) \\
& \qquad \Longleftrightarrow \mathrm{column{-}rank}(A) = \mathrm{column{-}rank}(\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix}) \\
& \qquad \Longleftrightarrow \mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix})
\end{aligned}$$

$\square$

现在我们来考察 $\mathrm{Ax} = \mathrm{b}$ 的解的结构，假设 $\mathrm{x_p}$ 是其一个解，即 $\mathrm{Ax_p} = \mathrm{b}$，我们也称其为特解 (particular solution)。

现在我们来考察 $Ax = b$ 的解的结构，假设 x_p 是其一个解，即 $Ax_p = b$，我们也称其为特解 (particular solution)。

定理 23.

$$Ax = b \quad \Longleftrightarrow \quad x - x_p \in N(A)$$

现在我们来考察 $Ax = b$ 的解的结构，假设 x_p 是其一个解，即 $Ax_p = b$，我们也称其为特解 (particular solution)。

定理 23.

$$Ax = b \quad \Longleftrightarrow \quad x - x_p \in N(A)$$

证明. 只需注意到：

$$A(x - x_p) = Ax - Ax_p = b - b = \mathbf{0}$$

□

事实上，令 x_p 为 $Ax = b$ 的任一特解，令:

$$s_1, \ldots, s_l$$

是 $Ax = \mathbf{0}$ 的一组特殊解，即其零空间 $N(A)$ 的一组基，从而 $l = n - \mathrm{rank}(A)$。

事实上，令 x_p 为 $Ax = b$ 的任一特解，令:

$$s_1, \ldots, s_l$$

是 $Ax = \mathbf{0}$ 的一组特殊解，即其零空间 $N(A)$ 的一组基，从而 $l = n - \mathrm{rank}(A)$。则任何一个 $Ax = b$ 的解都可以表示为:

$$x = x_p + c_1 s_1 + \cdots + c_l s_l$$

即一个特解 + 一个齐次解 ($Ax = \mathbf{0}$) 的形式。

注意到 A 的秩 r 应当满足:

$$r = \text{rank}(A) = \text{column-rank}(A) \leqslant \min\{m, n\}$$

注意到 A 的秩 r 应当满足:

$$r=\mathrm{rank}(A)=\mathrm{column\text{-}rank}(A)\leqslant\min\{m,n\}$$

从而我们有:

m	n	$\dim(N(A))$	$Ax=b$ 的解的个数
$=r$	$=r$	0	1
$=r$	$>r$	$\geqslant 1$	∞
$>r$	$=r$	0	0 or 1
$>r$	$>r$	$\geqslant 1$	0 or ∞

怎么计算 $Ax = b$ 的解

上海师范大学 Shanghai Normal University

怎么计算 $Ax = b$ 的解

对其增广矩阵使用 Gauss–Jordan：

$$\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix}$$