



上海师范大学
Shanghai Normal University

《线性代数》

5-相关性、基和维度 (Independence, Basis and Dimension)

杨启哲

上海师范大学信机学院计算机系

2024 年 3 月 14 日

一个向量空间 V 是一个非空集合，其中的元素称之为向量，并且其满足以下两种运算：

- 向量加法：对于任意的 $u, v \in V$ ， $u + v \in V$ 。
- 数与向量的乘法（数乘）：对于任意的 $u \in V$ 和任意的实数 $c \in \mathbb{R}$ ， $cu \in V$ 。

其中的加法满足如下的性质:

1. 加法满足交换律:

$$u + v = v + u$$

2. 加法满足结合律:

$$u + (v + w) = (u + v) + w$$

3. 加法存在一个零元素 (唯一的) $\mathbf{0}$, 其满足 $u + \mathbf{0} = u$ 对任意的 $u \in V$ 。
4. 加法存在一个负元素 (逆元), 即对于任意的 $u \in V$, 存在一个 $v \in V$, 使得 $u + v = \mathbf{0}$, 特别的, 将 v 记为 $-u$ 。

其中的数乘满足如下的性质:

5. 数乘存在单位元 1, 使得 $1u = u$ 对于任意的 $u \in V$ 。

6. 数乘满足结合律:

$$c_1(c_2u) = (c_1c_2)u$$

7. 数乘是线性的, 即对于任意的 $c \in \mathbb{R}$ 和 $u, v \in V$ 均有:

$$c(u + v) = cu + cv$$

8. 数乘对于加法满足分配律, 即对于任意的 $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ 和 $u \in V$ 均有:

$$(c_1 + c_2)u = c_1u + c_2u$$

定义 1

[子空间 (Subspace)].

给定一个向量空间 V , 如果 W 是 V 的一个非空子集, 并且 W 满足如下两个条件:

1. 对于任意的 $u, v \in W$, $u + v \in W$ 。
2. 对于任意的 $c \in \mathbb{R}$ 和 $u \in W$, $cu \in W$ 。

则称 W 是 V 的一个子空间。

引理 2.

令 V 是一个向量空间, W 是 V 的一个子集。则 W 是 V 的一个子空间当且仅当: 对于任意的 $k \geq 0$, $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ 和 $v_1, \dots, v_k \in W$ 均有:

$$c_1 v_1 + \dots + c_k v_k \in W$$

特别的, 当 $k = 0$ 时我们令上述和为 0 。

给定向量空间 V 和其子集 $S \subseteq V$, 定义:

$$\text{span}(S) = \{c_1v_1 + \cdots + c_kv_k \mid k \geq 0, c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}, v_1, \dots, v_k \in S\}$$

则:

定理 3.

令 $S \subseteq V$, 则 $\text{span}(S)$ 是 V 的包含 S 的最小子空间, 即:

1. $\text{span}(S)$ 是 V 的子空间。
2. 令 $W \subseteq V$ 是一个 V 的子空间, 且 $S \subseteq W$, 则 $\text{span}(S) \subseteq W$ 。

现在考虑向量空间 \mathbb{R}^3 :

- 令 $S = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$, 则 $\text{span}(S)$ 是什么?
- 令 $S = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$, 则 $\text{span}(S)$ 是什么?
- 令 $S = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 0)\}$, 则 $\text{span}(S)$ 是什么?
- 令 $S = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$, 则 $\text{span}(S)$ 是什么?

一个子空间究竟需要多少个向量生成?



主要内容



上海师范大学
Shanghai Normal University

- 第 6 章 6.2

相关性

我们先来回顾以下线性组合的概念，固定一个向量空间 V 。

定义 4.

令 $v_1, \dots, v_n \in V$. v_1, \dots, v_n 的线性组合是一个具有如下形式的向量：

$$c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$$

其中 $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ 。

说明

可以看到 $\text{span}(\{v_1, \dots, v_n\})$ 实际上就是 v_1, \dots, v_n 的所有线性组合的集合。

定义 5

[线性无关 (Linearly Independent)].

给定一个向量组 v_1, \dots, v_n 。如果对于任意的 $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$, 当且仅当 $c_1 = \dots = c_n = 0$ 时有:

$$c_1 v_1 + \dots + c_n v_n = \mathbf{0}$$

则称 v_1, \dots, v_n 是线性无关的。

例 6.

- $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ 是线性无关的。
- $\{(1, 0, 0), (1, 1, 0)\}$ 是线性无关的。
- $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1)\}$ 不是线性无关的。

- 单个向量是线性无关的么？
- 包含 $\mathbf{0}$ 的向量组是线性无关的么？

引理 7.

线性无关的向量组的任何一个子集都是线性无关的。

我们知道，一个矩阵方程 Ax 可以看成是其列向量 a_1, \dots, a_n 的线性组合，所以我们有：

引理 8.

给定一个矩阵 A ，则其列向量是线性无关的当且仅当方程 $Ax = \mathbf{0}$ 只有唯一解 $x = \mathbf{0}$ 。

我们也可以给出线性相关的定义：

定义 9

[线性相关 (Linearly Dependent)].

给定一个向量组 v_1, \dots, v_n 。如果存在 $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ 满足至少一个 $c_i \neq 0$ ，使得：

$$c_1 v_1 + \dots + c_n v_n = \mathbf{0}$$

则称 v_1, \dots, v_n 是线性相关的。

例 10.

- $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1)\}$ 是线性相关的。
- $\{(2, 2, 0), (1, 1, 0)\}$ 是线性相关的。
- 包含 $\mathbf{0}$ 的向量组是线性相关的。

引理 11.

v_1, \dots, v_n 是线性相关的当且仅当至少有一个 v_i 可以表示成其余向量的线性组合。

引理 12.

给定一个矩阵 A ，则其列向量是线性相关的当且仅当方程 $Ax = \mathbf{0}$ 有非零解。

► 向量空间的基和维度

给定一个集合 S , 回顾 $\text{span}(S)$:

$$\text{span}(S) = \{c_1v_1 + \cdots + c_kv_k \mid k \geq 0, c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}, v_1, \dots, v_k \in S\}$$

我们知道 $\text{span}(S)$ 是一个向量空间, 进一步的, 我们称 $\text{span}(S)$ 是由 S 生成的向量空间。

定义 13.

给定一个向量集合 S 和向量空间 V , 如果 $V = \text{span}(S)$, 则称 S 生成了向量空间 V

定义 14

[向量空间的基 (A Basis for a Vector Space)].

一组向量是一个向量空间的基 如果其满足:

1. 这组向量是线性无关的。
2. 这组向量生成了向量空间 V 。

例 15.

1. $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ 是 \mathbb{R}^3 的基。
2. $\{(1, 0), (0, 1)\}$ 是 \mathbb{R}^2 的基。
3. $\{(1, 0), (2, 4)\}$ 也是 \mathbb{R}^2 的基。

例 16.

1. $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ 的基是什么?
2. $Z = \{0\}$ 的基是什么?
3. 考虑之前提到的向量空间:

$$V = \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$$

其中的加法和数乘运算定义为:

$$x \oplus y = x \times y, \quad c \otimes x = x^c$$

V 的基是什么?

我们现在来定义向量空间的维度，直观上来讲，向量空间的维度就是需要多少个向量才能生成这个向量空间。

定义 17

[维度 (Dimension)].

给定一个向量空间 V ，其维度，记作 $\dim(V)$ ，是指 V 的一个基中的向量个数。

问题 18.

上述定义会不会产生问题？

显然只有 V 中所有基的向量个数都相同时，上述定义才是合理的。

引理 19

[Steinitz Exchange Lemma].

令 e_1, \dots, e_n 是向量空间 V 的一个基, v_1, \dots, v_m 是 V 的一个线性无关的向量组, 其中 $1 \leq m \leq n$ 。则存在 $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{n-m} < n$, 使得 $v_1, \dots, v_m, e_{i_1}, \dots, e_{i_{n-m}}$ 是 V 的一个基。

说明

当 $m = 0$ 时, 上述引理是平凡的。

推论 20.

给定一个向量空间 V 和其上的两组基 e_1, \dots, e_n 和 f_1, \dots, f_m 。则 $n = m$ 。

推论 21.

假设 $\dim(V) = n$ ，并且 $v_1, \dots, v_m \in V$ 是线性无关的，则： $m \leq n$ 。

推论 22.

假设 $\dim(V) = n$ ，并且 $v_1, \dots, v_n \in V$ 是线性无关的，则 v_1, \dots, v_n 是 V 的一个基。

现在我们来证明 Steinitz 交换引理。

Steinitz 交换引理的证明. 我们对 m 使用归纳法。

$m = 1$ 的情况:

由于 e_1, \dots, e_n 是 V 的一个基, 从而存在 c_1, \dots, c_n 使得:

$$v_1 = c_1 e_1 + \dots + c_n e_n$$

显然 $v_1 \neq 0$, 从而存在 $c_i \neq 0$, 因此我们有:

$$e_i = \frac{1}{c_i} v_1 - \frac{c_1}{c_i} e_1 - \dots - \frac{c_{i-1}}{c_i} e_{i-1} - \frac{c_{i+1}}{c_i} e_{i+1} - \dots - \frac{c_n}{c_i} e_n$$

即: $v_1, e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_n$ 是 V 的一组基。

Steinitz 交换引理的证明 (续). 我们还需要证明:

$$v_1, \dots, v_m, e_{i_1}, \dots, e_{i_{n-m}}$$

是线性无关的。考察如下的线性组合:

$$c_1 e_1 + \dots + c_{i-1} e_{i-1} + \mathbf{c} v_1 + \dots + c_n e_n = \mathbf{0}$$

- 如果 $c = 0$, 则由于 e_i 是线性无关的, 从而 $c_1 = \dots = c_{i-1} = c_{i+1} = \dots = c_n = 0$ 。
- 如果 $c \neq 0$, 由于 $v_1 \neq \mathbf{0}$, 从而 v_1 可以由 $e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_n$ 的线性组合表示, 从而 e_i 可以由 $e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_n$ 的线性组合表示, 矛盾。

Steinitz 交换引理的证明 (续).

归纳步骤:

假设命题对于 $\leq m-1$ 的情况成立, 对于 $= m$ 的情况, 令 v_1, \dots, v_m 是线性无关的, 注意到 v_1, \dots, v_{m-1} 也是线性无关的, 从而由归纳假设, 存在 $1 \leq i_1 < \dots < i_{n-m+1} \leq n$, 使得:

$$v_1, \dots, v_{m-1}, e_{i_1}, \dots, e_{i_{n-m+1}}$$

是 V 中的一组基。从而存在不全为 0 的 $c_1, \dots, c_{m-1}, d_1, d_2, \dots, d_{n-m+1}$ 使得:

$$v_m = c_1 v_1 + \dots + c_{m-1} v_{m-1} + d_1 e_{i_1} + \dots + d_{n-m+1} e_{i_{n-m+1}}$$

Steinitz 交换引理的证明 (续).

注意到存在 $l \in [n - m + 1]$ 使得 $d_l \neq 0$, 从而:

$$e_{i_l} = \frac{1}{d_l} v_m - \frac{c_1}{d_l} v_1 - \cdots - \frac{c_{m-1}}{d_l} v_{m-1} - \frac{d_1}{d_l} e_{i_1} - \cdots - \frac{d_{l-1}}{d_l} e_{i_{l-1}} - \frac{d_{l+1}}{d_l} e_{i_{l+1}} - \cdots - \frac{d_{n-m+1}}{d_l} e_{i_{n-m+1}}$$

即: e_{i_l} 可以由 $v_1, \dots, v_m, e_{i_1}, \dots, e_{i_{l-1}}, e_{i_{l+1}}, \dots, e_{i_{n-m+1}}$ 表示。

进一步可以验证:

$$v_1, \dots, v_m, e_{i_1}, \dots, e_{i_{l-1}}, e_{i_{l+1}}, \dots, e_{i_{n-m+1}}$$

是 V 的一组基, 即归纳步骤成立, 引理得证。



向量空间 Z 的维度 (I)

回顾向量空间 Z :

$$\dim(Z) = \{0\}$$

定理 23.

$$\dim(Z) = 0.$$

其中的关键在于:

$$\sum_{v \in \emptyset} v = 0$$

$\sum_{v \in \emptyset} v = 0$ 的原因

关键在于加法是可交换的，令 T 是一个有限的向量集，考察 T 的一个划分：

$$T = T_1 \cup T_2, \text{ 其中 } T_1, T_2 \text{ 满足: } T_1 \cap T_2 = \emptyset, T_1 \cup T_2 = T$$

则我们有：

$$\sum_{v \in T} v = \sum_{v \in T_1} v + \sum_{v \in T_2} v$$

显然有：

$$\sum_{v \in T} v = \sum_{v \in \emptyset} v + \sum_{v \in T} v$$

从而：

$$\sum_{v \in \emptyset} v = \sum_{v \in T} v - \sum_{v \in T} v = 0$$

回顾之前函数构成的向量空间:

$$F = F(\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}) = \{f \mid f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}\}$$

其中:

- 给定 $f_1, f_2 \in F$, 定义函数 $f_1 + f_2: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ 为:

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

- 对于任意的 $f \in F$ 和 $c \in \mathbb{R}$, 定义函数 $cf: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ 为:

$$(cf)(x) = cf(x)$$

F 的维度是多少?

定理 24.

F 是无限维的。

事实上, 对于任意的 $i \in \mathbb{N}$, 定义:

$$f_i : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, f_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{如果 } x = i \\ 0, & \text{其他情况} \end{cases}$$

则对于任意的 $n \in \mathbb{N}$, 我们有:

$$f_0, f_1, \dots, f_n$$

是线性无关的。

有限维的向量空间

如果一个向量空间存在一个有限的基, 则称这个向量空间是有限维的。

现在我们来看一下子空间的维度:

- 假设 W 是 V 的一个子空间, 那么 W 的维度和 V 的维度有什么关系?

定理 25.

给定一个向量空间 V 和其子空间 W , 如果 V 是有限的, 则 W 也是有限的, 并且:

$$\dim(W) \leq \dim(V)$$

令量空间 V 的维度 $\dim(V) = n$, 并且其一组基为:

$$w_1, \dots, w_n$$

我们希望从 V 中慢慢的扩展出一组基

$$v_1, \dots, v_k$$

使得:

$$W = \text{span}(\{v_1, \dots, v_k\})$$

定理??的证明. 我们沿用上一页的记号, 对 k 进行构造. 初始化 $k = 0$, 如果:

$$W \neq \text{span}(\{v_1, \dots, v_k\}).$$

则存在 $v_{k+1} \in W \setminus \text{span}(\{v_1, \dots, v_k\})$ 使得:

$$v_1, \dots, v_k, v_{k+1}$$

是线性无关的. 注意到 $\dim(V) = n$, 从而由 Steinitz 交换引理, 必然有:

$$k + 1 \leq n$$

从而 $\dim(W) \leq \dim(V)$.





阶段总结



上海师范大学
Shanghai Normal University

- 线性相关和线性无关的概念。
- 向量空间的基, Steinitz 交换引理。
- 向量空间的维度, 子空间的维度。