



上海师范大学
Shanghai Normal University

《线性代数》

2-解线性方程组 (I)(Solving Linear Equations(I))

杨启哲

上海师范大学信机学院计算机系

2024 年 3 月 6 日

复习：向量的线性组合

给定三个向量：

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

复习：向量的线性组合

给定三个向量：

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

其线性组合可以表示为 $x_1\mathbf{u} + x_2\mathbf{v} + x_3\mathbf{w}$ ，也就是：

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 \end{bmatrix}$$

复习：向量的线性组合

给定三个向量：

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

其线性组合可以表示为 $x_1\mathbf{u} + x_2\mathbf{v} + x_3\mathbf{w}$ ，也就是：

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 \end{bmatrix}$$

矩阵表示

我们可以利用矩阵来表示上述行为：

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 \end{bmatrix}$$



- › 解线性方程组
- › 解线性方程组的矩阵表示
- › 矩阵的运算

- 第 2 章 2.1, 2.2, 第 3 章 3.1

► 解线性方程组

线性方程组的行图像

考虑如下的线性方程组：

$$x - 2y = 1$$

$$3x + 2y = 11$$

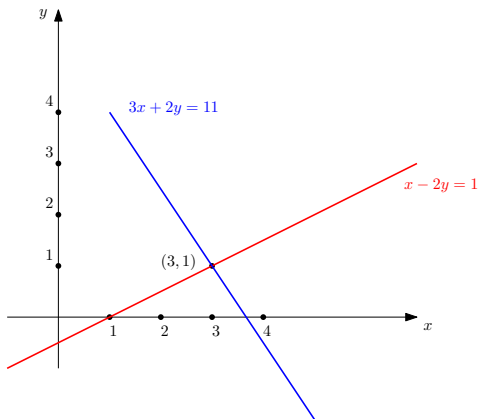
线性方程组的行图像

考虑如下的线性方程组：

$$x - 2y = 1$$

$$3x + 2y = 11$$

其行图像为：





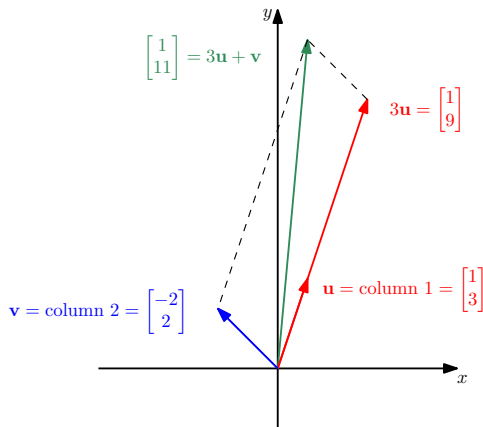
该方程组也可表示为：

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 3x + 2y = 11 \end{cases} \iff x \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 11 \end{bmatrix}$$

该方程组也可表示为：

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 3x + 2y = 11 \end{cases} \iff x \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 11 \end{bmatrix}$$

其列图像为：



线性方程组的矩阵表示

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 3x + 2y = 11 \end{cases} \iff x \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 11 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 3x + 2y = 11 \end{cases} \iff x \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 11 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 11 \end{bmatrix}$$

上述矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ 被称作系数矩阵 (coefficient matrix)

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 3x + 2y = 11 \end{cases} \iff x \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 11 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 11 \end{bmatrix}$$

上述矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ 被称作**系数矩阵 (coefficient matrix)**，我们也可以用点积的形式理解：

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1, -2) \cdot (x, y) \\ (3, 2) \cdot (x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - 2y \\ 3x + 2y \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 3x + 2y = 11 \end{cases} \iff x \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 11 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 11 \end{bmatrix}$$

上述矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ 被称作系数矩阵 (coefficient matrix), 我们也可以用点积的形式理解:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1, -2) \cdot (x, y) \\ (3, 2) \cdot (x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - 2y \\ 3x + 2y \end{bmatrix}$$

不止 2 维!

以上所有当然可以推广到 3 维, 4 维, ...!

一个三元一次方程组的例子 (I)

考虑 3 个变元的例子:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 2x + 5y + 2z = 4 \\ 6x - 3y + z = 2 \end{cases}$$

这个方程具有唯一的解 $(x, y, z) = (0, 0, 2)$ 。

一个三元一次方程组的例子 (I)

考虑 3 个变元的例子:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 2x + 5y + 2z = 4 \\ 6x - 3y + z = 2 \end{cases}$$

这个方程具有唯一的解 $(x, y, z) = (0, 0, 2)$ 。

几何视角

- 从行视角来看, 这 3 个方程代表了 3 个平面, 它们相交于一个点 $(0, 0, 2)$ 。

一个三元一次方程组的例子 (I)

考虑 3 个变元的例子:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 2x + 5y + 2z = 4 \\ 6x - 3y + z = 2 \end{cases}$$

这个方程具有唯一的解 $(x, y, z) = (0, 0, 2)$ 。

几何视角

- 从行视角来看, 这 3 个方程代表了 3 个平面, 它们相交于一个点 $(0, 0, 2)$ 。
- 从列视角来看, 这 3 个方程代表了 3 个列向量的线性组合, 即:

$$0 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

一个三元一次方程组的例子 (II)

同样的，我们有：

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 2x + 5y + 2z = 4 \\ 6x - 3y + z = 2 \end{cases} \iff Ax \stackrel{\text{记为}}{=} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 6 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

其 $x = (x, y, z)$ 是未知数，对应的解是 $(0, 0, 2)$ 。

一个三元一次方程组的例子 (II)

同样的，我们有：

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 2x + 5y + 2z = 4 \\ 6x - 3y + z = 2 \end{cases} \iff Ax \stackrel{\text{记为}}{=} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 6 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

其 $x = (x, y, z)$ 是未知数，对应的解是 $(0, 0, 2)$ 。从而 Ax 的目标便是能够有如下的成立：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 6 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

对于:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

对于:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

定义 Ax 的第 i 部分值为:

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = (a_{i1}, \dots, a_{in}) \cdot (x_1, \dots, x_n)$$

对于:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

定义 Ax 的第 i 部分值为:

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = (a_{i1}, \dots, a_{in}) \cdot (x_1, \dots, x_n)$$

现在一个 n 元一次方程组已经可以自然的表示成 $Ax = b$ 了。我们来开始解这个方程组。

高斯消元法 (Gaussian Elimination)

来考虑下面的方程组：

$$x - 2y = 1$$

$$3x + 2y = 11$$

高斯消元法 (Gaussian Elimination)

来考虑下面的方程组：

$$\begin{array}{l} x - 2y = 1 \\ 3x + 2y = 11 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x - 2y = 1 \text{ (将第一个式子乘以 3)} \\ 8y = 8 \text{ (减去上面的式子消去 } x) \end{array}$$

来考虑下面的方程组：

$$\begin{array}{rcl} x - 2y = 1 & & \\ 3x + 2y = 11 & \Rightarrow & \end{array} \quad \begin{array}{l} x - 2y = 1 \text{ (将第一个式子乘以 3)} \\ 8y = 8 \text{ (减去上面的式子消去 } x) \end{array}$$

新的方程是上三角的 (upper triangular), 类似的, 有:

$$\begin{array}{rcl} 4x - 8y = 4 & & \\ 3x + 2y = 11 & \Rightarrow & \end{array} \quad \begin{array}{l} 4x - 8y = 4 \text{ (将第一个式子乘以 } \frac{3}{4}) \\ 8y = 8 \text{ (减去上面的式子消去 } x) \end{array}$$

来考虑下面的方程组：

$$\begin{array}{rcl} x - 2y = 1 & & \\ 3x + 2y = 11 & \Rightarrow & \end{array} \quad \begin{array}{l} x - 2y = 1 \text{ (将第一个式子乘以 3)} \\ 8y = 8 \text{ (减去上面的式子消去 } x) \end{array}$$

新的方程是上三角的 (upper triangular), 类似的, 有:

$$\begin{array}{rcl} 4x - 8y = 4 & & \\ 3x + 2y = 11 & \Rightarrow & \end{array} \quad \begin{array}{l} 4x - 8y = 4 \text{ (将第一个式子乘以 } \frac{3}{4}) \\ 8y = 8 \text{ (减去上面的式子消去 } x) \end{array}$$

- 首元 (pivot): 行中第一个做其他行消去的非零元素。在完成消去后, 首元在对角线上。

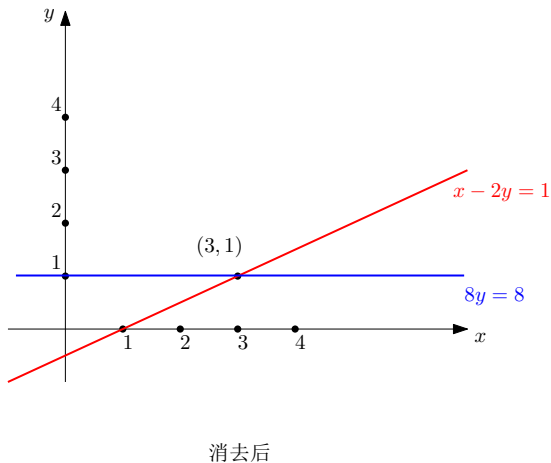
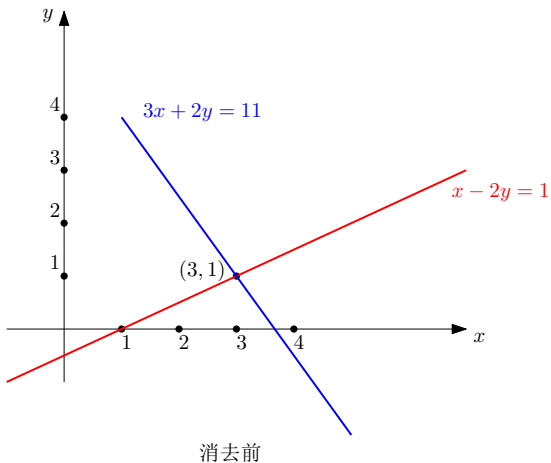
来考虑下面的方程组：

$$\begin{array}{rcl} x - 2y = 1 & & \\ 3x + 2y = 11 & \Rightarrow & \end{array} \quad \begin{array}{l} x - 2y = 1 \text{ (将第一个式子乘以 3)} \\ 8y = 8 \text{ (减去上面的式子消去 } x) \end{array}$$

新的方程是上三角的 (upper triangular), 类似的, 有:

$$\begin{array}{rcl} 4x - 8y = 4 & & \\ 3x + 2y = 11 & \Rightarrow & \end{array} \quad \begin{array}{l} 4x - 8y = 4 \text{ (将第一个式子乘以 } \frac{3}{4}) \\ 8y = 8 \text{ (减去上面的式子消去 } x) \end{array}$$

- **首元 (pivot)**: 行中第一个做其他行消去的非零元素。在完成消去后, 首元在对角线上。
- **倍数 (multiplier)**: 用来消去其他行的倍数。



▶ 另外一个例子 (I)

考察方程组:

$$\begin{cases} 2x + 4y - 2z = 2 \\ 4x + 9y - 3z = 8 \\ -2x - 3y + 7z = 10 \end{cases}$$

▶ 另外一个例子 (I)

考察方程组:

$$\begin{cases} 2x + 4y - 2z = 2 \\ 4x + 9y - 3z = 8 \\ -2x - 3y + 7z = 10 \end{cases}$$

1 第二个等式减去 2 倍的第一个式子, 得到 $y + z = 4$ 。

▶ 另外一个例子 (I)

考察方程组:

$$\begin{cases} 2x + 4y - 2z = 2 \\ 4x + 9y - 3z = 8 \\ -2x - 3y + 7z = 10 \end{cases}$$

- 1 第二个等式减去 2 倍的第一个式子, 得到 $y + z = 4$ 。
- 2 第三个等式减去 -1 倍的第一个式子, 得到 $y + 5z = -8$ 。

另外一个例子 (I)

考察方程组:

$$\begin{cases} 2x + 4y - 2z = 2 \\ 4x + 9y - 3z = 8 \\ -2x - 3y + 7z = 10 \end{cases}$$

- 1 第二个等式减去 2 倍的第一个式子, 得到 $y + z = 4$ 。
- 2 第三个等式减去 -1 倍的第一个式子, 得到 $y + 5z = -8$ 。

另外一个例子 (I)

考察方程组:

$$\begin{cases} 2x + 4y - 2z = 2 \\ 4x + 9y - 3z = 8 \\ -2x - 3y + 7z = 10 \end{cases}$$

- 1 第二个等式减去 2 倍的第一个式子, 得到 $y + z = 4$ 。
- 2 第三个等式减去 -1 倍的第一个式子, 得到 $y + 5z = -8$ 。

此时 x 已经被消去了, 剩下:

$$\begin{cases} y + z = 4 \\ y + 5z = -8 \end{cases}$$

▶ 另外一个例子 (II)

3 将第二个等式乘以 -1 ，然后加上第三个等式，得到 $4z = 8$ 。

另外一个例子 (II)

3 将第二个等式乘以 -1 ，然后加上第三个等式，得到 $4z = 8$ 。

最终我们得到了：

$$\begin{array}{rcl} 2x + 4y - 2z = 2 & & 2x + 4y - 2z = 2 \\ 4x + 9y - 3z = 8 & \implies & 1y + z = 4 \\ -2x - 3y + 7z = 10 & & 4z = 8 \end{array}$$



回代 (Back Substitution)(I)



上海师范大学
Shanghai Normal University

接下来我们只要从最底下的方程组依次往上便可求出对应的解:

接下来我们只要从最底下的方程组依次往上便可求出对应的解：

•

$$\begin{array}{ccc} x - 2y = 1 & & x - 2y = 1 \\ 3x + 2y = 11 & \implies & 8y = 8 \end{array}$$

由 $8y = 8$ 自然而然有 $y = 1$ ，再代入 $x - 2y = 1$ 便有 $x = 3$ 。

接下来我们只要从最底下的方程组依次往上便可求出对应的解：

•

$$\begin{array}{rcl} x - 2y = 1 & & \\ 3x + 2y = 11 & \implies & \end{array} \quad \begin{array}{rcl} x - 2y = 1 & & \\ 8y = 8 & & \end{array}$$

由 $8y = 8$ 自然而然有 $y = 1$ ，再代入 $x - 2y = 1$ 便有 $x = 3$ 。

•

$$\begin{array}{rcl} x - 2y = 1 & & \\ 3x - 6y = 3 & \implies & \end{array} \quad \begin{array}{rcl} x - 2y = 1 & & \\ 0y = 0 & & \end{array}$$

由 $0y = 0$ 从而有无数多个解。

回代 (Back Substitution)(II)

•

$$\begin{array}{rcl} x - 2y = 1 & & x - 2y = 1 \\ 3x - 6y = 11 & \implies & 0y = 8 \end{array}$$

$0y = 8$ 没有解。

-

$$\begin{array}{rcl} x - 2y = 1 & & x - 2y = 1 \\ 3x - 6y = 11 & \implies & 0y = 8 \end{array}$$

$0y = 8$ 没有解。

首元的个数

可以看到，消元会失败在当 n 个方程没有 n 个首元的时候：

- “ $0 \neq 0$ ”的方程：没有解。

$$\begin{array}{rcl} x - 2y = 1 & & x - 2y = 1 \\ 3x - 6y = 11 & \implies & 0y = 8 \end{array}$$

$0y = 8$ 没有解。

首元的个数

可以看到，消元会失败在当 n 个方程没有 n 个首元的时候：

- “ $0 \neq 0$ ”的方程：没有解。
- “ $0 = 0$ ”的方程：有无数多个解。



阶段总结



上海师范大学
Shanghai Normal University



阶段总结



上海师范大学
Shanghai Normal University

- 线性方程组的几何视角，行图像和列图像。



- 线性方程组的几何视角，行图像和列图像。
- 线性方程组的矩阵表示，矩阵与向量的乘积。



- 线性方程组的几何视角，行图像和列图像。
- 线性方程组的矩阵表示，矩阵与向量的乘积。
- 高斯消元法 (Gaussian Elimination)。

► 解线性方程组的矩阵表示



现在我们用矩阵的形式研究高斯消元法：

$$\begin{array}{rcl} 2x + 4y - 2z = 2 \\ 4x + 9y - 3z = 8 \\ -2x - 3y + 7z = 10 \end{array} \implies \begin{array}{rcl} 2x + 4y - 2z = 2 \\ 1y + z = 4 \\ 4z = 8 \end{array}$$

现在我们用矩阵的形式研究高斯消元法：

$$\begin{array}{rcl} 2x + 4y - 2z = 2 \\ 4x + 9y - 3z = 8 \\ -2x - 3y + 7z = 10 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} 2x + 4y - 2z = 2 \\ 1y + z = 4 \\ 4z = 8 \end{array}$$

矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

记左边形式为 $Ax = b$ ，右边的形式为 $Ux = c$ 。矩阵 A 怎么变到 U , b 怎么变到 c ?

一步消去步骤的矩阵表示 (I)

我们来考察其一个步骤:

$$\begin{aligned}2x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 2 \\4x_1 + 9x_2 - 3x_3 &= 8 \\-2x_1 - 3x_2 + 7x_3 &= 10\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$A \qquad \qquad x \qquad \qquad b$

一步消去步骤的矩阵表示 (I)

我们来考察其一个步骤:

$$\begin{aligned}2x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 2 \\4x_1 + 9x_2 - 3x_3 &= 8 \\-2x_1 - 3x_2 + 7x_3 &= 10\end{aligned}$$

$$\begin{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix} \\ A & x & & b \end{matrix}$$

第二行减去 2 倍的第一行, 得到:

$$\begin{aligned}2x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 2 \\1x_2 + 1x_3 &= 4 \\-2x_1 - 3x_2 + 7x_3 &= 10\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix}$$

一步消去步骤的矩阵表示 (II)

我们同样希望能够用矩阵来表示这个过程，即：

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix}$$

一步消去步骤的矩阵表示 (II)

我们同样希望能够用矩阵来表示这个过程，即：

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix}$$

注意到：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix}$$

一步消去步骤的矩阵表示 (III)

自然我们希望:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix}$$

一步消去步骤的矩阵表示 (III)

自然我们希望:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix}$$

我们称上述的矩阵为初等矩阵 (elementary matrix) 或者消元矩阵 (elimination matrix).

一步消去步骤的矩阵表示 (III)

自然我们希望:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix}$$

我们称上述的矩阵为初等矩阵 (elementary matrix) 或者消元矩阵 (elimination matrix).

- 如何去定义?

一步消去步骤的矩阵表示 (III)

自然我们希望:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix}$$

我们称上述的矩阵为初等矩阵 (elementary matrix) 或者消元矩阵 (elimination matrix).

- 如何去定义? 点积。



矩阵的乘法视角



$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ 的列视角:

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1(\text{column 1 of } A) + x_2(\text{column 2 of } A) + x_3(\text{column 3 of } A)$$

$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ 的列视角:

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1(\text{column 1 of } A) + x_2(\text{column 2 of } A) + x_3(\text{column 3 of } A)$$

$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} A$ 的行视角:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} A = x_1(\text{row 1 of } A) + x_2(\text{row 2 of } A) + x_3(\text{row 3 of } A)$$

$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ 的列视角:

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1(\text{column 1 of } A) + x_2(\text{column 2 of } A) + x_3(\text{column 3 of } A)$$

$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} A$ 的行视角:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} A = x_1(\text{row 1 of } A) + x_2(\text{row 2 of } A) + x_3(\text{row 3 of } A)$$

矩阵的乘法 AB 理解

$$\bullet \quad AB = A \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ab_1 & Ab_2 & Ab_3 \end{bmatrix}$$

$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ 的列视角:

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1(\text{column 1 of } A) + x_2(\text{column 2 of } A) + x_3(\text{column 3 of } A)$$

$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} A$ 的行视角:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} A = x_1(\text{row 1 of } A) + x_2(\text{row 2 of } A) + x_3(\text{row 3 of } A)$$

矩阵的乘法 AB 理解

- $AB = A \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ab_1 & Ab_2 & Ab_3 \end{bmatrix}$
- $AB = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} a_1 B \\ a_2 B \\ a_3 B \end{bmatrix}$

我们现在再回过头来看消元矩阵，我们从如下的单位矩阵 (identity matrix) 开始：

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

我们现在再回过头来看消元矩阵，我们从如下的单位矩阵 (identity matrix) 开始：

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

对于任意 b 有：

$$Ib = b$$

当我们将其中某一项 0 的位置替换成了一个非零的数 $-k$, 则我们有:

$$E_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 - kb_1 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

当我们将其中某一项 0 的位置替换成了一个非零的数 $-k$, 则我们有:

$$E_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 - kb_1 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

- 我们将这样子将第 i 行第 j 列的 0 替换成一个非零的数 $-k$ 的矩阵称为 E_{ij} .

当我们将其中某一项 0 的位置替换成了一个非零的数 $-k$, 则我们有:

$$E_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 - kb_1 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

- 我们将这样子将第 i 行第 j 列的 0 替换成一个非零的数 $-k$ 的矩阵称为 E_{ij} .
- $E_{ij}b$ 的作用实际上是将 b 的第 j 行的 $-k$ 倍加到了第 i 行后得到的

当我们将其中某一项 0 的位置替换成了一个非零的数 $-k$, 则我们有:

$$E_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 - kb_1 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

- 我们将这样子将第 i 行第 j 列的 0 替换成一个非零的数 $-k$ 的矩阵称为 E_{ij} .
- $E_{ij}b$ 的作用实际上是将 b 的第 j 行的 $-k$ 倍加到了第 i 行后得到的

当我们将其中某一项 0 的位置替换成了一个非零的数 $-k$, 则我们有:

$$E_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 - kb_1 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

- 我们将这样子将第 i 行第 j 列的 0 替换成一个非零的数 $-k$ 的矩阵称为 E_{ij} .
- $E_{ij}b$ 的作用实际上是将 b 的第 j 行的 $-k$ 倍加到了第 i 行后得到的

定义 1

[消元矩阵].

消元矩阵 E_{ij} 是将单位矩阵 I 的第 i 行第 j 列的 0 替换成一个非零的数 $-k$ 得到的矩阵。

当我们将其中某一项 0 的位置替换成了一个非零的数 $-k$, 则我们有:

$$E_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 - kb_1 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

- 我们将这样子将第 i 行第 j 列的 0 替换成一个非零的数 $-k$ 的矩阵称为 E_{ij} .
- $E_{ij}b$ 的作用实际上是将 b 的第 j 行的 $-k$ 倍加到了第 i 行后得到的

定义 1

[消元矩阵].

消元矩阵 E_{ij} 是将单位矩阵 I 的第 i 行第 j 列的 0 替换成一个非零的数 $-k$ 得到的矩阵。

符号说明

同济的教材里使用了 $E(ij(-k))$ 的符号表示。



置换矩阵



上海师范大学
Shanghai Normal University

有的时候我们需要将两行进行交换，这样的矩阵称为置换矩阵 (permutation matrix)。



置换矩阵



上海师范大学
Shanghai Normal University

有的时候我们需要将两行进行交换，这样的矩阵称为置换矩阵 (permutation matrix)。

- 如何将 b 的第一行和第二行交换？

有的时候我们需要将两行进行交换，这样的矩阵称为置换矩阵 (permutation matrix)。

- 如何将 b 的第一行和第二行交换？

$$P_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P_{12} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_2 \\ b_1 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

有的时候我们需要将两行进行交换，这样的矩阵称为**置换矩阵 (permutation matrix)**。

- 如何将 b 的第一行和第二行交换？

$$P_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P_{12} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_2 \\ b_1 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

定义 2

[置换矩阵].

置换矩阵 P_{ij} 是将单位矩阵 I 的第 i 行和第 j 行进行交换得到的矩阵。

有的时候我们需要将两行进行交换，这样的矩阵称为**置换矩阵 (permutation matrix)**。

- 如何将 b 的第一行和第二行交换？

$$P_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P_{12} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_2 \\ b_1 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

定义 2

[置换矩阵].

置换矩阵 P_{ij} 是将单位矩阵 I 的第 i 行和第 j 行进行交换得到的矩阵。

符号说明

同济的教材里使用了 $E(i, j)$ 的符号表示。

高斯消元法的矩阵表示 (I)

让我们再来看刚刚的例子：

1

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix}$$

高斯消元法的矩阵表示 (I)

让我们再来看刚刚的例子:

1

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix}$$

其对应的消元矩阵

$$E_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix}$$

2

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 12 \end{bmatrix}$$

2

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 12 \end{bmatrix}$$

其对应的消元矩阵

$$E_{31} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} : \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

3

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 12 \end{bmatrix}$$

3

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 12 \end{bmatrix}$$

其对应的消元矩阵

$$E_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} : \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

高斯消元法的矩阵表示-总结 (I)

我们将上述消去的过程合起来，可以表示成：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix} \right) \right)$$

我们将上述消去的过程合起来，可以表示成：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix} \right) \right)$$

矩阵乘法的运算规则

我们先不加证明的列举出矩阵乘法的运算性质：

1. 满足结合律 (Associate Law): $(AB)C = A(BC)$ 。
2. 不满足交换律 (Commutative Law): $AB \neq BA$ 。

通过矩阵乘法的运算规则可知:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix} \right) \right) \\ &= \left(\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

高斯消元法的矩阵表示-总结 (III)



上海师范大学
Shanghai Normal University

回顾线性方程组的表示:

$$\begin{array}{rcl} 2x + 4y - 2z = 2 & & 2x + 4y - 2z = 2 \\ 4x + 9y - 3z = 8 & \implies & 1y + z = 4 \\ -2x - 3y + 7z = 10 & & 4z = 8 \end{array}$$

高斯消元法的矩阵表示-总结 (III)



上海师范大学
Shanghai Normal University

回顾线性方程组的表示:

$$\begin{array}{rcl} 2x + 4y - 2z = 2 & & 2x + 4y - 2z = 2 \\ 4x + 9y - 3z = 8 & \implies & 1y + z = 4 \\ -2x - 3y + 7z = 10 & & 4z = 8 \end{array}$$

相应的消元过程可以用矩阵表示为:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

和

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

增广矩阵 (Augmented Matrix)

注意到消元对应的矩阵是同样作用在系数矩阵 A 和 b 上的，我们可以将其合并成一个矩阵看待：

- 增广矩阵 (Augmented Matrix):
$$\left[A \quad b \right] = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 2 \\ 4 & 9 & -3 & 8 \\ -2 & -3 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

注意到消元对应的矩阵是同样作用在系数矩阵 A 和 b 上的，我们可以将其合并成一个矩阵看待：

- 增广矩阵 (Augmented Matrix): $[A \quad b] = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 2 \\ 4 & 9 & -3 & 8 \\ -2 & -3 & 7 & 3 \end{bmatrix}$

则上述过程可以一并表示为：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 2 \\ 4 & 9 & -3 & 8 \\ -2 & -3 & 7 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$



阶段总结



上海师范大学
Shanghai Normal University



阶段总结



上海师范大学
Shanghai Normal University

- 高斯消元法的矩阵表示



阶段总结



上海师范大学
Shanghai Normal University

- 高斯消元法的矩阵表示
- 消元矩阵，置换矩阵。



阶段总结



上海师范大学
Shanghai Normal University

- 高斯消元法的矩阵表示
- 消元矩阵，置换矩阵。
- 矩阵的乘法视角。

矩阵的运算

定义 3

令 $m, n \geq 1$. 一个 $m \times n$ 的矩阵 A 具有如下的形式:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

特别的, 我们用 $A(i, j)$ 表示矩阵 A 的第 i 行第 j 列的元素。

[矩阵 (Matrix)].

一般情况下线性方程组的矩阵表示



上海师范大学
Shanghai Normal University

线性方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

一般情况下线性方程组的矩阵表示

线性方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

可以转换成如下的矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$m \times n \qquad n \times 1 \qquad m \times 1$

定义 4

[矩阵加法 (Addition)].

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{m1} & a'_{m2} & \cdots & a'_{mn} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a_{11} + a'_{11} & a_{12} + a'_{12} & \cdots & a_{1n} + a'_{1n} \\ a_{21} + a'_{21} & a_{22} + a'_{22} & \cdots & a_{2n} + a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + a'_{m1} & a_{m2} + a'_{m2} & \cdots & a_{mn} + a'_{mn} \end{bmatrix}$$

将两个线性方程组加起来:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \cdots + a'_{1n}x_n = b'_1 \\ a'_{21}x_1 + a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \vdots \\ a'_{m1}x_1 + a'_{m2}x_2 + \cdots + a'_{mn}x_n = b'_m \end{cases}$$

将两个线性方程组加起来:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad \begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \cdots + a'_{1n}x_n = b'_1 \\ a'_{21}x_1 + a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \vdots \\ a'_{m1}x_1 + a'_{m2}x_2 + \cdots + a'_{mn}x_n = b'_m \end{cases}$$

得到:

$$\begin{cases} (a_{11} + a'_{11})x_1 + (a_{12} + a'_{12})x_2 + \cdots + (a_{1n} + a'_{1n})x_n = b_1 + b'_1 \\ (a_{21} + a'_{21})x_1 + (a_{22} + a'_{22})x_2 + \cdots + (a_{2n} + a'_{2n})x_n = b_2 + b'_2 \\ \vdots \\ (a_{m1} + a'_{m1})x_1 + (a_{m2} + a'_{m2})x_2 + \cdots + (a_{mn} + a'_{mn})x_n = b_m + b'_m \end{cases}$$

定义 5

[矩阵数乘 (scalar multiplication)].

$$c \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \cdots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \cdots & ca_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \cdots & ca_{mn} \end{bmatrix}$$

定义 6

[矩阵乘法 (Matrix Multiplication)].

令 $m, n, p \geq 1$, A 是一个 $m \times n$ 的矩阵, B 是一个 $n \times p$ 的矩阵:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix}$$

则矩阵的乘积 AB 是一个 $m \times p$ 的矩阵:

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mp} \end{bmatrix}$$

其中 c_{ij} 定义为:

$$c_{ij} = (a_{i1}, \dots, a_{in}) \cdot (b_{1j}, \dots, b_{nj}) = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$



说明

当 $p = 1$ 的时候便是我们已经定义过的矩阵与向量的乘法。

说明

当 $p = 1$ 的时候便是我们已经定义过的矩阵与向量的乘法。

例 7.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & 3 \\ 8 & 6 & 12 \end{bmatrix}$$

考察如下的两个线性方程组:

$$(I) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = y_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = y_m \end{cases}$$

矩阵形式

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

$$(II) \begin{cases} b_{11}z_1 + b_{12}z_2 + \cdots + b_{1p}z_p = x_1 \\ b_{21}z_1 + b_{22}z_2 + \cdots + b_{2p}z_p = x_2 \\ \vdots \\ b_{n1}z_1 + b_{n2}z_2 + \cdots + b_{np}z_p = x_n \end{cases}$$

矩阵形式

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

如果我们希望用 z_1, \dots, z_p 来表示 y_1, \dots, y_m , 则有:

$$\begin{aligned}y_i &= a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \\&= a_{i1}(b_{11}z_1 + b_{12}z_2 + \cdots + b_{1p}z_p) + \cdots + a_{in}(b_{n1}z_1 + b_{n2}z_2 + \cdots + b_{np}z_p) \\&= (a_{i1}b_{11} + a_{i2}b_{21} + \cdots + a_{in}b_{n1})z_1 + \cdots + (a_{i1}b_{1p} + a_{i2}b_{2p} + \cdots + a_{in}b_{np})z_p \\&= \sum_{j=1}^p (a_{j1}, \dots, a_{jn}) \cdot (b_{1j}, \dots, b_{nj})z_j\end{aligned}$$

用矩阵的形式描述便是由：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \text{ 和 } \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_p \end{bmatrix} \right)$$

用矩阵的形式描述便是由：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \text{ 和 } \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_p \end{bmatrix} \right)$$

注意到： $y_i = \sum_{j=1}^p (a_{i1}, \dots, a_{in}) \cdot (b_{1j}, \dots, b_{nj}) z_j$ ，这就是：

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_p \end{bmatrix}$$

当我们将 B 看成若干列向量组合而成的矩阵时，即：

$$B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_p \end{bmatrix}$$

当我们将 B 看成若干列向量组合而成的矩阵时，即：

$$B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_p \end{bmatrix}$$

我们有：

$$AB = \begin{bmatrix} Ab_1 & Ab_2 & \cdots & Ab_p \end{bmatrix}$$

即：

当我们将 B 看成若干列向量组合而成的矩阵时，即：

$$B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_p \end{bmatrix}$$

我们有：

$$AB = \begin{bmatrix} Ab_1 & Ab_2 & \cdots & Ab_p \end{bmatrix}$$

即：

矩阵 AB 的每一列都是 A 中列向量的线性组合。

当我们将 A 看成若干行向量组合而成的矩阵时，即：

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

当我们将 A 看成若干行向量组合而成的矩阵时，即：

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

我们有：

$$AB = \begin{bmatrix} a_1 B \\ a_2 B \\ \vdots \\ a_m B \end{bmatrix}$$

即：

当我们将 A 看成若干行向量组合而成的矩阵时，即：

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

我们有：

$$AB = \begin{bmatrix} a_1 B \\ a_2 B \\ \vdots \\ a_m B \end{bmatrix}$$

即：

矩阵 AB 的每一行都是 B 中行向量的线性组合。

矩阵乘法的第四种视角



上海师范大学
Shanghai Normal University

矩阵乘法的第四种视角

将 A 写成列向量的形式:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

将 A 写成列向量的形式:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

将 B 写成行向量的形式:

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

将 A 写成列向量的形式:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

将 B 写成行向量的形式:

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

则我们有:

$$AB = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

下面我们给出矩阵运算的一些性质，我们不妨假定里面的矩阵总是符合运算的要求的：

引理 8.

矩阵加法和数乘满足：

1. 交换律 (Commutative Law): $A + B = B + A$
2. 分配律 (Distributive Law): $c(A + B) = cA + cB$
3. 结合律 (Associative Law): $(A + B) + C = A + (B + C)$



引理 9.

矩阵乘法满足:

1. 结合律 (不需要括号): $(AB)C = A(BC)$
2. 分配律 (左分配律): $(A + B)C = AC + BC$
3. 分配律 (右分配律): $A(B + C) = AB + AC$

引理 9.

矩阵乘法满足:

1. 结合律 (不需要括号): $(AB)C = A(BC)$
2. 分配律 (左分配律): $(A + B)C = AC + BC$
3. 分配律 (右分配律): $A(B + C) = AB + AC$

注意

我们再次强调, 矩阵乘法不满足交换律, 即一般情况下 $AB \neq BA$ 。



阶段总结



上海师范大学
Shanghai Normal University



阶段总结



上海师范大学
Shanghai Normal University

- 矩阵以及矩阵运算的定义。



阶段总结



上海师范大学
Shanghai Normal University

- 矩阵以及矩阵运算的定义。
- 矩阵乘法的四种理解方式。



阶段总结



上海师范大学
Shanghai Normal University

- 矩阵以及矩阵运算的定义。
- 矩阵乘法的四种理解方式。
- 矩阵运算的性质。