《线性代数》

6-矩阵的列秩与行秩 (Column Rank and Row Rank of Matrices)

杨启哲

上海师范大学信机学院计算机系

2024 年 3 月 24 日

复习-向量空间 (I)

一个向量空间 V 是一个非空集合，其中的元素称之为向量，并且其满足以下两种运算：

- 向量加法：对于任意的 $u, v \in V$，$u + v \in V$。
- 数与向量的乘法（数乘）：对于任意的 $u \in V$ 和任意的实数 $c \in \mathbb{R}$，$cu \in V$。

其中的加法满足如下的性质:

1. 加法满足交换律:
$$u + v = v + u$$
2. 加法满足结合律:
$$u + (v + w) = (u + v) + w$$
3. 加法存在一个零元素（唯一的）$\mathbf{0}$，其满足 $u + \mathbf{0} = u$ 对任意的 $u \in V$。
4. 加法存在一个负元素（逆元），即对于任意的 $u \in V$，存在一个 $v \in V$，使得 $u + v = \mathbf{0}$，特别的，将 v 记为 $-u$。

其中的数乘满足如下的性质:

5. 数乘存在单位元 1，使得 $1u = u$ 对于任意的 $u \in V$。
6. 数乘满足结合律:
$$c_1(c_2u) = (c_1c_2)u$$
7. 数乘是线性的，即对于任意的 $c \in \mathbb{R}$ 和 $u, v \in V$ 均有:
$$c(u + v) = cu + cv$$
8. 数乘对于加法满足分配律，即对于任意的 $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ 和 $u \in V$ 均有:
$$(c_1 + c_2)u = c_1u + c_2u$$

Shanghai Normal University 上海师范大学

定义 1 **[子空间 (Subspace)].**

给定一个向量空间 V，如果 W 是 V 的一个非空子集，并且 W 满足如下两个条件：

1. 对于任意的 $\mathrm{u}, \mathrm{v} \in W$， $\mathrm{u}+\mathrm{v} \in W$。
2. 对于任意的 $\mathrm{c} \in \mathbb{R}$ 和 $\mathrm{u} \in W$， $\mathrm{cu} \in W$。

则称 W 是 V 的一个子空间。

定义 1 **[子空间 (Subspace)].**

给定一个向量空间 V，如果 W 是 V 的一个非空子集，并且 W 满足如下两个条件：

1. 对于任意的 $u, v \in W$，$u + v \in W$。
2. 对于任意的 $c \in \mathbb{R}$ 和 $u \in W$，$cu \in W$。

则称 W 是 V 的一个子空间。

引理 2.

令 V 是一个向量空间，W 是 V 的一个子集。则 W 是 V 的一个子空间当且仅当：对于任意的 $k \geqslant 0$，$c_1, \cdots, c_k \in \mathbb{R}$ 和 $v_1, \ldots, v_k \in W$ 均有：

$$c_1 v_1 + \cdots + c_k v_k \in W$$

特别的，当 $k = 0$ 时我们令上述和为 $\mathbf{0}$.

复习：向量空间的基

定义 3 [向量空间的基 (A Bssis for a Vector Space)].

一组向量是一个向量空间的基 如果其满足:

1. 这组向量是线性无关的。
2. 这组向量生成了向量空间 V。

定义 3 **[向量空间的基 (A Bssis for a Vector Space)].**

一组向量是一个向量空间的基 如果其满足:

1. 这组向量是线性无关的。
2. 这组向量生成了向量空间 V。

引理 4 **[Steinitz Exchange Lemma].**

令 $e_1, \ldots, e_n$ 是向量空间 V 的一个基，$v_1, \ldots, v_m$ 是 V 的一个线性无关的向量组，其中 $1 \leqslant m \leqslant n$。则存在 $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_{n-m} < n$，使得 $v_1, \ldots, v_m, e_{i_1}, \ldots, e_{i_{n-m}}$ 是 V 的一个基。

定义 5 **[维度 (Dimension)].**

给定一个向量空间 V，其维度，记作 $\dim(V)$，是指 V 的一个基中的向量个数。

定义 5 **[维度 (Dimension)].**

给定一个向量空间 V，其维度，记作 $\dim(V)$，是指 V 的一个基中的向量个数。

定理 6.

给定一个向量空间 V 和其子空间 W，如果 V 是有限的，则 W 也是有限的，并且：

$$\dim(W) \leqslant \dim(V)$$

主要内容

上海师范大学 Shanghai Normal University

- 列空间的秩与行空间的秩

- 通过 Gauss–Jordan 消元法来求 A^{-1}

列空间的秩与行空间的秩

矩阵的列空间

令 A 是一个 $m \times n$ 的矩阵，其列空间定义为:

$$C(A) = \{Ax | x \in \mathbb{R}^n\}$$

令 A 是一个 $m \times n$ 的矩阵，其列空间定义为:

$$C(A) = \{Ax | x \in \mathbb{R}^n\}$$

$C(A)$ 显然是 $\mathbb{R}^m$ 的一个子空间，所以我们有:

定理 7.

$C(A)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的一个子空间, 且

$$\dim(C(A)) \leqslant \dim(\mathbb{R}^m) = m.$$

事实上，注意到 A 是一个 $m \times n$ 的矩阵，我们还有：

定理 8.

$$\dim(C(A)) \leqslant n$$

事实上，注意到 A 是一个 $m \times n$ 的矩阵，我们还有：

定理 8.

$$\dim(C(A)) \leqslant n$$

直观理解

直观上理解，n 个 $\mathbb{R}^m$ 的列向量的线性组合组成的空间的维数不会超过 n。

$\dim(C(A)) \leqslant n$ 的证明

证明. 令 A 的列向量为 $a_1, \ldots, a_n$，则可以在其中选择一个子序列:

$$a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}$$

满足:

- $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$.
- $a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}$ 是线性无关的。
- k 是最大的。

$\dim(C(A)) \leqslant n$ 的证明

上海师范大学 Shanghai Normal University

证明. 令 A 的列向量为 $a_1, \ldots, a_n$，则可以在其中选择一个子序列:

$$a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}$$

满足:

- $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$.
- $a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}$ 是线性无关的。
- k 是最大的。

则我们有:

$$C(A) = \text{span}\{a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}\}$$

即:

$$\dim(C(A)) = k \leqslant n$$

□

定义 9 **[列秩 (Column Rank)].**

给定一个 $m \times n$ 的矩阵 A，其列秩 (Column Rank) 定义为:

$$\text{column} - \text{rank}(A) = \dim(C(A))$$

定义 9 **[列秩 (Column Rank)].**

给定一个 $m \times n$ 的矩阵 A，其列秩 (Column Rank) 定义为:

$$\mathrm{column}-\mathrm{rank}(A) = \dim(C(A))$$

例 10.

矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 9 & 18 \\ 7 & 8 & 15 & 30 \end{bmatrix}$ 的列秩为 2.

定理 11.

给定一个 $m \times n$ 的矩阵 A，则其列秩为 m 当且仅当存在一个 $n \times m$ 的矩阵 B 使得:

$$AB = I$$

定理 11.

给定一个 $m \times n$ 的矩阵 A，则其列秩为 m 当且仅当存在一个 $n \times m$ 的矩阵 B 使得：

$$AB = I$$

推论 12.

如果 $n \times n$ 的矩阵 A 是可逆的，则其列秩为 n。

问题 13.

假设一个 $n \times n$ 的矩阵 A 的列秩为 n，则 A 是否一定是可逆的?

问题 13.

假设一个 $n \times n$ 的矩阵 A 的列秩为 n，则 A 是否一定是可逆的?

- 如果 A 的列秩为 n，则对于任意的 $b \in \mathbb{R}^n$，方程

$$Ax = b$$

都有唯一解。

问题 13.

假设一个 $n \times n$ 的矩阵 A 的列秩为 n，则 A 是否一定是可逆的?

- 如果 A 的列秩为 n，则对于任意的 $b \in \mathbb{R}^n$，方程

$$Ax = b$$

  都有唯一解。
- 所以上述问题问的是我们是否可以写成:

$$x = A^{-1}b$$

目前为止，我们已经展示了，对于一个 $n \times n$ 的矩阵 A 来说：

目前为止，我们已经展示了，对于一个 $n \times n$ 的矩阵 A 来说：

1. 如果存在 B, C 使得 $AB = CA = I$，则 A 是可逆的，并且有 $A^{-1} = B = C$。

一个简单的回顾

目前为止，我们已经展示了，对于一个 $n \times n$ 的矩阵 A 来说：

1. 如果存在 B, C 使得 $AB = CA = I$，则 A 是可逆的，并且有 $A^{-1} = B = C$。
2. $\text{column–rank}(A) = n$ 当且仅当存在一个 $n \times n$ 的矩阵 B 使得 $AB = I$。

目前为止，我们已经展示了，对于一个 $n \times n$ 的矩阵 A 来说：

1. 如果存在 B, C 使得 $AB = CA = I$，则 A 是可逆的，并且有 $A^{-1} = B = C$。
2. $\text{column-rank}(A) = n$ 当且仅当存在一个 $n \times n$ 的矩阵 B 使得 $AB = I$。

一个简单的回顾

上海师范大学 Shanghai Normal University

目前为止，我们已经展示了，对于一个 $n \times n$ 的矩阵 A 来说：

1. 如果存在 B, C 使得 $AB = CA = I$，则 A 是可逆的，并且有 $A^{-1} = B = C$。
2. $\text{column-rank}(A) = n$ 当且仅当存在一个 $n \times n$ 的矩阵 B 使得 $AB = I$。

接下来的目标

$$\text{column-rank}(A) = n \text{ 当且仅当存在一个 } n \times n \text{ 的矩阵 } B \text{ 使得 } BA = I\text{。}$$

令 A 是一个 $m \times n$ 的矩阵，并且我们将其写成行向量的形式 $A = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$，回顾我们曾定义过的对于矩阵 A 的行空间 $C(A^\top)$:

$$C(A^\top) = \mathrm{span}\{a_1, \ldots, a_m\} \Rightarrow \dim(C(A^\top)) = \dim(\mathrm{span}\{a_1, \ldots, a_m\})$$

令 A 是一个 $m \times n$ 的矩阵，并且我们将其写成行向量的形式 $A = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$，回顾我们曾定义过的对于矩阵 A 的行空间 $C(A^T)$:

$$C(A^T) = \text{span}\{a_1, \dots, a_m\} \Rightarrow \dim(C(A^T)) = \dim(\text{span}\{a_1, \dots, a_m\})$$

定义 14 **[行秩 (Row Rank)].**

矩阵 A 的行秩 (Row Rank) 定义为:

$$\text{row-rank}(A) = \dim(C(A^T))$$

引理 15.

下面的叙述是等价的:

1. A 的行秩是 n.
2. A^T 的列秩是 n.
3. 存在一个矩阵 B，使得 $A^\mathsf{T}B = I$。
4. 存在一个矩阵 B，使得 $BA = I$

引理 15.

下面的叙述是等价的:

1. A 的行秩是 n.
2. A^T 的列秩是 n.
3. 存在一个矩阵 B，使得 $A^TB = I$。
4. 存在一个矩阵 B，使得 $BA = I$

还欠缺什么?

引理 15.

下面的叙述是等价的:

1. A 的行秩是 n.
2. A^{T} 的列秩是 n.
3. 存在一个矩阵 B，使得 $A^{\mathrm{T}}B = I$。
4. 存在一个矩阵 B，使得 $BA = I$

还欠缺什么?

定理 16.

给定一个 $m \times n$ 的矩阵，我们有 $\mathrm{row{-}rank}(A) = \mathrm{column{-}rank}(A)$.

定理16的一个证明

证明. 我们只需证明对任意的矩阵 A，其有 $\text{row-rank}(A) \leqslant \text{column-rank}(A)$ 即可。

设 $\text{row-rank}(A) = r$，$\text{column-rank}(A) = c$。则存在 A 的 c 个列向量 $a_{i_1}, \ldots, a_{i_c}$ 是线性无关的，并且对于 A 中的每个列向量 $a_j (j \leqslant n)$，存在 $p_{j1}, \ldots, p_{jc}$ 使得:

$$a_j = p_{j1} a_{i_1} + \cdots + p_{jc} a_{i_c}$$

证明. 我们只需证明对任意的矩阵 A，其有 $\mathrm{row-rank}(A) \leqslant \mathrm{column-rank}(A)$ 即可。

设 $\mathrm{row-rank}(A) = r$，$\mathrm{column-rank}(A) = c$。则存在 A 的 c 个列向量 $a_{i_1}, \ldots, a_{i_c}$ 是线性无关的，并且对于 A 中的每个列向量 $a_j (j \leqslant n)$，存在 $p_{j1}, \ldots, p_{jc}$ 使得:

$$a_j = p_{j1} a_{i_1} + \cdots + p_{jc} a_{i_c}$$

从而我们有:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{i_1} & \cdots & a_{i_c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{c1} & \cdots & p_{cn} \end{bmatrix}$$

定理16的一个证明

证明. 我们只需证明对任意的矩阵 A，其有 $\mathrm{row-rank}(A) \leqslant \mathrm{column-rank}(A)$ 即可。

设 $\mathrm{row-rank}(A) = r$，$\mathrm{column-rank}(A) = c$。则存在 A 的 c 个列向量 $a_{i_1}, \ldots, a_{i_c}$ 是线性无关的，并且对于 A 中的每个列向量 $a_j (j \leqslant n)$，存在 $p_{j1}, \ldots, p_{jc}$ 使得：

$$a_j = p_{j1}a_{i_1} + \cdots + p_{jc}a_{i_c}$$

从而我们有：

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{i_1} & \cdots & a_{i_c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{c1} & \cdots & p_{cn} \end{bmatrix}$$

记等式最右面的矩阵为 P,P 是一个 $c \times n$ 的矩阵，则有：

$$\mathrm{row-rank}(A) \leqslant \mathrm{row-rank}(P) \leqslant c = \mathrm{column-rank}(A)$$

□

阶段总结

- 矩阵的列秩和行秩。

阶段总结

上海师范大学 Shanghai Normal University

- 矩阵的列秩和行秩。
- $\mathrm{row\text{—}rank}(A) = \mathrm{column\text{—}rank}(A)$ 的一个简单但不深刻的证明

阶段总结

- 矩阵的列秩和行秩。
- $\mathrm{row-rank}(A) = \mathrm{column-rank}(A)$ 的一个简单但不深刻的证明
- 方阵的秩与方阵的逆的关系。

阶段总结

- 矩阵的列秩和行秩。
- $\text{row}-\text{rank}(A) = \text{column}-\text{rank}(A)$ 的一个简单但不深刻的证明
- 方阵的秩与方阵的逆的关系。

阶段总结

- 矩阵的列秩和行秩。
- $\mathrm{row{-}rank}(A) = \mathrm{column{-}rank}(A)$ 的一个简单但不深刻的证明
- 方阵的秩与方阵的逆的关系。

矩阵的秩跟解方程有什么关系?

方程 $Ax = b$

令 A 是一个 $m \times n$ 的矩阵，并且令其写为如下的形式：

$$A = \begin{bmatrix} a_1, \dots a_n \end{bmatrix}$$

其中每个 $a_i \in \mathbb{R}^m$.

方程 $Ax = b$

令 A 是一个 $m \times n$ 的矩阵，并且令其写为如下的形式：

$$A = \begin{bmatrix} a_1, \dots a_n \end{bmatrix}$$

其中每个 $a_i \in \mathbb{R}^m$.

引理 17.

- 对于任意的 $b \in \mathbb{R}^m$:

$$Ax = b\text{有解} \iff b \in C(A) = \mathrm{span}(\{a_1, \dots a_n\})$$

即方程 $Ax = b$ 对任意 $b \in \mathbb{R}^m$ 都有解当且仅当其列秩为 m，即 $\dim(C(A)) = m$。

令 A 是一个 $m \times n$ 的矩阵，并且令其写为如下的形式：

$$A = \begin{bmatrix} a_1, \dots a_n \end{bmatrix}$$

其中每个 $a_i \in \mathbb{R}^m$.

引理 17.

- 对于任意的 $b \in \mathbb{R}^m$：

$$Ax = b\text{有解} \iff b \in C(A) = \text{span}(\{a_1, \dots a_n\})$$

  即方程 $Ax = b$ 对任意 $b \in \mathbb{R}^m$ 都有解当且仅当其列秩为 m，即 $\dim(C(A)) = m$。
- 方程 $Ax = b$ 对某些 $b \in \mathbb{R}^m$ 有两个不同的解当且仅当 $a_1, \dots a_n$ 是线性相关的。

令 A 是一个 $m \times n$ 的矩阵，并且令其写为如下的形式：

$$A = \begin{bmatrix} a_1, \dots a_n \end{bmatrix}$$

其中每个 $a_i \in \mathbb{R}^m$.

引理 17.

- 对于任意的 $b \in \mathbb{R}^m$：

$$Ax = b\text{有解} \iff b \in C(A) = \mathrm{span}(\{a_1, \dots a_n\})$$

即方程 $Ax = b$ 对任意 $b \in \mathbb{R}^m$ 都有解当且仅当其列秩为 m，即 $\dim(C(A)) = m$。

- 方程 $Ax = b$ 对某些 $b \in \mathbb{R}^m$ 有两个不同的解当且仅当 $a_1, \dots a_n$ 是线性相关的。
- 方程 $Ax = b$ 对任意 $b \in \mathbb{R}^m$ 都有唯一解当且仅当：

$$a_1, \dots a_n\text{是}\mathbb{R}^m\text{的一组基}$$

即：$m = n$.

方程 $Ax = b$-特殊情况

Shanghai Normal University

引理 18.

令 A 是一个 $n \times n$ 的矩阵, 下面的叙述是等价的:

1. A 是可逆的。

引理 18.

令 A 是一个 $n \times n$ 的矩阵, 下面的叙述是等价的:

1. A 是可逆的。
2. 方程 $Ax = b$ 对任意 $b \in \mathbb{R}^m$ 都有唯一解.

引理 18.

令 A 是一个 $n \times n$ 的矩阵, 下面的叙述是等价的:

1. A 是可逆的。
2. 方程 $Ax = b$ 对任意 $b \in \mathbb{R}^m$ 都有唯一解.
3. $\dim(C(A)) = n$.

引理 18.

令 A 是一个 $n \times n$ 的矩阵, 下面的叙述是等价的:

1. A 是可逆的。
2. 方程 $Ax = b$ 对任意 $b \in \mathbb{R}^m$ 都有唯一解.
3. $\dim(C(A)) = n$.
4. 存在矩阵 B 使得 $AB = I$。

引理 18.

令 A 是一个 $n \times n$ 的矩阵, 下面的叙述是等价的:

1. A 是可逆的。
2. 方程 $Ax = b$ 对任意 $b \in \mathbb{R}^m$ 都有唯一解.
3. $\dim(C(A)) = n$.
4. 存在矩阵 B 使得 $AB = I$。
5. 存在矩阵 C 使得 $CA = I$。

引理 18.

令 A 是一个 $n \times n$ 的矩阵, 下面的叙述是等价的:

1. A 是可逆的。
2. 方程 $Ax = b$ 对任意 $b \in \mathbb{R}^m$ 都有唯一解.
3. $\dim(C(A)) = n$.
4. 存在矩阵 B 使得 $AB = I$。
5. 存在矩阵 C 使得 $CA = I$。

引理 18.

令 A 是一个 $n \times n$ 的矩阵, 下面的叙述是等价的:

1. A 是可逆的。
2. 方程 $Ax = b$ 对任意 $b \in \mathbb{R}^m$ 都有唯一解.
3. $\dim(C(A)) = n$.
4. 存在矩阵 B 使得 $AB = I$。
5. 存在矩阵 C 使得 $CA = I$。

从而我们很自然的得到 A 的逆 $A^{-1} = B = C$ 满足:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

引理 18.

令 A 是一个 $n \times n$ 的矩阵, 下面的叙述是等价的:

1. A 是可逆的。
2. 方程 $Ax = b$ 对任意 $b \in \mathbb{R}^m$ 都有唯一解.
3. $\dim(C(A)) = n$.
4. 存在矩阵 B 使得 $AB = I$。
5. 存在矩阵 C 使得 $CA = I$。

从而我们很自然的得到 A 的逆 $A^{-1} = B = C$ 满足:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

怎么求 A^{-1}?

我们将使用 Gauss–Jordan 消元法，也就是 Gauss 消元法的一种拓展。

通过 Gauss–Jordan 消元法来求 A^{-1}

来考虑下面的方程组:

$$\begin{aligned} x - 2y &= 1 \\ 3x + 2y &= 11 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} x - 2y &= 1(\text{将第一个式子乘以 } 3) \\ 8y &= 8(\text{减去上面的式子消去 } x) \end{aligned}$$

新的方程是上三角的 (upper triangular)，类似的，有:

$$\begin{aligned} 4x - 8y &= 4 \\ 3x + 2y &= 11 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} \color{red}{4}x - 8y &= 4(\text{将第一个式子乘以} \tfrac{3}{4}) \\ \color{red}{8}y &= 8(\text{减去上面的式子消去 } x) \end{aligned}$$

来考虑下面的方程组:

$$\begin{aligned} x - 2y &= 1 \\ 3x + 2y &= 11 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} x - 2y &= 1(\text{将第一个式子乘以 } 3) \\ 8y &= 8(\text{减去上面的式子消去 } x) \end{aligned}$$

新的方程是上三角的 (upper triangular)，类似的，有:

$$\begin{aligned} 4x - 8y &= 4 \\ 3x + 2y &= 11 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} {\color{red}4}x - 8y &= 4(\text{将第一个式子乘以}\frac{3}{4}) \\ {\color{red}8}y &= 8(\text{减去上面的式子消去 } x) \end{aligned}$$

- 首元 (pivot)：行中第一个做其他行消去的非零元素。在完成消去后，首元在对角线上。

回顾-高斯消元法

来考虑下面的方程组:

$$\begin{aligned} x - 2y &= 1 \\ 3x + 2y &= 11 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} x - 2y &= 1(\text{将第一个式子乘以 } 3) \\ 8y &= 8(\text{减去上面的式子消去 } x) \end{aligned}$$

新的方程是上三角的 (upper triangular), 类似的, 有:

$$\begin{aligned} 4x - 8y &= 4 \\ 3x + 2y &= 11 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} 4x - 8y &= 4(\text{将第一个式子乘以}\frac{3}{4}) \\ 8y &= 8(\text{减去上面的式子消去 } x) \end{aligned}$$

- 首元 (pivot): 行中第一个做其他行消去的非零元素。在完成消去后, 首元在对角线上。
- 倍数 (multiplier): 用来消去其他行的倍数。

例 19.

$$\begin{aligned} x - 2y &= 1 \\ 3x - 6y &= 11 \end{aligned} \quad\Longrightarrow\quad \begin{aligned} x - 2y &= 1 \\ 0y &= 8 \end{aligned}$$

此时方程没有解。

消元法失败的情况 (I)

例 19.

$$\begin{aligned} x-2y&=1 \\ 3x-6y&=11 \end{aligned} \quad\Longrightarrow\quad \begin{aligned} x-2y&=1 \\ 0y&=8 \end{aligned}$$

此时方程没有解。

例 20.

$$\begin{aligned} x-2y&=1 \\ 3x-6y&=3 \end{aligned} \quad\Longrightarrow\quad \begin{aligned} x-2y&=1 \\ 0y&=0 \end{aligned}$$

此时方程有无数的解。

例 19.

$$\begin{aligned} x - 2y &= 1 \\ 3x - 6y &= 11 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} x - 2y &= 1 \\ 0y &= 8 \end{aligned}$$

此时方程没有解。

例 20.

$$\begin{aligned} x - 2y &= 1 \\ 3x - 6y &= 3 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} x - 2y &= 1 \\ 0y &= 0 \end{aligned}$$

此时方程有无数的解。

当 n 个方程没有 n 个首元的时候，我们就会遇到上面的情况。

例 21.

$$\begin{aligned} -2y &= 1 \\ 3x - 6y &= 11 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} 3x - 6y &= 1 \\ -2y &= 8 \end{aligned}$$

但我们只需要进行一次行变换就可以使得方程继续消元下去。

例 21.

$$\begin{aligned} -2y &= 1 \\ 3x - 6y &= 11 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} 3x - 6y &= 1 \\ -2y &= 8 \end{aligned}$$

但我们只需要进行一次行变换就可以使得方程继续消元下去。

总结

- 前两个方程组并没有 2 个首元，我们称其是奇异的 (singular)。

例 21.

$$\begin{aligned} -2y &= 1 \\ 3x - 6y &= 11 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} 3x - 6y &= 1 \\ -2y &= 8 \end{aligned}$$

但我们只需要进行一次行变换就可以使得方程继续消元下去。

总结

- 前两个方程组并没有 2 个首元，我们称其是奇异的 (singular)。
- 第三个方程组有 2 个首元，我们称其是非奇异的 (nonsingular)

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} {\color{red}2} & 4 & -2 \\ 0 & {\color{red}1} & 1 \\ 0 & 0 & {\color{red}4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$Ax = b$ $\qquad\qquad$ $Ux = c$

从 $Ax = b$ 到 $Ux = c$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$Ax = b$ $\qquad$ $Ux = c$

1. 通过第一个方程上的第一个首元将所有后续方程对应位置上的系数全部变成 0。

从 $Ax = b$ 到 $Ux = c$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} \color{red}{2} & 4 & -2 \\ 0 & \color{red}{1} & 1 \\ 0 & 0 & \color{red}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$Ax = b \qquad\qquad Ux = c$$

1. 通过第一个方程上的第一个首元将所有后续方程对应位置上的系数全部变成 0。
2. 通过新的第二个方程上的第二个首元将所有后续方程对应位置上的系数全部变成 0。

从 $Ax = b$ 到 $Ux = c$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$Ax = b$ $\qquad$ $Ux = c$

1. 通过第一个方程上的第一个首元将所有后续方程对应位置上的系数全部变成 0。
2. 通过新的第二个方程上的第二个首元将所有后续方程对应位置上的系数全部变成 0。

3-n 重复以上操作找到 n 个首元，最终得到了一个上三角形的矩阵 U。

回顾：消元的矩阵形式 (I)

消元矩阵 $E_{ij}(-k)$

$$
\begin{bmatrix}
1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\
0 & \cdots & 1 & \cdots & -k & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i - ka_j \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}
$$

回顾：消元的矩阵形式 (I)

消元矩阵 $E_{ij}(-k)$

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & -k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i - ka_j \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

引理 22.

$E_{ij}^{-1}(-k) = E_{ij}(k)$

消元矩阵 $E_{ij}(-k)$

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & -k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i - ka_j \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

引理 22.

$E_{ij}^{-1}(-k) = E_{ij}(k)$

当不关心 $-k$ 的具体值得时候，我们后面会省略 $-k$ 来表示这样一类矩阵。

回顾：消元的矩阵形式 (II)

置换矩阵 P_{ij}

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

置换矩阵 P_{ij}

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

引理 23.

$$P_{ij}^{-1} = P_{ij}$$

小插曲：$A = LU$(I)

假设矩阵 A 是 3×3 的，且消元过程中不需要进行行交换，则我们有：

$$E_{32}E_{31}E_{21}A = U$$

小插曲：$A = LU$(I)

假设矩阵 A 是 3×3 的，且消元过程中不需要进行行交换，则我们有：

$$E_{32}E_{31}E_{21}A = U$$

一般的，对于 $n \times n$ 的情形，且消元过程中不需要进行行交换，则我们有：

$$E_{n(n-1)}E_{n(n-2)}E_{(n-1)(n-2)}\cdots E_{31}E_{21}A = U$$

小插曲：$A = LU$(I)

假设矩阵 A 是 3×3 的，且消元过程中不需要进行行交换，则我们有：

$$E_{32}E_{31}E_{21}A = U$$

一般的，对于 $n \times n$ 的情形，且消元过程中不需要进行行交换，则我们有：

$$E_{n(n-1)}E_{n(n-2)}E_{(n-1)(n-2)}\cdots E_{31}E_{21}A = U$$

从而我们有：

$$A = E_{21}E_{31}\cdots E_{(n-1)(n-2)}E_{n(n-2)}E_{n(n-1)}U = LU$$

小插曲：$A = LU$(I)

假设矩阵 A 是 3×3 的，且消元过程中不需要进行行交换，则我们有：

$$E_{32}E_{31}E_{21}A = U$$

一般的，对于 $n \times n$ 的情形，且消元过程中不需要进行行交换，则我们有：

$$E_{n(n-1)}E_{n(n-2)}E_{(n-1)(n-2)} \cdots E_{31}E_{21}A = U$$

从而我们有：

$$A = E_{21}E_{31} \cdots E_{(n-1)(n-2)}E_{n(n-2)}E_{n(n-1)}U = LU$$

这里 L 是一个下三角形矩阵。

关于 E_{ij} 的乘积还有一个有意思的发现：

$$E_{32}E_{31}E_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_{21}E_{31}E_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

小插曲：$A = LU$(II)

关于 E_{ij} 的乘积还有一个有意思的发现:

$$E_{32}E_{31}E_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_{21}E_{31}E_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

如果需要进行行变换，A 和 U 的形式又是怎么样的?

小插曲：$A = LU$(II)

关于 E_{ij} 的乘积还有一个有意思的发现：

$$E_{32}E_{31}E_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_{21}E_{31}E_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

如果需要进行行变换，A 和 U 的形式又是怎么样的？

- $PA = LU$.

回到解方程-高斯若尔当消元 (I)

高斯消元法告诉我们:

$$\begin{aligned} x-2y-6z &= 1\\ 2z &= 4\\ 3x+2y &= 11 \end{aligned} \Longrightarrow \begin{aligned} x-2y-6z &= 1\\ 2z &= 4\\ 8y+18z &= 8 \end{aligned} \Longrightarrow \begin{aligned} x-2y-6z &= 1\\ 8y+18z &= 8\\ 2z &= 4 \end{aligned}$$

回到解方程-高斯若尔当消元 (I)

上海师范大学 Shanghai Normal University

高斯消元法告诉我们:

$$\begin{aligned} x-2y-6z &= 1 \\ 2z &= 4 \\ 3x+2y &= 11 \end{aligned} \Longrightarrow \begin{aligned} x-2y-6z &= 1 \\ 2z &= 4 \\ 8y+18z &= 8 \end{aligned} \Longrightarrow \begin{aligned} x-2y-6z &= 1 \\ 8y+18z &= 8 \\ 2z &= 4 \end{aligned}$$

也就是:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{P_{23}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_{31}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 8 & 11 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 & 1 \\ 0 & 8 & 18 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

回到解方程-高斯若尔当消元 (I)

高斯消元法告诉我们:

$$\begin{aligned} x-2y-6z &= 1 \\ 2z &= 4 \\ 3x+2y &= 11 \end{aligned} \Longrightarrow \begin{aligned} x-2y-6z &= 1 \\ 2z &= 4 \\ 8y+18z &= 8 \end{aligned} \Longrightarrow \begin{aligned} x-2y-6z &= 1 \\ 8y+18z &= 8 \\ 2z &= 4 \end{aligned}$$

也就是:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\color{red}{P_{23}}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\color{red}{E_{31}}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 8 & 11 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 & 1 \\ 0 & 8 & 18 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

通过回代，我们就可以得到:

$$z = 2, \qquad y = -3.5, \qquad x = 6$$

回到解方程-高斯若尔当消元 (II)

$$\begin{aligned} x-2y-6z &= 1 \\ 2z &= 4 \\ 3x+2y &= 11 \end{aligned} \Longrightarrow \begin{aligned} x-2y-6z &= 1 \\ 2z &= 4 \\ 8y+18z &= 8 \end{aligned} \Longrightarrow \begin{aligned} x-2y-6z &= 1 \\ 8y+18z &= 8 \\ 2z &= 4 \end{aligned}$$

Jordan 继续上述的操作:

回到解方程-高斯若尔当消元 (II)

$$\begin{aligned} x-2y-6z &= 1 \\ 2z &= 4 \\ 3x+2y &= 11 \end{aligned} \implies \begin{aligned} x-2y-6z &= 1 \\ 2z &= 4 \\ 8y+18z &= 8 \end{aligned} \implies \begin{aligned} x-2y-6z &= 1 \\ 8y+18z &= 8 \\ 2z &= 4 \end{aligned}$$

Jordan 继续上述的操作:

$$\implies \begin{aligned} x-2y-6z &= 1 \\ 8y &= -28 \\ 2z &= 4 \end{aligned} \implies \begin{aligned} x-2y &= 13 \\ 8y &= -28 \\ 2z &= 4 \end{aligned} \implies \begin{aligned} x &= 6 \\ 8y &= -28 \\ 2z &= 4 \end{aligned}$$

换言之，将 $\begin{aligned} x-2y-6z &= 1 \\ 8y+18z &= 8 \\ 2z &= 4 \end{aligned}$ 进行变换的下述过程：

$$\Longrightarrow \begin{aligned} x-2y-6z &= 1 \\ 8y &= -28 \\ 2z &= 4 \end{aligned} \Longrightarrow \begin{aligned} x-2y &= 13 \\ 8y &= -28 \\ 2z &= 4 \end{aligned} \Longrightarrow \begin{aligned} x &= 6 \\ 8y &= -28 \\ 2z &= 4 \end{aligned}$$

高斯若尔当消元的矩阵形式

换言之，将 $\begin{aligned} x-2y-6z &= 1 \\ 8y+18z &= 8 \\ 2z &= 4 \end{aligned}$ 进行变换的下述过程：

$$\Longrightarrow \begin{aligned} x-2y-6z &= 1 \\ 8y &= -28 \\ 2z &= 4 \end{aligned} \Longrightarrow \begin{aligned} x-2y &= 13 \\ 8y &= -28 \\ 2z &= 4 \end{aligned} \Longrightarrow \begin{aligned} x &= 6 \\ 8y &= -28 \\ 2z &= 4 \end{aligned}$$

也可以看成：

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_{12}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_{13}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_{23}} P_{23}E_{31} \begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 8 & 0 & -28 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

高斯若尔当消元的最后一个步骤

我们最后还有一个步骤:

$$\begin{aligned} x &= 6 \\ 8y &= -28 \\ 2z &= 4 \end{aligned} \implies \begin{aligned} x &= 6 \\ y &= -3.5 \\ z &= 2 \end{aligned}$$

高斯若尔当消元的最后一个步骤

我们最后还有一个步骤:

$$\begin{aligned} x &= 6 \\ 8y &= -28 \\ 2z &= 4 \end{aligned} \Longrightarrow \begin{aligned} x &= 6 \\ y &= -3.5 \\ z &= 2 \end{aligned}$$

显然可以用一个对角矩阵来刻画:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}}_{D} E_{12}E_{13}E_{23}P_{23}E_{31}\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -3.5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

高斯若尔当消元的总结

高斯若尔当消元法的过程:

$$\begin{aligned} x - 2y - 6z &= 1 \\ 2z &= 4 \\ 3x + 2y &= 11 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} x &= 6 \\ y &= -3.5 \\ z &= 2 \end{aligned}$$

高斯若尔当消元法的过程:

$$\begin{aligned} x-2y-6z &= 1 \\ 2z &= 4 \\ 3x+2y &= 11 \end{aligned} \Longrightarrow \begin{aligned} x &= 6 \\ y &= -3.5 \\ z &= 2 \end{aligned}$$

也就是:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 11 \end{bmatrix} \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -3.5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

高斯若尔当消元的总结

上海师范大学 Shanghai Normal University

高斯若尔当消元法的过程:

$$\begin{aligned} x-2y-6z &= 1 \\ 2z &= 4 \\ 3x+2y &= 11 \end{aligned} \Longrightarrow \begin{aligned} x &= 6 \\ y &= -3.5 \\ z &= 2 \end{aligned}$$

也就是:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 11 \end{bmatrix} \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -3.5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

可以被表示为:

$$DE_{12}E_{13}E_{23}P_{23}E_{31}\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -3.5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & x \end{bmatrix}$$

从 A 到 I

$$DE_{12}E_{13}E_{23}P_{23}E_{31}\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -3.5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & x \end{bmatrix}$$

中，一个关键的点在于

- $DE_{12}E_{13}E_{23}P_{23}E_{31}$ 的选择与 b 无关。

Shanghai Normal University 上海师范大学

$$DE_{12}E_{13}E_{23}P_{23}E_{31}\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -3.5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & x \end{bmatrix}$$

中，一个关键的点在于

- $DE_{12}E_{13}E_{23}P_{23}E_{31}$ 的选择与 b 无关。

从而对于任意 $b \in \mathbb{R}^n$ 来说，我们都可以通过如下的方式：

$$DE_{12}E_{13}E_{23}P_{23}E_{31}\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & x \end{bmatrix}$$

求解方程 $Ax = b$

用高斯若尔当来计算 A^{-1}(I)

重新考察矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$，如果其是可逆的，则我们可以写出：

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \mathrm{x}_1 & \mathrm{x}_2 & \mathrm{x}_3 \end{bmatrix}$$

用高斯若尔当来计算 A^{-1}(I)

重新考察矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$，如果其是可逆的，则我们可以写出：

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}$$

使得：

$$A^{-1}A = A\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ax_1 & Ax_2 & Ax_3 \end{bmatrix} = I$$

用高斯若尔当来计算 A^{-1}(I)

重新考察矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$，如果其是可逆的，则我们可以写出：

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}$$

使得：

$$A^{-1}A = A\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ax_1 & Ax_2 & Ax_3 \end{bmatrix} = I$$

也就是我们得到了三个方程组：

$$Ax_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = e_1, \quad Ax_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = e_2, \quad Ax_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = e_3,$$

用高斯若尔当来计算 A^{-1}(I)

重新考察矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$，如果其是可逆的，则我们可以写出：

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}$$

使得：

$$A^{-1}A = A\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ax_1 & Ax_2 & Ax_3 \end{bmatrix} = I$$

也就是我们得到了三个方程组：

$$Ax_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = e_1, \quad Ax_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = e_2, \quad Ax_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = e_3,$$

通过 Gauss–Jordan 消元我们就可以解出上述方程。

对于每个方程组:

$$\mathrm{A}\mathrm{x}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\mathrm{e}_1,\quad \mathrm{A}\mathrm{x}_1=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\mathrm{e}_2,\quad \mathrm{A}\mathrm{x}_1=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\mathrm{e}_3,$$

用高斯若尔当来计算 A^{-1}(II)

对于每个方程组:

$$Ax_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=e_1,\quad Ax_1=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=e_2,\quad Ax_1=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=e_3,$$

我们都有:

$$DE_{12}E_{13}E_{23}P_{23}E_{31}\begin{bmatrix}A & e_i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I & x_i\end{bmatrix}$$

用高斯若尔当来计算 A^{-1}(II)

对于每个方程组:

$$Ax_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = e_1, \quad Ax_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = e_2, \quad Ax_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = e_3,$$

我们都有:

$$DE_{12}E_{13}E_{23}P_{23}E_{31}\begin{bmatrix} A & e_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & x_i \end{bmatrix}$$

也就是:

$$DE_{12}E_{13}E_{23}P_{23}E_{31}\begin{bmatrix} A & e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad DE_{12}E_{13}E_{23}P_{23}E_{31}A = I$$

用高斯若尔当来计算 A^{-1}(II)

对于每个方程组:

$$Ax_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = e_1, \quad Ax_1 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} = e_2, \quad Ax_1 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = e_3,$$

我们都有:

$$DE_{12}E_{13}E_{23}P_{23}E_{31}\begin{bmatrix}A & e_i\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}I & x_i\end{bmatrix}$$

也就是:

$$DE_{12}E_{13}E_{23}P_{23}E_{31}\begin{bmatrix}A & e_1 & e_2 & e_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}I & x_1 & x_2 & x_3\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad DE_{12}E_{13}E_{23}P_{23}E_{31}A = I$$

从而:

$$A^{-1} = IA^{-1} = DE_{12}E_{13}E_{23}P_{23}E_{31}AA^{-1} = DE_{12}E_{13}E_{23}P_{23}E_{31} = \begin{bmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{bmatrix}$$

高斯若尔当消元法的一个总结

1. 考察一个矩阵:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

高斯若尔当消元法的一个总结

1. 考察一个矩阵:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

2. 注意到对于任意 $b \in \mathbb{R}^3$，方程 $Ax = b$ 都有解，这是因为通过高斯消元法可以发现 A 有3 个首元。从而我们通过高斯-若尔当消元法可以解出:

$$DE_{12}E_{13}E_{23}P_{23}E_{31} \begin{bmatrix} A & e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}$$

即存在 $B = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}$ 使得 $AB = I$.

高斯若尔当消元法的一个总结

1. 考察一个矩阵:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

2. 注意到对于任意 $b \in \mathbb{R}^3$, 方程 $Ax = b$ 都有解, 这是因为通过高斯消元法可以发现 A 有3 个首元。从而我们通过高斯-若尔当消元法可以解出:

$$DE_{12}E_{13}E_{23}P_{23}E_{31}\begin{bmatrix} A & e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}$$

即存在 $B = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}$ 使得 $AB = I$.

3. 另一方面, 如果令 $C = DE_{12}E_{13}E_{23}P_{23}E_{31}$, 我们也有 $CA = I$.

高斯若尔当消元法的一个总结

1. 考察一个矩阵:

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & -6\\ 0 & 0 & 2\\ 3 & 2 & 0\end{bmatrix}$$

2. 注意到对于任意 $b\in\mathbb{R}^3$，方程 $Ax=b$ 都有解，这是因为通过高斯消元法可以发现 A 有3 个首元。从而我们通过高斯-若尔当消元法可以解出:

$$DE_{12}E_{13}E_{23}P_{23}E_{31}\begin{bmatrix}A & e_1 & e_2 & e_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I & x_1 & x_2 & x_3\end{bmatrix}$$

即存在 $B=\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{bmatrix}$ 使得 $AB=I$.

3. 另一方面，如果令 $C=DE_{12}E_{13}E_{23}P_{23}E_{31}$，我们也有 $CA=I$.
4. 最终我们可以发现 A 是可逆的，并且:

$$A^{-1}=B=C=DE_{12}E_{13}E_{23}P_{23}E_{31}$$

A^{-1} 的存在性 (I)

定理 24.

令 A 是一个 $n \times n$ 的矩阵，则 A^{-1} 存在当且仅当 A 有 n 个首元。

A^{-1} 的存在性 (I)

定理 24.

令 A 是一个 $n \times n$ 的矩阵，则 A^{-1} 存在当且仅当 A 有 n 个首元。

证明. 假设 A 有 n 个首元:

A^{-1} 的存在性 (I)

定理 24.
令 A 是一个 $n \times n$ 的矩阵，则 A^{-1} 存在当且仅当 A 有 n 个首元。

证明. 假设 A 有 n 个首元:

- 通过 Gauss–Jordan 消元法，我们可以解出所有形如 $Ax = e_i$ 的方程，即:

$$D \cdots E \cdots P \cdots E \begin{bmatrix} A & e_1 & \cdots & e_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix}$$

也就是说，令 $B = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix}$，我们有 $AB = I$.

上海师范大学 Shanghai Normal University

定理 24.

令 A 是一个 $n \times n$ 的矩阵，则 A^{-1} 存在当且仅当 A 有 n 个首元。

证明. 假设 A 有 n 个首元:

- 通过 Gauss–Jordan 消元法，我们可以解出所有形如 $Ax = e_i$ 的方程，即:
$$D \cdots E \cdots P \cdots E \begin{bmatrix} A & e_1 & \cdots & e_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix}$$
也就是说，令 $B = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix}$，我们有 $AB = I$.
- 另一方面，令 $C = D \cdots E \cdots P \cdots E$，我们有 $CA = I$.

A^{-1} 的存在性 (I)

定理 24.

令 A 是一个 $n \times n$ 的矩阵，则 A^{-1} 存在当且仅当 A 有 n 个首元。

证明. 假设 A 有 n 个首元:

- 通过 Gauss–Jordan 消元法，我们可以解出所有形如 $Ax = e_i$ 的方程，即:

$$D \cdots E \cdots P \cdots E \begin{bmatrix} A & e_1 & \cdots & e_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix}$$

  也就是说，令 $B = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix}$，我们有 $AB = I$.
- 另一方面，令 $C = D \cdots E \cdots P \cdots E$，我们有 $CA = I$.
- 从而 A 是可逆的，并且

$$A^{-1} = B = C = D \cdots E \cdots P \cdots E$$

另一方面，我们证明，如果存在一个 B 使得 $AB = I$，则 A 有 n 个首元。反设 A 没有 n 个首元，这意味着高斯消元法会得到某一行全 0 的情况，即:

$$E \cdots P \cdots EA = \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{0} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

A^{-1} 的存在性 (II)

另一方面，我们证明，如果存在一个 B 使得 $AB = I$，则 A 有 n 个首元。反设 A 没有 n 个首元，这意味着高斯消元法会得到某一行全 0 的情况，即：

$$E \cdots P \cdots EA = \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{0} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

令 $M = E \cdots P \cdots E$，注意到 M 是可逆的，但是：

$$M = MI = MAB = \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{0} \\ \vdots \end{bmatrix} B$$

A^{-1} 的存在性 (II)

另一方面，我们证明，如果存在一个 B 使得 $AB = I$，则 A 有 n 个首元。反设 A 没有 n 个首元，这意味着高斯消元法会得到某一行全 0 的情况，即：

$$E \cdots P \cdots EA = \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{0} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

令 $M = E \cdots P \cdots E$，注意到 M 是可逆的，但是：

$$M = MI = MAB = \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{0} \\ \vdots \end{bmatrix} B$$

这意味着 M 存在一行全是 0，与 M 是可逆的矛盾。

阶段总结

引理 25.

令 A 是一个 $n \times n$ 的矩阵, 下面的叙述是等价的:

1. A 是可逆的。
2. 方程 $Ax = b$ 对任意 $b \in \mathbb{R}^m$ 都有唯一解.
3. $\dim(C(A)) = n$.
4. $\dim(C(A^T)) = n$.
5. 存在矩阵 B 使得 $AB = I$。
6. 存在矩阵 C 使得 $CA = I$。
7. A 有 n 个首元。

引理 25.

令 A 是一个 $n \times n$ 的矩阵, 下面的叙述是等价的:

1. A 是可逆的。
2. 方程 $Ax = b$ 对任意 $b \in \mathbb{R}^m$ 都有唯一解.
3. $\dim(C(A)) = n$.
4. $\dim(C(A^T)) = n$.
5. 存在矩阵 B 使得 $AB = I$。
6. 存在矩阵 C 使得 $CA = I$。
7. A 有 n 个首元。

- 通过 Gauss–Jordan 消元法求 A^{-1}.