IOI2014 题目选讲、图的树分解及 NP 相关

俞鼎力 (ydl14@mails.tsinghua.edu.cn)

清华大学　交叉信息研究院

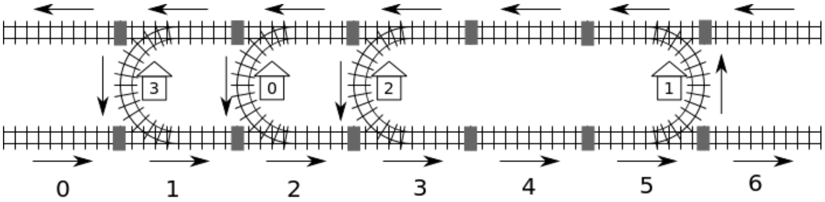
2015 年 2 月 10 日

Section 1

IOI Day 1

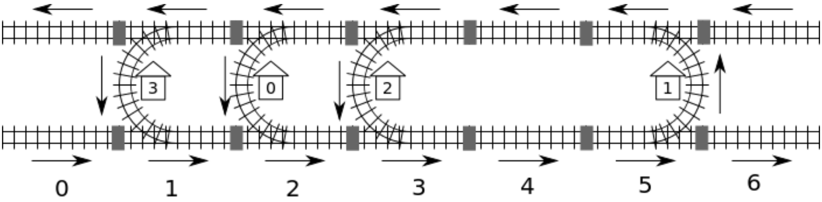
IOI2014 Day 1 Rail

- 有两条平行的单向铁路（上方的从右到左，下方的从左到右），分为 m 段. 有 n 个车站，每个车站为 C 类型（只能从上往下）或 D 类型（只能从下往上），分布在某些段中，每个段最多一个车站.



IOI2014 Day 1 Rail

- 已知 0 号车站是 C 类型，并给出 0 号车站的位置，最多可以询问两车站之间的距离 $3(n-1)$ 次（距离指经过段与段连接处的次数，例如图中 0 号车站到 2 号车站的距离为 5)，要求确定每个车站的位置和类型. 保证车站两两可达.



Solutions

- 按照到 0 号车站的距离从近到远排序，最近的设为 i.

(		(	)	)
0			leftmost	current

(	(	)	)
0	current		leftmost

Solutions

- 按照到 0 号车站的距离从近到远排序，最近的设为 i.
- 通过到 i 距离分辨车站在 0 号的左还是右.

(		(	)	)
0			leftmost	current
(	(	)	)	
0	current		leftmost	

Solutions

- 按照到 0 号车站的距离从近到远排序，最近的设为 i.
- 通过到 i 距离分辨车站在 0 号的左还是右.
- 维护最左 (右) 的车站，来判断是 C 还是 D.

(		(	)	)
0			leftmost	current

(	(	)	)
0	current		leftmost

IOI2014 Day 1 Wall

- 维护一个长度为 n 的整数序列，一开始每个元素均为 0，支持以下两种操作：
  - 将连续一段中小于 k 的元素修改为 k.
  - 将连续一段中大于 k 的元素修改为 k.
- 问所有 m 个操作进行完之后序列各元素的值.
- $1 \leq n \leq 2,000,000 \quad 1 \leq k \leq 500,000.$

Solutions

- 操作可加.

Solutions

- 操作可加.
- “如果它的初值小于 l, 那么最终它等于 l; 如果它的初值大于 r, 那么最终它等于 r; 否则它最终等于初值”.

Solutions

- 操作可加.
- “如果它的初值小于 l, 那么最终它等于 l; 如果它的初值大于 r, 那么最终它等于 r; 否则它最终等于初值”.
- 线段树打标记.

IOI2014 Day 1 Wall

- 有一张 n 个点的无向图，小 B 每次会询问某两个点之间是否有边相连，小 A 每次回答 yes 或 no.
- 如果在小 B 把所有 $\frac{n(n-1)}{2}$ 条边问完之前，小 B 就能确定这整张图是否联通，小 A 就输了.
- 现在让你当小 A，依次对每个询问回答 yes 或 no，求一种获胜方案.
- $4 \le n \le 1500$.

Solutions

- 如果在一个联通块中，还存在没有询问的边，那么小 B 总可以把这些边留到最后问，小 A 肯定输了.

Solutions

- 如果在一个联通块中，还存在没有询问的边，那么小 B 总可以把这些边留到最后问，小 A 肯定输了.
- 每次小 B 询问一条边 (x, y)，如果此时 x 和 y 所在的联通块之间只有一条边了，就回答 yes；否则回答 no.

Solutions

- 如果在一个联通块中，还存在没有询问的边，那么小 B 总可以把这些边留到最后问，小 A 肯定输了.
- 每次小 B 询问一条边 (x, y)，如果此时 x 和 y 所在的联通块之间只有一条边了，就回答 yes；否则回答 no.
- 但是... 小 B 的询问是固定的.

Solutions

- 如果在一个联通块中，还存在没有询问的边，那么小 B 总可以把这些边留到最后问，小 A 肯定输了.
- 每次小 B 询问一条边 (x, y)，如果此时 x 和 y 所在的联通块之间只有一条边了，就回答 yes；否则回答 no.
- 但是... 小 B 的询问是固定的.
- 可以骗骗分...

Section 2

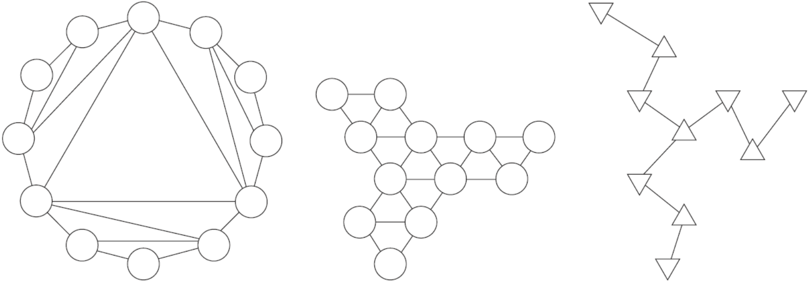
图的树分解 (Tree Decomposition)

图的树分解的定义

对于一个图 $G = (V, E)$, 它的树分解 T 中每一个节点 t 对应一个 V 的子集 $V_t \subseteq V$, 记作 $(T, \{V_t : t \in T\})$, 且满足以下三条性质:

- G 中每个节点至少属于一个 V_t.
- 对于 G 中每一条边 e, 存在一个 V_t 包含 e 的两个端点.
- 设 t_1, t_2, t_3 是 T 的节点, 且 t_2 在 t_1 到 t_3 的路径上. 那么, 如果 G 中节点 v 属于 V_{t_1} 和 V_{t_3}, 那么它也属于 V_{t_2}.

图的树分解的定义



(a) (b) (c)

树宽 (Tree-Width)

定义

树分解 $(T, \{V_t\})$ 的宽度为所有 V_t 的大小的最大值减一，即

$$\mathrm{width}(T, \{V_t\}) = \max_t |V_t| - 1$$

定义 G 的树宽即为它的所有树分解的最小树宽.

性质

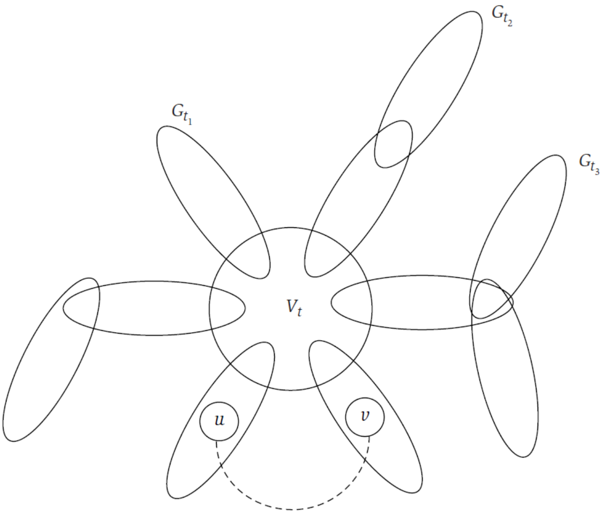
设 T' 是 T 的子树，用 $G_{T'}$ 表示与 T' 的节点关联的所有片断中的节点诱导出的 G 的子图. 那么

定理

考虑删去 T 中一节点 t, 设 $T-t$ 有分支 $T_1,\ldots,T_d$, 那么子图

$$G_{T_1}-V_t, G_{T_2}-V_t, \cdots, G_{T_d}-V_t$$

没有公共的节点，并且它们之间没有边.



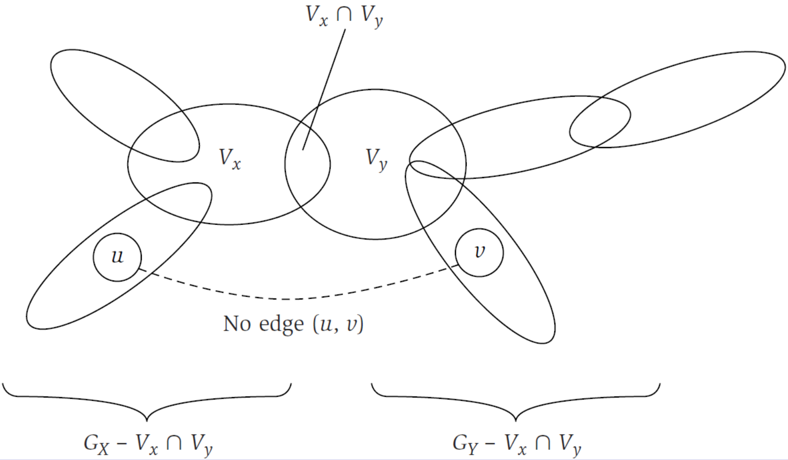
No edge (u, v)

性质

定理

设 X 和 Y 是删去边 (x, y) 之后 T 的两个分支，那么子图 $G_X - (V_x \cap V_y)$ 和 $G_Y - (V_x \cap V_y)$ 没有公共节点，并且它们之间没有边.

性质



性质

定理

G 的树宽为 1 当且仅当 G 是一棵树.

Proof.

考虑边 (x, y) 和边 (x, z). 利用上一条定理. □

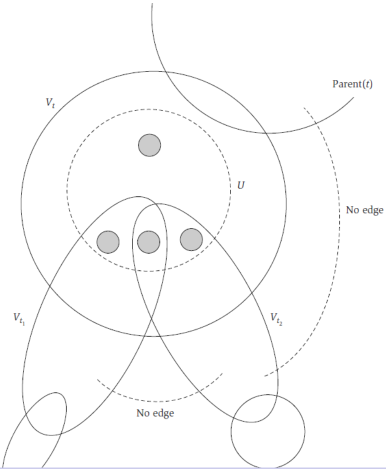
定理

n 个节点的图的任何非冗余树分解大小不超过 n.

Proof.

数学归纳，删掉叶子即可. □

最大点独立集



最大点独立集

$$f_t(U) = w(U) + \sum_{i=1}^{d} \max\{f_{t_i}(U_i) - w(U_i \cap U) :$$

$$U_i \cap V_t = U \cap V_{t_i} \text{且} U_i \subseteq V_{t_i} \text{是独立集}\}.$$

哈密尔顿回路

- 考虑边.

哈密尔顿回路

- 考虑边.
- 只在最顶端考虑.

特殊的图的树宽

- almost tree(k)[树加上 k 条边]: $k+1$

特殊的图的树宽

- almost tree(k)[树加上 k 条边]: $k+1$
- serial parallel graph[串并联图]: 2

特殊的图的树宽

- almost tree(k)[树加上 k 条边]: $k+1$
- serial parallel graph[串并联图]: 2
- outer planar graph[点全部在外表面上的平面图]: 2

特殊的图的树宽

- almost tree(k)[树加上 k 条边]: $k+1$
- serial parallel graph[串并联图]: 2
- outer planar graph[点全部在外表面上的平面图]: 2
- Halin graph[把树的叶子节点串起来]: 3

特殊的图的树宽

- almost tree(k)[树加上 k 条边]: $k+1$
- serial parallel graph[串并联图]: 2
- outer planar graph[点全部在外表面上的平面图]: 2
- Halin graph[把树的叶子节点串起来]: 3
- interval graph(with clique k): k

构造树分解

定义

给定两个相同大小的集合 $Y, Z \subseteq V$, 如果存在集合 $S \subseteq V$, 使得 $|S| < |Y| = |Z|$, 且在 $G - S$ 中, $Y - S$ 与 $Z - S$ 不连通，则称 Y 和 Z 可分离.

如果集合 $X \subseteq V$ 满足 $|X| \geq w$ 且 X 不包含 $|Y| = |Z| \leq w$ 的可分离子集 Y 和 Z, 则称 X 是 w-连接的.

可以在 $O(f(k) \cdot m)$ 的时间内判断一个大小为 k 的集合 X 是否为 w-连接. 其中 $f(k)$ 是一个只和 k 有关的函数.

定理

如果 G 包含不小于 $3w$ 的 $(w+1)$-连接集，则 G 的树宽不小于 w.

Proof.

- 设 X 为 G 中不小于 $3w$ 的 $(w+1)$-连接集.

定理

如果 G 包含不小于 $3w$ 的 $(w+1)$-连接集，则 G 的树宽不小于 w.

Proof.

- 设 X 为 G 中不小于 $3w$ 的 $(w+1)$-连接集.
- 找一个距离根最远的节点 t，且满足 $|G_t \cap X| > 2w$.

□

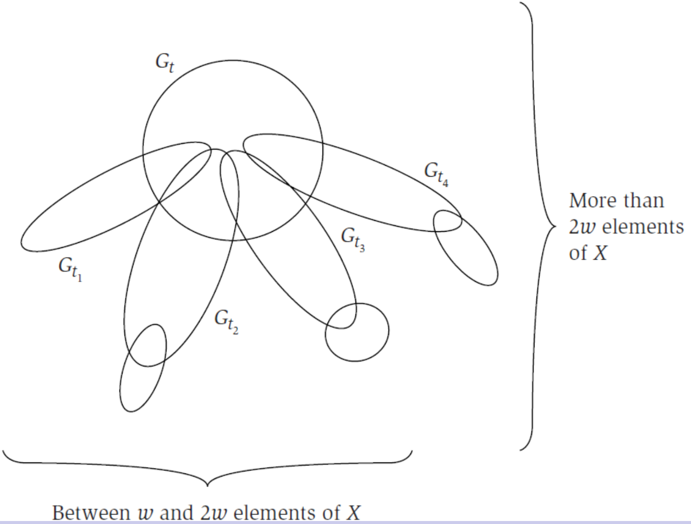
定理

如果 G 包含不小于 $3w$ 的 $(w+1)$-连接集，则 G 的树宽不小于 w.

Proof.

- 设 X 为 G 中不小于 $3w$ 的 $(w+1)$-连接集.
- 找一个距离根最远的节点 t，且满足 $|G_t \cap X| > 2w$.
- 容易找到可分离的点集 Y, Z.

$\square$


G_t
G_{t_1}
G_{t_2}
G_{t_3}
G_{t_4}
More than $2w$ elements of X
Between w and $2w$ elements of X

构造树分解

定理

给定图 G 和参数 w, 我们可以在 $O(f(w) \cdot mn)$ 内:

- 生成一个宽度小于 $4w$ 的树分解, 或者
- 得出 G 的树宽的一个下界为 w.

其中 $f(w)$ 只与 w 相关.

构造树分解

用 U 表示已经加入的点，我们需要维护以下性质:

- 保证当前树分解是 U 导出子图的树分解.

构造树分解

用 U 表示已经加入的点，我们需要维护以下性质:

- 保证当前树分解是 U 导出子图的树分解.
- 树宽小于 $4w$.

构造树分解

用 U 表示已经加入的点，我们需要维护以下性质:

- 保证当前树分解是 U 导出子图的树分解.
- 树宽小于 $4w$.
- 对于 $G-U$ 的每个联通块 C，U 中与 C 有边相连的点个数不超过 $3w$.

构造树分解

用 U 表示已经加入的点，我们需要维护以下性质:

- 保证当前树分解是 U 导出子图的树分解.
- 树宽小于 $4w$.
- 对于 $G-U$ 的每个联通块 C，U 中与 C 有边相连的点个数不超过 $3w$.
- 且存在树分解中的一个节点 t，使得 V_t 包含所有这些点.(考虑在 V_t 下加点.)

构造树分解

- 令 U 中与 C 有边相连的点集为 X.

构造树分解

- 令 U 中与 C 有边相连的点集为 X.
- 假设 X 小于 $3w$, 那么将 $X \cup \{v\}$ 作为 V_t 的儿子加入树分解中，仍满足条件.

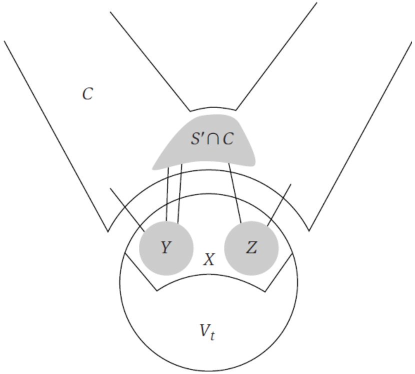
构造树分解

- 令 U 中与 C 有边相连的点集为 X.
- 假设 X 小于 $3w$, 那么将 $X \cup \{v\}$ 作为 V_t 的儿子加入树分解中，仍满足条件.
- 现在默认 $|X| = 3w$, 那么如果 X 是 $(w+1)$-连接的，则可以得出树宽至少为 w.

构造树分解

- 令 U 中与 C 有边相连的点集为 X.
- 假设 X 小于 $3w$, 那么将 $X \cup \{v\}$ 作为 V_t 的儿子加入树分解中，仍满足条件.
- 现在默认 $|X| = 3w$, 那么如果 X 是 $(w+1)$-连接的，则可以得出树宽至少为 w.
- 否则，存在集合 $Y, Z \subseteq X$, $S \subseteq V$, s.t. $|S| < |Y| = |Z| \leq w+1$ 且 $Y - S$ 和 $Z - S$ 在 $G - S$ 上不连通.

构造树分解



构造树分解

- 令 $S' = C \cap S$ 将 $X \cup S'$ 作为 V_t 的儿子加入树分解.

构造树分解

- 令 $S' = C \cap S$ 将 $X \cup S'$ 作为 V_t 的儿子加入树分解.
- $|X \cup S'| \leq 3w + w = 4w$.

构造树分解

- 令 $S' = C \cap S$ 将 $X \cup S'$ 作为 V_t 的儿子加入树分解.
- $|X \cup S'| \leq 3w + w = 4w$.
- $|S'| > 0$.

构造树分解

- 令 $S' = C \cap S$ 将 $X \cup S'$ 作为 V_t 的儿子加入树分解.
- $|X \cup S'| \leq 3w + w = 4w$.
- $|S'| > 0$.
- 对于 $G - U - S'$ 的连通块 $C' \subseteq C$, 不可能同时与 Y, Z 有边. 故 $X \cup S'$ 与其有边的点数不超过 $3w$.

Section 3

NP 问题的近似解

背包问题

- n 个物品，价值 v_i，重量 w_i，背包承重 W. 问最大价值.

背包问题

- n 个物品，价值 v_i，重量 w_i，背包承重 W. 问最大价值.
- 对物品价值做近似, $\hat{v_i} = \lceil v_i/b \rceil$.

背包问题

- n 个物品，价值 v_i，重量 w_i，背包承重 W. 问最大价值.
- 对物品价值做近似, $\widehat{v_i} = \lceil v_i/b \rceil$.
- $f(i, v)$ 表示考虑了前 i 个物品，价值和为 v，最少需要的体积.

背包问题

- n 个物品，价值 v_i，重量 w_i，背包承重 W. 问最大价值.
- 对物品价值做近似, $\widehat{v_i} = \lceil v_i / b \rceil$.
- $f(i, v)$ 表示考虑了前 i 个物品，价值和为 v，最少需要的体积.
- 误差不超过 nb.

背包问题

- n 个物品，价值 v_i，重量 w_i，背包承重 W. 问最大价值.
- 对物品价值做近似, $\widehat{v_i} = \lceil v_i/b \rceil$.
- $f(i, v)$ 表示考虑了前 i 个物品，价值和为 v，最少需要的体积.
- 误差不超过 nb.
- 对于任意 ϵ, 取 $b = (\epsilon/(2n)) \max_i v_i$, 就可以做到 $1 + \epsilon$ 的近似。

背包问题

- n 个物品，价值 v_i，重量 w_i，背包承重 W. 问最大价值.
- 对物品价值做近似，$\hat{v_i} = \lceil v_i/b \rceil$.
- $f(i, v)$ 表示考虑了前 i 个物品，价值和为 v，最少需要的体积.
- 误差不超过 nb.
- 对于任意 ϵ，取 $b = (\epsilon/(2n)) \max_i v_i$，就可以做到 $1 + \epsilon$ 的近似。
- 复杂度为 $O(n^3\epsilon^{-1})$.

单位圆盘图的最大点独立集

- 平面上有 n 个圆盘，大小均为 1, 如果两个圆盘相交则将其连边，问其最大点独立集.

单位圆盘图的最大点独立集

- 平面上有 n 个圆盘，大小均为 1, 如果两个圆盘相交则将其连边，问其最大点独立集.
- 将平面划成 $L \times L$ 的网格，单个网格内最大独立集不超过 L^2.

单位圆盘图的最大点独立集

- 平面上有 n 个圆盘，大小均为 1, 如果两个圆盘相交则将其连边，问其最大点独立集.
- 将平面划成 $L \times L$ 的网格，单个网格内最大独立集不超过 L^2.
- 默认 L 是一个常数，那么这个在多项式时间内即可解决.

单位圆盘图的最大点独立集

- 平面上有 n 个圆盘，大小均为 1, 如果两个圆盘相交则将其连边，问其最大点独立集.
- 将平面划成 $L \times L$ 的网格，单个网格内最大独立集不超过 L^2.
- 默认 L 是一个常数，那么这个在多项式时间内即可解决.
- 对于被圆盘穿过的圆盘，可以通过对网格的平移来使得其尽量少.

单位圆盘图的最大点独立集

- 将网格上下左右平移若干单位长度，共有 L^2 种平移方法.

单位圆盘图的最大点独立集

- 将网格上下左右平移若干单位长度，共有 L^2 种平移方法.
- 每个圆盘最多被 $2L-1$ 中网格穿过.

单位圆盘图的最大点独立集

- 将网格上下左右平移若干单位长度，共有 L^2 种平移方法.
- 每个圆盘最多被 $2L-1$ 中网格穿过.
- 假设实际最大点独立集为 OPT，那么至少有一种网格只穿过不超过 $2|OPT|/L$ 个 OPT 的元素.

单位圆盘图的最大点独立集

- 将网格上下左右平移若干单位长度，共有 L^2 种平移方法.
- 每个圆盘最多被 $2L-1$ 中网格穿过.
- 假设实际最大点独立集为 OPT，那么至少有一种网格只穿过不超过 $2|OPT|/L$ 个 OPT 的元素.
- $1-2/L$-近似.

k-outer planar graph

- 设平面图最外层的点集为 L_1，去掉 L_1 后最外层的点集为 $L_2 \ldots$

k-outer planar graph

- 设平面图最外层的点集为 L_1，去掉 L_1 后最外层的点集为 $L_2 \dots$
- 假设平面图最终层数为 L，那么它的树宽不超过 $3L$.

k-outer planar graph

- 设平面图最外层的点集为 L_1，去掉 L_1 后最外层的点集为 $L_2 \dots$
- 假设平面图最终层数为 L，那么它的树宽不超过 $3L$.
- 做一些简化.

k-outer planar graph

- 假设 L 是常数，那么就可以在多项式内解决.

k-outer planar graph

- 假设 L 是常数，那么就可以在多项式内解决.
- 否则将层分组，每组 k 个，与之前类似的方法做到 $1-1/k$-近似.

负载均衡问题

- 给定 m 台机器 $M_1, \cdots, M_m$ 和 n 项作业，每一项作业 j 有处理时间 t_j，将作业分配给机器使得负载尽量均衡.

负载均衡问题

- 给定 m 台机器 $M_1, \cdots, M_m$ 和 n 项作业，每一项作业 j 有处理时间 t_j，将作业分配给机器使得负载尽量均衡.
- 2-近似.

负载均衡问题

- 给定 m 台机器 $M_1, \cdots, M_m$ 和 n 项作业，每一项作业 j 有处理时间 t_j，将作业分配给机器使得负载尽量均衡.
- 2-近似.
- 1.5-近似.

中心选址问题

- 在一个图 G 中选取 k 个点，使得其他点到最近选定点的最大距离最小.

中心选址问题

- 在一个图 G 中选取 k 个点，使得其他点到最近选定点的最大距离最小.
- 2-近似.

集合覆盖

- 给出 n 个元素的集合 U 和一组 U 的子集 $S_1, \cdots, S_m$, 选最少的子集使得其并为 U.

集合覆盖

- 给出 n 个元素的集合 U 和一组 U 的子集 $S_1, \cdots, S_m$，选最少的子集使得其并为 U.
- $O(\log n)$-近似.

顶点覆盖

- 2-近似.

参考资料

- Bern, M. W.; Lawler, E. L.; Wong, A. L. (1987), "Linear-time computation of optimal subgraphs of decomposable graphs", Journal of Algorithms 8 (2): 216–235
- Bodlaender, Hans L. (1988), "Dynamic programming on graphs with bounded treewidth", Proc. 15th International Colloquium on Automata, Languages and Programming, Lecture Notes in Computer Science 317, Springer-Verlag, pp. 105–118

参考资料

- Bodlaender, Hans L. (1996), "A linear time algorithm for finding tree-decompositions of small treewidth", SIAM Journal on Computing 25 (6): 1305–1317
- Bodlaender H L. Classes of graphs with bounded tree-width[M]. Department of Computer Science, University of Utrecht, 1986.
- Utrecht R. Planar graphs with bounded treewidth[J]. 1988.

参考资料

Matsui, Tomomi (2000), "Approximation Algorithms for Maximum Independent Set Problems and Fractional Coloring Problems on Unit Disk Graphs", Lecture Notes in Computer Science, Lecture Notes in Computer Science 1763: 194–200