

Klausur
Lineare Algebra in der Informatik

Bitte beachten Sie folgende Hinweise:

- Tragen Sie auf jedem Blatt unten Ihre Matrikelnummer ein!
- Falls nötig, nutzen Sie die Rückseiten der Aufgabenblätter oder die zusätzlichen Blätter am Ende der Klausur. Verweisen Sie in diesem Fall auf die Rückseite bzw. die entsprechenden Zusatzblätter!
- Die Bindung der Blätter darf nicht geöffnet werden (1 Punkt Abzug bei Missachtung)!

Matrikel-Nr.: _____

Aufgabe 1: Grundlagen (5 + 5 = 10 Punkte)

- (a) Untersuchen Sie auf \mathbb{Z} die Relation

$$x \sim y \iff x \cdot y \geq 0.$$

auf Reflexivität, Symmetrie und Transitivität.

- (b) Stellen Sie die komplexe Zahl z in Normalform $z = x + iy$ dar:

$$z = \left(\frac{1+i}{1-i} \right)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe 2: Vollständige Induktion**(10 Punkte)**

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ folgende Formel gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & (2^n - 1)a \\ 0 & 1 & (2^n - 1)b \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

Matrikel-Nr.:

Punkte:

Aufgabe 3: Lineare Abbildungen**(4 + 1 + 6 + 2 = 13 Punkte)**

Gegeben ist die Abbildung

$$f_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad x \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \end{pmatrix}.$$

- (a) Zeigen Sie, dass die Abbildung linear ist.
- (b) Geben Sie die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis an.
- (c) Bestimmen Sie jeweils eine Basis des Kerns und des Bildes von f_A .
- (d) Treffen Sie eine Aussage zur Injektivität und Surjektivität von f_A .

Matrikel-Nr.:

Punkte:

Aufgabe 4: Determinante und Inverse**(6 + 6 = 12 Punkte)**

- (a) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (b) Bestimmen Sie die Inverse der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5: Lineare Gleichungssysteme**(10 Punkte)**

Lösen Sie das folgende Gleichungssystem in Abhängigkeit von a .

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 2 \\ 0 & 1 & a & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

Matrikel-Nr.:

Punkte:

Aufgabe 6: Eigenwertproblem**(9 + 3 = 12 Punkte)**

- (a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenräume der Matrix.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

- (b) Geben Sie für alle Eigenwerte die zugehörigen algebraischen und geometrischen Vielfachheiten an. Ist A diagonalisierbar?

Aufgabe 7: Numerische Methoden**(8 + 5 = 13 Punkte)**

- (a) Bestimmen Sie mit Hilfe einer LR-Zerlegung die Lösung des Gleichungssystems

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

- (b) Bestimmen Sie die Householder-Matrix, die den Vektor $x = (1, 2, 2)^T$ in Richtung des ersten Einheitsvektors spiegelt.

Aufgabe 8: Zahlentheorie**(3 + 5 + 2 = 10 Punkte)**

- (a) Berechnen Sie $5^{43} \bmod 11$.
- (b) Zeigen Sie, dass $[14]$ ein multiplikatives Inverses in \mathbb{Z}_{97} besitzt und bestimmen Sie dieses.
- (c) Bestimmen Sie den Wert der Eulerschen φ -Funktion für $n = 48$.

Matrikel-Nr.:

Punkte:

Matrikel-Nr.:

Punkte:

Matrikel-Nr.:

Punkte:

Matrikel-Nr.:

Punkte:

Matrikel-Nr.:

Punkte:
