

**Probeklausur**  
**Analysis für Informatiker**

Bitte beachten Sie folgende Hinweise:

- Tragen Sie auf jedem Blatt Ihrer Abgabe Ihre Matrikelnummer ein!
- Beginnen Sie jede neue Aufgabe auf einem neuen Blatt
- Vereinfachen Sie Ergebnisse so weit es geht! Kürzen!
- Begründen Sie alle Ihre Aussagen ausreichend!
- Nutzen Sie stets mathematische Fachsprache!

### Problem 1: Folgen und Konvergenz

- (a) Nennen Sie je ein Beispiel für eine Folge, die
- (i) beschränkt ist,
  - (ii) monoton und nach unten beschränkt, aber nicht konvergent ist,
  - (iii) konvergent, aber nicht monoton ist,
  - (iv) rekursiv definiert und divergent ist.
- (b) Untersuchen Sie die Folge auf Konvergenz:

$$a_{n+1} = \frac{4a_0}{3a_0 + 1} + 1, \quad a_0 = 0.$$

### Problem 2: Grenzwerte von Funktionen

Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos(x))^{\frac{1}{x^2}}.$$

### Problem 3: Nullstellen von Funktionen

Zeigen Sie, dass die Funktion:

$$f : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{x} - x + \frac{1}{2}$$

genau eine Nullstelle hat.

### Problem 4: Differentiation

Berechnen Sie die Ableitung von

$$f(x) = \frac{1}{\sin(x)}$$

und geben Sie den maximalen Definitionsbereich von  $f$  und  $f'$  sowie einen stationären Punkt an.

### Problem 5: Integration

Berechnen Sie das bestimmte Integral

$$\int_1^e (\ln(x))^2 dx.$$

### Problem 6: Potenzreihen

- (a) Bestimmen Sie  $A, B \in \mathbb{R}$  so, dass für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt:

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x}.$$

- (b) Bestimmen Sie die Potenzreihendarstellung der Funktion

$$f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{1 - x^2}$$

um den Entwicklungspunkt  $x_0 = 0$  und geben Sie deren Konvergenzbereich an.

- (c) Bestimmen Sie den maximalen Fehler zwischen  $f$  und dem Taylorpolynom  $T_2$  auf dem Intervall  $[0, 0.5]$ .

### Problem 7: Fourier-Reihe

Bestimmen Sie die Fourier-Reihe der auf ganz  $\mathbb{R}$  symmetrisch fortgesetzten Funktion

$$f : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto e^x.$$

### Problem 8: Differentialgleichungen

- (a) Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$y''(t) - 2y'(t) + 5y(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_0^+.$$

Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem, die allgemeine Lösung der Differentialgleichung sowie die Lösung des zugehörigen Anfangswertproblems mit den Anfangsbedingungen  $y(0) = 0$  und  $y'(0) = 1$ .

- (b) Bestimmen Sie die Lösung des Randwertproblems

$$(1 + t^2) \cdot y'(t) - 2t \cdot y(t) = (1 + t^2)^3, \quad y(1) = 2.$$

### Problem 9: Numerische Methoden

- (a) Bestimmen Sie die Ordnung der Quadraturformel

$$\int_0^1 g(x) dx \approx \frac{1}{4}g(0) + \frac{1}{2}g(0.5) + \frac{1}{4}g(1)$$

- (b) Berechnen Sie mit dieser Quadraturformel eine Näherung für

$$\int_0^3 (x + 1) dx \quad \text{und} \quad \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{2}(x + 1)} dx.$$