Duale Hochschule
Baden-Württemberg
Kurs: TINF22A
Dipl.-Ing. Tim Lindemann

Stuttgart, den 20.02.2023

Probeklausur

Lineare Algebra für angewandte Informatiker

Bitte beachten Sie folgende Hinweise:

- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite!
- Achten Sie auf eine ausführliche Darstellung des Rechenweges!
- Begründen Sie alle Ihre Aussagen ausreichend!
- Nutzen Sie stets mathematische Fachsprache!

Aufgabe 1 (4+2+1+2+4 = 13 Punkte)

(a) Lösen Sie folgende Probleme:

(i) Bestimmen Sie die Normal- und Exponentialform der komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}$ gegeben durch

$$z = \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(ii) Bestimmen Sie die folgenden Ausdrücke

$$(1) \quad \sum_{m=-1}^{8} (k+1)^3, \qquad (2) \quad \prod_{m=1}^{4} (m + (-1)^{m+1}).$$

(iii) Bestimmen Sie die Potenzmenge von $X = \{\nabla, \Delta\}$.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Falls die Summe zweier linearer Abbildungen wohldefiniert ist, ist diese ebenfalls eine lineare Abbildung.

(ii) In $\mathbb{Z}\backslash\{0\} \times \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ sei die folgende Relation definiert:

$$x \sim y :\Longleftrightarrow \frac{x}{y} \geq 1.$$

Die Relation ist reflexiv, nicht symmetrisch und nicht transitiv.

Matrikel-Nr.: Punkte:

Aufgabe 2 (6+3+3 = 12 Punkte)
Betrachten Sie den reellen Vektorraum der symmetrischen 2×2-Matrizen mit reellen Einträgen

$$S^{2\times 2} := \left\{ \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid s_{12} = s_{21} \right\}$$

mit der üblichen Matrizenaddition und skalaren Multiplikation.

(a) Wählen Sie **drei** Vektorraum-Axiome aus und beweisen Sie, dass $S^{2\times 2}$ diese erfüllt.

(b) Geben Sie eine Basis von $S^{2\times 2}$ an und bestimmen Sie mit den Basisvektoren eine Linearkombination von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in S^{2\times 2}.$$

(c) Sei B nun eine **beliebige** reelle 2×2-Matrizen. Zeigen Sie, dass $B^T B \in S^{2\times 2}$.

Matrikel-Nr.: ________ Punkte: ________

Aufgabe 3 (5 + 7 + 3 = 15 Punkte)
Betrachten Sie die Vektoren $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$u = \begin{pmatrix} a+1 \\ 0 \\ b-1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a-1 \end{pmatrix},$$

(a) Für welche Werte von a und b sind die Vektoren linear unabhängig?

(b) Berechnen Sie alle Eigenwerte der Matrix $A = (u \ \ v \ \ w)$ für $a = 1$ und $b = 0$ sowie die zugehörigen Eigenräume.

(c) Ist A diagonalisierbar? Begründung!

Matrikel-Nr.: Punkte:

Aufgabe 4 (10+8 = 18 Punkte)

(a) Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

mittels LR-Zerlegung.

(b) Spiegeln Sie den Vektor $v = (-1, 2, -2)^\top \in \mathbb{R}^3$ an einer Ursprungsebene $E \in R^3$, sodass das Spiegelbild des Vektors auf der x_1-Achse liegt. Geben Sie die lineare Abbildung f an, die dieser Spiegelung entspricht!

Matrikel-Nr.: Punkte:

Aufgabe 5 (4+2+2+3+5 = 16 Punkte)

(a) Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -i & -i & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & i \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & i \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Determinante und die Inverse der Matrix $C = A \cdot B$.

(b) Gegeben seien die linearen Abbildungen

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \begin{cases} (1,0,0) \mapsto (-1,2,1) \\ (0,1,0) \mapsto (0,-1,1) \\ (0,0,1) \mapsto (1,2,-1) \end{cases}, \quad g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \begin{cases} (1,0,0) \mapsto (-1,-1,3) \\ (0,1,0) \mapsto (0,-6,3) \\ (0,0,1) \mapsto (2,-4,-3) \end{cases}$$

(i) Geben Sie die Darstellungsmatrizen der beiden Abbildungen an.

(ii) Bestimmen Sie den Rang der zu f gehörenden Darstellungsmatrix.

(iii) Bestimmen Sie den Kern der Abbildung g.

(iv) Ist die Verkettung $g \circ f$ ein Isomorphismus?

Matrikel-Nr.: Punkte:

Aufgabe 6 (10 Punkte)

Die Zahlen a_n ($n \in \mathbb{N}$) seien (rekursiv) gegeben durch

$$a_1 = 2, \;\; a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{1}{a_n}\right).$$

Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass

$$\frac{1}{2} \leq a_n \leq 2 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

gilt.

Matrikel-Nr.: ______ Punkte: ______