Baden-Wuerttemberg
Duale Hochschule Baden-Württemberg Stuttgart
Kurs: STG-TINF21A
Dipl.-Ing. Tim Lindemann

Stuttgart, 13.07.2022

Probeklausur

Analysis für Informatiker

Bitte beachten Sie folgende Hinweise:

- Tragen Sie auf jedem Blatt Ihrer Abgabe Ihre Matrikelnummer ein!
- Beginnen Sie jede Aufgaben auf einer neuen Seite!
- Begründen Sie alle Ihre Aussagen ausreichend!
- Nutzen Sie stets mathematische Fachsprache!

Problem 1: Konvergenz von Reihen **(6 + 4 = 10 Punkte)**

(a) Bestimmen Sie den Konvergenzbereich der folgenden Potenzreihe:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot e^k} \cdot (x - 2e)^k.$$

(b) Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1}.$$

<u>**Hinweis:**</u> Nutzen Sie eine geeignete Majorante bzw. Minorante (Vergleichskriterium).

Problem 2: Nullstellen, Grenzwerte, Extrema **(4 + 6 + 8 = 18 Punkte)**

(a) Führen Sie ausgehend von $x_0 = 1$ einen Iterationsschritt des Newton-Verfahrens durch, um die Nullstelle der Funktion

$$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \;\; x \mapsto \frac{1}{x} - \sqrt{x} - 1$$

zu approximieren. Nennen Sie drei Probleme, die beim Newton Verfahren auftreten können!

(b) Bestimmen Sie, falls möglich, den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - x - 1}{x \ln(1 + 2x)}.$$

(c) Zeigen Sie, dass für $x \geq 0$ gilt:

$$f(x) = \frac{x^{1/4}}{1 + x^2} \leq \frac{7^{7/8}}{8}.$$

Problem 3: Differentiation / Integration **(6 + 6 = 12 Punkte)**

(a) Berechnen Sie die erste Ableitung und bestimmen Sie einen stationären Punkt von

$$f(x) = \sin\left(\ln\left(\sqrt{\cos^2(x)+1}\right)\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

(b) Berechnen Sie das folgende Integral mit Hilfe der Substitution: $t = \sqrt{x+1}$,

$$\int_3^8 \frac{1}{x\sqrt{x+1}}\,dx.$$

Problem 4: Taylor-Entwicklung **(10 Punkte)**

Ermitteln Sie die Potenzreihendarstellung für die Funktion

$$f : \mathbb{R} \setminus \{\tfrac{7}{2}\} \to \mathbb{R}, \;\; x \mapsto f(x) := \frac{3}{7-2x}$$

um den Entwicklungspunkt $x_0 = 2$ sowie deren Konvergenzbereich.
Hinweis: Nutzen Sie die geometrische Reihe und achten Sie auf den Entwicklungspunkt!

Problem 5: Fourier-Reihen **(6 + 6 = 12 Punkte)**

(a) Welche der folgenden Funktionen (periodisch erweitert auf $\mathbb{R}$) besitzen eine Fourier-Reihen-Darstellung, welche nicht? Begründung!

$$(i) \quad f(x) = \cos^2(x), \;\; x \in [0,\pi) \qquad (ii) \quad g(x) = \tfrac{1}{\sqrt{x}}, \qquad x \in (0,1]$$

$$(iii) \quad h(x) = \tan(x), \quad x \in [0, \tfrac{\pi}{2}) \qquad (iv) \quad k(x) = \tan(x), \;\; x \in [0, \tfrac{\pi}{4})$$

(b) Bestimmen Sie die Fourier-Koeffizienten

$$a_k = \int_0^2 e^x \cos(k\pi x)\,dx$$

Problem 6: Differentialgleichungen **(5 + 7 = 12 Punkte)**

(a) Bestimmen Sie die homogene Lösung einer linearen Differentialgleichung sechster Ordnung mit charakteristischem Polynom

$$(\lambda+1)^2(\lambda^2+1)^2 = 0.$$

(b) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y'(t) = -4t\sqrt{y(t)-1}, \;\; y \geq 1$$

und die Lösung des Anfangswertproblems mit den Anfangswerten $y(0) = 2$.