Duale Hochschule
Baden-Württemberg
Kurs: TINF22A
Dipl.-Ing. Tim Lindemann

Stuttgart, Mai 2023

Nachklausur

Lineare Algebra für angewandte Informatiker

Bitte beachten Sie folgende Hinweise:

- Tragen Sie auf jedem Blatt Ihre Matrikelnummer ein!
- Falls nötig, nutzen Sie die Rückseiten der Aufgabenblätter oder die zusätzlichen Blätter am Ende der Klausur. Verweisen Sie in diesem Fall auf die Rückseite bzw. die entsprechenden Zusatzblätter!
- Die Bindung der Blätter darf nicht geöffnet werden (1 Punkt Abzug bei Missachtung)!

Matrikel-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (10+10 = 20 Punkte)

(a) Richtig oder falsch? Falls Sie der Ansicht sind, die Aussage stimme, so begründen Sie Ihre Antwort. Geben Sie ansonsten ein Gegenbeispiel an.

(i) Ist A eine invertierbare Matrix, so ist das Bild eines Basisvektors wieder ein Basisvektor.

(ii) Auf auf $\mathbb{Z}$ ist durch "$x \sim y \Longleftrightarrow x + y$ ungerade" eine Äquivalenzrelation gegeben.

(iii) Die komplex Konjugierte einer Zahl aus $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ist nicht reell.

(iv) Sei $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^m$. Hat das zugehörige homogene LGS ($b = \mathbb{0}$) unendlich viele Lösungen so auch jedes zugehörige inhomogene LGS ($b \neq \mathbb{0}$).

(v) Wenn die Matrix A den Eigenwert λ besitzt, so hat A^3 den Eigenwert λ^3.

Aufgabe 1 (Fortsetzung) **(10+10 = 20 Punkte)**

(b) Beantworten Sie die folgenden Fragen (mit Begründung!).

(i) Es sei $X = \mathbb{C}$, $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| < 1\}$ und $B = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\}$. Was ist $A^c = X \backslash A$, $A \cap B$ und die Potenzmenge $\mathcal{P}(A \cap B)$?

(ii) Gibt es eine reelle 2×2-Matrix A mit einem charakteristischem Polynom p der Form $p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 1$?

(iii) Sei $B \subseteq \mathbb{R}^3$. Was muss für B gelten, damit es eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist? Geben Sie zwei verschiedene Basen des $\mathbb{R}^3$ an.

(iv) Was ist der größte gemeinsame Teiler von $a = 149$ und $b = 93$? Ermitteln Sie die Vielfachsummendarstellung von $ggT(149, 93)$.

Matrikel-Nr.: Punkte:

Matrikel-Nr.: Punkte:

Aufgabe 2 **(10 Punkte)**

(a) Betrachten Sie die folgende Teilmenge des reellen Vektorraums $\mathbb{R}^3$.

$$U \quad := \quad \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 0\right\}$$

Zeigen Sie rechnerisch, dass es sich bei U um einen Unterraum des $\mathbb{R}^3$ handelt.

(b) Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $Rg(A)$ und $Rg(A|b)$. Wie viele Lösungen hat das zu A und b gehörige LGS und ist die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|b)$ invertierbar? Begründung!

Matrikel-Nr.: Punkte:

Aufgabe 3 **(12 Punkte)**

(a) Berechnen Sie alle Eigenwerte und Eigenräume der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -4 & i \\ i & -4 \end{pmatrix}.$$

(b) Sei $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ schief-symmetrisch. Beweisen Sie, dass die Eigenwerte von A rein imaginär sind.

Matrikel-Nr.: Punkte:

Aufgabe 4 **(20 Punkte)**

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Determinante von A. Besitzt A bzw. eine Zeilenpermutation von A eine LR- Zerlegung?

(b) Berechnen Sie eine LR-Zerlegung von A bzw. von einer Zeilenpermutation von A.

(c) Beschreiben Sie wie man nun mit der gefundenen Zerlegung ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ lösen kann.

(d) Welche Eigenschaften besitzen die Matrizen Q und R bei der QR-Zerlegung?
Seien $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ und $A_{\cdot 1} = (-2, 4, -4)^\top$ der erste Spaltenvektor von A. Berechnen Sie die zu A gehörende Householder-Matrix, die $A_{\cdot 1}$ auf den ersten Einheitsvektor spiegelt.

(e) Beschreiben Sie den Ablauf des QR-Algorithmus. Gehen Sie dabei auch auf die Bedeutung der sogenannten Ähnlichkeitstransformation ein.

Matrikel-Nr.: ________ Punkte: ________

Aufgabe 5 **(20 Punkte)**

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -8 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Determinante von A und treffen Sie eine Aussage über die Existenz der Inversen von A.

(b) Wie viele Lösungen hat ein zugehöriges lineares Gleichungssystem?

(c) Berechnen Sie die Inverse und lösen Sie damit das zugehörige LGS $Ax = b$ mit der rechten Seite $b = (4, 2, 2)^\top$.

(d) Fassen Sie A als Darstellungsmatrix einer linearen Abbildung bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ auf und geben Sie die zu A gehörige lineare Abbildung an. Ist diese Abbildung injektiv?

(e) Nun sei f eine lineare Abbildung, von der bekannt ist, dass

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \begin{cases} (1,0,0) \mapsto (-1,-1,3) \\ (0,1,0) \mapsto (0,-6,3) \\ (0,0,1) \mapsto (2,-4,-3) \end{cases}$$

Warum ist die Abbildung f vollständig bestimmt? Geben Sie den Funktionswert der Abbildung f in einem allgemeinen Punkt (x_1, x_2, x_3) an.

Matrikel-Nr.: Punkte:

Matrikel-Nr.: Punkte:

Aufgabe 6 **(8 Punkte)**

Die Zahlen a_n ($n \in \mathbb{N}$) seien (rekursiv) gegeben durch

$$a_1 = 2, \;\; a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{1}{a_n}\right).$$

Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass

$$\frac{1}{2} \leq a_n \leq 2 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

gilt.

Matrikel-Nr.: Punkte: