Duale Hochschule
Baden-Württemberg
Kurs: TINF23A
Dipl.-Ing. Tim Lindemann

Stuttgart, 10. Juli 2024

**Probeklausur**

**Analysis für Informatiker**

Bitte beachten Sie folgende Hinweise:

- Tragen Sie auf jedem Blatt Ihrer Abgabe Ihre Matrikelnummer ein!
- Bearbeiten Sie die Aufgaben auf der ausgegebenen Angabe. Falls nötig, nutzen Sie die Rückseiten der Aufgabenblätter oder die zusätzlichen Blätter am Ende der Klausur. Verweisen Sie in diesem Fall auf die Rückseite bzw. die entsprechenden Zusatzblätter am Ende der Klausur!
- Die Bindung der Blätter darf nicht geöffnet werden (1 Punkt Abzug bei Missachtung)!
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite!
- Achten Sie auf eine ausführliche Darstellung des Rechenweges!
- Begründen Sie alle Ihre Aussagen ausreichend!
- Nutzen Sie stets mathematische Fachsprache!
- Alle Teilaufgaben können getrennt voneinander bearbeitet werden!

**Problem 1: Folgen und Konvergenz**

Betrachten Sie die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ rekursiv definiert durch

$$a_{n+1} = \frac{4a_n}{a_n + 3} + 1, \quad a_0 \geq 0.$$

(a) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n \in [1, 5]$.

(b) Zeigen Sie durch Induktion, dass die Folge für $a_1 \geq a_0$ monoton steigt.

(c) Begründen Sie warum in beiden Fällen ein Grenzwert existiert und berechnen Sie diesen.

**Aufgabe 2: Reihen**

(a) Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{k}-1}.$$

**Hinweis:** Nutzen Sie das Vergleichskriterium!

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe der geometrischen Reihe und deren Konvergenzbereich eine Potenzreihendarstellung der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \ x \mapsto \frac{4}{3+2x^4}.$$

**Aufgabe 3: Ableitungen**

(a) Bestimmen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen:

$$(i)\;\; f(x) = \cos\ln\tan\sqrt{x^2+1}, \quad (ii)\;\; g(x) = x^x,\;\; x > 0.$$

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Differentialquotienten die Ableitung von

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x}$$

**Problem 4: Nullstellen von Funktionen**

Zeigen Sie auf mindestens zwei verschiedene Arten, dass die Funktion:

$$f : [1, 2] \to \mathbb{R}, \;\; x \mapsto \sqrt{x} - x + \frac{1}{2}$$

genau eine Nullstelle hat.

**Aufgabe 5: Integration**

(a) Bestimmen Sie das bestimmte Integral

$$\int_0^\pi x \cdot \cos(x^2 + 1)\, dx.$$

(b) Die Potenzreihendarstellung des Kosinus lautet

$$cos(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} t^{2k}.$$

Bestimmen Sie damit eine Reihe zur Approximation des Integrals:

$$\int_0^1 \cos(x^2)\, dx.$$

**Aufgabe 6: Taylor-Approximation**

(a) Bestimmen Sie die Taylor-Approximation zweiten Grades $T_2(x,1)$ von $f(x) = \ln(x)$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 1$

(b) Finden Sie eine Schranke für den maximalen Fehler zwischen $f$ und $T_2$ auf dem Intervall $[\frac{1}{2}, 2]$.

### Aufgabe 7: Fourier-Reihen

Bestimmen Sie die Fourier-Reihe der auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzten Funktion

$$f : [0, 1) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto e^x.$$

**Aufgabe 8: Differentialgleichungen**

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y(t)y'(t) + t = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(b) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1, \quad t \in \mathbb{R}.$$

**Aufgabe 9: Numerik**

(a) Bestimmen Sie die Ordnung der Quadraturformel

$$\int_0^1 g(x)\,dx \approx \frac{1}{4}g(0) + \frac{1}{2}g(0.5) + \frac{1}{4}g(1)$$

(b) Berechnen Sie mit dieser Quadraturformel eine Näherung für

$$\int_0^1 \sqrt{\tfrac{1}{2}(x+1)}\,dx.$$