Duale Hochschule
Baden-Württemberg
Kurs: TINF23A
Dipl.-Ing. Tim Lindemann

Stuttgart, 13.05.2024

Wiederholungsklausur

Lineare Algebra in der Informatik

Bitte beachten Sie folgende Hinweise:

- Tragen Sie auf jedem Blatt unten Ihre Matrikelnummer ein!
- Falls nötig, nutzen Sie die Rückseiten der Aufgabenblätter oder die zusätzlichen Blätter am Ende der Klausur. Verweisen Sie in diesem Fall auf die Rückseite bzw. die entsprechenden Zusatzblätter!
- Die Bindung der Blätter darf nicht geöffnet werden (1 Punkt Abzug bei Missachtung)!

Matrikel-Nr.: ______________________

Aufgabe 1: Grundlagen **(4 + 5 + 5 = 14 Punkte)**

(a) Untersuchen Sie auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ die Relation

$$x \sim y \Longleftrightarrow x - y > 1.$$

auf Reflexivität, Symmetrie und Transitivität.

(b) Bestimmen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der folgenden Gleichung in Normalform $z = x + iy$:

$$z^3 = 2 - 2i, \quad z \in \mathbb{C}.$$

(c) Die Menge M_2 aller 2×2-Matrizen bildet zusammen mit der üblichen Matrizenaddition und der skaleren Multiplikation einen Vektorraum $(M, +, \cdot)$. Zeigen Sie, dass die Menge S_2 der reellen symmetrischen 2×2 Matrizen einen Unterraum bildet.

$$S_2 := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2 \;\middle|\; a, b, c, d \in \mathbb{R},\;\; b = c \right\}.$$

Matrikel-Nr.: Punkte:

Aufgabe 2: Vollständige Induktion **(10 Punkte)**

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ folgende Formel gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & na & (2^n - 1)b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

Matrikel-Nr.: ________ Punkte: ________

Aufgabe 3: Lineare Abbildungen **(2 + 6 + 2 = 10 Punkte)**

Gegeben ist die Abbildung

$$f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad x \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 - x_3 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie die zugehörige Darstellungsmatrix A bezüglich der folgenden Basis an:

$$\{(1,0,0)^T, (1,1,0)^T, (1,1,1)^T\}.$$

(b) Bestimmen Sie jeweils eine Basis des Kerns und des Bildes von f_A.

(c) Treffen Sie eine Aussage zur Injektivität und Surjektivität von f_A.

Matrikel-Nr.: ______ Punkte: ______

Aufgabe 4: Determinante und Inverse **(6 + 6 = 12 Punkte)**

(a) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(b) Bestimmen Sie die Inverse der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matrikel-Nr.: Punkte:

Aufgabe 5: Lineare Gleichungssysteme **(10 Punkte)**

Lösen Sie das folgende Gleichungssystem in Abhängigkeit von a.

$$\left(\begin{array}{ccc|r} 2 & 4 & 4 & 2 \\ 1 & a & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3a & -3 \end{array}\right)$$

Matrikel-Nr.: Punkte:

Aufgabe 6: Eigenwertproblem **(9 + 3 = 12 Punkte)**

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenräume der Matrix.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) Geben Sie für alle Eigenwerte die zugehörigen algebraischen und geometrischen Vielfachheiten an. Ist A diagonalisierbar?

Matrikel-Nr.: ____________________ Punkte: ____________

Aufgabe 7: Numerische Methoden **(7 + 5 = 12 Punkte)**

(a) Bestimmen Sie mit Hilfe einer LR-Zerlegung die Lösung des Gleichungssystems

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

(b) Bestimmen Sie die Householder-Matrix, die den Vektor $x = (2, -1, 2)^T$ in Richtung des ersten Einheitsvektors spiegelt.

Matrikel-Nr.: Punkte:

Aufgabe 8: Zahlentheorie **(3 + 5 + 2 = 10 Punkte)**

(a) Berechnen Sie $7^{63} \mod 43$.

(b) Zeigen Sie, dass [36] ein multiplikatives Inverses in $\mathbb{Z}_{149}$ besitzt und bestimmen Sie dieses.

(c) Bestimmen Sie den Wert der Eulerschen φ-Funktion für $n = 72$.

Matrikel-Nr.: Punkte:

Matrikel-Nr.: Punkte:

Matrikel-Nr.: Punkte:

Matrikel-Nr.: Punkte: