Duale Hochschule
Baden-Württemberg
Kurs: TINF22A
Dipl.-Ing. Tim Lindemann

Stuttgart, 27.02.2023

Klausur

Lineare Algebra für angewandte Informatiker

Bitte beachten Sie folgende Hinweise:

- Tragen Sie auf jedem Blatt Ihrer Abgabe Ihre Matrikelnummer ein!
- Bearbeiten Sie die Aufgaben auf der ausgegebenen Angabe. Falls nötig, nutzen Sie die Rückseiten der Aufgabenblätter oder die zusätzlichen Blätter am Ende der Klausur. Verweisen Sie in diesem Fall auf die Rückseite bzw. die entsprechenden Zusatzblätter am Ende der Klausur!
- Die Bindung der Blätter darf nicht geöffnet werden (1 Punkt Abzug bei Missachtung)!
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite!
- Achten Sie auf eine ausführliche Darstellung des Rechenweges!
- Begründen Sie alle Ihre Aussagen ausreichend!
- Nutzen Sie stets mathematische Fachsprache!

Matrikel-Nr.: __________ Punkte: __________

Aufgabe 1: Kurzaufgaben **(4 + 4 + 5 + 3 + 2 + 4 + 6 = 28 Punkte)**

(a) Bestimmen Sie alle $z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}^+$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, sodass

$$(z^4 + 1)(\tfrac{z^3}{8} - 1) = 0.$$

(b) Finden Sie je ein Beispiel für eine lineare Abbildung, die ...

(i) surjektiv und injektiv ist; (ii) nicht surjektiv, aber injektiv ist;
(iii) nicht injektiv, aber surjektiv ist; (iv) weder surjektiv noch injektiv ist.

(c) Prüfen Sie für Matrizen $A, B \in M_{n\times n}$ die folgende Relation

$$A \sim B \quad :\Longleftrightarrow \quad B = A^{-1}$$

auf Reflexivität, Symmetrie und Transitivität. Ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation?

Matrikel-Nr.: Punkte:

Fortsetzung Aufgabe 1: Kurzaufgaben (4 + 4 + 5 + 3 + 2 + 4 + 6 = 28 Punkte)

(d) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden Gleichungssystems:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

(e) Stellen Sie die Drehung eines zweidimensionalen Vektors z um einen gegebenen Winkel $\varphi \in \mathbb{R}$ mit Hilfe zweier verschiedener Funktionen f und g von z dar. Interpretieren Sie für f den Vektor als komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ und für g den Vektor als Element des $\mathbb{R}^2$, d.h. $z = (z_1, z_2)^T$.

(f) Bestimmen Sie die Vielfachsummendarstellung von $\text{ggT}(163, 7)$.

(g) Berechnen Sie $3^{657} \mod 26$.

Matrikel-Nr.: Punkte:

Aufgabe 2: Beweis **(7 Punkte)**

Gegeben sei die Matrix A mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Beweisen Sie, dass für alle natürlichen Zahlen n gilt: $A^n = 3^{n-1} \cdot A$.

Matrikel-Nr.: ____________ Punkte: ____________

Aufgabe 3: Unterverktorräume **(4 + 6 = 10 Punkte)**

(a) Betrachten Sie die folgenden Teilmengen U_i, $i = 1, 2, 3, 4$, des reellen Vektorraums $\mathbb{R}^3$. Bei welchen Mengen handelt es sich um einen Unterraum des $\mathbb{R}^3$?

$$
\begin{aligned}
U_1 &:= \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 6x_3 = 0\right\} \\
U_2 &:= \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + \pi^3 x_2 = \sqrt{7} x_3\right\} \\
U_3 &:= \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \cdot x_3 + x_2 = 0\right\} \\
U_4 &:= \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = 4\right\}
\end{aligned}
$$

(b) Sei V ein Vektorraum und dessen Aufspann gegeben durch

$$\operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3\} = \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 \mid \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Zeigen Sie, dass der Aufspann von V ein Unterraum von V ist.

Matrikel-Nr.: ________ Punkte: ________

Aufgabe 4: Lineare Abbildungen **(9 + 2 + 6 = 17 Punkte)**

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & \alpha & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Für welche Werte von $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ hat das Gleichungssystem $Ax = b$, $x \in \mathbb{R}^3$, $b = (0, 0, \beta)^T$,

(i) genau eine Lösung, (ii) unendlich viele Lösungen, (iii) keine Lösung?

(b) Stellen Sie für $\alpha = -1$ die zu A gehörende lineare Abbildung f_A auf.

(c) Bestimmen Sie jeweils eine Basis für den Kern und das Bild von f_A. Ist f_A injektiv bzw. surjektiv?

Matrikel-Nr.: Punkte:

Aufgabe 5: Eigenwertproblem **(7 + 7 = 14 Punkte)**

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte λ_1, λ_2, wobei $\lambda_1 > \lambda_2$ gelten soll, und die Eigenvektoren v_{λ_1}, v_{λ_2} der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und zeigen Sie, dass A diagonalisierbar ist.

(b) Nutzen Sie die Diagonalisierung

$$A = T \cdot D \cdot T^{-1}, \quad D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2), \quad T = (v_{\lambda_1}\ \ v_{\lambda_2})$$

zur Berechnung von A^{10}.

Matrikel-Nr.: ______ Punkte: ______

Aufgabe 6: Matrizen-Zerlegung **(2 + 6 + 6 = 14 Punkte)**

Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix.

(b) Bestimmen Sie die LR-Zerlegung von A bzw. einer Permutierten $P \cdot A$.

(c) Bestimmen Sie eine Spiegelmatrix, die den zweiten Spaltenvektor $A_{\cdot,2}$ von A so spiegelt, dass das Spiegelbild in Richtung der x_1-Achse zeigt.

Matrikel-Nr.: Punkte: