№19 (Вариант 6)

Ходосевич Данила
3МО, 2 группа

В пространстве C[0;1] дано интегральное уравнение Фредгольма с вырожденным ядром, содержащее числовой параметр $\lambda > 0$.
A. Определить, при каких значениях параметра λ к этому уравнению применим принцип сжимающих операторов.
B. Взять любое подходящее значение λ и методом простых итераций найти приближенное решение этого уравнения с указанной точностью ε, используя априорную оценку числа итераций.
C. Найти точное решение этого уравнения и сравнить с приближенным

$$x(t) = \lambda \int_0^1 \cos\frac{\pi(t+S)}{2} x(S)\, dS - 1$$

$\varepsilon = 10^{-4}$

A) $\forall$ интеграл оператор $F: C[0;1] \to C[0;1]$

$$F(x) = \lambda \int_0^1 \cos\frac{\pi(t+s)}{2} x(s)\, ds - 1$$

$K(t,s) = \cos\frac{\pi(t+s)}{2}$ – ядро оператора

Исходное уравнение имеет вид: $F(x) = x$

$$\forall\ |F(x) - F(y)| = \left|\lambda \int_0^1 \cos\frac{\pi(t+s)}{2} x(s)\,ds - 1 - \lambda \int_0^1 \cos\frac{\pi(t+s)}{2} y(s)\,ds + 1\right| =$$

$$= \lambda \left|\int_0^1 \cos\frac{\pi(t+s)}{2} (x(s) - y(s))\,ds\right|$$

Найдём условия сжатия $F(x)$: $|F(x) - F(y)| \le \lambda \int_0^1 \underbrace{\left|\cos\frac{\pi(t+s)}{2}\right|}_{\le 1} \cdot \underbrace{|x(s) - y(s)|}_{\le \sup\limits_{s\in[0;1]}|x(s)-y(s)| = \rho(x,y)} ds$ (равномерная метрика)

$\Rightarrow \rho(F(x); F(y)) \le \lambda \rho(x,y)$ при $\lambda < 1$

B) Пусть $\lambda = \frac{1}{100}$; $x_0 = 0$

Реккурентная формула для метода простых итерации $x_n = F(x_{n-1})$

$$x_1 = \frac{1}{100}\int_0^1 \cos\frac{\pi(t+s)}{2}\cdot 0\,ds - 1 = -1$$

$$\rho(x_0, x_1) = \sup|x_1 - x_0| = |-1-0| = 1$$

$$N_{apr} = \left[\log_\lambda \frac{\varepsilon(1-\lambda)}{\rho(x_0,x_1)}\right] + 1 = \left[\log_{\frac{1}{100}} \frac{10^{-4}\left(1-\frac{1}{100}\right)}{1}\right] + 1 \approx 3$$

$$x_2 = -\frac{1}{100}\int_0^1 \cos\frac{\pi(t+s)}{2}\,ds - 1 = -\frac{1}{100}\cdot\frac{2}{\pi}\int_0^1 \cos u\,du - 1 = -\frac{1}{50\pi}\sin u\Big|_0^1 - 1 =$$

$$= -\frac{1}{50\pi}\sin\left(\frac{\pi t}{2} + \frac{\pi s}{2}\right)\Big|_0^1 - 1 = -\frac{1}{50\pi}\left[\sin\left(\frac{\pi + \pi s}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\right] - 1 =$$

$$= -\frac{1}{50\pi}\left[2\cos\left(\frac{\pi+\pi t}{2}\right)\sin\frac{\pi}{4}\right] - 1 = -\frac{\sqrt{2}}{50\pi}\cos\left(\frac{\pi + 2\pi t}{4}\right) - 1$$ – решение с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$

C) Ядро является выражденым если его можно представить как:

$$K(t,s) = \sum_{i=1}^{n} a_i(s)\cdot b_i(t)$$

$$\text{4}\; K(t,s) = \cos\frac{\pi(t+s)}{2} = \cos\left(\frac{\pi t}{2} + \frac{\pi s}{2}\right) = \cos\frac{\pi t}{2}\cos\frac{\pi s}{2} - \sin\frac{\pi t}{2}\sin\frac{\pi s}{2}$$

=> ядро выраждено

$$\text{4}\; x(t) = \frac{1}{100}\int_0^1 \cos\frac{\pi(t+s)}{2}\,x(s)\,ds - 1 = \frac{1}{100}\int_0^1\left(\cos\frac{\pi t}{2}\cos\frac{\pi s}{2} - \sin\frac{\pi t}{2}\sin\frac{\pi s}{2}\right)\cdot$$

$$\cdot x(s)\,ds - 1 = \frac{1}{100}\left[\cos\frac{\pi t}{2}\underbrace{\int_0^1 \cos\frac{\pi s}{2}\,x(s)\,ds}_{C_1} - \sin\frac{\pi t}{2}\underbrace{\int_0^1 \sin\frac{\pi s}{2}\,x(s)\,ds}_{C_2}\right] - 1$$

$$x(t) = \frac{C_1}{100}\cos\frac{\pi t}{2} - \frac{C_2}{100}\sin\frac{\pi t}{2} - 1 \quad (1)$$

$$\left\{\int_0^1 \cos\frac{\pi s}{2}\,x(s)\,ds = \int_0^1 \cos\frac{\pi t}{2}\,x(t)\,dt\right\}$$ – аналогично для sin

Домножим (1) на $\cos\frac{\pi t}{2}$ и проинтегрируем на $[0;1]$ по dt:

$$\underbrace{\int_0^1 x(t)\cos\frac{\pi t}{2}\,dt}_{C_1} = \frac{C_1}{100}\int_0^1 \cos^2\frac{\pi t}{2}\,dt - \frac{C_2}{100}\int_0^1 \cos\frac{\pi t}{2}\sin\frac{\pi t}{2}\,dt - \int_0^1 \cos\frac{\pi t}{2}\,dt$$

$$C_1 = \frac{C_1}{100}\cdot\frac{1}{2} - \frac{C_2}{100}\cdot\frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi} = \frac{C_1}{200} - \frac{C_2}{100\pi} - \frac{2}{\pi}$$

Домножим ① на $\sin\frac{\pi t}{2}$ и проинтегрируем:

$$\underbrace{\int_0^1 x(t)\sin\frac{\pi t}{2}\,dt}_{C_2} = \frac{C_1}{100}\int_0^1 \sin\frac{\pi t}{2}\cos\frac{\pi t}{2}\,dt - \frac{C_2}{100}\int_0^1 \cos^2\frac{\pi t}{2}\,dt - \int_0^1 \sin\frac{\pi t}{2}\,dt$$

$$C_2 = \frac{C_1}{100\pi} - \frac{C_2}{200} - \frac{2}{\pi}$$

Получим систему:

$$\begin{cases} C_1 = \frac{C_1}{200} - \frac{C_2}{100\pi} - \frac{2}{\pi} \\ C_2 = \frac{C_1}{100\pi} - \frac{C_2}{200} - \frac{2}{\pi} \end{cases}$$

Solution

$$(x, y) = \left(\frac{-79600\pi + 800}{39601\pi^2 - 4}, \frac{800 - 79600\pi}{39601\pi^2 - 4}\right)$$

$$\begin{cases} C_1 \approx -0{,}637779 \\ C_2 \approx 0{,}637779 \end{cases} \Rightarrow C_1 = -C_2$$

Подставить в уравнение ①: $x(t) \approx -\frac{0{,}637779}{100}\left(\cos\frac{\pi t}{2} + \sin\frac{\pi t}{2}\right) - 1$

Сравним метод итераций и аналитическое решение:

$$\rho(x_2; x) = \sup_{t\in[0;1]} |x_2 - x| = \sup\left| -\frac{\sqrt{2}}{50\pi}\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi t}{2}\right) - 1 + 0{,}637779\left(\cos\frac{\pi t}{2} + \sin\frac{\pi t}{2}\right) + 1\right| =$$

$$= \sup\left| -\frac{\sqrt{2}}{50\pi}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi t}{2} + \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi t}{2}\right) + 0{,}637779\left(\cos\frac{\pi t}{2} + \sin\frac{\pi t}{2}\right)\right| =$$

$$= \sup\left|\left(0{,}63777 - \frac{\sqrt{2}}{50\pi}\right)\left(\cos\frac{\pi t}{2} + \sin\frac{\pi t}{2}\right)\right| = \left|\sqrt{2}\left(0{,}637779 - \frac{\sqrt{2}}{50\pi}\right)\right| \approx$$

$$\approx 0{,}000016394 < \varepsilon = 10^{-4}$$