ЛАНЬ®
• САНКТ-ПЕТЕРБУРГ •
• МОСКВА •
• КРАСНОДАР •
2015

Н. В. ФИЛИМОНЕНКОВА

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ ПО ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ АНАЛИЗУ

ДОПУЩЕНО
НМС по математике в качестве учебного пособия
для студентов технических направлений бакалавриата
и направлений «Прикладная математика»,
«Прикладная математика и информатика»
технических вузов

ЛАНЬ®

• САНКТ-ПЕТЕРБУРГ •
• МОСКВА • КРАСНОДАР •
2015

ББК 22.162я73
Ф 53

Филимоненкова Н. В.

Ф 53 Конспект лекций по функциональному анализу: Учебное пособие. — СПб.: Издательство «Лань», 2015. — 176 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

ISBN 978-5-8114-1821-3

Пособие содержит краткие теоретические сведения об основных модулях функционального анализа: теории сжимающих операторов, теории рядов Фурье в гильбертовом пространстве и теории линейных операторов. В центре внимания приложение теории к известным вычислительным методам: решение уравнений разного типа методом простых итераций, аппроксимация функций с различными ортогональными базисами, минимизация функционала методом Ритца, решение линейных операторных уравнений дифференциального и интегрального типа приближенными методами, в частности методом Галёркина.

Конспект лекций предназначен студентам технических вузов для изучения вводного курса в функциональный анализ. Изложение материала учитывает специфику подготовки студентов в техническом вузе и имеет прикладную ориентацию. Данное пособие рекомендуется использовать в сочетании со сборником задач по функциональному анализу того же автора.

ББК 22.162я73

Рецензенты:
Б. Г. ВАГЕР — доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики и информатики Санкт-Петербургского государственного архитектурно-строительного университета;
Ф. Л. БАХАРЕВ — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической физики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета;
В. Г. ЕРМАКОВ — доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины.

Обложка
Е. А. ВЛАСОВА

ВВЕДЕНИЕ

Предметом изучения функционального анализа являются в основном пространства функций и их отображения, откуда и происходит название дисциплины. Функциональный анализ как самостоятельный раздел математики сложился в начале XX в. в результате обобщения конструкций математического анализа, линейной алгебры и геометрии. С тех пор его идеи и методы проникают во все области математики, физики и в прикладные науки на правах мощной обобщающей теории и удобного инструмента исследования конкретных задач.

Для студента технического вуза этот курс имеет две главные цели. Первая заключается в освоении языка функционального анализа, который широко используется в современном математическом моделировании. Вторая цель состоит в уяснении прикладной роли функционального анализа, которая сводится к аналитическому обоснованию эффективной работы численных методов.

Предлагаемый конспект лекций является частью учебного комплекса, включающего также сборник задач.

Комплекс может быть использован в высшем профессиональном образовании для направлений подготовки «Прикладная математика», «Информатика и вычислительная техника», «Прикладная математика и информатика», «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем», «Механика и математическое моделирование», «Прикладные математика и физика», «Фундаментальная информатика и информационные технологии». Он предназначен для методического обеспечения вводного курса функционального анализа, рассчитанного на небольшое количество аудиторных часов (51–102) и средний уровень базовой математической подготовки студентов технических вузов.

В данном учебном комплексе проведена значительная адаптация классического курса функционального анализа к специфике профессиональной подготовки математика-инженера, математика-программиста. При разработке комплекса были поставлены и решены следующие задачи. Во-первых, адаптация материала к уровню подготовки и аналитических способностей студентов. Во-вторых, модернизация курса под использование электронных вычислительных средств (что отражено в первую очередь в сборнике задач). В-третьих, культивирование прикладной составляющей дисциплины, которое осуществляется за счет сочетания функционального анализа и вычислительной математики: реализована идея довести абстрактный теоретический факт до числа. Наиболее оригинальной частью комплекса является сборник задач.

Опишем некоторые особенности предлагаемого конспекта лекций. Он содержит краткие теоретические сведения об основных традиционных модулях функционального анализа: теории сжимающих операторов, теории рядов Фурье в гильбертовом пространстве и теории линейных операторов. Большинство параграфов снабжены предисловием, указывающим на «грубый» смысл предложенных конструкций, на связь с их предтечами из математического анализа, геометрии или линейной алгебры и на некоторые из ярких приложений в естествознании и технологиях. Изложение теоретических конструкций упрощено до элементарного при попытке сохранить классическое качество данной дисциплины и не упустить идеологию происходящего. Курс не претендует на полноту и замкнутость в изложении теории, но делает акцент на алгоритмическую составляющую функционального анализа. В каждом модуле сюжетная линия проходит путь от введения основных понятий к доказательству ключевых теорем, имеющих прямой выход к широко известным вычислительным методам.

Первый модуль посвящен метрическим пространствам и сжимающим операторам. Он завершается обзором ситуаций, в которых возможно применение принципа сжимающих операторов и метода простых итераций для приближенного решения уравнений разного типа: числовых уравнений, систем линейных алгебраических уравнений, функциональных нелинейных уравнений общего вида, интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерры.

Второй модуль представляет теорию рядов Фурье в гильбертовом пространстве. Значительное внимание уделено разнообразию ортогональных систем: тригонометрических, полиномиальных, систем ступенчатых функций. Модуль завершается описанием связи ряда Фурье с задачами аппроксимации и пояснением таких существенных особенностей, как характер сходимости ряда Фурье, специфика тригонометрической и полиномиальной аппроксимации, различия между рядами Фурье и Тейлора.

Третий модуль посвящен теории линейных операторов и захватывает смежные вопросы оптимизации функционалов. Изложение ориентировано на проблему точного и приближенного решения операторных уравнений. Возможности инструментария, который предоставляет теория линейных операторов, продемонстрированы на двух классических примерах: интегральном операторе Фредгольма и дифференциальном операторе Штурма — Лиувилля. Изложение завершается описанием вариационного и проекционного подходов к приближенному решению линейных операторных уравнений. Подробно разобраны метод наименьших квадратов и метод Галёркина. Кроме того, в третьем модуле есть и другие выходы к вычислительной математике, представленные в разных параграфах: поиск решения уравнения в виде ряда Фурье по собственным функциям оператора, решение интегрального уравнения методом замены ядра на вырожденное, приближенная минимизация функционала методом Ритца.

При организации учебного процесса рекомендуется дополнять изучение конспекта лекций использованием сборника задач, где продемонстрирована численная реализация большинства теоретических структур и методов. В конспекте лекций есть ссылки на сборник задач. В сборнике задач каждое задание сопровождается указанием на определенные места в конспекте лекций, содержащие теоретическую справку по теме задания.

Список литературы, помещенный в конце конспекта лекций, содержит учебники и монографии, дополняющие изложенный здесь материал по отдельным, как правило, узким направлениям. В тексте имеются ссылки, отмечающие целесообразность обращения к тому или иному источнику из списка литературы для более глубокого знакомства с предметом обсуждения. Отметим, что в целом предлагаемый конспект лекций наиболее близок по духу к учебному пособию по функциональному анализу профессора В. И. Лебедева [1].

Изучение основ функционального анализа по данному пособию предполагает, что читатель владеет базовыми знаниями в области математического анализа, линейной алгебры и обыкновенных дифференциальных уравнений.

Разработка учебного комплекса основана на опыте преподавания функционального анализа студентам специальностей «Прикладная математика», «Прикладная математика и информатика» Санкт-Петербургского государственного архитектурно-строительного университета (СПбГАСУ). Автор благодарен студентам СПбГАСУ Алине Шиминой и Станиславу Ткачеву за помощь в подготовке пособий, профессору МГУ Анатолию Григорьевичу Яголе и профессору СПбГУ Нине Михайловне Ивочкиной за ценные замечания и советы.

МОДУЛЬ I

ТЕОРИЯ СЖИМАЮЩИХ ОПЕРАТОРОВ

§ 1.
СПИСОК ОСНОВНЫХ ПРОСТРАНСТВ

В этот список включены пространства, которые используются на протяжении всего текста. В дальнейшем обозначения этих пространств употребляются без дополнительных пояснений.

1. Пространство вещественных чисел R.

Говоря о числах (скалярах), всегда будем подразумевать вещественные числа, хотя в более общем случае теорию функционального анализа строят на основе комплексных чисел.

2. Пространство n-мерных числовых векторов R^n.

Пространство R^n состоит из векторов $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_k \in R$, $k = 1, 2, 3, \ldots, n$. Числа x_k — координаты вектора.

3. Пространство числовых матриц $M_{m\times n}$ размера $m\times n$.

Это пространство состоит из матриц $\mathrm{A} = (a_{ij})$, где $a_{ij} \in R$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

4. Пространства бесконечных числовых последовательностей l^p, $1 \le p \le \infty$.

Пространство l^p, $1 \le p < \infty$, состоит из бесконечных числовых последовательностей $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, *суммируемых* со степенью p:

$$x \in l^p \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty.$$

В частности,

$$x \in l^1 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| < \infty;$$

$$x \in l^2 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty.$$

Пространство l^∞ состоит из *ограниченных* числовых последовательностей:

$$x \in l^\infty \Leftrightarrow \exists c \geq 0: |x_k| \leq c,\ k = 1, 2, 3, \ldots$$

Числа x_k называем элементами, членами или координатами числовой последовательности по аналогии с координатами векторов. Договоримся использовать для числовой последовательности x разные формы записи: компактную $x = \{x_k\}_{k=1}^\infty$ и развернутую $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots)$, причем для отделения членов последовательности друг от друга используем как запятые, так и пробелы.

При натуральных значениях p пространства бесконечных числовых последовательностей упорядочены по включению следующим образом:

$$l^1 \subset l^2 \subset l^3 \subset l^4 \subset \ldots \subset l^\infty.$$

5. Пространства непрерывных и непрерывно дифференцируемых функций $C^k[a; b]$, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Рассмотрим конечный отрезок $[a; b]$.

Пространство $C[a; b]$, которое иногда еще обозначают символом $C^0[a; b]$, состоит из функций $x = x(t)$, *непрерывных* на отрезке $[a; b]$:

$$x \in C[a;b] \Leftrightarrow x(t) \text{ определена в каждой точке отрезка } [a;b],$$

$$\lim_{t \to t_0} x(t) = x(t_0) \text{ для любой точки } t_0 \in (a;b),$$

$$\lim_{t \to a+0} x(t) = x(a), \quad \lim_{t \to b-0} x(t) = x(b).$$

Пространство $C^k[a; b]$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, состоит из функций $x = x(t)$, которые k раз *непрерывно дифференцируемы* на отрезке $[a; b]$. Это значит, что функция $x = x(t)$ имеет непрерывные производные вплоть до порядка k:

$$x(t) \in C^k[a; b] \Leftrightarrow \exists x^{(k)}(t) \in C[a; b].$$

В частности,

$$x(t) \in C^1[a; b] \Leftrightarrow \exists x'(t) \in C[a; b];$$

$$x(t) \in C^2[a; b] \Leftrightarrow \exists x''(t) \in C[a; b].$$

Функции $x \in C^1[a; b]$ часто называют *гладкими*, функции $x \in C^k[a; b]$ тоже иногда называют *гладкими с порядком гладкости* k. Пространство функций бесконечной гладкости $C^\infty[a; b]$ состоит из функций, которые непрерывно дифференцируемы сколько угодно раз. Все пространства $C^k[a; b]$ упорядочены по включению следующим образом:

$$C[a; b] \supset C^1[a; b] \supset C^2[a; b] \supset C^3[a; b] \supset \ldots \supset C^\infty[a; b].$$

Кроме того, называем функцию $x = x(t)$ *кусочно-непрерывной* на отрезке $[a; b]$, если этот отрезок можно разбить на конечное число отрезков, на каждом из которых функция непрерывная. Называем функцию $x = x(t)$ *кусочно-гладкой* на отрезке $[a; b]$, если отрезок можно разбить на конечное число отрезков, на каждом из которых функция гладкая.

6. Пространства Лебега $L^p(a; b)$, $1 \le p \le \infty$.

Названы в честь французского математика первой половины XX века Анри Лебега.

Рассмотрим конечный или бесконечный промежуток $(a; b)$.

Пространство $L^p(a; b)$, $1 \le p < \infty$, состоит из функций $x = x(t)$, *суммируемых* (*интегрируемых*) со степенью p на промежутке $(a; b)$:

$$x(t) \in L^p(a;b) \Leftrightarrow \int_a^b |x(t)|^p \, dt < \infty.$$

В частности,

$$x(t) \in L^1(a;b) \Leftrightarrow \int_a^b |x(t)| \, dt < \infty;$$

$$x(t) \in L^2(a;b) \Leftrightarrow \int_a^b x^2(t) dt < \infty.$$

Иногда говорят, что пространство $L^2(a; b)$ состоит из *квадратично суммируемых функций*.

При стремлении показателя p к бесконечности пространство $L^p(a; b)$ преобразуется в пространство $L^\infty(a; b)$, состоящее из *ограниченных* функций на промежутке $(a; b)$:

$$x(t) \in L^{\infty}(a; b) \Leftrightarrow \exists c \geq 0\colon |x(t)| \leq c,\ t \in (a; b).$$

Заметим, что функция, непрерывная на конечном отрезке, ограничена на нем и интегрируема с любым показателем p. Можно показать, что для конечного промежутка $(a; b)$ все пространства, определенные пунктами 5, 6, образуют цепочку включений:

$$L^1(a; b) \supset L^2(a; b) \supset \ldots \supset L^{\infty}(a; b) \supset$$
$$\supset C[a; b] \supset C^1[a; b] \supset C^2[a; b] \supset \ldots \supset C^{\infty}[a; b].$$

Отметим, что представленное здесь описание пространств Лебега не является строгим. Для простоты изложения и практического использования опущено несколько теоретических нюансов. Укажем лишь некоторые.

В определении и в других структурах пространств $L^p(a; b)$ используется интеграл Лебега, который, вообще говоря, отличается от привычного интеграла Римана. Однако для достаточно широкого класса функций интегралы Лебега и Римана дают одинаковый результат. В предлагаемом конспекте лекций и в сборнике задач для всех вычислений, связанных с пространствами $L^p(a; b)$, можно применять интеграл Римана, определенный или несобственный.

Кроме того, понятие элементов пространства $L^p(a; b)$ нуждается в уточнении. В конструкции этих пространств главную роль играет процесс интегрирования. Значение интеграла Лебега не меняется при изменении подынтегральной функции в отдельно взятой точке или в нескольких точках, или на множестве нулевой длины. В связи с этим равенство двух функций понимается особым образом. Говорят, что какое-то соотношение выполняется почти всюду на промежутке $(a; b)$, если оно выполняется для всех $t \in (a; b)$ за исключением, может быть, множества нулевой длины. Если $x(t) = y(t)$ почти всюду на $(a; b)$, то считается, что $x = y$ в пространстве $L^p(a; b)$. Поэтому, строго говоря, элементами пространства $L^p(a; b)$ являются классы функций. Точно так же ограниченность функции в пространстве $L^{\infty}(a; b)$ понимается в следующем смысле: $|x(t)| \leq c$ почти всюду на $(a; b)$. Поэтому полное название пространства $L^{\infty}(a; b)$ звучит так: пространство существенно ограниченных функций. Более основательное описание интеграла Лебега и пространств Лебега дают академические учебники по функциональному анализу, например [2]–[4].

В завершение отметим, что в представленном списке пространства $C^k[a; b]$, $L^p(a; b)$ состоят из функций и потому называются *функциональными*. Пространства l^p состоят из числовых последовательностей, тем не менее их тоже относят к функциональным, поскольку последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ можно считать функцией натурального аргумента $x(k)$. Легко заметить сходство между пространствами l^p и $L^p(a; b)$. Операция суммирования в пространстве l^p является дискретным аналогом операции интегрирования в пространстве $L^p(a; b)$. Главным предметом исследования для функционального анализа являются именно функциональные пространства и их отображения. Примеры функций и последовательностей, принадлежащих основным пространствам данного курса, представлены в сборнике задач (№ 1–8).

§ 2.
МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Как и многие структуры абстрактной математики, метрика восходит к простому геометрическому понятию — расстоянию между двумя точками A и B на плоскости. Его можно измерить через длину отрезка AB. Очевидно, такой способ измерения расстояния не всегда удобен: например, он не годится в условиях передвижения по городу, где хотелось бы учитывать расположение улиц и скорость разных видов транспорта. Таким образом, для расстояния требуется адекватное обобщение, предоставляющее возможность вычислять его в разных ситуациях по-разному.

Самое общее понятие метрики (расстояния) и метрического пространства было введено в начале XX в. французским математиком Морисом Фреше. Метрика как способ измерять, насколько один объект отличается от другого, важна для построения математических моделей самых разных процессов. Например, в микробиологии возникает необходимость определять расстояние между цепочками ДНК; в квантовой физике — между состояниями электронов в атоме; в процессах передачи информации подходящие метрики используются для идентификации и сглаживания помех, т. е. случайных отклонений функции на определенное расстояние от заданной траектории. Также метрики применяются в задачах кодирования и распознавания сообщений. Например, для программирования поисковых систем типа Яндекс, Google.

2.1. ПОНЯТИЕ МЕТРИКИ

Определение 2.1. Множество X называется *метрическим пространством*, если для всех его элементов определена такая числовая функция $\rho(x, y)$ двух аргументов, что для любых $x, y, z \in X$ выполняются три аксиомы:

I. $\rho(x, y) \geq 0$, причем $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

II. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (симметричность);

III. $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (неравенство треугольника).

Элементы метрического пространства называют также точками, функцию $\rho(x, y)$ — *метрикой*, или *расстоянием*, между точками x и y.

Иногда будем помечать метрику индексом X, т. е. $\rho_X(x, y)$, чтобы указать, о каком именно пространстве точек идет речь. На одном и том же множестве X могут быть заданы разные метрики. Перечисленные аксиомы I–III согласуются с обыденным представлением о свойствах расстояния. Аксиома III имеет существенное значение, когда точки x, y, z попарно различны, в противном случае она следует из двух предыдущих аксиом.

Упражнение. Пусть $\rho(x, y)$ — некоторая метрика в пространстве X. Доказать, что функции $\tilde{\rho}(x,y) = \ln(1+\rho(x,y))$, $\hat{\rho}(x,y) = \dfrac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}$ тоже задают метрики в этом пространстве.

Определение 2.2. Пусть X — метрическое пространство. *Шаром* с центром в точке $x \in X$ и радиусом $r \in R$ называется множество $B_r(x) = \{y \in X: \rho(x, y) < r\}$. Множество $\Omega \subset X$ называется *ограниченным*, если оно содержится в некотором шаре.

2.2. ПРИМЕРЫ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

1. Пространство изолированных точек с дискретной метрикой.

Рассмотрим произвольное множество X. Определим в нем расстояние между точками следующим образом:

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y; \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

Расстояние между различными элементами принимается равным единице независимо от природы этих элементов и от их геометрической интерпретации. Тем не менее, такое расстояние удовлетворяет аксиомам метрики, это нетрудно проверить:

I. $\rho(x, y) \geq 0$, причем $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

II. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;

III. $\underbrace{\rho(x,y)}_{=1} \leq \underbrace{\rho(x,z)+\rho(z,y)}_{=2}$ для различных x, y, z.

Это пример самой примитивной метрики, реагирующей только на отличие точек друг от друга.

2. Пространство вещественных чисел R.

Расстояние между числами x, $y \in R$ вычисляется по формуле

$$\rho(x, y) = |x - y|.$$

Аксиомы метрики соответствуют элементарным свойствам модуля вещественных чисел:

I. $|x - y| \geq 0$, причем $|x - y| = 0 \Leftrightarrow x = y$;

II. $|x - y| = |y - x|$;

III. $|x - y| \leq |x - z| + |z - y|$.

Шар с центром в точке x и радиусом r представляет из себя интервал длины $2r$:

$$B_r(x) = \{y \in R\colon |x - y| < r\} = (x - r; x + r).$$

3. Пространство n-мерных числовых векторов R^n.

В этом пространстве могут быть заданы разные метрики. Приведем три основные:

$$\rho_1(x, y) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|;$$

$$\rho_2(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2};$$

$$\rho_\infty(x, y) = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k - y_k|.$$

Исследуем свойства этих метрик на примере пространства R^2. Выясним, как вычисляется расстояние между точками и как выглядит единичный шар с центром в нуле. Пусть $x = (2, 3)$, $y = (10, 7)$.

В метрике ρ_1:

$$\rho_1(x, y) = |2 - 10| + |3 - 7| = 12 \text{ (рис. 1)};$$

$$B_1(0) = \{x = (x_1, x_2) : |x_1| + |x_2| < 1\} \text{ (рис. 2)}.$$

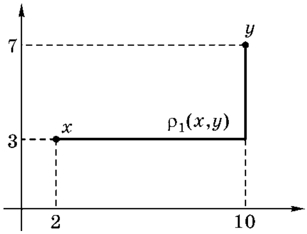

Рис. 1

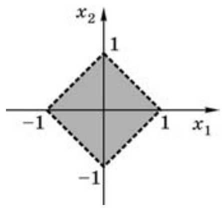

Рис. 2

В метрике ρ_2:

$$\rho_2(x,y) = \sqrt{(2-10)^2 + (3-7)^2} = 4\sqrt{5} \text{ (рис. 3)};$$

$$B_1(0) = \{x = (x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 < 1\} \text{ (рис. 4)}.$$

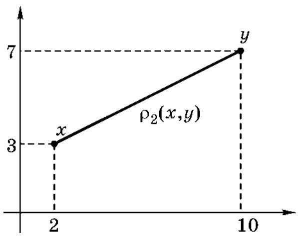

Рис. 3

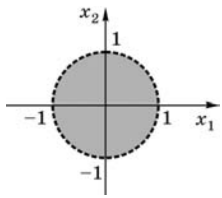

Рис. 4

В метрике ρ_∞:

$$\rho_\infty(x, y) = \max\{|2 - 10|, |3 - 7|\} = 8 \text{ (рис. 5)};$$

$$B_1(0) = \{x = (x_1, x_2) : \max\{|x_1|, |x_2|\} < 1\} \text{ (рис. 6)}.$$

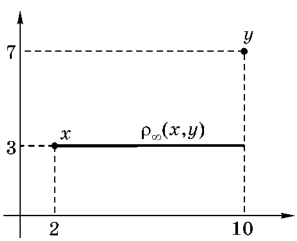

Рис. 5

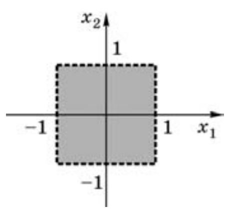

Рис. 6

По рисункам 1, 3, 5 видно, что метрика ρ_1 вычисляет длину пути из точки x в точку y, если двигаться параллельно координатным осям. Таким образом задают метрику в городе с прямоугольным расположением улиц, иногда называют манхэттенским расстоянием. Метрика ρ_∞ определяет наибольшее отклонение между координатами векторов x и y. Метрика ρ_2 вычисляет длину отрезка, соединяющего точки x и y. Это привычный способ измерения расстояния в евклидовой геометрии, поэтому метрику ρ_2 называют евклидовой.

4. Пространства бесконечных числовых последовательностей l^p.

Для конечного p расстояние определено формулой

$$\rho_{l^p}(x,y)=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k-y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

В частности,

$$\rho_{l^1}(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}|x_k-y_k|;$$

$$\rho_{l^2}(x,y)=\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}(x_k-y_k)^2}.$$

Метрика пространства l^∞ получается из метрики пространства l^p при $p\to\infty$:

$$\rho_{l^\infty}(x,y)=\sup_{l\le k<\infty}|x_k-y_k|.$$

5. Пространства непрерывных и непрерывно дифференцируемых функций $C^k[a;b]$.

Расстояние определено формулой

$$\rho_{C^k}(x,y)=\sum_{l=0}^{k}\max_{t\in[a;b]}\left|x^{(l)}(t)-y^{(l)}(t)\right|.$$

При $k=0$ получаем метрику в пространстве непрерывных функций:

$$\rho_C(x,y)=\max_{t\in[a;b]}|x(t)-y(t)|.$$

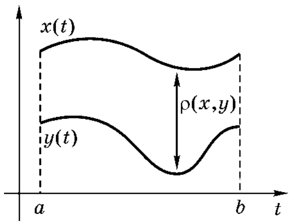

Рис. 7

Такая метрика еще называется равномерной. Графическая реализация этой метрики изображена на рисунке 7. Расстояние между непрерывными функциями определяется как наибольшее отклонение между их графиками.

Проверим выполнение аксиом I–III для равномерной метрики:

I. $\rho(x,y)=\max\limits_{t\in[a;b]}|x(t)-y(t)|\geq 0$ — очевидно;

$\rho(x,y)=\max\limits_{t\in[a;b]}|x(t)-y(t)|=0 \Leftrightarrow x=y$ — проверяется устно;

II. $\rho(x,y)=\max\limits_{t\in[a;b]}|x(t)-y(t)|=\max\limits_{t\in[a;b]}|y(t)-x(t)|=\rho(y,x)$ — очевидно благодаря свойствам модуля;

III. $\rho(x,y)\leq\rho(x,z)+\rho(z,y)$ — вытекает из неравенства треугольника для модуля и свойства максимума:

$$\rho(x,y)=\max_{t\in[a;b]}|x(t)-y(t)|=\max_{t\in[a;b]}|x(t)-z(t)+z(t)-y(t)|\leq$$
$$\leq\max_{t\in[a;b]}(|x(t)-z(t)|+|z(t)-y(t)|)\leq$$
$$\leq\max_{t\in[a;b]}|x(t)-z(t)|+\max_{t\in[a;b]}|z(t)-y(t)|=\rho(x,z)+\rho(z,y).$$

Аксиомы метрики выполнены.

Исследуем, как в равномерной метрике выглядит шар радиуса r, центром которого является функция x:

$$B_r(x)=\{y\in C[a;b]\colon \max_{t\in[a;b]}|x(t)-y(t)|<r\}=$$
$$=\{y\in C[a;b]\colon x(t)-r<y(t)<x(t)+r\ \ \forall t\in[a;b]\}.$$

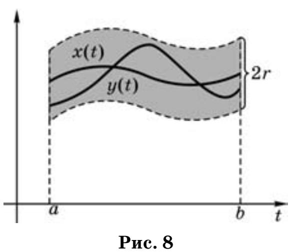

Рис. 8

Отсюда видно, что шар $B_r(x)$ представляет собой множество функций $y(t)$, графики которых лежат в полосе ширины $2r$, располагающейся вдоль графика функции $x(t)$ (рис. 8).

6. Пространства Лебега $L^p(a; b)$.

Для конечного p расстояние вычисляется по формуле

$$\rho_{L^p}(x,y)=\left(\int_a^b |x(t)-y(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

В частности,

$$\rho_{L^1}(x,y)=\int_a^b |x(t)-y(t)|\,dt;$$

$$\rho_{L^2}(x,y)=\sqrt{\int_a^b (x(t)-y(t))^2\,dt}.$$

Пространство $L^\infty(a; b)$ тоже метрическое, однако в данном курсе его метрика не используется.

Упражнение. Доказать, что функция $\rho(x,y)=\min\limits_{1\le k\le n}|x_k-y_k|$ не является метрикой в пространстве R^n, функция $\rho(x,y)=\inf\limits_{1\le k<\infty}|x_k-y_k|$ не является метрикой в пространстве l^∞, функция $\rho(x,y)=\min\limits_{t\in[a;b]}|x(t)-y(t)|$ не является метрикой в пространстве $C[a; b]$.

Упражнение. Доказать, что функция $\rho(x,y)=\int_a^b (x(t)-y(t))^2\,dt$ не является метрикой в пространстве $L^2(a; b)$.

Таким образом, в этой части § 2 собраны примеры стандартных метрических пространств. Большинство из них соответствует списку основных пространств § 1. В некоторых примерах недостает проверки аксиом метрического пространства, эти пробелы можно восполнить самостоятельно или по учебнику [2]. Вычислению расстояний в основных метрических пространствах посвящены № 9–12 в сборнике задач.

Разнообразие метрических пространств этим списком не исчерпывается. Назовем несколько других метрик, которые отличаются относительной простотой построения и наглядностью приложений. Например, в задачах транспортного планирования с радиальной схемой транспортных путей используется так называемая французская железнодорожная метрика. Для множества кривых на плоскости имеется метрика Хаусдорфа, которая в настоящее время используется в задачах компьютерного распознавания отсканированных текстов и изображений. В информатике разработано много специальных метрик, среди которых классические метрики Хэмминга и Левенштейна. Они выражают меру различия между цепочками символов. В частности, это необходимо для программирования поисковых систем типа Яндекс, Google. Эти же метрики находят применение в микробиологии, для измерения расстояния между цепочками ДНК. Информацию об этих и других метриках можно найти в Интернете.

§ 3.
СХОДИМОСТЬ В МЕТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Одним из важнейших понятий в математике является понятие предельного перехода, необходимое для описания непрерывности и построения таких операций, как дифференцирование и интегрирование. Предельный переход важен также и в прикладном отношении: всякий вычислительный процесс должен сходиться к искомому результату. Наличие предельного перехода, иначе говоря, сходимости, для последовательности чисел, векторов, функций и т. д. связано с тем, что между указанными объектами можно измерять расстояние.

В данном конспекте лекций и в сборнике задач последовательности элементов будем обозначать по-разному: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{x_n\}$ или просто x_n для краткости. Кроме того, будут встречаться другие способы нумерации членов последовательности, обусловленные соображениями удобства в каждой конкретной ситуации.

В курсе математического анализа имеется понятие о сходящейся числовой последовательности, в том числе о числовой последовательности, сходящейся к нулю. На этой основе сформулируем определение сходящейся последовательности элементов в произвольном метрическом пространстве.

Определение 3.1. Пусть X — метрическое пространство, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$, $x \in X$. Последовательность x_n *сходится* к элементу x, если $\rho(x_n, x) \to 0$ при $n \to \infty$. Элемент x называется *пределом* последовательности x_n.

Обозначения: $x_n \to x$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Упражнение. Доказать, что последовательность может иметь только один предел.

Рассмотрим наиболее важные типы сходимости в функциональных пространствах.

1. Сходимость в пространстве $C[a; b]$:

$$x_n \to x \Leftrightarrow \rho_{C[a;b]}(x_n, x) = \max_{t\in[a;b]} |x_n(t) - x(t)| \to 0. \quad (3.1)$$

Такую сходимость называют *равномерной* сходимостью последовательности функций и противопоставляют *точечной* сходимости (сходимость в каждой отдельно взятой точке):

$$x_n(t) \to x(t),\ t \in [a; b].$$

Точечная сходимость вытекает из равномерной, иными словами, является более слабым свойством, нежели равномерная сходимость.

Для иллюстрации равномерной сходимости рассмотрим последовательность функций $x_n(t) = t^n - t^{n+1}$ на промежутке $[0; 1]$. На рисунке 9 изображены графики нескольких членов этой последовательности. Наблюдаем, что максимальное отклонение между графиком функции $x_n(t)$ и осью абсцисс стремится к нулю. Значит, последовательность $x_n(t)$ равномерно сходится к нулевой функции $x(t) = 0$ на отрезке $[0; 1]$. Численная проверка по формуле (3.1) подтверждает этот факт.

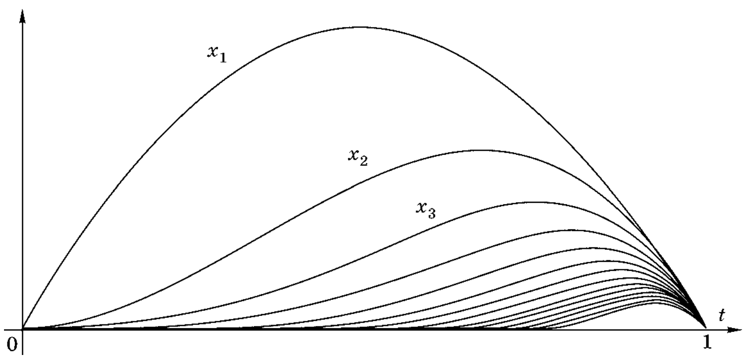

Рис. 9

2. Сходимость в пространстве $L^2(a;\, b)$:

$$x_n \to x \Leftrightarrow \rho_{L^2(a;b)}(x_n, x) = \sqrt{\int_a^b (x_n(t) - x(t))^2 \, dt} \to 0. \qquad (3.2)$$

Такую сходимость называют *среднеквадратичной*. Эта сходимость более слабая, чем точечная и равномерная. При наличии только лишь среднеквадратичной сходимости нельзя быть уверенным в приближенным равенстве $x_n(t) \approx x(t)$ даже при больших значениях n. Поэтому в прикладных целях удобнее иметь дело с точечной сходимостью, еще лучше — с равномерной.

Для иллюстрации среднеквадратичной сходимости рассмотрим последовательность функций $x_n(t) = t^n - t^{2n}$ на промежутке $[0;\, 1]$. На рисунке 10 изображены графики нескольких членов этой последовательности. Заметим, что максимальное отклонение между графиком функции $x_n(t)$ и осью абсцисс, графиком функции $x(t) = 0$, одинаковое для всех n, не стремится к нулю. Поэтому для последовательности $x_n(t)$ нет равномерной сходимости к $x(t) = 0$ на отрезке $[0;\, 1]$. Среднеквадратичная сходимость правдоподобна, поскольку площадь фигуры, заключенной между графиком функции $x_n(t)$ и осью абсцисс сокращается. Численная проверка по формуле (3.2) подтверждает наличие среднеквадратичной сходимости.

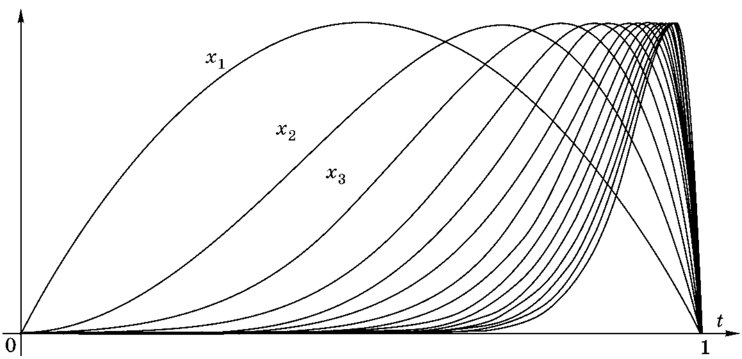

Рис. 10

Другие примеры исследования сходимости смотрите в сборнике задач (№ 13, 14).

На основе сходимости в метрическом пространстве определяют замкнутые множества и операцию замыкания.

Определение 3.2. Пусть X — метрическое пространство, $\Omega \subset X$. Множество Ω называется *замкнутым*, если оно содержит пределы всех своих сходящихся последовательностей:

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Omega, \quad x_n \to x \Rightarrow x \in \Omega.$$

Если множество Ω не замкнуто, то к нему можно добавить пределы всех его сходящихся последовательностей — и оно станет замкнутым. Этот процесс называется *замыканием* множества Ω, а его результат обозначается $\overline{\Omega}$.

Проиллюстрируем понятие замкнутого множества и замыкания на примерах.

1. Рассмотрим несколько множеств метрического пространства R.

Множество $\Omega = (-2; 0)$ не замкнутое, его замыкание $\overline{\Omega} = [-2;\ 0]$.

Множество рациональных чисел Q не замкнутое, пределом последовательности рациональных чисел может быть иррациональное число. Его замыкание $\overline{Q} = R$.

Множество $\{x\}$, состоящее из одной точки x, замкнутое.

Множество $\Omega = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right\}$ не замкнутое, поскольку все элементы этого множества образуют последовательность, чей предел не принадлежит Ω. Замыкание этого множества $\overline{\Omega} = \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right\}$.

2. Рассмотрим в пространстве $L^2(-1;\ 1)$ множество Ω, состоящее из всех непрерывных функций на отрезке $[-1;\ 1]$. Множество Ω не замкнуто. Для подтверждения этого достаточно рассмотреть последовательность непрерывных функций

$$x_n(t)=\begin{cases}-1, & -1\le t<-\dfrac{1}{n};\\ nt, & -\dfrac{1}{n}\le t<\dfrac{1}{n};\\ 1, & \dfrac{1}{n}\le t\le 1.\end{cases} \qquad (3.3)$$

Нетрудно проверить, что эта последовательность сходится, но ее предел не принадлежит Ω. Можно показать, что $\bar{\Omega}=L^2(-1;\,1)$.

Упражнение. Найти предел последовательности (3.3) в пространстве $L^2(-1;\,1)$.

Определение 3.3. Пусть X — метрическое пространство, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset X$. Последовательность x_n называется *фундаментальной* в пространстве X, если $\rho(x_m,\,x_n)\to 0$ при $m,\,n\to\infty$.

Фундаментальную последовательность еще называют сходящейся в себе или последовательностью Коши.

Отметим связь между понятиями сходимости и фундаментальности.

1. *Сходящаяся последовательность является фундаментальной.* Действительно, пусть $x_n\to x$. Тогда из неравенства треугольника для метрики (см. § 2, пункт 2.1) и определения сходимости следует, что $\rho(x_m,\,x_n)\le\rho(x_m,\,x)+$ $+\,\rho(x,\,x_n)\to 0$ при $m,\;n\to\infty$, т. е. последовательность x_n фундаментальная.

2. *Фундаментальная последовательность не обязательно сходится.* Это зависит от самой последовательности и от свойств пространства X.

Таким образом, в общем случае сходимость последовательности — это более сильное свойство, чем фундаментальность.

Определение 3.4. Метрическое пространство X называется *полным*, если любая фундаментальная последовательность из X сходится в этом пространстве.

Несмотря на столь абстрактное определение, полнота пространства важна в прикладном отношении. Она обеспечивает работу многих численных методов, сходимость вычислительного процесса к искомому результату.

Всякое неполное метрическое пространство X можно пополнить. Строгую формулировку теоремы о пополнении метрических пространств можно найти в [2], [3]. Операция пополнения метрического пространства аналогична операции замыкания для множества.

Большинство метрических пространств, перечисленных в § 2, пункт 2.2, являются полными относительно указанных метрик: R, R^n, l^p, $C[a; b]$, $C^k[a; b]$, $L^p(a; b)$. Полнота пространств R, R^n и $C[a; b]$ известна из курса математического анализа: критерий Коши для сходящихся числовых и функциональных последовательностей (см. [5]). Полнота пространств l^2, $L^1(a; b)$, $L^2(a; b)$ доказана в [2].

Упражнение. Выяснить, является ли полным пространство изолированных точек (№ 1 в списке метрических пространств, § 2, пункт 2.2).

§ 4.
СЖИМАЮЩИЕ ОПЕРАТОРЫ

Пусть X, Y — два множества с элементами произвольной природы. В математике есть несколько терминов, означающих отображение множества X в множество Y: функция, преобразование, морфизм, оператор и т. д. Различия в их употреблении обусловлены традицией. В теории функционального анализа закрепился термин «оператор».

В данном пособии операторам посвящены два модуля, первый и третий. В первом модуле запись $\Phi\colon X \to Y$ означает, что оператор Φ определен для всех элементов $x \in X$ и каждому $x \in X$ сопоставляет единственное значение $y \in Y$. В частности, множества X и Y могут совпадать, т. е. возможна ситуация $\Phi\colon X \to X$. Значение оператора Φ на элементе x обозначаем символом $\Phi[x]$.

Числовые функции и вектор-функции, которые изучаются в курсе математического анализа, являются частным случаем операторов:

$\Phi\colon X \to R$, $X \subset R$ — числовая функция одной вещественной переменной, сопоставляет каждому числу $x \in X$ число $y \in R$;

$\Phi\colon X \to R$, $X \subset R^n$ — числовая функция нескольких вещественных переменных, сопоставляет каждому вектору $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X$ число $y \in R$;

$\Phi\colon X \to R^m$, $X \subset R^n$ — вектор-функция нескольких вещественных переменных, сопоставляет каждому вектору $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X$ вектор $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m) \in R^m$.

Предметом исследования функционального анализа, как правило, являются операторы, действующие в функциональных множествах: каждой функции $x = x(t)$ из определенного множества X сопоставляется какая-то функция $y = y(t)$ из множества Y, например $y = x^2(t)$, $y = x'(t)$, $y = \int_a^t x(s)ds$. Так, в первом модуле пособия, посвященном теории сжимающих операторов, для описания ее приложений задействованы как простейшие операторы (числовые функции и вектор-функции), так и операторы, действующие в пространстве непрерывных функций, т. е. $X = Y = C[a; b]$ и Φ: $C[a; b] \to C[a; b]$ (см. § 5). Более основательная типология операторов и разнообразные конкретные примеры представлены в третьем модуле пособия.

4.1. ПРИНЦИП СЖИМАЮЩИХ ОПЕРАТОРОВ

Определение 4.1. Пусть X, Y — метрические пространства. Оператор Φ: $X \to Y$ называется *непрерывным*, если для любой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ и любого элемента $x \in X$ верно следующее:

$$x_n \to x \Rightarrow \Phi[x_n] \to \Phi[x].$$

Определение 4.2. Пусть X — метрическое пространство. Оператор Φ: $X \to X$ называется *сжимающим*, если существует такое число $0 \le \alpha < 1$, что $\rho(\Phi[x], \Phi[y]) \le \alpha\rho(x, y)$ для любых x, $y \in X$. Число α называется *коэффициентом сжатия*.

Иными словами, сжимающий оператор сокращает расстояние между точками. Заметим, что коэффициент сжатия α определен не единственным образом. В каждой конкретной ситуации целесообразно выбирать наименьший из возможных коэффициентов сжатия для данного оператора.

Из определений 4.1, 4.2 следует, что сжимающие операторы — это частный случай непрерывных операторов: поскольку для сжимающего оператора есть оценка $\rho(\Phi[x_n], \Phi[x]) \le \alpha\rho(x_n, x)$, то из $\rho(x_n, x) \to 0$ вытекает

$$\rho(\Phi[x_n], \Phi[x]) \to 0.$$

Теорема 4.1 (Принцип сжимающих операторов. Теорема о неподвижной точке.) Пусть X — полное метрическое пространство и оператор Φ: $X \to X$ сжимающий. Тогда Φ имеет неподвижную точку, причем ровно одну. Иными словами, существует единственная точка $x \in X$, такая что $\Phi[x] = x$.

Доказательство. Сначала докажем существование неподвижной точки.

Введем обозначение:

$$\Phi^n[x] = \underbrace{\Phi[\Phi[\ldots\Phi[x]\ldots]]}_{n \text{ раз}}.$$

Возьмем произвольный элемент $x_0 \in X$ и построим последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ путем многократного применения оператора Φ к элементу x_0:

$$\begin{aligned}
&x_1 = \Phi[x_0];\\
&x_2 = \Phi[x_1] = \Phi^2[x_0];\\
&x_3 = \Phi[x_2] = \Phi^3[x_0];\\
&\ldots\\
&x_n = \Phi[x_{n-1}] = \Phi^n[x_0] \text{ и т. д.}
\end{aligned}$$

Докажем, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ фундаментальная. Пусть α — коэффициент сжатия оператора Φ, положим $n < m$. Воспользуемся несколько раз определением 4.2 сжимающего оператора для получения следующей цепочки неравенств:

$$\begin{gathered}
\rho(x_n, x_m) = \rho(\Phi^n[x_0], \ \Phi^m[x_0]) \le \\
\le \alpha\rho(\Phi^{n-1}[x_0], \ \Phi^{m-1}[x_0]) \le \\
\le \alpha^2\rho(\Phi^{n-2}[x_0], \ \Phi^{m-2}[x_0]) \le \ldots \le \\
\le \alpha^{n-1}\rho(\Phi[x_0], \ \Phi^{m-n+1}[x_0]) \le \alpha^n\rho(x_0, \Phi^{m-n}[x_0]).
\end{gathered} \tag{4.1}$$

Затем последовательно применяем неравенство треугольника для метрики ρ (см. § 2, определение 2.1), обобщенное на несколько слагаемых, вновь определение сжимающего оператора и формулу для суммы бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем $0 \le \alpha < 1$:

$$
\begin{aligned}
&\rho(x_0, \Phi^{m-n}[x_0]) \le \\
&\le \rho(x_0, \Phi[x_0]) + \rho(\Phi[x_0], \Phi^2[x_0]) + \rho(\Phi^2[x_0], \Phi^3[x_0]) + \ldots \\
&\qquad\qquad\qquad \ldots + \rho(\Phi^{m-n-1}[x_0], \Phi^{m-n}[x_0]) \le \\
&\le \rho(x_0, \Phi[x_0]) + \alpha\rho(x_0, \Phi[x_0]) + \alpha^2\rho(x_0, \Phi[x_0] + \ldots \\
&\qquad\qquad\qquad \ldots + \alpha^{m-n-1}\rho(x_0, \Phi[x_0]) = \\
&= (1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{m-n-1})\rho(x_0, x_1) < \frac{1}{1-\alpha}\rho(x_0, x_1).
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

Объединяя оценки (4.1) и (4.2), получаем неравенство

$$
\rho(x_n, x_m) \le \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_0, x_1). \tag{4.3}
$$

Правая часть этого неравенства стремится к нулю при $n \to \infty$, так как $0 \le \alpha < 1$. Тогда и $\rho(x_n, x_m) \to 0$ при $n, m \to \infty$, т. е. последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ является фундаментальной. Ввиду того, что пространство X полное по условию теоремы, последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится в нем:

$$
\exists x \in X\colon x_n \to x.
$$

Покажем, что элемент x — это и есть неподвижная точка оператора Φ. Поскольку любой сжимающий оператор является непрерывным, то из сходимости $x_n \to x$ следует сходимость $\Phi[x_n] \to \Phi[x]$. По построению $\Phi[x_n] = x_{n+1}$, поэтому $\Phi[x_n] \to x$. Из единственности предела следует, что $\Phi[x] = x$.

Осталось доказать единственность неподвижной точки.

Допустим, что у сжимающего оператора Φ есть две неподвижные точки x и y. Тогда

$$
\rho(x, y) = \rho(\Phi[x], \Phi[y]) \le \alpha\rho(x, y).
$$

Поскольку $0 \le \alpha < 1$, то неравенство $\rho(x, y) \le \alpha\rho(x, y)$ возможно только в случае $\rho(x, y) = 0$. По первой аксиоме метрики (см. определение 2.1) отсюда следует, что $x = y$.

Теорема доказана.

4.2. МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ, ИЛИ ПРОСТЫХ ИТЕРАЦИЙ

Пусть X — полное метрическое пространство и оператор Φ: $X \to X$ сжимающий с коэффициентом сжатия α. Рассмотрим уравнение следующего вида:

$$\Phi[x] = x. \tag{4.4}$$

Существование и единственность решения этого уравнения установлены в теореме 4.1, так как очевидно, что ему удовлетворяет неподвижная точка оператора Φ. Доказательство теоремы 4.1 дает и способ построения приближенного решения этого уравнения. Этот способ называется *методом последовательных приближений*, или *методом простых итераций*, и широко применяется в вычислительной математике.

Возьмем произвольное начальное приближение $x_0 \in X$. Применяя к x_0 оператор Φ, получаем последовательность

$$\begin{aligned}
&x_1 = \Phi[x_0];\\
&x_2 = \Phi[x_1] = \Phi^2[x_0];\\
&x_3 = \Phi[x_2] = \Phi^3[x_0];\\
&\ldots\\
&x_n = \Phi[x_{n-1}] = \Phi^n[x_0] \text{ и т. д.}
\end{aligned}$$

Эту последовательность можно записать коротко с помощью рекуррентной формулы:

$$x_n = \Phi[x_{n-1}],\ n = 1, 2, 3\ldots$$

Последовательность x_n сходится к точному решению x уравнения (4.4).

Каждый элемент x_n называется n-й итерацией и является приближенным решением этого уравнения, причем степень точности увеличивается с ростом n. На рисунке 11 продемонстрированы построение и сходимость приближенных решений для простейшего случая: $X = R$, $\Phi[x] = f(x)$ — числовая функция одной вещественной переменной.

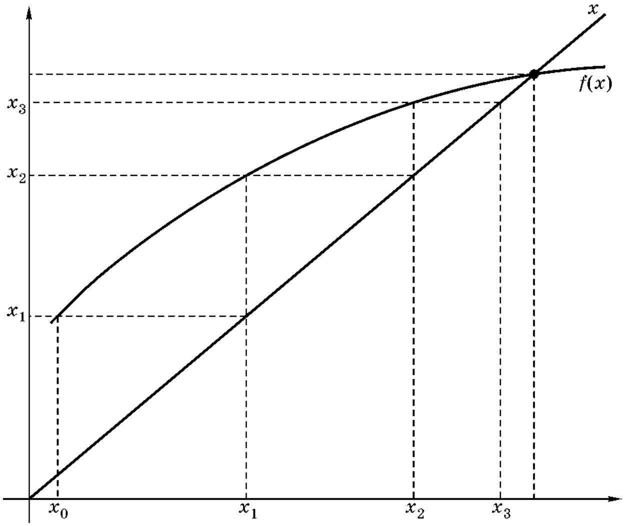

Рис. 11

Найти приближенное решение с точностью $\varepsilon > 0$ — значит довести этот итерационный процесс до такого x_n, что $\rho(x_n, x) \le \varepsilon$, где x — точное решение уравнения (4.4). Поскольку точное решение, как правило, неизвестно, то для организации итерационного процесса используют специальные оценки точности:

- априорная оценка

$$\rho(x_n, x) \le \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_0, x_1);$$

- апостериорная оценка

$$\rho(x_n, x) \le \frac{\alpha}{1-\alpha}\rho(x_n, x_{n-1}).$$

Априорная оценка следует из неравенства (4.3), если перейти в нем к пределу при $m \to \infty$.

Упражнение. Доказать справедливость апостериорной оценки.

С помощью *априорной* оценки (*a priori* — до опыта) можно заранее определить достаточное число итераций для нахождения приближенного решения с заданной точностью $\varepsilon > 0$. Для этого нужно решить относительно n неравенство

$$\frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_0, x_1) \le \varepsilon \Rightarrow n \ge \log_\alpha \frac{\varepsilon(1-\alpha)}{\rho(x_0, x_1)}.$$

Отсюда априорная оценка N_{apr} числа итераций находится по формуле

$$N_{apr} = \left[\log_\alpha \frac{\varepsilon(1-\alpha)}{\rho(x_0, x_1)}\right] + 1. \qquad (4.5)$$

Здесь квадратные скобки означают целую часть заключенного в них числа.

Таким образом, априори известно, что для вычисления приближенного решения с требуемой точностью ε понадобится не более, чем N_{apr} итераций.

Апостериорную оценку (*a posteriori* — после опыта) удобно использовать в процессе вычисления итераций, если есть такая технологическая возможность. При этом на каждом шаге итерационного процесса необходимо сравнивать значения x_n и x_{n-1}:

$$\begin{aligned} &\text{если } \frac{\alpha}{1-\alpha}\rho(x_n, x_{n-1}) \le \varepsilon, \text{ то завершить вычисления;} \\ &\text{если } \frac{\alpha}{1-\alpha}\rho(x_n, x_{n-1}) > \varepsilon, \text{ то продолжить вычисления.} \end{aligned} \qquad (4.6)$$

Апостериорная оценка ближе к фактическому числу итераций, которое требуется для достижения заданной точности ε, и она всегда не превышает прогноз, полученный с помощью априорной оценки.

На опыте можно убедиться, что требуемое число итераций незначительно зависит от начального приближения x_0 и существенно зависит от коэффициента сжатия α. Чем меньше α, тем выше скорость сходимости метода простых итераций.

§ 5.
ПРИЛОЖЕНИЕ ПРИНЦИПА СЖИМАЮЩИХ ОПЕРАТОРОВ К ЗАДАЧЕ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ

Итерационные методы составляют важную часть прикладной математики, они представляют собой один из подходов к приближенному решению уравнений. Необходимость приближенного решения возникает тогда, когда точное решение по каким-то причинам не может быть найдено или его построение требует больших усилий. Как отмечено в учебнике [6], преимущество итерационных методов перед точными заключается, в частности, в самоисправляемости методов. Это свойство делает их менее чувствительными к отдельным ошибкам, допущенным в процессе вычислений. Если при использовании точных методов отдельный сбой в вычислениях неизбежно ведет к ошибке в окончательном результате, то в случае сходящегося итерационного процесса такой сбой влечет за собой только лишние итерации. Простейшим представителем итерационных методов является метод простых итераций (последовательных приближений).

В данном параграфе приведены основные типы уравнений, на которые распространяется принцип сжимающих операторов и применим метод простых итераций для поиска приближенного решения. Теоретические основания рассматриваемых приложений изложены в § 4. Практическая реализация продемонстрирована в сборнике задач (№ 15–20).

5.1. ЧИСЛОВЫЕ УРАВНЕНИЯ

Пусть $f(x)$ — числовая функция одной вещественной переменной. Рассмотрим числовое уравнение

$$f(x) = x, \quad x \in R. \tag{5.1}$$

Сформулируем достаточное условие, при котором к этому уравнению применим принцип сжимающих операторов.

Лемма 5.1. Пусть числовая функция f непрерывно дифференцируема и

$$|f'(x)| \le \alpha < 1 \text{ для всех } x \in R.$$

Тогда оператор Φ: $R \to R$, $\Phi[x] = f(x)$, является сжимающим с коэффициентом сжатия α.

В § 4 изображен график как раз такой функции f (рис. 11).

Доказательство сводится к применению теоремы Лагранжа о числовых приращениях непрерывно дифференцируемой функции. Согласно этой теореме существует такое число c, что

$$f(x) - f(y) = f'(c)(x - y).$$

Тогда

$$\rho_R(\Phi[x], \Phi[y]) = |f(x) - f(y)| \le \alpha|x - y| = \alpha\rho_R(x, y).$$

Лемма доказана.

Рассмотрим более общий вид числовых уравнений

$$\varphi(x) = 0, \quad x \in R, \tag{5.2}$$

где $\varphi(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция и $0 < v \le \varphi'(x) \le \mu$ для всех $x \in R$. Тогда уравнение (5.2) можно привести к виду (5.1) так, чтобы выполнялась лемма 5.1:

$$\underbrace{x - \frac{1}{\mu}\varphi(x)}_{f(x)} = x. \tag{5.3}$$

Покажем, что $|f'(x)| \le \alpha < 1$:

$$0 \le 1 - \frac{1}{\mu}\varphi'(x) \le 1 - \frac{\nu}{\mu} < 1.$$

Таким образом, к уравнению (5.2), представленному в форме (5.3), применим принцип сжимающих операторов, а это значит, что оно имеет единственное решение и для поиска приближенного решения можно использовать метод простых итераций. Для вычисления априорной и апостериорной оценки числа итераций (см. § 4, соотношения (4.5), (4.6)) следует использовать коэффициент сжатия $\alpha = 1 - \frac{\nu}{\mu}$.

Решение числового уравнения методом простых итераций реализуется в сборнике задач (№ 15).

Замечание к лемме 5.1. В этой лемме для простоты изложения числовые функции $f(x)$, $\varphi(x)$ и числовые уравнения (5.1), (5.2) рассматриваются сразу на всей числовой прямой R. Однако с некоторыми осложнениями изложенную тут методику можно перенести и на замкнутое подмножество числовой прямой, например на отрезок $[a; b] \subset \subset R$ (см. [2], [6]).

5.2. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений в матричном представлении

$$\mathrm{A}x = b, \tag{5.4}$$

где $\mathrm{A} \in M_{n\times n}$, $\det(\mathrm{A}) \neq 0$, $x, b \in R^n$.

Из курса линейной алгебры известно, что эта система имеет единственное решение x и что оно может быть найдено методами Гаусса, Крамера или с помощью обратной матрицы. Однако при больших n реализация этих методов становится громоздкой и уязвимой в отношении вычислительных ошибок. В этом случае имеет смысл искать приближенное решение системы (5.4) итеративными методами.

Преобразуем систему (5.4) следующим образом. Пусть A^T — транспонированная матрица, I — единичная матрица,

$\lambda(A^T A)$ — максимальное собственное число матрицы $A^T A$. Легко убедиться, что уравнение (5.4) можно преобразовать к следующему виду:

$$\underbrace{\left(I - \frac{A^T A}{\lambda(A^T A)}\right)}_{C} x + \underbrace{\frac{A^T b}{\lambda(A^T A)}}_{d} = x;$$
$$Cx + d = x. \qquad (5.5)$$

Рассмотрим пространство R^n с евклидовой метрикой ρ_2 и оператор

$$\Phi\colon R^n \to R^n, \quad \Phi[x] = Cx + d.$$

Уравнение (5.5) означает $\Phi[x] = x$, его решение — неподвижная точка оператора Φ.

Если матрица C получена в результате преобразований (5.5), то можно показать, что все ее собственные числа положительны и меньше единицы, обозначим $\lambda(C)$ — максимальное собственное число матрицы C. Доказано (см. [6]), что в этом случае оператор Φ сжимающий с коэффициентом сжатия $\alpha = \lambda(C)$. Следовательно, методом простых итераций можно найти приближенное решение уравнения (5.5) с любой заранее заданной точностью.

Решение системы линейных алгебраических уравнений методом простых итераций реализуется в сборнике задач (№ 16).

5.3. НЕЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Пусть $f(t, u)$ — числовая функция двух вещественных переменных.

Рассмотрим уравнение

$$f(t, x(t)) = x(t), \qquad (5.6)$$

где $x(t)$ — неизвестная непрерывная функция.

Характер зависимости между t и $x(t)$ в уравнении (5.6) может быть любой, поэтому далеко не всегда уравнение разрешимо в точном виде.

Сформулируем достаточный признак того, что к этому уравнению применим принцип сжимающих операторов и метод простых итераций для поиска приближенного решения.

Лемма 5.2. Пусть числовая функция $f(t, u)$ непрерывна на множестве $[a; b] \times R$ и непрерывно дифференцируема по переменной u, причем

$$|f'_u(t,u)| \le \alpha < 1 \text{ при всех } (t,u) \in [a,b] \times R. \qquad (5.7)$$

Рассмотрим оператор

$$\Phi\colon C[a; b] \to C[a; b], \quad \Phi[x] = f(t, x(t)).$$

Оператор Φ является сжимающим с коэффициентом сжатия α.

Доказательство. Зафиксируем точку $t \in [a; b]$. Для функции $f(t, u)$ относительно переменной u справедлива теорема Лагранжа о конечных приращениях. Согласно этой теореме существует такое число c, что

$$f(t,u) - f(t,v) = f'_u(t,c)(u-v).$$

Из теоремы следует, что $|f(t, u) - f(t, v)| \le \alpha|u - v|$ для любых $u, v \in R$. Тогда

$$\rho_{C[a;b]}(\Phi[x], \Phi[y]) = \max_{t\in[a;b]} |f(t,x(t)) - f(t,y(t))| \le$$
$$\le \alpha \max_{t\in[a;b]} |x(t) - y(t)| = \alpha\rho_{C[a;b]}(x,y).$$

Лемма доказана.

Замечание к лемме 5.2. Поскольку роль переменной u играет функция $x(t)$, а ее значение может быть любым, то условие (5.7) должно быть выполнено при всех $u \in R$. Если же $\Phi[x] = f(t, |x(t)|)$, то условие (5.7) достаточно проверить для всех $u \in [0; +\infty)$.

Решение нелинейного функционального уравнения методом простых итераций представлено в сборнике задач (№ 18).

5.4. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА

Интегральным уравнением принято называть такое уравнение, которое содержит неизвестную функцию под знаком интеграла. Чаще всего встречаются интегральные уравнения Фредгольма, названные в честь шведского математика начала XX века Эрика Ивара Фредгольма и имеющие следующий вид:

$$x(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)ds + \psi(t). \tag{5.8}$$

Здесь данными являются непрерывные функции $K(t, s)$, $\psi(t)$, а $x(t)$ — искомая непрерывная функция. Функция $K(t, s)$ называется *ядром* интегрального уравнения. Ядро называется *вырожденным*, если в нем можно разделить переменные следующим образом:

$$K(t,s) = \sum_{k=1}^{n} u_k(t)v_k(s).$$

Для уравнения (5.8) с вырожденным ядром нетрудно найти точное решение. Сначала надо получить общий вид решения с неизвестными числовыми коэффициентами c_k:

$$x(t) = \int_a^b \sum_{k=1}^{n} u_k(t)v_k(s)\cdot x(s)ds + \psi(t);$$

$$x(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k u_k(t) + \psi(t), \quad c_k = \int_a^b v_k(s)x(s)ds.$$

Подставляя выражение для $x(t)$ в формулу коэффициентов c_k, получаем систему n линейных алгебраических уравнений с неизвестными $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

Некоторые виды уравнения (5.8) с невырожденным ядром также поддаются точному разрешению, но чаще требуют приближенного решения.

Сформулируем достаточное условие, при котором к уравнению (5.8) применим принцип сжимающих операторов, а значит и метод простых итераций.

Лемма 5.3. Пусть функция $\psi(t)$ непрерывна на отрезке $[a;\, b]$, функция $K(t,\, s)$ непрерывна в квадрате $[a;\, b] \times [a;\, b]$. Рассмотрим интегральный оператор

$$\Phi : C[a;b] \to C[a;b], \quad \Phi[x] = \int_a^b K(t,s)x(s)ds + \psi(t).$$

При условии

$$\max_{t\in[a;b]} \int_a^b |K(t,s)|\, ds = \alpha < 1 \tag{5.9}$$

оператор Φ является сжимающим с коэффициентом сжатия α.

Доказательство. В ходе доказательства нам понадобятся два хорошо известных соотношения для определенного интеграла:

$$\left|\int_a^b \varphi(s)ds\right| \le \int_a^b |\varphi(s)|\, ds; \tag{5.10}$$

$$\int_a^b |\varphi(s)\cdot\eta(s)| ds \le \max_{s\in[a;b]} |\varphi(s)| \cdot \int_a^b |\eta(s)|\, ds. \tag{5.11}$$

Для любых функций $x,\, y \in C[a;\, b]$ и оператора Φ имеем

$$\rho_{C[a;b]}(\Phi[x], \Phi[y]) = \max_{t\in[a;b]} |\Phi[x] - \Phi[y]| =$$

$$= \max_{t\in[a;b]} \left| \int_a^b K(t,s)x(s)ds + \psi(t) - \int_a^b K(t,s)y(s)ds - \psi(t) \right| =$$

$$= \max_{t\in[a;b]} \left| \int_a^b K(t,s)(x(s) - y(s))ds \right| \le$$

(воспользуемся сначала оценкой (5.10), затем (5.11))

$$\le \max_{t\in[a;b]} \int_a^b |K(t,s)(x(s) - y(s))|\, ds \le$$

$$\le \max_{t\in[a;b]} \int_a^b |K(t,s)|\, ds \cdot \max_{s\in[a;b]} |x(s) - y(s)| =$$

$$= \max_{t\in[a;b]} \int_a^b |K(t,s)|\, ds \cdot \rho_{C[a;b]}(x, y).$$

Итак, если выполнено условие $\max\limits_{t\in[a;b]} \int\limits_a^b |K(t,s)|\, ds = \alpha < 1$, то Ф — сжимающий оператор.

Лемма доказана.

Применение метода простых итераций к интегральному уравнению (5.8) смотрите в сборнике задач (№ 19).

5.5. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРЫ

После уравнений Фредгольма вторыми по популярности являются интегральные уравнения Вольтерры (Вито Вольтерра — итальянский математик конца XIX — начала XX века). Их отличие от уравнений Фредгольма заключается лишь в том, что в них участвует интеграл с переменным верхним пределом t:

$$x(t) = \int\limits_a^t K(t,s)x(s)ds + \psi(t). \tag{5.12}$$

Лемма 5.3 утверждает, что к уравнению Фредгольма (5.8) применим принцип сжимающих операторов, если ядро оператора достаточно мало — в смысле условия (5.9). Уравнение Вольтерры свободно от этого требования. Можно доказать (см. [2], [7], [8]), что к уравнению Вольтерры с любыми непрерывными данными применим обобщенный принцип сжимающих операторов, из которого вытекает существование и единственность решения уравнения (5.12), а также возможность получить приближенное решение методом простых итераций.

Из приложений уравнения Вольтерры отметим, что к нему сводится задача Коши для линейного дифференциального уравнения любого порядка. Покажем это на примере уравнения 1-го порядка:

$$\begin{cases} x' = p(t)x + q(t); \\ x(a) = x_a. \end{cases} \tag{5.13}$$

Преобразование этой задачи к интегральному уравнению основано на очевидной связи между функцией и ее производной:

$$x(t) = x_a + \int_a^t x'(s)ds.$$

Тогда задача (5.13) равносильна уравнению

$$x(t) = x_a + \int_a^t (p(s)x(s) + q(s))ds.$$

Обозначим $\psi(t) = \int_a^t q(s)ds + x_a$ и получаем канонический вид уравнения Вольтерры:

$$x(t) = \int_a^t p(s)x(s)ds + \psi(t)$$

с ядром $K(t, s) = p(s)$.

Преобразование задачи Коши (5.13) к уравнению Вольтерры и его решение методом простых итераций продемонстрировано в сборнике задач (№ 20).

МОДУЛЬ II

ТЕОРИЯ РЯДОВ ФУРЬЕ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

§ 6.
ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Понятие линейного пространства является обобщением простой геометрической структуры — пространства направленных отрезков (векторов) на плоскости, которые можно складывать и умножать на число. Операции сложения и умножения на число традиционно называются линейными. Главной характеристикой линейного пространства считается его размерность. Конечномерные линейные пространства изучает линейная алгебра, в курсе функционального анализа главная роль отведена бесконечномерным линейным пространствам, где в качестве элементов выступают обычно функции.

6.1. ПОНЯТИЯ ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА И ЛИНЕЙНОГО ПОДПРОСТРАНСТВА

Определение 6.1. Множество X называется вещественным *линейным пространством*, если выполняются следующие условия.

I. На множестве X определена операция сложения элементов, т. е. указано правило, по которому любым двум элементам x и y из множества X сопоставляется их сумма $x + y$, которая также принадлежит множеству X. При этом операция сложения должна удовлетворять следующим аксиомам:

1) $x + y = y + x$;

2) $x + (y + z) = (x + y) + z$;

3) $\exists 0 \in X$: $x + 0 = x \ \forall x \in X$ (существование нулевого элемента);

4) $\forall x \in X \ \exists y \in X$: $x + y = 0$ (существование противоположного элемента).

II. На множестве X определена операция умножения элемента на вещественное число, т. е. указано правило, по которому любому элементу x из множества X и любому числу $\alpha \in R$ сопоставляется их произведение αx, которое также принадлежит множеству X. При этом операция умножения на число должна удовлетворять следующим аксиомам:

5) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$;

6) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$;

7) $1 \cdot x = x \ \forall x \in X$;

8) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

Элементы линейного пространства называют иногда векторами, а само пространство — векторным.

Простейшим линейным пространством является множество вещественных чисел R с традиционными операциями сложения и умножения. Кроме того, все основные множества данного курса, перечисленные в § 1, являются линейными пространствами с естественными операциями сложения и умножения на число. Функции складываются и умножаются на число поточечно:

$$(x + y)(t) = x(t) + y(t);$$

$$(\alpha x)(t) = \alpha x(t).$$

Роль нулевого элемента играет нулевая функция, т. е. функция, принимающая только нулевые значения. Числовые векторы, матрицы, последовательности складываются и умножаются на число поэлементно. Например, для числовых последовательностей имеем

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_k + y_k, \ldots);$$

$$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_k, \ldots).$$

Роль нулевого элемента играет нулевая последовательность, т. е. последовательность, все элементы которой равны нулю.

Такие операции ввиду своей естественности удовлетворяют аксиомам 1)–8), и проверка того, является ли множество линейным пространством, заостряется на вопросе: принадлежат ли результаты этих операций самому множеству (и тогда оно линейное пространство) или они могут выходить за его пределы (и тогда оно не является линейным пространством). Например, покажем для пространства $L^2(a; b)$, что результаты операций сложения и умножения на число содержатся в нем же:

$$x \in L^2(a;b) \Rightarrow \int_a^b (\alpha x(t))^2\,dt = \alpha^2 \int_a^b x^2(t)dt < \infty \Rightarrow \alpha x \in L^2(a;b);$$

$$x, y \in L^2(a;b) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_a^b (x(t)+y(t))^2\,dt \le 2\int_a^b x^2(t)dt + 2\int_a^b y^2(t)dt < \infty \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + y \in L^2(a;b).$$

Приведем другие примеры функциональных множеств, претендующих на звание линейного пространства относительно поточечного сложения и умножения на число.

1. Множество X многочленов, степень которых не превышает n, является линейным пространством. Очевидно, что результатами линейных операций могут быть только многочлены степени не выше n.

2. Множество X выпуклых функций на промежутке $(a; b)$ не является линейным пространством. Действительно, хотя операция сложения не выводит за границы X, умножение на отрицательное число делает выпуклую функцию вогнутой, следовательно, выводит за границы множества X.

3. Множество X непрерывных функций на промежутке $[a; b]$, удовлетворяющих начальному условию $x(a) = 1$, не является линейным пространством. Непрерывность, очевидно, сохраняется при сложении функций и при умножении функции на число. Покажем, что условие $x(a) = 1$, напротив, не сохраняется:

$$x \in X \Rightarrow x(a) = 1 \Rightarrow \alpha x(a) = \alpha \Rightarrow \alpha x \in X \text{ только при } \alpha = 1;$$

$$x, y \in X \Rightarrow x(a) = 1, y(a) = 1 \Rightarrow x(a) + y(a) = 2 \Rightarrow x + y \notin X.$$

Для того чтобы множество X стало линейным пространством, достаточно заменить условие $x(a) = 1$ на условие $x(a) = 0$.

Выяснению вопроса, является ли то или иное множество линейным пространством, посвящено задание № 21 в сборнике задач.

Определение 6.2. Пусть X — линейное пространство. Множество $\tilde{X}$ называется *линейным подпространством* в X, если $\tilde{X} \subset X$ и $\tilde{X}$ само является линейным пространством с такими же, как в X, операциями сложения и умножения на число.

В частности, линейное подпространство $\tilde{X}$ обязательно содержит нулевой элемент и результаты сложения его элементов и умножения его элементов на число принадлежат $\tilde{X}$.

6.2. ЛИНЕЙНО НЕЗАВИСИМЫЕ СИСТЕМЫ

Следующие три определения сформулированы в предположении, что X — линейное пространство.

Определение 6.3. Выражение $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i x_i$ называется *линейной комбинацией* элементов $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \in X$ с коэффициентами $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n \in R$. Рассмотрим множество всех линейных комбинаций, которые можно составить из этих элементов:

$$\mathrm{Lin}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} c_i x_i, c_i \in R \right\}.$$

Это множество называется *линейной оболочкой* системы $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Оно, очевидно, является линейным подпространством в X.

Определение 6.4. Элементы $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \in X$ называются *линейно независимыми*, если равенство $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i x_i = 0$ возможно только в случае, когда все $c_i = 0$. В противном случае указанные элементы *линейно зависимы*.

Простые замечания:

1) элементы $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \in X$ образуют линейно зависимый набор тогда и только тогда, когда хотя бы один из них является линейной комбинацией остальных;

2) если среди элементов $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \in X$ есть нулевой, то этот набор является линейно зависимым;

3) если какое-то подмножество элементов $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \in X$ линейно зависимо, то и весь набор линейно зависим.

Определение 6.5. Бесконечная система элементов $\{x_k\} \subset \subset X$ называется *линейно независимой*, если для любого n конечный набор $x_1, x_2, \ldots, x_n$ линейно независим. Бесконечная система элементов $\{x_k\} \subset X$ называется линейно зависимой, если в ней существует *линейно зависимый* конечный набор $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Приведем примеры бесконечных линейно независимых систем.

1. Рассмотрим любое из описанных в § 1 функциональных пространств: $C[a; b]$, $C^k[a; b]$, $L^p(a; b)$. Самая популярная линейно независимая система, состоящая из функций, — это бесконечная система одночленов:

$$\{1, t, t^2, t^3, t^4, \ldots, t^k, \ldots\}. \quad (6.1)$$

Действительно, рассмотрим конечный набор $1, t, t^2, t^3, t^4, \ldots, t^n$ и составим его линейную комбинацию $c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \ldots + c_n t^n$. Она представляет собой многочлен степени n, который тождественно равен нулю только в случае, если все его коэффициенты нулевые.

Вторая по популярности линейно независимая система состоит из тригонометрических функций:

$$\{1, \sin t, \cos t, \sin 2t, \cos 2t, \ldots, \sin kt, \cos kt, \ldots\}. \quad (6.2)$$

Действительно, эта система линейно независимая, поскольку ни одну из этих тригонометрических функций нельзя получить в результате линейной комбинации нескольких других. То же самое верно для системы экспонент:

$$\{1, e^t, e^{2t}, e^{3t}, \ldots, e^{kt}, \ldots\}. \quad (6.3)$$

2. В пространстве l^p, состоящем из числовых последовательностей, бесконечную линейно независимую систему образуют, например, единичные последовательности:

$$\begin{cases} (1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots) \\ (0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots) \\ (0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots) \\ (0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots) \\ & & \ldots & & & \end{cases} \tag{6.4}$$

Эта система очевидно линейно независимая, так как ни одна строка в ней не может быть представлена как линейная комбинация остальных строк. Другие примеры линейно независимых систем в пространствах числовых последовательностей можно найти в сборнике задач (№ 35).

6.3. РАЗМЕРНОСТЬ ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА

Определение 6.6. Если в линейном пространстве X можно указать n линейно независимых элементов, а любой набор из $n+1$ элемента линейно зависим, то пространство X называется *конечномерным*, при этом число n называется *размерностью* пространства X.

Если в линейном пространстве X можно указать бесконечную линейно независимую систему элементов, то пространство X называется *бесконечномерным*.

Аналогичным образом определяется размерность линейных подпространств.

Замечание к определению 6.6. Если конечномерное пространство X имеет размерность n, то оно может быть представлено в виде линейной оболочки любых своих n линейно независимых элементов: $X = \mathrm{Lin}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Для бесконечномерных пространств X аналогичный факт не верен.

Укажем конечномерные и бесконечномерные пространства среди основных пространств данного курса, перечисленных в § 1.

Конечномерные линейные пространства.

- Пространство R одномерное.
- Пространство R^n имеет размерность n.
- Пространство квадратных матриц $M_{n\times n}$ имеет размерность n^2.

Бесконечномерные линейные пространства.

- Пространства числовых последовательностей l^p. Бесконечная линейно независимая система может быть выбрана, например, из единичных последовательностей (6.4).
- Функциональные пространства $C[a;b]$, $C^k[a;b]$, $L^p(a;b)$. В них бесконечная линейно независимая система может быть выбрана, например, из одночленов (6.1), тригонометрических функций (6.2) или экспонент (6.3).

Все конечномерные пространства размерности n устроены так же, как R^n, т. е. в определенном смысле одинаковы. Среди бесконечномерных пространств разнообразия больше, отсюда более глубокая и сложная теория.

Задание на определение размерности линейного подпространства смотрите в сборнике задач (№ 22).

§ 7. НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Понятие нормы в абстрактном линейном (векторном) пространстве является обобщением такой характеристики, как длина для обычного геометрического вектора на плоскости. Заметим, что за расстояние между двумя геометрическими векторами, отложенными из одной точки, принимается расстояние между их концами, поэтому оно может быть вычислено как длина их разности. В линейном пространстве произвольной природы справедлива такая же связь между длиной (нормой) и расстоянием (метрикой): расстояние между элементами вычисляется как норма их разности. Напомним, что метрика и все связанные с ней структуры были описаны в § 2–3.

7.1. ПОНЯТИЯ НОРМЫ, ПОЛУНОРМЫ И БАНАХОВА ПРОСТРАНСТВА

Определение 7.1. Линейное пространство X называется *нормированным*, если для всех его элементов определена такая числовая функция $p(x)$, что для любых x, $y \in X$, $\alpha \in R$ выполняются три аксиомы:

I. $p(x) \geq 0$, причем $p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

II. $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$ (положительная однородность);

III. $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ (неравенство треугольника).

Функция p называется *нормой*, или *длиной*. Для значений функции p обычно используют символ, похожий на знак модуля: $p(x) = \|x\|$.

Иногда будем помечать норму индексом X, т. е. $\|x\|_X$, чтобы указать, о каком именно пространстве элементов идет речь. В одном и том же линейном пространстве могут быть заданы разные нормы. Аксиомы I–III согласуются с обыденным представлением о свойствах длины.

Замечание к определению 7.1. Для того чтобы можно было ввести в пространстве норму, в нем должна быть линейная структура. Она используется в аксиоме III (сложение элементов), в аксиоме II (умножение на число) и во второй части аксиомы I (наличие нулевого элемента).

Упражнение. Доказать неравенство $|\|x\| - \|y\|| \leq$ $\leq \|x - y\|$.

Определение 7.2. Если в линейном пространстве X определена функция $p(x)$, удовлетворяющая аксиомам I–III, кроме второй части первой аксиомы, то она называется *полунормой*. Для полунормы из условия $p(x) = 0$ не обязательно следует $x = 0$.

Как связаны между собой норма и метрика, т. е. длина и расстояние? Если пространство X нормированное, то в нем можно ввести метрику по формуле

$$\rho(x, y) = \|x - y\|. \tag{7.1}$$

В этом случае будем говорить, что метрика порождена нормой.

Упражнение. Проверить, что для функции, определенной по формуле (7.1), выполняются аксиомы метрики I–III (см. определение 2.1).

Поскольку любое нормированное пространство X является также метрическим, то для него остаются в силе все структуры, обеспеченные метрикой. Например, шар с центром в нуле и радиусом r задается следующим образом:

$$B_r(0) = \{x \in X: \|x\| < r\}.$$

Определения сходящихся и фундаментальных последовательностей из § 3 переформулируем с учетом (7.1):

$$x_n \to x \Leftrightarrow \|x_n - x\| \to 0 \text{ при } n \to \infty;$$

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ фундаментальная } \Leftrightarrow \|x_n - x_m\| \to 0 \text{ при } n, m \to \infty.$$

Нормированное пространство может быть полным относительно метрики, порожденной нормой (см. определение 3.4).

Определение 7.3. Полное нормированное пространство называется *банаховым* (по имени польского математика первой половины XX века Стефана Банаха).

7.2. ОСНОВНЫЕ БАНАХОВЫ ПРОСТРАНСТВА

Почти во всех метрических пространствах, перечисленных в § 2, пункт 2.2, метрика порождается соответствующей нормой (табл. 1).

Таблица 1

Пространство	Норма $\|x\|$	Метрика $\rho(x,y)=\|x-y\|$
R	$\|x\|=\lvert x\rvert$	$\rho(x,y)=\lvert x-y\rvert$
R^n, $n = 1, 2, 3, \ldots$	$\|x\|_1=\sum_{k=1}^{n}\lvert x_k\rvert$ $\|x\|_2=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}x_k^2}$ $\|x\|_\infty=\max_{1\le k\le n}\lvert x_k\rvert$	$\rho_1(x,y)=\sum_{k=1}^{n}\lvert x_k-y_k\rvert$ $\rho_2(x,y)=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2}$ $\rho_\infty(x,y)=\max_{1\le k\le n}\lvert x_k-y_k\rvert$
l^p, $1\le p<\infty$	$\|x\|_{l^p}=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lvert x_k\rvert^p\right)^{\frac{1}{p}}$	$\rho_{l^p}(x,y)=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lvert x_k-y_k\rvert^p\right)^{\frac{1}{p}}$
l^∞	$\|x\|_{l^\infty}=\sup_{1\le k<\infty}\lvert x_k\rvert$	$\rho_{l^\infty}(x,y)=\sup_{1\le k<\infty}\lvert x_k-y_k\rvert$
$C[a; b]$	$\|x\|_C=\max_{t\in[a;b]}\lvert x(t)\rvert$	$\rho_C(x,y)=\max_{t\in[a;b]}\lvert x(t)-y(t)\rvert$
$C^k[a; b]$, $k = 1, 2, 3, \ldots$	$\|x\|_{C^k}=\sum_{l=0}^{k}\max_{t\in[a;b]}\lvert x^{(l)}(t)\rvert$	$\rho_{C^k}(x,y)=\sum_{l=0}^{k}\max_{t\in[a;b]}\lvert x^{(l)}(t)-y^{(l)}(t)\rvert$
$L^p(a; b)$, $1\le p<\infty$	$\|x\|_{L^p}=\left(\int_a^b\lvert x(t)\rvert^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}$	$\rho_{L^p}(x,y)=\left(\int_a^b\lvert x(t)-y(t)\rvert^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}$

Все перечисленные в таблице 1 пространства являются банаховыми.

Без доказательства приведем некоторые специальные неравенства, называемые *неравенствами Гёльдера*, для норм в пространствах суммируемых числовых последовательностей и функций.

I. Пусть $x \in l^p$, $y \in l^q$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$.

Неравенство Гёльдера (в компактной и развернутой форме) выглядит следующим образом:

$$\|x\cdot y\|_{l^1} \le \|x\|_{l^p}\cdot\|y\|_{l^q};$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}|x_k\cdot y_k| \le \left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\sum_{k=1}^{\infty}|y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}. \qquad (7.2)$$

Неравенство (7.2) обращается в равенство при $x = 0$, при $y = 0$ либо для таких последовательностей x и y, которые связаны соотношением $|x_k|^p = c|y_k|^q$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, $c \in R$.

II. Пусть $x \in L^p(a; b)$, $y \in L^q(a; b)$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, $(a; b)$ — конечный промежуток.

Неравенство Гёльдера (в компактной и развернутой форме) выглядит следующим образом:

$$\|x\cdot y\|_{L^1} \le \|x\|_{L^p}\cdot\|y\|_{L^q};$$

$$\int_a^b|x(t)\cdot y(t)|\,dt \le \left(\int_a^b|x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\int_a^b|y(t)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}. \qquad (7.3)$$

Неравенство (7.3) обращается в равенство при $x = 0$, при $y = 0$ либо для таких функций x и y, которые связаны соотношением $|x(t)|^p = c|y(t)|^q$, $t \in (a; b)$, $c \in R$.

7.3. ДРУГИЕ ПОПЫТКИ ВВЕДЕНИЯ НОРМЫ

Приведем примеры особых ситуаций, возникающих при попытке введения нормы.

1. В пространстве изолированных точек X с метрикой $\rho(x, y) = \begin{cases} 1, x \neq y; \\ 0, x = y \end{cases}$ нельзя ввести линейную структуру и норму, порождающую указанную метрику. Чтобы убедиться в этом, предположим обратное. Допустим, что в пространстве X есть линейная структура и есть норма, связанная с метрикой по формуле (7.1). Но тогда $\rho(x, 0) = \|x\| = 1$ для всех $x \neq 0$, т. е. все ненулевые векторы линейного пространства имеют единичную длину. Но в этом случае не выполняется II аксиома нормы: $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$. Получили противоречие, следовательно, это метрическое пространство не может быть снабжено линейной структурой и нормой, порождающей метрику.

2. Рассмотрим в пространстве R^n функцию $p(x) = \min\limits_{1 \le k \le n} |x_k|$. Покажем, что она не является ни нормой, ни полунормой. Проверим аксиомы нормированного пространства.

I. Ясно, что $p(x) \ge 0$. Если $x = 0$, то $p(x) = 0$. Но если $p(x) = 0$, то отсюда следует только, что у вектора x есть хотя бы одна нулевая координата. Вторая часть первой аксиомы не выполняется, следовательно, функция p не может быть нормой, но может быть полунормой, если выполняются остальные аксиомы.

II. Свойство положительной однородности выполняется:

$$p(\alpha x) = \min_{1 \le k \le n} |\alpha x_k| = |\alpha| \min_{1 \le k \le n} |x_k| = |\alpha|\, p(x).$$

III. Неравенство треугольника $p(x + y) \le p(x) + p(y)$ выполняется не для всех векторов $x, y \in R^n$. Приведем пример в R^3. Пусть $x = (-5, 0, 3)$, $y = (2, -4, 0)$. Тогда

$$p(x + y) = 3, p(x) + p(y) = 0.$$

Таким образом, доказано, что функция p не определяет ни норму, ни полунорму в пространстве R^n.

3. В пространстве прямоугольных матриц $M_{m\times n}$ можно ввести норму так, чтобы она была определенным образом подчинена той или иной норме вектора в пространствах R^m, R^n. Возьмем матрицу $\mathrm{A} = (a_{ij}) \in M_{m\times n}$ и вектор $x \in R^n$, тогда $\mathrm{A}x \in R^m$:

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|, \ \ \|\mathrm{A}\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|, \ \ \|\mathrm{A}x\|_1 \le \|\mathrm{A}\|_1 \cdot \|x\|_1;$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1\le k\le n} |x_k|, \ \ \|\mathrm{A}\|_\infty = \max_{1\le i\le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|, \ \ \|\mathrm{A}x\|_\infty \le \|\mathrm{A}\|_\infty \cdot \|x\|_\infty;$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}, \ \ \|\mathrm{A}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}, \ \ \|\mathrm{A}x\|_2 \le \|\mathrm{A}\|_2 \cdot \|x\|_2 .$$

В математической литературе норма $\|\mathrm{A}\|_2$ часто встречается в виде $\sqrt{\mathrm{tr}(\mathrm{A}^T\mathrm{A})}$, где tr — след матрицы, т. е. сумма элементов на главной диагонали. Кроме того, норму $\|\mathrm{A}\|_2$ можно заменить на эквивалентную норму $\|\mathrm{A}\| = \sqrt{\lambda(\mathrm{A}^T\mathrm{A})}$, которая в некотором отношении наиболее оптимальна. Здесь $\lambda(\mathrm{A}^T\mathrm{A})$ — максимальное собственное число матрицы $\mathrm{A}^T\mathrm{A}$. Если А — квадратная симметричная положительно определенная матрица, то $\|\mathrm{A}\| = \sqrt{\lambda(\mathrm{A}^T\mathrm{A})} = \lambda(\mathrm{A})$ — максимальное собственное число матрицы А. Эта норма неявно использовалась в § 5, пункт 5.2, для построения сжимающего оператора. Оставим без доказательства выполнение аксиом нормированного пространства для всех этих матричных норм. Подробнее эта тема разобрана в [6].

Выяснению вопроса, является ли числовая функция нормой, и вычислению нормы посвящены № 23–28 в сборнике задач.

§ 8.
ПРОСТРАНСТВА СО СКАЛЯРНЫМ ПРОИЗВЕДЕНИЕМ

Скалярное произведение между геометрическими векторами на плоскости вычисляется как произведение их длин на косинус угла между ними. Очевидно, если скалярно умножить вектор на себя, то получим его длину в квадрате. У скалярного произведения есть характерные свойства, на основе которых эту операцию можно обобщить на случай линейного пространства произвольной природы. При этом сохраняется связь между скалярным произведением и длиной (нормой): норма может быть вычислена как квадратный корень из скалярного произведения вектора на себя. Линейное пространство со скалярным произведением иногда называют евклидовым, потому что, какова бы ни была природа его элементов, инструменты и свойства такого пространства в целом соответствуют евклидовой геометрии. Например, скалярное произведение позволяет измерять углы, длину, расстояние, определить ортогональность, ортогональное проектирование, ввести тригонометрические функции, установить теорему Пифагора.

8.1. ПОНЯТИЯ СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ И ГИЛЬБЕРТОВА ПРОСТРАНСТВА

Определение 8.1. Линейное пространство X называется *пространством со скалярным произведением*, если для всех его элементов определена такая числовая функция (x, y) двух аргументов, что для любых $x, y \in X$, $\alpha, \beta \in R$ выполняются три аксиомы:

I. $(x, x) \geq 0$, причем $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

II. $(x, y) = (y, x)$ (симметричность);

III. $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$ (линейность).

Функция (x, y) называется *скалярным произведением*, поскольку ее значения — скаляры (числа) в отличие от других видов произведений.

Как связаны между собой скалярное произведение и норма? Если в пространстве имеется скалярное произведение, то в нем можно ввести норму по формуле

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}. \tag{8.1}$$

В этом случае будем говорить, что норма порождена скалярным произведением.

Упражнение. Проверить, что для функции, определенной по формуле (8.1), выполняются все аксиомы нормы (см. определение 7.1).

Таким образом, пространство со скалярным произведением автоматически является нормированным, а нормированное пространство, в свою очередь, является метрическим, как было показано в предыдущем параграфе. Скалярное произведение порождает норму по формуле (8.1), норма порождает метрику по формуле (7.1). Итого:

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x - y, x - y)}. \tag{8.2}$$

Будем говорить, что скалярное произведение, норма и метрика согласованы, когда они связаны соотношениями (8.1), (8.2).

В пространствах со скалярным произведением имеет место знаменитое *неравенство Коши — Буняковского*:

$$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|. \tag{8.3}$$

Неравенство (8.3) обращается в равенство при $x = 0$, при $y = 0$ либо для пропорциональных элементов: $y = cx$, $c \in R$. При помощи неравенства Коши — Буняковского можно подойти к вычислению углов между векторами. Сначала определим косинус угла γ между векторами x и y:

$$\cos\gamma = \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|}.$$

Из неравенства (8.3) следует, что $|\cos\gamma| \le 1$. На основе косинуса можно определить синус и другие тригонометрические и обратные тригонометрические функции.

Сформулируем еще одно важное следствие из неравенства Коши — Буняковского.

Лемма 8.1. Скалярное произведение непрерывно по каждому аргументу.

Доказательство. С помощью определения непрерывности 4.1 покажем, что скалярное произведение непрерывно по первому аргументу. Пусть $x_n \to x$ в пространстве X. Докажем, что $(x_n, y) \to (x, y)$ в пространстве R:

$$|(x_n, y) - (x, y)| = |(x_n - x, y)| \le \|x_n - x\| \cdot \|y\| \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Лемма доказана.

Поскольку пространства со скалярным произведением являются также метрическими, то можно говорить об их полноте относительно метрики, порожденной скалярным произведением (см. определение 3.4).

Определение 8.2. Полное пространство со скалярным произведением называется *гильбертовым* (по имени немецкого математика первой половины XX века Давида Гильберта).

Можно сказать иначе: гильбертовым называется банахово пространство, в котором норма порождена скалярным произведением.

Ввиду выдающегося значения гильбертовых пространств будем обозначать их специальным символом H. Среди бесконечномерных пространств гильбертовы пространства выделяются относительной простотой, поэтому часто используются в приложениях. Здесь в наибольшей мере удается использовать геометрическую интуицию, в частности применять ортогональное проектирование.

8.2. ОСНОВНЫЕ ГИЛЬБЕРТОВЫ ПРОСТРАНСТВА

Далеко не все пространства, перечисленные § 7, пункт 7.2, обладают скалярным произведением, порождающим соответствующую норму и метрику (табл. 2).

Таблица 2

Пространство	Скалярное произведение (x, y)	Норма $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$	Метрика $\rho(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x - y, x - y)}$
R	$(x, y) = xy$	$\|x\| = \lvert x \rvert$	$\rho(x, y) = \lvert x - y \rvert$
$R^n,\ n = 1, 2, 3, \ldots$	$(x, y) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k$	$\|x\|_2 = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2}$	$\rho_2(x, y) = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}$
l^2	$(x, y) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k y_k$	$\|x\|_{l^2} = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k^2}$	$\rho_{l^2}(x, y) = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{\infty} (x_k - y_k)^2}$
$L^2(a; b)$	$(x, y) = \int\limits_a^b x(t) y(t) dt$	$\|x\|_{L^2} = \sqrt{\int\limits_a^b x^2(t) dt}$	$\rho_{L^2}(x, y) = \sqrt{\int\limits_a^b (x(t) - y(t))^2 dt}$

Все представленные в таблице 2 пространства являются гильбертовыми.

Заметим, что в пространстве R^n можно ввести разные нормы и метрики, но только евклидовы норма и метрика согласованы со скалярным произведением. Пространства l^p и $L^p(a; b)$ обладают скалярным произведением только при $p = 2$. Покажем, как в этих пространствах выглядит неравенство Коши — Буняковского (8.3). В пространстве l^2 оно имеет вид

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k\right| \le \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} y_k^2}. \qquad (8.4)$$

В пространстве $L^2(a; b)$ оно имеет вид

$$\left|\int_a^b x(t)y(t)dt\right| \le \sqrt{\int_a^b x^2(t)dt} \cdot \sqrt{\int_a^b y^2(t)dt}. \qquad (8.5)$$

По существу, неравенства (8.4), (8.5) являются частными случаями неравенств Гёльдера (7.2), (7.3) при $p = q = 2$.

Вычислительные примеры на эту тему содержатся в сборнике задач (№ 29, 30).

Упражнение. Проверить, можно ли в пространстве квадратных матриц $M_{n\times n}$ ввести скалярное произведение по формуле

$$(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} b_{ij},$$

где $\mathrm{A} = (a_{ij})$, $\mathrm{B} = (b_{ij}) \in M_{n\times n}$.

8.3. ВЕСОВЫЕ ПРОСТРАНСТВА ЛЕБЕГА

Наравне с пространством квадратично суммируемых функций $L^2(a; b)$ (одно из пространств Лебега) существует целое семейство гильбертовых пространств $L^{2,\xi}(a; b)$, которые называют *весовыми пространствами* Лебега.

Пусть $\xi \in L^1(a;b)$, $\xi(t) > 0$ на промежутке $(a;b)$. Положим

$$x \in L^{2,\xi}(a;b) \Leftrightarrow \int_a^b x^2(t)\xi(t)dt < \infty.$$

Пространство $L^{2,\xi}(a;b)$ оснащено скалярным произведением *с весом* ξ:

$$(x,y)_\xi = \int_a^b x(t)y(t)\xi(t)dt.$$

Аксиомы I–III скалярного произведения проверяются устно. Такое скалярное произведение порождает соответствующую норму и метрику

$$\|x\|_{L^{2,\xi}} = \sqrt{(x,x)_\xi} = \sqrt{\int_a^b x^2(t)\xi(t)dt};$$

$$\rho_{L^{2,\xi}}(x,y) = \|x-y\|_{L^{2,\xi}} = \sqrt{\int_a^b (x(t)-y(t))^2\xi(t)dt}.$$

Таким образом, структуры гильбертова пространства могут быть построены в пространстве $L^{2,\xi}(a;b)$ по аналогии с пространством $L^2(a;b)$. Заметим, что пространство $L^2(a;b)$ является частным случаем $L^{2,\xi}(a;b)$ при $\xi = 1$.

Сходимость последовательности функций в пространстве $L^{2,\xi}(a;b)$ определяется нормой (см. § 7, пункт 7.1):

$$x_n \to x \Leftrightarrow \|x_n - x\|_{L^{2,\xi}(a;b)} = \sqrt{\int_a^b (x_n(t)-x(t))^2\xi(t)dt} \to 0.$$

Такая сходимость называется так же, как в пространстве $L^2(a;b)$, — *среднеквадратичная* сходимость (с весом ξ).

§ 9.
ОРТОГОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

Главное преимущество пространств со скалярным произведением заключается в том, что в них можно ввести адекватное понятие ортогональности, для которого выполнялся бы аналог теоремы Пифагора.

9.1.
ПРОЦЕСС ОРТОГОНАЛИЗАЦИИ

Определение 9.1. Пусть X — пространство со скалярным произведением, $x, y \in X$. Элементы x и y называются *ортогональными*, если $(x, y) = 0$.

Обозначение: $x \perp y$.

Запись $x \perp \Omega$, где Ω — множество, означает, что $x \perp y$ для всех элементов $y \in \Omega$.

Упражнение. Могут ли быть ортогональными в пространстве $L^2(-1; 1)$ а) две положительные функции; б) четная и нечетная функции; в) два многочлена первой степени?

Определение 9.2. Пусть X — пространство со скалярным произведением, $\{e_k\} \subset X$, $e_k \neq 0$. Система $\{e_k\}$ называется *ортогональной*, если $(e_k, e_i) = 0$ для любых $k \neq i$. Ортогональная система называется *ортонормированной*, если $\|e_k\| = 1$ для всех k.

Любую ортогональную систему можно сделать ортонормированной, поделив каждый элемент на его норму (провести *нормировку*). Упражнения на действия с ортогональными системами содержатся в сборнике задач (№ 31–33).

Лемма 9.1 (теорема Пифагора). Пусть X — пространство со скалярным произведением, $x, y \in X$, $x \perp y$.

Тогда

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Пусть $\{e_k\} \subset X$ — ортонормированная система, $c_k \in R$. Тогда

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} c_k e_k\right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} c_k^2.$$

Доказательство. При доказательстве первого утверждения используем выражение (8.1) нормы через скалярное произведение, линейность и симметричность скалярного произведения (см. определение 8.1):

$$\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + 2\underbrace{(x,y)}_{=0} + (y,y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 .$$

Второе утверждение является распространением первого на сумму нескольких ортогональных элементов. Используем положительную однородность нормы (см. определение 7.1):

$$\|c_1e_1 + c_2e_2 + \ldots + c_ne_n\|^2 = \|c_1e_1\|^2 + \|c_2e_2\|^2 + \ldots + \|c_ne_n\|^2 =$$
$$= c_1^2\,\|e_1\|^2 + c_2^2\,\|e_2\|^2 + \ldots + c_n^2\,\|e_n\|^2 = c_1^2 + c_2^2 + \ldots + c_n^2.$$

Лемма доказана.

Лемма 9.2. Пусть X — пространство со скалярным произведением, $\{e_k\} \subset X$ — ортогональная система. Тогда эта система линейно независимая.

Доказательство. Не умаляя общности, можно считать, что система $\{e_k\}$ бесконечная и ортонормированная. Очевидно, нормировка не влияет на свойство линейной независимости. Обратимся к определению 6.5 бесконечной линейно независимой системы. Составим линейную комбинацию из первых n элементов системы $\{e_k\}$ и предположим, что ее результат равен нулю:

$$\sum_{k=1}^{n} c_k e_k = 0.$$

Тогда из теоремы Пифагора (лемма 9.1) вытекает

$$0 = \left\| \sum_{k=1}^{n} c_k e_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} c_k^2.$$

Следовательно, $c_k = 0$ для всех $k = 1, 2, \ldots, n$. Поскольку число n было выбрано произвольно, то делаем вывод, что для любого n конечный набор $e_1, e_2, \ldots, e_n$ линейно независим. По определению 6.5 вся система $\{e_k\}$ линейно независимая.

Лемма доказана.

Обратное, разумеется, не верно: не всякая линейно независимая система является ортогональной. Покажем, что линейно независимую систему можно преобразовать в ортогональную.

Теорема 9.1 (об ортогонализации). Пусть X — пространство со скалярным произведением, в котором имеется линейно независимая последовательность $\{x_k\}$, конечная или бесконечная. Тогда с помощью линейных преобразований из $\{x_k\}$ можно построить ортогональную систему $\{e_k\}$.

Выражение «с помощью линейных преобразований» означает, что каждый элемент e_n получен посредством линейной комбинации первых n элементов последовательности $\{x_k\}$. Преобразование линейно независимой системы в ортогональную называется *процессом ортогонализации Грама — Шмидта*.

Доказательство. Докажем теорему для бесконечной последовательности $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$.

Положим

$$e_0 = x_0;$$

$$e_1 = x_1 - c_0 e_0,$$

где $c_0 = \dfrac{(x_1, e_0)}{(e_0, e_0)}$;

$$e_2 = x_2 - c_0 e_0 - c_1 e_1,$$

где $c_0 = \dfrac{(x_2, e_0)}{(e_0, e_0)}$, $c_1 = \dfrac{(x_2, e_1)}{(e_1, e_1)}$;

$$e_3 = x_3 - c_0 e_0 - c_1 e_1 - c_2 e_2,$$

где $c_0 = \dfrac{(x_3, e_0)}{(e_0, e_0)}$, $c_1 = \dfrac{(x_3, e_1)}{(e_1, e_1)}$, $c_2 = \dfrac{(x_3, e_2)}{(e_2, e_2)}$ и т. д.

В общем случае

$$e_n = x_n - c_0e_0 - c_1e_1 - c_2e_2 - \ldots - c_{n-1}e_{n-1},$$

где $c_k = \dfrac{(x_n, e_k)}{(e_k, e_k)}$.

Докажем, что полученная система $\{e_k\}_{k=0}^{\infty}$ ортогональная. Проведем доказательство методом математической индукции. База индукции: система, состоящая из одного элемента e_0, ортогональная. Предположим, что система $\{e_0, e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}\}$ ортогональная. Покажем, что $e_n \perp e_k$ для любого $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$:

$$(e_n, e_k) = (x_n - c_0e_0 - c_1e_1 - c_2e_2 - \ldots - c_{n-1}e_{n-1}, e_k) =$$
$$= (x_n, e_k) - c_k(e_k, e_k) = 0.$$

Следовательно, система $\{e_0, e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ также ортогональная. Значит, это верно для любого n, поэтому вся система $\{e_k\}_{k=0}^{\infty}$ ортогональная.

Заметим, что предположение о линейной независимости исходной системы $\{x_k\}$ необходимо затем, чтобы построенная система $\{e_k\}$ не содержала нулевых элементов.

Теорема доказана.

9.2. ПОСТРОЕНИЕ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ ЛЕЖАНДРА, ЧЕБЫШЁВА, ЛАГЕРРА, ЭРМИТА

Рассмотрим $L^{2,\xi}(a; b)$ — весовое пространство Лебега, которое было введено в § 8, пункт 8.3, и линейно независимую систему одночленов

$$\{1, t, t^2, t^3, t^4, \ldots, t^k, \ldots\}.$$

К ней можно применить процесс ортогонализации Грама — Шмидта и получить ортогональную систему многочленов в данном пространстве. За счет выбора промежутка $(a; b)$ и главным образом веса ξ получаются разные ортогональные системы многочленов. Наиболее популярные системы приведены в таблице 3.

Таблица 3

Пространство $L^{2,\xi}(a; b)$	**Название и обозначение ортогональных многочленов, $k = 0, 1, 2, ..., n, ...$**
$L^2(-1; 1)$	Многочлены Лежандра $P_k(t)$
$L^{2,\xi}(-1; 1),\ \xi(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$	Многочлены Чебышёва I рода $T_k(t)$
$L^{2,\xi}(-1; 1),\ \xi(t) = \sqrt{1-t^2}$	Многочлены Чебышёва II рода $U_k(t)$
$L^{2,\xi}(0; +\infty),\ \xi(t) = e^{-t}$	Многочлены Лагерра $L_k(t)$
$L^{2,\xi}(-\infty; \infty),\ \xi(t) = e^{-t^2}$	Многочлены Эрмита $H_k(t)$

Опишем подробнее процесс построения и свойства многочленов Лежандра (Адриен Мари Лежандр — французский математик конца XVIII — начала XIX веков). Рассмотрим пространство $L^2(-1; 1)$ со стандартным скалярным произведением. Применяем процесс ортогонализации к системе $\{1, t, t^2, t^3, t^4, \ldots, t^k, \ldots\}$ — получаем ортогональную систему многочленов $\{P_0, P_1, P_2, P_3, \ldots, P_k, \ldots\}$. Продемонстрируем процесс вывода нескольких первых многочленов:

$$P_0 = 1;$$

$$P_1 = t - c_0 P_0, \quad c_0 = \frac{(t, P_0)}{(P_0, P_0)} = 0 \Rightarrow P_1 = t;$$

$$P_2 = t^2 - c_0 P_0 - c_1 P_1,$$

$$c_0 = \frac{(t^2, P_0)}{(P_0, P_0)} = \frac{1}{3}, \quad c_1 = \frac{(t^2, P_1)}{(P_1, P_1)} = 0 \Rightarrow P_2 = t^2 - \frac{1}{3};$$

$$P_3 = t^3 - c_0 P_0 - c_1 P_1 - c_2 P_2,$$

$$c_0 = \frac{(t^3, P_0)}{(P_0, P_0)} = 0, \quad c_1 = \frac{(t^3, P_1)}{(P_1, P_1)} = \frac{3}{5},$$

$$c_2 = \frac{(t^3, P_2)}{(P_2, P_2)} = 0 \Rightarrow P_3 = t^3 - \frac{3}{5} t;$$

$$P_4 = t^4 - c_0P_0 - c_1P_1 - c_2P_2 - c_3P_3,$$

$$c_0 = \frac{(t^4, P_0)}{(P_0, P_0)} = \frac{1}{5}, \quad c_1 = \frac{(t^4, P_1)}{(P_1, P_1)} = 0,$$

$$c_2 = \frac{(t^4, P_2)}{(P_2, P_2)} = \frac{6}{7}, \quad c_3 = \frac{(t^4, P_3)}{(P_3, P_3)} = 0 \Rightarrow P_4 = t^4 - \frac{6}{7}t^2 + \frac{3}{35};$$

$$P_5 = t^5 - c_0P_0 - c_1P_1 - c_2P_2 - c_3P_3 - c_4P_4,$$

$$c_0 = \frac{(t^5, P_0)}{(P_0, P_0)} = 0, \quad c_1 = \frac{(t^5, P_1)}{(P_1, P_1)} = \frac{3}{7},$$

$$c_2 = \frac{(t^5, P_2)}{(P_2, P_2)} = 0, \quad c_3 = \frac{(t^5, P_3)}{(P_3, P_3)} = \frac{10}{9},$$

$$c_4 = \frac{(t^5, P_4)}{(P_4, P_4)} = 0 \Rightarrow P_5 = t^5 - \frac{10}{9}t^3 + \frac{5}{21}t \text{ и т. д.}$$

Ясно, что каждый многочлен можно умножить на числовой коэффициент, не нарушив при этом ортогональность системы. Сделаем это так, чтобы на концах промежутка $(-1;\ 1)$ многочлены принимали значения ± 1. В результате получим так называемую стандартизированную систему многочленов Лежандра:

$$P_0 = 1;$$

$$P_1 = t;$$

$$P_2 = \frac{1}{2}(3t^2 - 1);$$

$$P_3 = \frac{1}{2}(5t^3 - 3t);$$

$$P_4 = \frac{1}{8}(35t^4 - 30t^2 + 3);$$

$$P_5 = \frac{1}{8}(63t^5 - 70t^3 + 30t) \text{ и т. д.}$$

Именно в таком, стандартизированном виде многочлены Лежандра чаще всего встречаются в литературе и в библиотеках математических пакетов. Для них имеются явная и рекуррентная формулы:

$$P_k(t) = \frac{1}{k!2^k} \frac{d^k}{dt^k}(t^2 - 1)^k;$$

$$(k+1)P_{k+1}(t) = (2k+1)tP_k(t) - kP_{k-1}(t).$$

Для построения ортонормированной системы многочленов Лежандра требуется произвести дополнительно нормировку.

Из ортогональности многочленов Лежандра в пространстве $L^2(-1;1)$ вытекает полезный факт:

$$P_n(t) \perp t^k \text{ для всех } k < n.$$

Действительно, это следует из того, что одночлен t^k можно выразить с помощью линейной комбинации многочленов Лежандра степени не выше k.

В дальнейшем также будем пользоваться тем, что многочлен Лежандра $P_k(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$(t^2 - 1)P_k'' + 2tP_k' - k(k+1)P_k = 0.$$

Многочлены Лежандра и другие ортогональные многочлены обладают многочисленными полезными свойствами — прежде всего для вычислительной математики. Подробные сведения об ортогональных многочленах изложены в [9].

Ортогонализации системы одночленов в одном из весовых пространств $L^{2,\xi}(a;b)$ посвящено задание в № 34 в сборнике задач.

§ 10.
ПОЛНЫЕ СИСТЕМЫ

В данном пособии термин «полнота» используется уже второй раз (первый — определение 3.4 полного метрического пространства). Это досадное повторение не обусловлено совпадением смысла, но только традицией функционального анализа. Важно не путать понятия полного метрического пространства и полной системы.

10.1.
ПОНЯТИЯ ПОЛНОЙ СИСТЕМЫ И ОРТОГОНАЛЬНОГО БАЗИСА

Определение 10.1. Пусть H — гильбертово пространство, $\{e_k\} \subset H$. Конечная или бесконечная последовательность $\{e_k\}$ называется *полной системой* в пространстве H, если не существует такого элемента $h \in H$, что $h \neq 0$ и $h \perp \{e_k\}$. Полную ортогональную (ортонормированную) систему будем называть *ортогональным* (*ортонормированным*) *базисом*.

Замечание к определению 10.1. Во многих учебниках по математическому и функциональному анализу (см. [1], [2], [5]) полнота системы определена по-другому, а именно: систему называют полной, если с ее помощью можно аппроксимировать любой элемент пространства. В гильбертовом пространстве такой подход эквивалентен определению 10.1 (см. § 11, п. 11.3, следствие теоремы 11.1).

Полнота указывает на то, что система исчерпывает все «измерения» пространства. В конечномерном пространстве R^n любой набор из n линейно независимых векторов является полной системой. В бесконечномерном пространстве ситуация сложнее: полная система, конечно, должна быть бесконечной, но не любая бесконечная система является полной.

Среди полных систем наиболее удобны ортогональные и ортонормированные базисы.

Приведем алгоритм анализа системы $\{e_k\}$ на предмет возможности преобразовать ее в ортогональный базис.

1. Если система $\{e_k\}$ не полная, то она не достаточна для построения ортогонального базиса.

2. Если система $\{e_k\}$ полная, то возможны варианты:

а) если она ортогональная, то является ортогональным базисом;

б) если она только линейно независимая, то ее можно преобразовать в ортогональный базис с помощью ортогонализации (см. теорему 9.1);

в) если же система линейно зависимая, то на ее основе также можно построить ортогональный базис, удалив «лишние» элементы и проведя ортогонализацию.

Реализуем этот алгоритм на простом примере.

В гильбертовом пространстве l^2 классическую полную систему образуют единичные последовательности (6.4), причем они составляют ортонормированный базис. Рассмотрим менее тривиальную систему:

$$\begin{cases} e^{(1)} = & (1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \ldots) \\ e^{(2)} = & (0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad \ldots) \\ e^{(3)} = & (0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad \ldots) \\ e^{(4)} = & (0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad \ldots) \\ & \qquad\qquad \ldots \end{cases}$$

Проверим ее полноту. Попробуем построить последовательность $h = (h_1, h_2, h_3, h_4, \ldots)$, которая была бы ортогональна всем $e^{(k)}$:

$$h \perp e^{(1)} \Leftrightarrow (h, e^{(1)}) = 0 \Leftrightarrow h_1 + h_2 = 0 \Leftrightarrow h_1 = -h_2;$$
$$h \perp e^{(2)} \Leftrightarrow (h, e^{(2)}) = 0 \Leftrightarrow h_2 + h_3 = 0 \Leftrightarrow h_2 = -h_3;$$
$$h \perp e^{(3)} \Leftrightarrow (h, e^{(3)}) = 0 \Leftrightarrow h_3 + h_4 = 0 \Leftrightarrow h_3 = -h_4 \text{ и т. д.}$$

Таким образом, последовательность h имеет вид $h = (c, -c, c, -c, c, -c, \ldots)$, $c \in R$. Либо $c = 0$ и тогда $h = 0$, либо $c \neq 0$ и тогда $h \notin l^2$, так как $\sum_{k=1}^{\infty} c^2 = \infty$. Следовательно, не существует такого элемента $h \in l^2$, что $h \neq 0$ и $h \perp e^{(k)}$, а значит, система $\{e^{(k)}\}$ полная.

Система не ортогональная и тем более не ортонормированная. Например, $(e^{(1)}, e^{(2)}) = 1$, $\|e^{(1)}\| = \sqrt{2}$. Эта система ступенчатого типа: в каждой следующей строке есть ненулевой элемент, который равен нулю в предыдущей строке. Такая система, очевидно, линейно независимая.

Подводим итог. Данная система $\{e^{(k)}\}$ линейно независимая и полная, поэтому после ортогонализации она станет ортогональным базисом, при дополнительной нормировке — ортонормированным базисом в пространстве l^2.

Другие примеры исследования системы на предмет возможности преобразовать ее в ортогональный базис продемонстрированы в сборнике задач (№ 35).

10.2. ПОЛНЫЕ СИСТЕМЫ И ОРТОГОНАЛЬНЫЕ БАЗИСЫ В ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА

I. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Рассмотрим в гильбертовом пространстве $L^2(-1; 1)$ *тригонометрическую* систему:

$$\{1, \sin\pi t, \cos\pi t, \ldots, \sin k\pi t, \cos k\pi t, \ldots\}. \qquad (10.1)$$

Легко убедиться, что она ортогональная и почти ортонормированная:

$$\|1\|_{L^2(-1;1)} = \sqrt{2}; \quad \|\sin\pi kt\|_{L^2(-1;1)} = 1; \quad \|\cos\pi kt\|_{L^2(-1;1)} = 1.$$

Из фактов математического анализа следует (см. [5]), что система (10.1) полная в пространстве $L^2(-1; 1)$, а значит, составляет ортогональный базис. Рассмотрим теперь две половины системы (10.1), состоящие из синусов и косинусов соответственно:

$$\{\sin\pi t, \sin 2\pi t, \sin 3\pi t, \ldots, \sin k\pi t, \ldots\}; \qquad (10.2)$$

$$\{1, \cos\pi t, \cos 2\pi t, \cos 3\pi t, \ldots, \cos k\pi t, \ldots\}. \qquad (10.3)$$

Системы (10.2) и (10.3) не являются полными в пространстве $L^2(-1; 1)$. Докажем это для системы (10.2): существует функция $h \in L^2(-1; 1)$, такая что $h \neq 0$ и $h(t) \perp \sin k\pi t$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ Поскольку промежуток $(-1; 1)$ симметричный и система (10.2) состоит только из нечетных функций, то в качестве $h(t)$ подойдет любая четная функция, например, $h(t) = 1$:

$$(h(t), \sin k\pi t) = \int_{-1}^{1} 1 \cdot \sin k\pi t dt = -\frac{\cos k\pi t}{k\pi}\bigg|_{-1}^{1} = 0.$$

С другой стороны, если рассмотреть вместо симметричного промежутка $(-1; 1)$ его половину $(0; 1)$, то известно, что системы (10.2), (10.3) полны в соответствующем гильбертовом пространстве $L^2(0; 1)$. Более того, они являются ортогональными базисами в этом пространстве.

II. ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

Рассмотрим в гильбертовом пространстве $L^2(a; b)$ систему одночленов

$$\{1, t, t^2, t^3, t^4, \ldots, t^k, \ldots\}. \qquad (10.4)$$

Доказано (см. [5]), что эта система полная. При этом она линейно независимая, но не ортогональная и не ортонормированная. В § 9, пункт 9.2, проведена ортогонализация системы (10.4) в пространстве $L^2(-1; 1)$. Значит, полученные в результате многочлены Лежандра

$$\{P_0(t), P_1(t), P_2(t), P_3(t), \ldots, P_k(t), \ldots\}$$

составляют ортогональный базис в пространстве $L^2(-1; 1)$. Такое же рассуждение верно для системы (10.4) в весовых пространствах $L^{2,\xi}(a; b)$, поэтому многочлены Чебышёва, Лагерра и Эрмита также являются ортогональными базисами в соответствующих пространствах (см. табл. 3). Такие базисы называются *полиномиальными*.

Отметим, что система одночленов (10.4) обладает любопытным свойством, отсутствующим у тригонометрических систем: она остается полной, если из нее удалить некоторые одночлены. В [1] приведено точное описание этого свойства для случая $(a; b) = (0; 1)$.

Из полноты системы одночленов (10.4) в пространстве $L^2(a; b)$ можно вывести полноту *экспоненциальной* системы:

$$\{1, e^t, e^{2t}, e^{3t}, \ldots, e^{kt}, \ldots\}.$$

III. СИСТЕМЫ СТУПЕНЧАТЫХ ФУНКЦИЙ

Функцию называют *ступенчатой* (или кусочно-постоянной), если она принимает конечное множество значений, следовательно, ее график напоминает ступеньки.

Наиболее популярной системой ступенчатых функций в гильбертовом пространстве $L^2(0; 1)$ является система Хаара, получившая название в честь Альфреда Хаара, венгерского математика начала XX века:

$$\varphi_{00} = 1,\ \varphi_{nk} = \begin{cases} 2^{\frac{n}{2}}, & \dfrac{k-1}{2^n} < t < \dfrac{k-1}{2^n} + \dfrac{1}{2^{n+1}}; \\ -2^{\frac{n}{2}}, & \dfrac{k-1}{2^n} + \dfrac{1}{2^{n+1}} \le t < \dfrac{k}{2^n}; \\ 0, & t \notin \left(\dfrac{k-1}{2^n}; \dfrac{k}{2^n}\right); \end{cases}$$

$$k = 1, 2, \ldots, 2^n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Эта система состоит из серий функций: n-я серия содержит 2^n функций.

Упражнение. Построить графики первых трех серий для системы Хаара. Доказать, что система ортонормированная в пространстве $L^2(0; 1)$.

В учебнике [2] показано, что эта система полная и представляет ортонормированный базис в пространстве $L^2(0; 1)$.

У п р а ж н е н и е. Исследовать систему ступенчатых функций Радемахера в пространстве $L^2(0;\,1)$:

$$\psi_n = (-1)^k, \qquad t \in \left[\frac{k}{2^n};\frac{k+1}{2^n}\right),$$
$$k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 2^n - 1, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Построить графики первых четырех функций Радемахера. Доказать, что система ортонормированная, но неполная в пространстве $L^2(0;\,1)$.

§ 11.
РЯДЫ ФУРЬЕ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ И ЗАДАЧА АППРОКСИМАЦИИ

В первой половине XIX века благодаря работам французского математика Жана Фурье разложение функции в тригонометрический ряд стало важным инструментом для решения дифференциальных уравнений.

Тригонометрический ряд — наиболее известный частный случай ряда Фурье. В общем виде рядом Фурье (или обобщенным рядом Фурье) называют теперь разложение элемента произвольного гильбертова пространства по произвольному ортогональному или ортонормированному базису. В конечномерном пространстве это разложение представляет собой конечную сумму, в бесконечномерном функциональном пространстве — бесконечную, отсюда возникает слово «ряд». Существенно используется ортогональность базиса: благодаря ей легко вычислить коэффициенты разложения и производить математические операции с готовым разложением.

Идея всякого разложения заключается в том, чтобы представить сложную функцию в виде линейной комбинации более простых: например, синусов и косинусов (разложение на гармоники), либо многочленов, либо ступенчатых функций. С математической точки зрения, эта идея имеет прямое отношение к задачам аппроксимации. Чтобы понять прикладное значение, представим, например, построение математической модели для процесса передачи информации. Такой процесс часто называют сигналом и описывают функцией $x(t)$, зависящей от времени t. Если аргумент t изменяется непрерывно, то сигнал $x(t)$ называют аналоговым, если t изменяется дискретно (например, принимает натуральные значения), то функция $x(t)$ по сути является числовой последовательностью и сигнал называется дискретным, при дополнительных условиях — цифровым. Разложение сигнала в ряд Фурье — основной инструмент в задачах обработки, сжатия и распознавания информации, в частности информации в форме изображения или звука.

11.1. РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРА ПО ОРТОНОРМИРОВАННОЙ СИСТЕМЕ В КОНЕЧНОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Начнем с того, что повторим известную процедуру разложения вектора в конечномерном пространстве. Для простоты рассмотрим трехмерное пространство и произвольную систему $\{e_1, e_2, e_3\} \subset R^3$, состоящую из трех линейно независимых векторов. Из замечания к определению 6.6 вытекает, что любой вектор $x \in R^3$ можно представить в виде линейной комбинации $x = \sum_{k=1}^{3} c_k e_k$. При этом коэффициенты c_k являются решением системы трех линейных алгебраических уравнений. Если исходное пространство имело бы размерность не 3, а значительно больше (или вообще бесконечномерное), то пришлось бы иметь дело с большой (или бесконечной) системой линейных уравнений. Поэтому особого внимания достоин случай, когда коэффициенты c_k можно вычислить проще. Для этого достаточно, чтобы система $\{e_k\}$ была ортогональной. Продемонстрируем на конкретных примерах.

Для начала рассмотрим классическую ортогональную систему в пространстве R^3:

$$\begin{cases} e_1 = (1, \quad 0, \quad 0) \\ e_2 = (0, \quad 1, \quad 0) \\ e_3 = (0, \quad 0, \quad 1) \end{cases}$$

Для произвольно выбранного вектора $x = (2, 4, 3)$ очевидно разложение

$$x = 2e_1 + 4e_2 + 3e_3.$$

Далее рассмотрим менее тривиальную ортогональную систему в пространстве R^3:

$$\begin{cases} e_1 = (2, \quad -1, \quad 4) \\ e_2 = (3, \quad 2, \quad -1) \\ e_3 = (1, \quad -2, \quad -1) \end{cases}$$

В этом случае коэффициенты разложения для вектора $x = (2,\ 4,\ 3)$ трудно вычислить устно. Из геометрических соображений ясно, что вектор x должен совпадать с суммой его ортогональных проекций на направления, задаваемые векторами e_k. Отсюда несложно вывести расчетную формулу для коэффициентов разложения:

$$c_k = \frac{(x, e_k)}{\|e_k\|^2}. \qquad (11.1)$$

Для $x = (2,\ 4,\ 3)$ вычисляем:

$$c_1 = \frac{(x, e_1)}{\|e_1\|^2} = \frac{4-4+12}{4+1+16} = \frac{4}{7}; \quad c_2 = \frac{(x, e_2)}{\|e_2\|^2} = \frac{6+8-3}{9+4+1} = \frac{11}{14};$$

$$c_3 = \frac{(x, e_3)}{\|e_3\|^2} = \frac{2-8-3}{1+4+1} = -\frac{3}{2}.$$

Получаем разложение

$$x = \frac{4}{7}e_1 + \frac{11}{14}e_2 - \frac{3}{2}e_3.$$

Если система $\{e_k\}$ не только ортогональная, но и ортонормированная, то формула (11.1) еще проще, поскольку $\|e_k\| = 1$. Приходим к выводу, что любой вектор $x \in R^3$ раскладывается по ортонормированной системе $\{e_1, e_2, e_3\} \subset R^3$ следующим образом:

$$x = \sum_{k=1}^{3} c_k e_k, \quad c_k = (x, e_k). \qquad (11.2)$$

Рассмотрим теперь только часть суммы (11.2), ограниченную первыми двумя слагаемыми. Равенство (11.2), вообще говоря, будет нарушено:

$$x \neq \sum_{k=1}^{2} c_k e_k, \quad c_k = (x, e_k).$$

Обозначим $S_2 = \sum_{k=1}^{2} c_k e_k$.

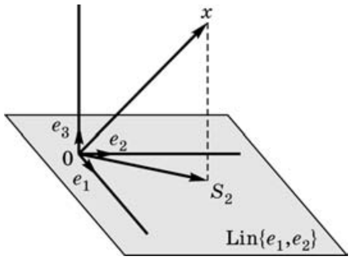

Рис. 12

Нетрудно понять, что частичная сумма S_2 дает ортогональную проекцию вектора x на линейное подпространство $\mathrm{Lin}\{e_1, e_2\}$, т. е. на двумерную плоскость (рис. 12). Кроме того, можно заметить, что среди векторов, лежащих в этой плоскости, вектор S_2 является ближайшим к вектору x.

Таким образом, в конечномерном пространстве существует удобный способ для разложения вектора по ортонормированной системе. Нечто подобное происходит и в бесконечномерном пространстве.

11.2. РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРА ПО ОРТОНОРМИРОВАННОЙ СИСТЕМЕ В БЕСКОНЕЧНОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ. СХОДИМОСТЬ РЯДА ФУРЬЕ

Попробуем организовать разложение вектора по ортонормированной системе в бесконечномерном пространстве по аналогии с конечномерным случаем. Для этого обобщим сумму (11.2) на случай бесконечного числа слагаемых и определим условия сходимости получившегося ряда.

Определение 11.1. Пусть X — бесконечномерное пространство со скалярным произведением, $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортонормированная система в пространстве X. Составим для элемента $x \in X$ бесконечную сумму

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k, \quad c_k = (x, e_k). \tag{11.3}$$

Она называется *рядом Фурье*, или *ортогональным рядом*, для элемента x по системе e_k, числа c_k — *коэффициентами Фурье*. Конечная сумма $S_n = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k$ называется

n-й частичной суммой ряда Фурье, или *частичной суммой порядка n*.

Замечание к определению 11.1. Довольно часто ряд Фурье определяют не для ортонормированной, а для ортогональной системы $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$. Тогда коэффициенты Фурье вычисляют не по формуле **(11.3)**, а по формуле **(11.1)**. В данном курсе придерживаемся ортонормированных систем исключительно ради упрощения теоретического анализа.

Теорема 11.1 (сходимость ряда Фурье). Пусть H — гильбертово пространство, $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ — полная ортонормированная система (ортонормированный базис), $x \in H$. Тогда ряд Фурье для элемента x сходится к x в пространстве H, и это обеспечивает законность разложения

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k, \quad c_k = (x, e_k).$$

Кроме того, выполняется *равенство Парсеваля*:

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2, \tag{11.4}$$

которое можно считать аналогом теоремы Пифагора для бесконечной суммы ортогональных элементов.

Доказательство. Согласно общему принципу под сходимостью ряда подразумевают сходимость последовательности его частичных сумм. Значит, требуется доказать, что

$$S_n \to x,$$

где S_n — частичная сумма ряда Фурье.

На протяжении всего доказательства многократно используем линейность скалярного произведения (см. определение 8.1) и определение ортонормированной системы (см. определение 9.2), в дальнейшем — без напоминания. Ссылаясь на теорему Пифагора, имеем в виду лемму 9.1. Разобьем доказательство на несколько шагов.

1 шаг.

Покажем, что

$$S_n - x \perp e_k, k \le n. \tag{11.5}$$

Действительно,

$$(S_n - x, e_k) = \left(\sum_{i=1}^{n} c_i e_i, e_k \right) - (x, e_k) = \sum_{i=1}^{n} c_i (e_i, e_k) - c_k = c_k - c_k = 0.$$

2 шаг.

Установим соотношение

$$\|S_n - x\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2. \tag{11.6}$$

Из (11.5) следует, что $S_n - x \perp S_n$. Используем теорему Пифагора для двух ортогональных элементов $S_n - x$ и S_n:

$$\|x\|^2 = \|S_n - x + S_n\|^2 = \|S_n - x\|^2 + \|S_n\|^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \|S_n - x\|^2 = \|x\|^2 - \|S_n\|^2.$$

Для вычисления $\|S_n\|^2$ вновь используем теорему Пифагора — теперь для линейной комбинации нескольких ортонормированных элементов:

$$\|S_n\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^{n} c_k e_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} c_k^2.$$

3 шаг.

Установим неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \le \|x\|^2, \tag{11.7}$$

именуемое *неравенством Бесселя*.

Из соотношения (11.6) вытекает $\|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \ge 0$. Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем неравенство (11.7).

4 шаг.

Перейдем к доказательству сходимости ряда Фурье.

Покажем, что последовательность частичных сумм ряда Фурье фундаментальна в пространстве H. Неравенство (11.7) обеспечивает сходимость числового ряда $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$, а тогда по теореме Пифагора и по свойству остатка сходящегося ряда имеем

$$\|S_n - S_m\|^2 = \left\| \sum_{k=m+1}^{n} c_k e_k \right\|^2 = \sum_{k=m+1}^{n} c_k^2 \to 0 \text{ при } m, n \to \infty.$$

В гильбертовом пространстве H любая фундаментальная последовательность сходится:

$$\exists S \in H : S_n \to S.$$

5 шаг.

Покажем, что она сходится именно к элементу x. Непрерывность скалярного произведения (см. лемму 8.1) позволяет перейти к пределу при $n \to \infty$ в соотношении (11.5):

$$S - x \perp \{e_k\}_{k=1}^{\infty}.$$

Поскольку система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ полная (см. определение 10.1), то отсюда следует $S - x = 0$, т. е. $S = x$. Таким образом, ряд Фурье для элемента x по системе e_k сходится к элементу x.

Равенство Парсеваля (11.4) получается за счет перехода к пределу при $n \to \infty$ в соотношении (11.6).

Теорема доказана.

Замечание к определению 11.1 и теореме 11.1. Понятие ряда Фурье можно ввести для любой ортонормированной (или ортогональной) системы $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ в пространстве со скалярным произведением, но его сходимость к соответствующему элементу x можно гарантировать только в гильбертовом пространстве и только при условии полноты этой системы.

Упражнение. Что изменится в доказательстве теоремы 11.1, если не предполагать полноту системы e_k? Что изменится, если пространство H не гильбертово?

Доказанное в теореме 11.1 равенство Парсеваля (11.4), в частности означает, что для любого элемента $x \in H$ его последовательность коэффициентов Фурье $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ принадлежит пространству l^2. Таким образом, каждый элемент гильбертова пространства H «кодируется» числовой последовательностью из l^2. Развивая эту идею, можно показать, что все наиболее типичные бесконечномерные гильбертовы пространства устроены по образу пространства l^2.

11.3. ПРИЛОЖЕНИЕ РЯДОВ ФУРЬЕ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ АППРОКСИМАЦИИ

Теория аппроксимации (теория приближений) — это раздел математики, изучающий вопрос о возможности приближенного представления одних математических объектов другими, как правило, более простой природы, а также вопросы об оценках вносимой при этом погрешности. Одна из основных задач теории аппроксимации заключается в том, чтобы для фиксированного элемента x найти в каком-то множестве ближайший элемент.

Следующие два определения и лемма сформулированы в предположении, что X — пространство со скалярным произведением, $\tilde{X} \subset X$ — линейное подпространство, $x \in X$.

Определение 11.2. Элемент $\tilde{x} \in \tilde{X}$ называется *элементом наилучшего приближения* для x в подпространстве $\tilde{X}$, если

$$\|x - \tilde{x}\| = \min_{y \in \tilde{X}} \|x - y\|.$$

Определение 11.3. Ортогональной проекцией вектора $x \in X$ на подпространство $\tilde{X}$ называется такой вектор $\tilde{x} \in \tilde{X}$, что $x - \tilde{x} \perp \tilde{X}$ (рис. 13).

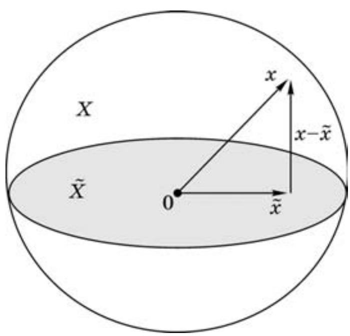

Рис. 13

Лемма 11.1. Ортогональная проекция вектора x на линейное подпространство $\tilde{X}$ является элементом наилучшего приближения для x в подпространстве $\tilde{X}$.

Доказательство. Пусть $\tilde{x} \in \tilde{X}$ — ортогональная проекция вектора x на линейное подпространство $\tilde{X}$. Тогда $x-\tilde{x}\perp y$ для всех $y\in\tilde{X}$. Поскольку $\tilde{X}$ — линейное подпространство, то $y-\tilde{x}\in\tilde{X}$, а значит, $x-\tilde{x}\perp y-\tilde{x}$. Тогда по теореме Пифагора (см. лемму 9.1)

$$\|x-y\|^2=\|x-\tilde{x}+y-\tilde{x}\|^2=\|x-\tilde{x}\|^2+\|y-\tilde{x}\|^2\geq\|x-\tilde{x}\|^2 .$$

Эта оценка расстояний верна для произвольного элемента $y\in\tilde{X}$, поэтому

$$\|x-\tilde{x}\|=\min_{y\in\tilde{X}}\|x-y\|.$$

Значит, $\tilde{x}$ является ближайшим элементом для x в подпространстве $\tilde{X}$.

Лемма доказана.

Покажем, как найти элемент наилучшего приближения в случае, когда линейное подпространство $\tilde{X}$ конечномерное. Рассмотрим в качестве $\tilde{X}$ n-мерное подпространство $X_n\subset X$, образованное первыми n элементами линейно независимой системы $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ (см. определения 6.3, 6.6):

$$X_n=\mathrm{Lin}\{e_1,\,e_2,\,\ldots,\,e_n\}. \tag{11.8}$$

Согласно лемме 11.1 для решения этой задачи достаточно построить ортогональную проекцию элемента x на подпространство X_n, которое состоит из элементов вида

$$x_n=\sum_{i=1}^{n}c_ie_i. \tag{11.9}$$

Благодаря линейности скалярного произведения условие $x-x_n\perp X_n$ равносильно требованию $(x-x_n,\ e_k)=0$, $k=1,\,2,\,\ldots,\,n$. Подставляя сюда выражение (11.9), получаем после преобразований систему n линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов $c_1,\,c_2,\,\ldots,\,c_n$:

$$\sum_{i=1}^{n}c_i(e_i,e_k)=(x,e_k),\ \ k=1,\ldots,n. \tag{11.10}$$

При увеличении числа элементов, образующих подпространство (11.8), все коэффициенты представления (11.9) необходимо вычислять заново, следовательно, решать линейную систему (11.10) все более высокого порядка.

Если элементы $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ не только линейно независимые, но и ортонормированные, то матрица системы (11.10) диагональная, искомые коэффициенты представления (11.9) совпадают с коэффициентами Фурье для элемента x по системе e_k. В этом случае ортогональной проекцией x на подпространство X_n (а заодно и элементом наилучшего приближения) является частичная сумма ряда Фурье:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k, \quad c_k = (x, e_k).$$

Преимущества ортогонального случая очевидны. Во-первых, вычислить частичную сумму ряда Фурье проще, чем решать линейную систему алгебраических уравнений (11.10). Во-вторых, при увеличении числа элементов, образующих подпространство (11.8), достаточно добавить следующие слагаемые к уже найденной частичной сумме меньшего порядка.

Поскольку элементы наилучшего приближения могут быть построены с помощью частичных сумм ряда Фурье, то в условиях теоремы 11.1 они будут сходиться к исходному элементу x.

Следствие теоремы 11.1. Пусть H — гильбертово пространство, $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ — полная линейно независимая система, $x \in H$. Рассмотрим X_n — конечномерные линейные подпространства (11.8), образованные первыми n элементами этой системы. Тогда для каждого n существует x_n — элемент наилучшего приближения для x в подпространстве X_n. Причем $x_n \to x$ при $n \to \infty$. Иными словами, элемент x можно сколь угодно точно аппроксимировать посредством системы e_k.

Замечание к следствию теоремы 11.1. Элементы x_n следует строить как ортогональную проекцию вектора x на подпространство X_n. Если предварительно провести ортогонализацию и нормировку системы e_k, то можно вычислять x_n как частичную сумму ряда Фурье. Построение элемента наилучшего приближения таким способом реализовано в сборнике задач (№ 36).

§ 12.
ЗАМЕЧАНИЯ О СХОДИМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ

В этом параграфе освещены некоторые особенности, присущие сходимости ряда Фурье.

Пусть ортонормированная система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ является полной в гильбертовом пространстве H, $x \in H$.

Приближенное равенство

$$x \approx S_n, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k, \quad c_k = (x, e_k) \qquad (12.1)$$

назовем аппроксимацией элемента x частичной суммой ряда Фурье в пространстве H.

По теореме 11.1 последовательность частичных сумм ряда Фурье сходится к x:

$$S_n \to x \text{ при } n \to \infty. \qquad (12.2)$$

Следовательно, с ростом n аппроксимация (12.1) становится сколь угодно точной. Демонстрации этого факта посвящены № 37–40 в сборнике задач.

12.1.
КАЧЕСТВО СХОДИМОСТИ РЯДА ФУРЬЕ

Чаще всего ряды Фурье используются в функциональном гильбертовом пространстве $L^{2,\xi}(a; b)$, где скалярное произведение оснащено весом ξ и вычисляется по формуле

$$(x, y)_{\xi} = \int_a^b x(t) y(t) \xi(t) dt.$$

В частности, при $\xi = 1$ получаем классическое пространство $L^2(a;\, b)$ со стандартным скалярным произведением. В качестве ортонормированного базиса $e_k(t)$ в подавляющем большинстве случаев используют тригонометрические системы, реже — полиномиальные (многочлены Лежандра, Чебышёва, Лагерра, Эрмита), в особых случаях — системы ступенчатых функций и др. Типы систем перечислены в порядке исторического старшинства. Описание систем представлено в § 10, пункт 10.2.

Рассмотрим функцию $x(t) \in L^{2,\xi}(a;\, b)$. Сходимость ряда Фурье (12.2) подразумевает следующее:

$$\|x - S_n\|_{L^{2,\xi}(a;b)} = \sqrt{\int_a^b (x(t) - S_n(t))^2 \xi(t)dt} \to 0. \quad (12.3)$$

Как отмечено в § 3, 8, такую сходимость называют среднеквадратичной. Это естественный тип сходимости для ряда Фурье. Проблема в том, что для задач прикладной математики бывает важно использовать аппроксимацию (12.1) как приближенное равенство в каждой отдельно взятой точке $t \in (a;\, b)$:

$$x(t) \approx S_n(t),$$

а это не обеспечивается среднеквадратичной сходимостью (12.3). Поэтому гораздо бóльшую ценность представляет точечная сходимость:

$$S_n(t) \to x(t), \quad t \in (a;\, b). \quad (12.4)$$

Еще более привлекательна равномерная сходимость, т. е. сходимость в пространстве $C[a;\, b]$:

$$\|x - S_n\|_{C[a;b]} = \max_{t \in [a;b]} |x(t) - S_n(t)| \to 0. \quad (12.5)$$

При наличии таких сходимостей можно говорить о точечной или о равномерной аппроксимации для функции $x(t)$.

Опишем в общих чертах условия, обеспечивающие (12.4) и (12.5).

Начнем с обсуждения условий сходимости в отдельно взятой точке $t \in (a; b)$. Из курса математического анализа эти условия известны для тригонометрического ряда Фурье. Допустим, функция $x(t)$ кусочно-гладкая (см. это понятие в § 1). Тогда тригонометрический ряд Фурье сходится к функции $x(t)$ в точках ее непрерывности. Если же график функции имеет скачок в точке t, то тригонометрический ряд Фурье сходится в этой точке к полусумме левостороннего и правостороннего пределов $x(t)$. Оказывается, то же самое верно и для полиномиальных рядов Фурье. Проиллюстрируем этот факт на примере аппроксимации ступенчатой функции

$$x(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0; \\ -1, & t < 0 \end{cases}$$

многочленами Лежандра.

Возьмем достаточно большой порядок n частичной суммы ряда Фурье, например, $S_{20}(t)$. По графикам функций $x(t)$ и $S_{20}(t)$ видно, что в точке $t = 0$ ряд Фурье сходится к значению 0, а не к значению $x(0) = 1$ (рис. 14).

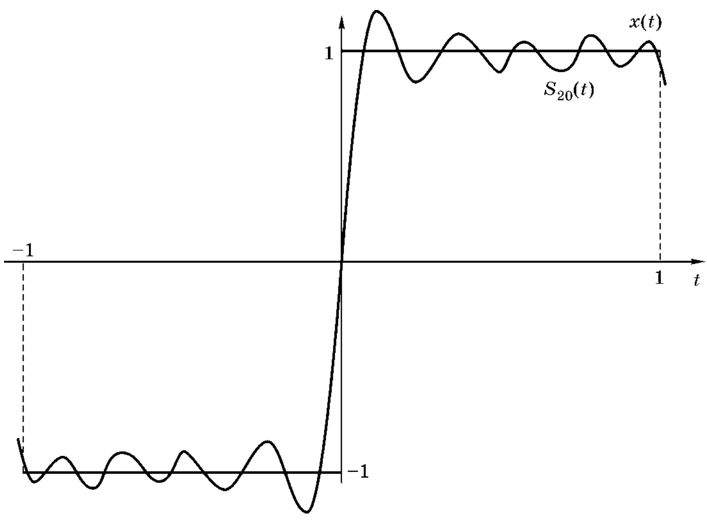

Рис. 14

Кроме того, наблюдается так называемый *эффект Гиббса*: график частичной суммы $S_{20}(t)$ имеет характерные всплески в окрестности точки разрыва функции $x(t)$, частота которых возрастает при увеличении порядка n, но амплитуда не уменьшается.

Таким образом, если функция $x(t)$ не обладает непрерывностью, то, выбрав тригонометрический или полиномиальный базис, можно рассчитывать только на медленную среднеквадратичную сходимость ряда Фурье. Для аппроксимации разрывных функций лучше использовать ортогональные системы ступенчатых функций, например систему Хаара (см. § 10, пункт 10.2). На этом пути удается избежать эффекта Гиббса. Ступенчатые функции, будучи сами разрывными, лучше справляются со скачками функции $x(t)$, чем непрерывные синусы, косинусы и многочлены.

На уровне грубой прикидки условия для равномерной сходимости (12.5) выглядят следующим образом:

1. Для равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье требуется, чтобы на промежутке $[a; b]$ функция $x(t)$ была кусочно-гладкой, непрерывной и имела непрерывное периодическое продолжение с промежутка $[a; b]$ на числовую прямую (последнее обеспечено при $x(a) = x(b)$).

2. Условия для равномерной сходимости полиномиального ряда Фурье зависят от конкретного типа полиномиального базиса. Часто бывает достаточно, чтобы на промежутке $[a; b]$ функция $x(t)$ была непрерывной и кусочно-гладкой (например, в случае многочленов Лежандра и Чебышёва I рода).

3. Для равномерной сходимости ряда Фурье по системе ступенчатых функций Хаара достаточно, чтобы функция $x(t)$ была непрерывной на промежутке $[a; b]$.

В целом, скорость сходимости ряда Фурье напрямую зависит от качества функции $x(t)$: чем выше порядок гладкости функции $x(t)$, тем выше скорость сходимости ряда Фурье. Подробнее о качестве сходимости тригонометрических рядов Фурье можно прочитать в [2], [5], полиномиальных — в [9].

12.2. СРАВНЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ И ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ

Опишем одно характерное свойство тригонометрических базисов (см. § 10, пункт 10.2). Рассмотрим задачу о разложении бесконечно гладкой функции $x(t) = e^t + e^{-t}$ в тригонометрический ряд Фурье на промежутке $(-1; 1)$. Поскольку тригонометрический базис состоит из периодических функций, то разложению подвергается периодическое продолжение функции $x(t)$ с промежутка $(-1; 1)$ на числовую прямую. Поэтому скорость сходимости такого ряда Фурье зависит не только от гладкости функции $x(t)$ на промежутке $(-1; 1)$, но еще и от гладкости ее периодического продолжения.

На рисунке 15 представлен график функции $x(t)$ на этом промежутке, график ее периодического продолжения и график частичной суммы тригонометрического ряда Фурье 3-го порядка $S_3(t)$.

По графикам видно, что, несмотря на бесконечную гладкость исходной функции $x(t)$, гладкость ее периодического продолжения нарушается на концах промежутка $(-1; 1)$, имеются изломы. Это обстоятельство замедляет сходимость тригонометрического ряда Фурье на концах промежутка аппроксимации и в целом существенно понижает скорость равномерной сходимости.

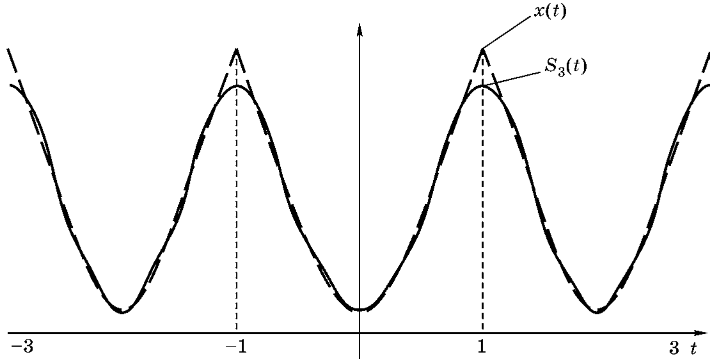

Рис. 15

По этой причине тригонометрический базис предпочитают использовать для аппроксимации функций, которые изначально являются гладкими периодическими и потому не нуждаются в периодическом продолжении, чью гладкость трудно контролировать. Для непериодических функций лучше подходят полиномиальные базисы, поскольку скорость их сходимости зависит от гладкости функции $x(t)$ только на промежутке аппроксимации. Например, для функции $x(t) = e^t + e^{-t}$ ряд Фурье по многочленам Лежандра или Чебышёва сходится очень быстро. Настолько быстро, что аппроксимация 3-го порядка визуально неотличима от графика функции $x(t)$.

12.3. СРАВНЕНИЕ РЯДА ФУРЬЕ И РЯДА ТЕЙЛОРА

В математике имеется два самых знаменитых способа для представления функции в виде бесконечной суммы: разложение в степенной ряд, называемый рядом Тейлора, и разложение в ортогональный ряд, называемый рядом Фурье.

Не претендуя на строгость и полноту сравнительного анализа, опишем несколько наблюдений.

Допустим, функция $x(t)$ раскладывается в ряд Тейлора в точке t_0:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (t - t_0)^k, \quad a_k = \frac{x^{(k)}(t_0)}{k!}, \quad t \in (t_0 - r;\ t_0 + r). \quad (12.6)$$

Из теории степенных рядов известно, что ряд Тейлора сходится к функции $x(t)$ в некоторой симметричной окрестности точки t_0. Причем для любого отрезка $[a; b] \subset (t_0 - r; t_0 + r)$ ряд (12.6) сходится равномерно вместе со всеми своими производными. Отсюда, в частности, следует, что $x \in C^{\infty}[a; b]$. Таким образом, для разложения (12.6) годятся функции только очень высокого качества, даже бесконечной гладкости не достаточно (подробнее о свойствах степенных рядов можно узнать в [5]).

Теперь рассмотрим принцип разложения функции $x(t)$ в ряд Фурье по ортонормированному базису $e_k(t)$ в гильбертовом пространстве $L^{2,\xi}(a;\,b)$:

$$x(t)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k e_k(t),\quad c_k=\int_a^b \xi(t)x(t)e_k(t)dt. \tag{12.7}$$

Теорема 11.1 гарантирует, что такое разложение доступно для любой функции $x\in L^{2,\xi}(a;\,b)$, даже для разрывной. При этом, однако, придется смириться со среднеквадратичной сходимостью ряда (12.7), которая является слабой.

Таким образом, сфера приложения у ряда Фурье гораздо шире, чем у ряда Тейлора, однако качество сходимости может быть ниже.

На самом деле механизмы разложений в ряд Тейлора и в ряд Фурье совершенно различны.

В основу конструкции ряда Тейлора положен процесс дифференцирования, причем в отдельно взятой точке. Ряд Тейлора (12.6) полностью определяется значениями функции $x(t)$ и ее производных в точке t_0. Идея заключается в том, чтобы по этой информации предсказать поведение функции $x(t)$ в окрестности точки t_0. Естественно, прогноз получается тем более точным, чем ближе t к t_0. Иными словами, скорость сходимости ряда Тейлора возрастает при приближении к точке t_0 и уменьшается при удалении от нее, причем подчас ухудшение весьма ощутимо.

В основу конструкции ряда Фурье (12.7) положен процесс интегрирования, т. е. некая суммарная информация о поведении функции на промежутке $(a;\,b)$. Это означает, что для достаточно гладких функций $x(t)$ ряд Фурье, в отличие от ряда Тейлора, имеет одинаково высокую скорость сходимости на всем промежутке аппроксимации. (Эта закономерность отражена в задании № 39 сборника задач.) Но у такого подхода есть и обратная сторона. Если функция $x(t)$ имеет какой-то локальный изъян, например, скачок или излом, то это отражается на значениях всех коэффициентов Фурье, и оказывает, вообще говоря, фатальное влияние на качество и скорость сходимости ряда (12.7) на промежутке (a; b). Так происходит в случае тригонометрических и полиномиальных базисов (см. комментарии к рис. 14, 15). В последнее время для преодоления глобальной чувствительности ряда Фурье построены специальные базисы, называемые вейвлетами (*от англ.* wavelet — локальный всплеск). К простейшим вейвлетам относится система ступенчатых функций Хаара (см. § 10, пункт 10.2).

МОДУЛЬ III

ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В этом модуле продолжается изучение операторов, начатое в § 4, 5 данного пособия. Напомним, что термином «оператор» в функциональном анализе называют любое отображение множества X в множество Y. Простейшими частными случаями операторов являются числовые функции одной вещественной переменной, числовые функции нескольких вещественных переменных и вектор-функции нескольких вещественных переменных. Эти операторы преобразуют число в число, вектор в число и вектор в вектор соответственно. Но кроме них имеется богатое разнообразие операторов, преобразующих функцию в функцию.

В данном модуле запись $A\colon X \to Y$ означает, что оператор A определен на некотором подмножестве $D_A \subset X$ и каждому элементу $x \in D_A$ сопоставляет единственное значение $y \in Y$. В частности, множества X и Y могут совпадать, т. е. возможна ситуация $A\colon X \to X$. Значение оператора A на элементе x обозначаем символом $A[x]$. Множество D_A называется *областью определения*, или *областью задания* оператора A. Если X — нормированное пространство, то считаем, что множество $D_A \subset X$ снабжено нормой пространства X. Обычно либо само множество D_A, либо его замыкание $\bar{D}_A$ совпадает с пространством X. Если множество D_A не указано, то считаем, что $D_A = X$. Множество $R_A = \{A[x], x \in D_A\}$ называется *множеством значений* оператора A, $R_A \subset Y$.

Среди всевозможных операторов выделяется класс линейных. Понятие линейного оператора (отображения) играет ключевую роль в математике. Для тех, кто пользуется математическими инструментами, термин «линейный» ассоциируется с простотой, удобством в обращении и наличием подробно разработанных инструкций. Действительно, к настоящему времени теория линейных дифференциальных и интегральных операторов, а следовательно, и уравнений, достаточно хорошо изучена и приспособлена к решению прикладных задач. Проблемы нелинейной теории, наоборот, еще далеко не исчерпаны, некоторые из них снимаются посредством линеаризации, т. е. перехода к близкой по содержанию линейной задаче.

Линейный оператор можно считать обобщением линейной числовой функции одной вещественной переменной, точнее функции вида $y = kx$. Линейные операторы, действующие в конечномерных пространствах (векторфункции), задаются с помощью умножения на числовую матрицу, обладают непрерывностью и являются предметом изучения линейной алгебры. Линейные операторы, действующие в функциональных, преимущественно бесконечномерных, пространствах, не всегда непрерывны. Теория таких операторов занимает центральное место в функциональном анализе.

§ 13.
ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

13.1. ПОНЯТИЕ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА. ПРИМЕРЫ

Определение 13.1. Пусть X, Y — линейные пространства. Оператор A: $X \to Y$ называется *линейным*, если его область определения $D_A \subset X$ — линейное подпространство и для любых x_1, $x_2 \in D_A$ и α, $\beta \in R$

$$A[\alpha x_1 + \beta x_2] = \alpha A[x_1] + \beta A[x_2]. \qquad (13.1)$$

Соотношение (13.1) эквивалентно двум более простым соотношениям, проверять которые в отдельных случаях удобнее:

$$\begin{gathered} A[x_1 + x_2] = A[x_1] + A[x_2]; \\ A[\alpha x] = \alpha A[x]. \end{gathered} \qquad (13.2)$$

Замечание к определению 13.1. Любой линейный оператор отображает нулевой элемент пространства X в нулевой элемент пространства Y. Действительно, поскольку D_A — линейное подпространство, то оно содержит нулевой элемент, а из соотношения (13.2) следует

$$A[0] = A[\alpha 0] = \alpha A[0] \Rightarrow A[0] = 0.$$

Приведем простейшие примеры линейных операторов и нелинейных.

1. Пусть $k \in R$ — произвольное число. Рассмотрим оператор

$$A\colon R \to R, \quad A[x] = kx.$$

Это линейный оператор, причем такой формулой исчерпываются все линейные числовые функции одной вещественной переменной.

2. Пусть $\mathrm{A} \in M_{m\times n}$ — произвольная числовая матрица размера $m\times n$. Рассмотрим оператор, который сопоставляет каждому вектору $x \in R^n$ вектор $y \in R^m$, полученный умножением матрицы A на вектор x:

$$A\colon R^n \to R^m, \quad A[x] = \mathrm{A}x.$$

Это линейный оператор, причем любой линейный оператор, действующий в конечномерных пространствах, так или иначе сводится к оператору умножения на числовую матрицу.

3. Пусть X — линейное пространство. Рассмотрим *тождественный оператор*, который по традиции обозначают буквой I:

$$I\colon X \to X, \quad I[x] = x.$$

Это линейный оператор.

4. Пусть X, Y — линейные пространства. Рассмотрим *нулевой оператор*, который все элементы пространства X отображает в нулевой элемент пространства Y:

$$A\colon X \to Y, \quad A[x] = 0.$$

Этот оператор также является линейным.

5. Рассмотрим три различных оператора, действующих в одном из функциональных пространств. Пусть $x(t)$ — числовая функция одной вещественной переменной.

Положим

$$A[x] = x(t^2);$$
$$B[x] = x^2(t);$$
$$C[x] = x(t) + 1.$$

Например, для функции $x(t) = \sin t$ получаем:

$$A[x] = \sin t^2, \quad B[x] = \sin^2 t, \quad C[x] = \sin t + 1.$$

Оператор A производит замену переменной t на t^2. Оператор B возводит функцию $x(t)$ в квадрат. Оператор C сдвигает график функции $x(t)$ на единицу вверх.

Оператор замены переменной линейный. Проверим для оператора A соотношения линейности в форме (13.2):

$$A[x_1 + x_2] = (x_1 + x_2)(t^2) = x_1(t^2) + x_2(t^2) = A[x_1] + A[x_2];$$
$$A[\alpha x] = (\alpha x)(t^2) = \alpha x(t^2) = \alpha A[x].$$

Оператор возведения в степень и оператор сдвига (параллельного переноса) не являются линейными. Для B и C не выполняются соотношения (13.2), в частности второе:

$$B[\alpha x] = \alpha^2 x^2(t) \neq \alpha x^2(t) = \alpha B[x];$$
$$C[\alpha x] = \alpha x_1(t) + 1 \neq \alpha(x(t) + 1) = \alpha C[x].$$

Другие примеры линейных и нелинейных операторов представлены в сборнике задач (№ 41).

13.2. ЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ФРЕДГОЛЬМА И ВОЛЬТЕРРЫ

Среди линейных интегральных операторов выделяются два класса:

1) $A[x] = \int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds$ — оператор *Фредгольма*;

2) $A[x] = \int\limits_a^t K(t,s)x(s)ds$ — оператор *Вольтерры*.

Операторы названы в честь двух математиков: Эрик Ивар Фредгольм — шведский математик начала XX в., Вито Вольтерра — итальянский математик конца XIX — начала XX вв.

Функция $K(t, s)$ называется *ядром* интегрального оператора. Оператор Вольтерры можно считать частным случаем оператора Фредгольма с ядром

$$\tilde{K}(t,s) = \begin{cases} K(t,s), & a \le s \le t; \\ 0, & t < s \le b. \end{cases}$$

Как правило, предполагают, что у оператора Фредгольма ядро непрерывно в квадрате $[a; b] \times [a; b]$, у оператора Вольтерры — в треугольной области $\{(t, s)\colon a \le s \le t \le b\}$.

Обычно рассматривают действия этих операторов в банаховом или в гильбертовом пространстве:

$$A\colon C[a;\,b] \to C[a;\,b] \quad \text{или} \quad A\colon L^2(a;\,b) \to L^2(a;\,b).$$

В обеих ситуациях область определения совпадает со всем пространством. Линейность операторов Фредгольма и Вольтерры вытекает из линейных свойств интеграла.

13.3. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ, ОПЕРАТОРЫ ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ

Рассмотрим общий вид линейного дифференциального оператора порядка n:

$$A\colon C^n[a;\,b] \to C[a;\,b];$$
$$A[x] = p_n x^{(n)} + p_{n-1} x^{(n-1)} + \ldots + p_1 x' + p_0 x.$$

Все коэффициенты $p_k = p_k(t)$ предполагаем непрерывными. Линейность оператора A вытекает из линейных свойств дифференцирования. В данном курсе уделим особое внимание линейному дифференциальному оператору второго порядка, который имеет вид:

$$A[x] = p_2 x'' + p_1 x' + p_0 x. \tag{13.3}$$

Известным представителем (13.3) является *оператор Штурма — Лиувилля*:

$$A[x] = -(px')' + qx = -px'' - p'x' + qx,$$

где $p = p(t)$ — непрерывно дифференцируемая функция; $q = q(t)$ — непрерывная функция. Этот оператор получил название в честь двух ученых — Шарля Франсуа Штурма и Жозефа Лиувилля, французских математиков XIX в. Среди линейных дифференциальных операторов второго порядка оператор Штурма — Лиувилля выделяется своей специальной формой $A[x] = -(px')' + qx$ и особыми свойствами, которые будут раскрыты в следующих параграфах.

Пространства, в которых действуют дифференциальные операторы, могут быть разными. Для дифференциального оператора второго порядка наиболее естественна ситуация

$$A\colon C^2[a;\, b] \to C[a;\, b].$$

В этом случае оператор можно определить на всем пространстве $C^2[a;\, b]$. Но пространства $C^2[a;\, b]$, $C[a;\, b]$, к сожалению, не гильбертовы, это ограничивает возможности конструктивной теории. Поэтому часто приходится рассматривать действие дифференциального оператора (13.3) в гильбертовом пространстве квадратично суммируемых функций:

$$A\colon L^2(a;\, b) \to L^2(a;\, b).$$

Ясно, что оператор (13.3) не может быть определен на всем пространстве $L^2(a;\, b)$, поскольку для составления выражения (13.3) функция $x(t)$ должна быть дважды дифференцируема. Кроме того, в теории дифференциальных операторов и уравнений принято закреплять функцию $x(t)$ в начале промежутка $(a;\, b)$ (задавать начальные условия) или на обоих концах промежутка $(a;\, b)$ (задавать граничные условия). Чтобы область определения линейного оператора была линейным подпространством, эти условия должны быть однородными, иначе говоря, нулевыми. Таким образом, в качестве области определения оператора (13.3) берут одно из двух линейных подпространств в $L^2(a;\, b)$:

1) D_A^I — множество дважды непрерывно дифференцируемых функций $x(t)$, удовлетворяющих начальным условиям $x(a) = x'(a) = 0$;

2) D_A^{II} — множество дважды непрерывно дифференцируемых функций $x(t)$, удовлетворяющих граничным условиям $\alpha_1 x(a) + \alpha_2 x'(a) = \beta_1 x(b) + \beta_2 x'(b) = 0$.

Во втором случае полагают, что хотя бы один из числовых коэффициентов α_1 и α_2 не равен нулю, то же самое для β_1 и β_2. Простейший случай D_A^{II} соответствует условиям $x(a) = x(b) = 0$.

§ 14.
ОБРАТНЫЙ ОПЕРАТОР

Из курса линейной алгебры известно понятие обратной матрицы. Пусть $\mathrm{A} \in M_{n\times n}$ — квадратная числовая матрица, $x, y \in R^n$. Построение обратной матрицы равносильно решению системы линейных алгебраических уравнений:

$$\mathrm{A}x = y \Leftrightarrow x = \mathrm{A}^{-1}y.$$

С помощью умножения на числовую матрицу задаются линейные операторы в конечномерных пространствах, т. е. система линейных алгебраических уравнений $\mathrm{A}x = y$ является частным случаем операторных уравнений:

$$A[x] = y,$$

где y — известный элемент; x — искомый элемент; A — линейный или нелинейный оператор.

В виде операторных уравнений записываются многие задачи фундаментальной и прикладной математики. Как правило, действие происходит в бесконечномерных функциональных пространствах, оператор A дифференциальный или интегральный. Соответственно, надо решить дифференциальное или интегральное уравнение. Классические вопросы о существовании и единственности решения для уравнения $A[x] = y$ эквивалентны вопросу о существовании обратного оператора.

14.1. ПОНЯТИЕ ОБРАТИМОСТИ. КРИТЕРИЙ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Определение 14.1. Пусть X, Y — множества. Оператор $A\colon X \to Y$ с областью определения $D_A \subset X$ и множеством значений $R_A \subset Y$ называется *обратимым*, если для любого $y \in R_A$ уравнение $A[x] = y$ имеет единственное решение

$x \in D_A$. Оператор $A^{-1}: Y \to X$, реализующий это решение, называется *обратным* к оператору A. Решение уравнения $A[x] = y$ выражается формулой $x = A^{-1}[y]$.

Ясно, что для обратного оператора множество R_A является областью определения, D_A — множеством значений:

$$R_A = D_{A^{-1}}, \quad R_{A^{-1}} = D_A \quad \text{(рис. 16).}$$

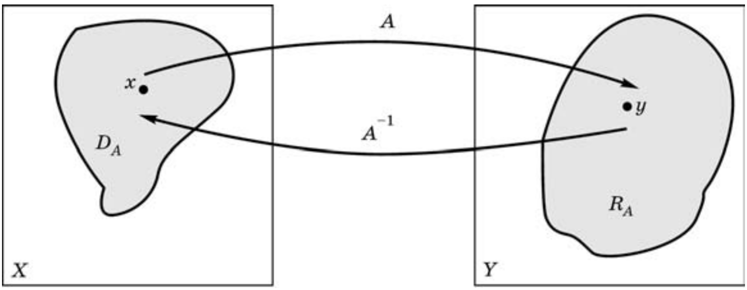

Рис. 16

Обратный оператор $A^{-1}: Y \to X$ полностью определяется двумя свойствами:

$$A^{-1}[A[x]] = x \text{ для любого } x \in D_A;$$
$$A[A^{-1}[y]] = y \text{ для любого } y \in R_A.$$

Замечание к определению 14.1. Если $y \in R_A$, то уравнение $A[x] = y$ заведомо имеет решения $x \in D_A$, поэтому вопрос обратимости заостряется на единственности решения. Следующая теорема показывает, что в случае линейного оператора достаточно проверить единственность решения для однородного уравнения $A[x] = 0$.

Теорема 14.1 (критерий обратимости для линейных операторов). Пусть X, Y — линейные пространства, $A: X \to Y$ — линейный оператор с областью определения $D_A \subset X$. Оператор A обратим тогда и только тогда, когда уравнение $A[x] = 0$ имеет только нулевое решение в области D_A.

Доказательство. Заметим сначала, что среди решений уравнения $A[x] = 0$ всегда есть $x = 0$ (см. замечание к определению 13.1). Значит, вопрос в том, имеет ли это уравнение другие решения.

Допустим, линейный оператор A обратим. Тогда по определению 14.1 уравнение $A[x] = 0$ имеет единственное решение, а именно $x = 0$.

Допустим, уравнение $A[x] = 0$ имеет только нулевое решение в области D_A. Докажем, что тогда для любого элемента $y \in R_A$ уравнение $A[x] = y$ имеет единственное решение $x \in D_A$. Если предположить, что существует два решения уравнения $A[x] = y$, то благодаря линейности оператора A легко показать, что они совпадают:

$$A[x_1] = y, \quad A[x_2] = y;$$
$$0 = A[x_1] - A[x_2] = A[x_1 - x_2] \Rightarrow x_1 - x_2 = 0.$$

Следовательно, по определению 14.1 оператор A обратим.

Лемма доказана.

Упражнение. Доказать, что для линейного оператора A обратный оператор A^{-1} тоже является линейным.

Приведем примеры построения обратного оператора.

1. Рассмотрим оператор замены переменной:

$$A: C[0; 4] \to C[0; 2], \quad A[x] = x(t^2).$$

Функция t^2 взаимно-однозначно отображает промежуток $[0; 2]$ в $[0; 4]$. Поэтому, очевидно, оператор A можно определить на всем пространстве $C[0; 4]$, и тогда его множество значений совпадает с пространством $C[0; 2]$.

Оператор A линейный, поэтому к нему применим критерий обратимости из теоремы 14.1. Уравнение $A[x] = 0$ имеет только нулевое решение:

$$x(t^2) = 0 \text{ для любого } t \in [0; 2],$$
$$\text{только если } x(t) = 0 \text{ для любого } t \in [0; 4].$$

Оператор A обратим. Чтобы получить формулу для обратного оператора, надо решить уравнение:

$$A[x] = y \quad \Leftrightarrow \quad x(t^2) = y(t) \quad \Leftrightarrow \quad x(t) = y(\sqrt{t}).$$

Итак, построили обратный оператор

$$A^{-1}: C[0;2] \to C[0;4], \quad A^{-1}[y] = y(\sqrt{t}).$$

2. Рассмотрим простейший интегральный оператор Вольтерры:

$$A: C[0;1] \to C[0;1], \quad A[x] = \int_0^t x(s)ds.$$

Этот оператор можно определить для любой непрерывной функции, поэтому $D_A = C[0;\,1]$. Оператор A линейный, значит, к нему применим критерий обратимости из теоремы 14.1. Уравнение $A[x] = 0$ имеет только нулевое решение:

$$\int_0^t x(s)ds = 0 \text{ для любого } t \in [0;1],$$

$$\text{только если } x(t) = 0 \text{ для любого } t \in [0;1].$$

Оператор A обратим. Область определения обратного оператора совпадает с множеством значений оператора A. Рассмотрим уравнение $A[x] = y$ с целью определить множество значений оператора A и построить обратный оператор:

$$A[x] = y \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^t x(s)ds = y(t) \quad \Leftrightarrow \quad x(t) = y'(t),\ y(0) = 0.$$

Поскольку $x(t)$ непрерывная функция, то $y'(t)$ тоже непрерывная. Отсюда делаем вывод, что значениями оператора A могут быть непрерывно дифференцируемые функции $y(t)$, удовлетворяющие условию $y(0) = 0$. Таким образом, построили обратный оператор:

$$A^{-1}: C[0;\,1] \to C[0;\,1], \quad A^{-1}[y] = y'(t),$$

где $D_{A^{-1}}$ — линейное подпространство, состоящее из непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющих условию $y(0) = 0$.

Как видно, простейший оператор дифференцирования является обратным к простейшему интегральному оператору Вольтерры.

Другие примеры построения обратного оператора смотрите в сборнике задач (№ 42).

14.2. ОБРАТИМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА С НАЧАЛЬНЫМИ И ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Рассмотрим линейный дифференциальный оператор второго порядка:

$$A\colon C^2[a;b] \to C[a;b], \quad A[x] = p_2 x'' + p_1 x' + p_0 x.$$

Коэффициенты $p_2(t)$, $p_1(t)$, $p_0(t)$ предполагаем непрерывными функциями. В качестве области определения рассмотрим два наиболее типичных линейных подпространства, описанных ранее в § 13, пункт 13.3:

1) D_A^I — множество дважды непрерывно дифференцируемых функций $x(t)$, удовлетворяющих начальным условиям $x(a) = x'(a) = 0$;

2) D_A^{II} — множество дважды непрерывно дифференцируемых функций $x(t)$, удовлетворяющих граничным условиям $\alpha_1 x(a) + \alpha_2 x'(a) = \beta_1 x(b) + \beta_2 x'(b) = 0$.

В зависимости от области определения оператора A уравнение $A[x] = y$ приводит к одной из двух задач:

$$A[x] = y,\ x \in D_A^I \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} p_2 x'' + p_1 x' + p_0 x = y; \\ x(a) = x'(a) = 0. \end{cases} \tag{14.1}$$

$$A[x] = y,\ x \in D_A^{II} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} p_2 x'' + p_1 x' + p_0 x = y; \\ (\alpha_1 x + \alpha_2 x')\big|_a = (\beta_1 x + \beta_2 x')\big|_b = 0. \end{cases} \tag{14.2}$$

Задача (14.1) является *начальной задачей*, или *задачей Коши*, для дифференциального уравнения.

Задача (14.2) является *краевой задачей*, и если граничные условия имеют вид $x(a) = x(b) = 0$, то — *задачей Дирихле*.

Предположим, что старший коэффициент линейного дифференциального оператора не обращается в ноль:

$$p_2(t) \neq 0 \quad \text{на} \quad [a;b]. \tag{14.3}$$

Из теории линейных дифференциальных уравнений известно, что при этом условии решение начальной задачи

(14.1) существует и единственно для любой правой части $y \in C[a; b]$. Следовательно, существует обратный оператор

$$A^{-1}: C[a; b] \to C^2[a; b]$$

с областью определения $C[a; b]$. При этом A^{-1} можно построить в виде интегрального оператора Вольтерры с ядром специального типа:

$$A^{-1}[y] = \int_a^t K(t,s)y(s)ds, \quad K(t,s) = K(t+a-s).$$

Для краевой задачи (14.2) при том же условии (14.3) решение не всегда существует и не всегда оно единственно. Но известно, что если решение единственно, то оно существует для любой правой части $y \in C[a; b]$. Это значит, что если оператор A обратим, то обратный оператор

$$A^{-1}: C[a; b] \to C^2[a; b]$$

определен сразу на всем пространстве $C[a; b]$. Согласно теореме 14.1 обратимость оператора A равносильна тому, что задача (14.2) при $y = 0$ имеет только нулевое решение. При этом A^{-1} можно построить в виде интегрального оператора Фредгольма с ядром специального типа:

$$A^{-1}[y] = \int_a^b K(t,s)y(s)ds, \quad K(t,s) = w(t) \cdot \begin{cases} u(t)v(s), & a \le s \le t; \\ u(s)v(t), & t < s \le b. \end{cases}$$

В обоих случаях ядро соответствующего интегрального оператора, который является обратным к дифференциальному, называют *функцией Грина*.

Подробнее о решении задач (14.1), (14.2) смотрите в [10].

Построению обратного оператора в ситуациях (14.1), (14.2) посвящен № 43 в сборнике задач.

§ 15.

СОБСТВЕННЫЕ ЧИСЛА И СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Из курса линейной алгебры известны понятия собственного числа и собственного вектора для квадратной матрицы $\mathrm{A} \in M_{n\times n}$. Собственными числами λ матрицы A называются корни характеристического уравнения $\det(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}) = 0$, где I — единичная матрица. Если определитель матрицы $\mathrm{A} - \lambda\mathrm{I}$ равен нулю, то система линейных алгебраических уравнений $\mathrm{A}x = \lambda x$ имеет, кроме тривиального решения $x = 0$, и другие решения. Они называются собственными векторами матрицы A, соответствующими собственному числу λ. С геометрической точки зрения при умножении на матрицу вектор поворачивается и растягивается. Собственные векторы замечательны тем, что при умножении на матрицу A они просто растягиваются с коэффициентом λ.

Умножение на квадратную матрицу — это действие, определяющее линейный оператор в конечномерном пространстве:

$$A\colon R^n \to R^n, \quad A[x] = \mathrm{A}x.$$

Понятия собственных чисел и собственных векторов можно отнести как к матрице A, так и к оператору A. В данном параграфе эти понятия сформулированы для произвольного линейного оператора в произвольном, вообще говоря, бесконечномерном линейном пространстве.

15.1. ПОНЯТИЕ СОБСТВЕННОГО ЧИСЛА И СОБСТВЕННОГО ВЕКТОРА

Определение 15.1. Пусть X — линейное пространство, A: $X \to X$ — линейный оператор с областью определения D_A. Число $\lambda \in R$ называется *собственным числом* оператора A, если уравнение $A[x] = \lambda x$ имеет не только нулевое решение в области D_A. При этом ненулевые решения x уравнения $A[x] = \lambda x$ называются *собственными векторами* оператора A, соответствующими собственному значению λ.

Замечание к определению 15.1. Независимо от значения λ среди решений уравнения $A[x] = \lambda x$ всегда есть $x = 0$ (см. замечание к определению 13.1). Таким образом, определение 15.1 выделяет ситуацию, когда уравнение $A[x] = \lambda x$ имеет другие решения, кроме нуля.

Легко проверить, что множество собственных векторов, соответствующих одному и тому же собственному числу λ, дополненное нулевым вектором, образует линейное подпространство в X, которое называется *собственным подпространством*.

Как уже было отмечено в предисловии к данному параграфу, в конечномерном случае A: $R^n \to R^n$ собственные числа и собственные векторы оператора — это собственные числа и собственные векторы матрицы, которая задает оператор. Если оператор A: $X \to X$ действует в бесконечномерном функциональном пространстве X, то собственные векторы часто называют *собственными функциями*. Поиск собственных чисел и собственных функций для различных линейных операторов представлен в сборнике задач (№ 44).

Рассмотрим оператор вида $A - \lambda I$, где $\lambda \in R$, I — тождественный оператор. Теорема 14.1 позволяет по-другому определить собственные числа: число λ является собственным числом для оператора A тогда и только тогда, когда оператор $A - \lambda I$ не обратим. В частности, оператор A обратим тогда и только тогда, когда ноль не является его собственным числом. Кроме того, у операторов A и A^{-1} собственные числа обратно пропорциональны, а собственные векторы совпадают:

$$A[x] = \lambda x \Rightarrow A^{-1}[A[x]] = A^{-1}[\lambda x] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = \lambda A^{-1}[x] \Rightarrow A^{-1}[x] = \frac{1}{\lambda} x.$$

Множество собственных чисел называется *дискретным спектром* оператора A. Существуют и другие виды спектра (непрерывный, остаточный), связанные с какими-либо изъянами в обратимости оператора $A - \lambda I$ (см. [1], [2]).

В трактовке собственных чисел и собственных векторов имеется двойственность: нельзя точно сказать, это «вредные» или «полезные» явления для линейного оператора. С одной стороны, вредные, потому что связаны с недостатками в обратимости оператора $A - \lambda I$, т. е. в разрешимости операторных уравнений. Но с другой стороны, собственные векторы оператора обладают выдающимися свойствами, и в пункте 15.4 данного параграфа показано, что это может быть полезно для решения операторных уравнений.

15.2. СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ СИММЕТРИЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Определение 15.2. Пусть X — пространство со скалярным произведением, A: $X \to X$ — линейный оператор с областью определения $D_A \subset X$. Оператор A называется *симметричным*, если

$$(A[x], y) = (x, A[y]) \text{ для любых } x, y \in D_A.$$

Выяснению вопроса, является ли конкретный линейный оператор симметричным, посвящен № 45 в сборнике задач.

Лемма 15.1. Пусть X — пространство со скалярным произведением, A: $X \to X$ — симметричный оператор с областью определения $D_A \subset X$. Тогда его собственные векторы, соответствующие различным собственным числам, ортогональны друг другу.

Доказательство. Рассмотрим λ_1 и λ_2 — два различных собственных числа оператора A и соответствующие им собственные векторы x и y.

Тогда

$$\lambda_1(x, y) = (\lambda_1 x, y) = (A[x], y) = (x, A[y]) = (x, \lambda_2 y) = \lambda_2(x, y).$$

Отсюда $(x, y) = 0$, следовательно, $x \perp y$.

Лемма доказана.

Приведем простейший пример, иллюстрирующий лемму 15.1. Рассмотрим линейный оператор в конечномерном пространстве

$$A\colon R^n \to R^n, \quad A[x] = \mathrm{A}x,$$

где $\mathrm{A} \in M_{n\times n}$ — квадратная числовая матрица. Он симметричный, если матрица А симметричная. Из курса линейной алгебры известно, что собственные векторы симметричной матрицы, соответствующие разным собственным числам, взаимно ортогональны. Более того, из собственных векторов матрицы А можно выбрать n штук, которые составят ортогональный базис в пространстве R^n.

В бесконечномерном пространстве X тоже представляет интерес ситуация, когда из собственных векторов симметричного оператора $A\colon X \to X$ можно составить ортогональный базис в X.

15.3. СИСТЕМЫ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ СИММЕТРИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ. ЗАДАЧА ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ

Поскольку понятие симметричного оператора имеет смысл только в пространстве со скалярным произведением, то в этом пункте рассматриваем интегральные и дифференциальные операторы в гильбертовом пространстве квадратично суммируемых функций.

Рассмотрим интегральный оператор Фредгольма

$$A\colon L^2(a;b) \to L^2(a;b), \quad A[x] = \int_a^b K(t,s)x(s)ds. \quad (15.1)$$

Пусть ядро оператора $K(t, s)$ непрерывно в квадрате $[a; b] \times [a; b]$. Нетрудно показать, что оператор (15.1) симметричный, если его ядро симметрично, т. е. $K(t, s) = K(s, t)$. В теории функционального анализа доказано (см. [4], [7], [8]), что из собственных функций оператора A можно составить ортогональный базис в пространстве $L^2(a; b)$.

Рассмотрим дифференциальный оператор Штурма — Лиувилля

$$A\colon L^2(a; b) \to L^2(a; b), \quad A[x] = -(px')' + qx, \quad (15.2)$$

где $p(t)$ — непрерывно дифференцируемая функция; $q(t)$ — непрерывная функция. В качестве области определения рассмотрим линейное подпространство $D_A \subset L^2(a; b)$, состоящее из дважды непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющих граничным условиям $x(a) = x(b) = 0$.

Дважды применяя метод интегрирования по частям, покажем, что оператор A симметричный:

$$(A[x], y) = \int_a^b (-(px')' + qx)y\,dt = -\int_a^b (px')'y\,dt + \int_a^b qxy\,dt =$$

$$= -px'y\Big|_a^b + \int_a^b px'y'\,dt + \int_a^b qxy\,dt =$$

$$= -px'y\Big|_a^b + pxy'\Big|_a^b - \int_a^b (py')'x\,dt + \int_a^b qxy\,dt =$$

$$= \underbrace{p(xy' - x'y)\Big|_a^b}_{=0} + \int_a^b (-(py')' + qy)x\,dt = (x, A[y]),\ x, y \in D_A.$$

Оператор (15.2) симметричный, поскольку

$$p(xy' - x'y)\Big|_a^b = 0 \text{ для любых } x, y \in D_A. \quad (15.3)$$

Замечание о требовании (15.3). Это требование в данном случае выполнено благодаря условиям $x(a) = x(b) = 0$, включенным в область определения оператора (15.2). Однако существуют и другие ситуации, когда требование (15.3) выполняется и оператор Штурма — Лиувилля симметричный. Например, если коэффициент $p(t)$ обращается в ноль на концах промежутка $[a; b]$. Или если область определения оператора (15.2) включает однородные граничные условия общего вида

$$\alpha_1 x(a) + \alpha_2 x'(a) = \beta_1 x(b) + \beta_2 x'(b) = 0.$$

Определение 15.3. Задача определения собственных чисел и собственных функций симметричного оператора Штурма — Лиувилля называется *задачей Штурма — Лиувилля*.

Из леммы 15.1 и симметричности оператора (15.2) следует, что его собственные функции, соответствующие различным собственным числам, ортогональны. При определенных дополнительных условиях они образует ортогональный базис в пространстве $L^2(a; b)$. Например, это условия $p(t) > 0$, $q(t) \geq 0$ на $[a; b]$. Подробнее об этом можно прочитать в [4], [8].

Продемонстрируем решение задачи Штурма — Лиувилля на простейшем примере.

Рассмотрим оператор (15.2) при $p = 1$, $q = 0$, $a = 0$, $b = 1$:

$$A: L^2(0; 1) \to L^2(0; 1), \quad A[x] = -x''.$$

В качестве области определения оператора A возьмем линейное подпространство $D_A \subset L^2(0; 1)$, состоящее из дважды непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющих граничным условиям $x(0) = x(1) = 0$.

Задача Штурма — Лиувилля выглядит следующим образом:

$$A[x] = \lambda x,\ x \in D_A \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -x'' = \lambda x; \\ x(0) = x(1) = 0. \end{cases}$$

Нетрудно установить, что функции $e_k = \sin k\pi t$ являются решениями этой задачи, а значит, собственными функциями для симметричного оператора A, соответствующими собственным числам $\lambda_k = k^2\pi^2$:

$$A[\sin k\pi t] = -(\sin k\pi t)'' = k^2\pi^2 \sin k\pi t,\ k = 1, 2, 3, \ldots$$

При этом, как отмечено в § 10, пункт 10.2, система $\{\sin k\pi t\}_{k=1}^{\infty}$ образует ортогональный тригонометрический базис в пространстве $L^2(0;\,1)$.

Известные полиномиальные базисы в весовых пространствах $L^{2,\xi}(a;\,b)$ тоже могут быть получены как системы собственных функций для симметричных дифференциальных операторов второго порядка, заданных на множестве дважды непрерывно дифференцируемых функций (табл. 4).

Симметричность каждого из этих операторов в своем пространстве проверяется так же, как для оператора (15.2), методом интегрирования по частям.

Таблица 4

Гильбертово пространство	**Дифференциальный оператор**	**Собственные функции и собственные числа, $k = 0, 1, 2, \ldots$**
$L^2(-1;\,1)$	$A[x] = (t^2 - 1)x'' + 2tx'$	$A[P_k] = k(k+1)P_k$, P_k — многочлены Лежандра
$L^{2,\xi}(-1;1)$, $\xi = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$	$A[x] = (t^2 - 1)x'' + tx'$	$A[T_k] = k^2T_k$, T_k — многочлены Чебышёва I рода
$L^{2,\xi}(-1;1)$, $\xi = \sqrt{1-t^2}$	$A[x] = (t^2 - 1)x'' + 3tx'$	$A[U_k] = k(k+2)U_k$, U_k — многочлены Чебышёва II рода
$L^{2,\xi}(0;+\infty)$, $\xi = e^{-t}$	$A[x] = -tx'' + (t-1)x'$	$A[L_k] = kL_k$, L_k — многочлены Лагерра
$L^{2,\xi}(-\infty;+\infty)$, $\xi = e^{-t^2}$	$A[x] = -x'' + 2tx'$	$A[H_k] = 2kH_k$, H_k — многочлены Эрмита

15.4. ПРИМЕНЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пусть H — гильбертово пространство, $A\colon H \to H$ — линейный симметричный оператор. В предыдущих пунктах этого параграфа было показано, что собственные векторы симметричного оператора ортогональны и что в некоторых случаях они образуют ортогональный базис в пространстве H. В такой ситуации можно построить решение уравнения $A[x] - \lambda x = y$ в виде ряда Фурье по собственным векторам оператора A (подробно о рядах Фурье см. § 11).

Предположим, что $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис в пространстве H, где e_k — собственный вектор оператора A, соответствующий собственному числу λ_k:

$$A[e_k] = \lambda_k e_k.$$

Тогда любой элемент пространства H можно разложить в ряд Фурье по системе e_k, в том числе любое значение оператора $A - \lambda I$. Для этого надо вычислить коэффициенты Фурье:

$$((A - \lambda I)[x], e_k) = (x, (A - \lambda I)[e_k]) = (x, A[e_k] - \lambda e_k) =$$
$$= (x, \lambda_k e_k - \lambda e_k) = (\lambda_k - \lambda)(x, e_k).$$

Значит, действие оператора $A - \lambda I$ на элементе x может быть выражено через коэффициенты Фурье элемента x:

$$A[x] - \lambda x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(\lambda_k - \lambda)e_k, \quad c_k = (x, e_k). \qquad (15.4)$$

Это представление дает простой способ решения уравнения

$$A[x] - \lambda x = y. \qquad (15.5)$$

Пусть элемент y принадлежит множеству значений оператора $A - \lambda I$ и параметр λ не является собственным числом оператора A, т. е. $\lambda \neq \lambda_k$. Тогда оператор $A - \lambda I$ обратим и уравнение (15.5) имеет единственное решение $x \in D_A$.

Пусть $y = \sum_{k=1}^{\infty} d_k e_k$ — разложение в ряд Фурье правой части уравнения (15.5), которая известна, следовательно, коэффициенты $d_k = (y, e_k)$ можно вычислить. Ищем решение x уравнения (15.5) в виде ряда $x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$ с неизвестными коэффициентами c_k. Представление (15.4) приводит уравнение (15.5) к равенству рядов

$$A[x] - \lambda x = y \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} c_k(\lambda_k - \lambda)e_k = \sum_{k=1}^{\infty} d_k e_k.$$

Отсюда получаем искомые коэффициенты:

$$c_k = \frac{d_k}{\lambda_k - \lambda}.$$

Решение уравнения (15.5) в виде ряда Фурье по собственным функциям оператора A реализовано в сборнике задач (№ 46–47).

§ 16.
НЕПРЕРЫВНОСТЬ ОПЕРАТОРОВ

Непрерывный оператор (отображение) — наиболее общее понятие, частным случаем которого является непрерывная числовая функция одной или нескольких вещественных переменных. В § 4 модуля I это понятие сформулировано для оператора, действующего в метрических пространствах. В данном параграфе воспроизводим определение 4.1 для ситуации и обозначений модуля III.

Понятие непрерывности играет ключевую роль в большинстве разделов фундаментальной математики, в первую очередь в математическом анализе. Для прикладной математики непрерывность важна как залог устойчивости приближенных вычислений. Допустим, в процессе какого-то расчета к величине x необходимо применить действие A, скажем, подставить x в определенную формулу. При этом хотелось бы, чтобы небольшая погрешность, допущенная при вычислении x, не привела бы к существенному изменению результата после подстановки в формулу A. Для этого необходима непрерывность оператора A, которая, грубо говоря, означает, что из $x \approx \tilde{x}$ вытекает $A[x] \approx A[\tilde{x}]$. В математике есть много способов дать этому свойству строгое определение. В данном курсе выбрано определение непрерывности через сходимость, поскольку именно оно наиболее востребовано приближенными методами.

16.1. ПОНЯТИЕ НЕПРЕРЫВНОСТИ. КРИТЕРИЙ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА

Определение 16.1. Пусть X, Y — нормированные пространства, A: $X \to Y$ — оператор с областью определения $D_A \subset X$. Оператор A называется *непрерывным*, если для любой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D_A$ и элемента $x \in D_A$ верно следующее:

$$x_n \to x \Rightarrow A[x_n] \to A[x].$$

Теорема 16.1 (критерий непрерывности для линейных операторов). Пусть X, Y — нормированные пространства, A: $X \to Y$ — линейный оператор с областью определения $D_A \subset X$. Для того чтобы оператор A был непрерывным, необходимо и достаточно выполнения следующего условия:

$$\exists c \geq 0\colon \|A[x]\|_Y \leq c\|x\|_X \; \forall x \in D_A.$$

Доказательство. Докажем сначала достаточность. Пусть $x_n \to x$ в пространстве X, покажем, что $A[x_n] \to A[x]$ в пространстве Y:

$$\|A[x_n] - A[x]\|_Y = \|A[x_n - x]\|_Y \leq c\|x_n - x\|_X \to 0.$$

Тут использовали линейность оператора A.

Докажем необходимость, используя метод рассуждений «от противного». Предположим, что оператор A непрерывен и не существует такого числа $c \geq 0$, что $\|A[x]\| \leq c\|x\|$.

Тогда найдется такая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D_A$, что

$$\|A[x_n]\| > n\|x_n\|. \tag{16.1}$$

Обозначим

$$\hat{x}_n = \frac{x_n}{n\|x_n\|}.$$

Заметим, что

$$\|\hat{x}_n\| = \frac{1}{n} \to 0,$$

поэтому $\hat{x}_n \to 0$ в пространстве X.

В таком случае из непрерывности оператора A должно следовать, что $A[\hat{x}_n] \to A[0] = 0$ в пространстве Y. Но это невозможно, так как соотношение (16.1), свойства нормы и линейность оператора A гарантируют $\|A[\hat{x}_n]\| > 1$. Пришли к противоречию. Значит, если оператор A непрерывен, то существует такое число $c \geq 0$, что $\|A[x]\| \leq c\|x\|$.

Теорема доказана.

Следствие теоремы 16.1. В конечномерных пространствах любой линейный оператор непрерывен.

Доказательство. Все линейные операторы, действующие в конечномерных пространствах, описаны в § 13, пункт 13.1, примеры 1, 2. Линейная числовая функция одной вещественной переменной

$$A: R \to R, \quad A[x] = kx, \quad k \in R,$$

очевидно непрерывна.

Рассмотрим оператор умножения на матрицу $\mathrm{A} \in M_{m\times n}$:

$$A: R^n \to R^m, \quad A[x] = \mathrm{A}x.$$

Он непрерывный, поскольку для него имеется оценка вида

$$\|A[x]\|_{R^m} \leq c\|x\|_{R^n},$$

где c — одна из норм матрицы $\mathrm{A} \in M_{m\times n}$, ее выбор зависит от типа нормы в пространстве R^n (см. § 7, пункт 7.3, пример 3).

Следствие доказано.

В бесконечномерных пространствах не любой линейный оператор является непрерывным.

На множестве всех линейных непрерывных операторов, действующих из пространства X в пространство Y, можно ввести структуры линейного и нормированного пространства. Операции сложения операторов и умножения оператора на вещественное число вводятся по аналогии с функциями. Роль нулевого элемента играет нулевой оператор:

$$A[x] = 0 \; \forall x \in X.$$

Введем *норму* линейного непрерывного оператора A:

$$\|A\| = \inf\{c \in R: \|A[x]\|_Y \leq c\|x\|_X, \, x \in D_A\}. \quad \textbf{(16.2)}$$

Теорема 16.1 показывает, что множество, для которого здесь ищется инфимум (точная нижняя грань), не пустое.

Упражнение. Проверить для определения (16.2) выполнение аксиом нормы I–III (см. определение 7.1).

Упражнение. Проверить, что норма нулевого оператора равна нулю, норма тождественного оператора равна 1.

Из определения (16.2) вытекает ключевое соотношение для нормы непрерывного линейного оператора:

$$\|A[x]\|_Y \le \|A\| \cdot \|x\|_X \ \forall x \in D_A. \tag{16.3}$$

Из этого соотношения, в частности, следует, что линейный оператор $A: X \to X$ является сжимающим (см. определение 4.2) тогда и только тогда, когда $\|A\| < 1$.

Приведем два рецепта для вычисления операторной нормы (16.2).

1. Чтобы оценить сверху значение операторной нормы, надо получить соотношение типа $\|A[x]\| \le c\|x\|$ для любого $x \in D_A$. Тогда $\|A\| \le c$.

2. Допустим, кроме того, удалось найти ненулевой элемент $x \in D_A$, на котором достигается равенство $\|A[x]\| = c\|x\|$. Тогда оценку $\|A\| \le c$ нельзя улучшить, и получаем точное значение операторной нормы $\|A\| = c$.

Заметим, что второй рецепт не всегда удается реализовать, и в таком случае точное значение операторной нормы можно найти другим, более сложным, способом.

Приведем пример вычисления операторной нормы.

Рассмотрим линейный оператор, действующий в пространствах бесконечных числовых последовательностей:

$$A: l^2 \to l^1, \quad A[x] = \left\{\frac{x_k}{2^k}\right\}_{k=1}^{\infty}.$$

Вычислим его норму. Необходимо оценить значение $\|A[x]\|_{l^1}$ через величину $\|x\|_{l^2}$. Для этого используем неравенство Коши — Буняковского (8.4):

$$\|A[x]\|_{l^1} = \sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{2^k} \cdot x_k\right| \le \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^k}\right)^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \|x\|_{l^2}$$

для любого $x \in l^2$.

Отсюда

$$\|A\| \le \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Поскольку существуют такие ненулевые последовательности x, при которых неравенство Коши — Буняковского обращается в равенство (например, при $x_k = \dfrac{1}{2^k}$), то $\|A\| = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

16.2. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ФРЕДГОЛЬМА

Рассмотрим интегральный оператор Фредгольма:

$$A[x] = \int_a^b K(t,s)x(s)ds. \qquad \textbf{(16.4)}$$

Предполагаем, что ядро $K(t, s)$ непрерывно в квадрате $[a; b]\times[a; b]$. Оператор A линейный, значит, к нему применим критерий непрерывности из теоремы 16.1.

Исследуем действие оператора (16.4) в банаховом пространстве непрерывных функций:

$$A\colon C[a; b] \to C[a; b].$$

Используем следующие соотношения для определенного интеграла:

$$\left|\int_a^b \varphi(s)ds\right| \le \int_a^b |\varphi(s)|\, ds;$$

$$\int_a^b |\varphi(s)\cdot\eta(s)| ds \le \max_{s\in[a;b]} |\varphi(s)| \cdot \int_a^b |\eta(s)|\, ds.$$

Оценим значение $\|A[x]\|_{C[a;b]}$ через величину $\|x\|_{C[a;b]}$.

$$\|A[x]\|_{C[a;b]} = \max_{t\in[a;b]}\left|\int_a^b K(t,s)x(s)ds\right| \le \max_{t\in[a;b]}\int_a^b |K(t,s)|\cdot|x(s)|\, ds \le$$

$$\le \max_{t\in[a;b]}\int_a^b |K(t,s)| ds \cdot \max_{s\in[a;b]}|x(s)| = c\,\|x\|_{C[a;b]}, \quad c\in R.$$

Итак, построили оценку $\|A[x]\| \le c\|x\|$, значит, оператор A непрерывный. Одновременно получили оценку для операторной нормы:

$$\|A\| \le \max_{t\in[a;b]} \int_a^b |K(t,s)|\,ds.$$

Теперь исследуем действие оператора Фредгольма (16.4) в гильбертовом пространстве квадратично суммируемых функций:

$$A\colon L^2(a;\,b) \to L^2(a;\,b).$$

Используя неравенство Коши — Буняковского (8.5), оценим $\|A[x]\|_{L^2(a;b)}$ через величину $\|x\|_{L^2(a;b)}$ в два этапа:

$$|A[x]| = \left|\int_a^b K(t,s)x(s)ds\right| \le \sqrt{\int_a^b K^2(t,s)ds}\cdot\|x\|_{L^2(a;b)};$$

$$\|A[x]\|_{L^2(a;b)} \le \sqrt{\int_a^b\int_a^b K^2(t,s)dsdt}\cdot\|x\|_{L^2(a;b)} = c\,\|x\|_{L^2(a;b)}, \quad c\in R.$$

Из построенной оценки $\|A[x]\| \le c\|x\|$ следует, что оператор A непрерывный. К тому же получена оценка для операторной нормы:

$$\|A\| \le \sqrt{\int_a^b\int_a^b K^2(t,s)dsdt}.$$

16.3. УСЛОВИЯ НЕПРЕРЫВНОСТИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Покажем на следующем примере, что наличие непрерывности зависит не только от свойств оператора, но и от того, в каких нормированных пространствах он действует, а точнее, от типа нормы. Рассмотрим простейший оператор дифференцирования

$$A[x] = x'(t).$$

Сначала исследуем его действие

$$A\colon C^1[a;\, b] \to C[a;\, b].$$

Оператор A линейный, значит, к нему применим критерий непрерывности из теоремы 16.1. Очевидна оценка:

$$\begin{cases} \|A[x]\|_{C[a;b]} = \|x'\|_{C[a;b]} = \max\limits_{t\in[a;b]} |x'(t)| \\ \|x\|_{C^1[a;b]} = \max\limits_{t\in[a;b]} |x(t)| + \max\limits_{t\in[a;b]} |x'(t)| \end{cases} \Rightarrow \|A[x]\|_{C[a;b]} \le \|x\|_{C^1[a;b]}.$$

Следовательно, оператор A непрерывный и $\|A\| \le 1$.

Теперь рассмотрим тот же оператор дифференцирования в других ситуациях:

$$A\colon C[a;\, b] \to C[a;\, b]; \tag{16.5}$$

$$A\colon L^2(a;\, b) \to L^2(a;\, b). \tag{16.6}$$

К области определения D_A отнесем все непрерывно дифференцируемые функции на промежутке $[a;\, b]$. Докажем прямо по определению 16.1, что в обеих ситуациях оператор A не обладает непрерывностью. Для этого рассмотрим последовательность функций $x_n = \dfrac{\sin nt}{n} \in D_A$. Легко проверить, что

$$x_n \to 0 \text{ в } C[a;b], \quad \text{но } A[x_n] \not\to A[0] \text{ в } C[a;b];$$
$$x_n \to 0 \text{ в } L^2(a;b), \quad \text{но } A[x_n] \not\to A[0] \text{ в } L^2(a;b).$$

Распространим полученный результат на общий случай линейного дифференциального оператора с непрерывными коэффициентами:

$$A[x] = p_n x^{(n)} + p_{n-1} x^{(n-1)} + \ldots + p_1 x' + p_0 x.$$

Этот оператор непрерывен в ситуации $A\colon C^n[0;\, 1] \to C[0;\, 1]$, но не является непрерывным в ситуациях типа (16.5), (16.6).

Другие примеры исследования линейного оператора на непрерывность и примеры вычисления нормы смотрите в сборнике задач (№ 48–49).

§ 17.
НЕПРЕРЫВНОСТЬ ОБРАТНОГО ОПЕРАТОРА

Если темой предыдущего параграфа была непрерывность оператора $A: X \to Y$, то темой этого параграфа является непрерывность обратного оператора $A^{-1}: Y \to X$. Она имеет важное значение для приближенного решения уравнений. Допустим, в процессе какого-то расчета необходимо решить уравнение $A[x] = y$. Решение может быть выражено с помощью обратного оператора по формуле $x = A^{-1}[y]$. При этом хотелось бы, чтобы небольшая погрешность, допущенная при вычислении элемента y, не привела бы к существенному изменению решения x. Для этого необходима непрерывность обратного оператора, которая, грубо говоря, означает, что из $y \approx \tilde{y}$ вытекает $A^{-1}[y] \approx A^{-1}[\tilde{y}]$, т. е. $x \approx \tilde{x}$. В этом случае говорят, что решение уравнения $A[x] = y$ устойчиво или что оно непрерывно зависит от правой части уравнения.

17.1. ПОНЯТИЕ НЕПРЕРЫВНОЙ ОБРАТИМОСТИ. КРИТЕРИЙ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Определение 17.1. Пусть X, Y — нормированные пространства. Оператор $A: X \to Y$ *непрерывно обратим*, если существует обратный оператор $A^{-1}: Y \to X$ и он непрерывен.

Установить, что оператор непрерывно обратим можно, во-первых, напрямую: построить в явном виде обратный оператор и проверить его непрерывность. Упражнения такого типа представлены в сборнике задач (№ 50). Во-вторых, для линейных операторов можно обойтись и без построения обратного, достаточно воспользоваться критерием его существования и непрерывности.

Теорема 17.1 (критерий непрерывной обратимости для линейных операторов). Пусть X, Y — нормированные пространства, A: $X \to Y$ — линейный оператор с областью определения $D_A \subset X$. Для того чтобы оператор A был непрерывно обратим, необходимо и достаточно выполнения следующего условия:

$$\exists c > 0\colon \|A[x]\|_Y \geq c\|x\|_X \ \forall x \in D_A.$$

При этом

$$\|A^{-1}\| \leq \frac{1}{c}.$$

Доказательство. Докажем необходимость. Допустим, оператор A непрерывно обратим. Используем соотношение (16.3) для нормы линейного непрерывного оператора A^{-1}:

$$\|x\| = \|A^{-1}[A[x]]\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|A[x]\| \Rightarrow \|A[x]\| \geq c\,\|x\|, \quad c = \frac{1}{\|A^{-1}\|}.$$

Докажем достаточность. Пусть имеется оценка $\|A[x]\| \geq$ $\geq c\|x\|$, $c > 0$. Тогда выполняется критерий обратимости линейного оператора, сформулированный в теореме 14.1. Действительно, уравнение $A[x] = 0$ имеет только нулевое решение:

$$0 = \|A[x]\| \geq c\|x\| \Rightarrow x = 0.$$

Таким образом, существует обратный оператор A^{-1}: $Y \to X$. Проверим для него критерий непрерывности из теоремы 16.1:

$$\underbrace{\|A[x]\|}_{y} \geq c\, \underbrace{\|x\|}_{A^{-1}[y]} \Rightarrow \|y\| \geq c\,\|A^{-1}[y]\| \Rightarrow \|A^{-1}[y]\| \leq \frac{1}{c}\,\|y\|.$$

Значит, оператор A^{-1} непрерывный. Причем

$$\|A^{-1}\| \leq \frac{1}{c}.$$

Теорема доказана.

Проще всего этот критерий применить к положительно определенным операторам.

Определение 17.2. Пусть X — пространство со скалярным произведением, $A\colon X \to X$ — линейный оператор с областью задания $D_A \subset H$. Оператор A называется *положительно определенным*, если существует такое число $\nu > 0$, что

$$(A[x], x) \geq \nu \| x \|^2 \text{ для любого } x \in D_A.$$

Следствие 1 теоремы 17.1. Положительно определенный оператор A непрерывно обратим, причем $\| A^{-1} \| \leq \dfrac{1}{\nu}$.

Действительно, для проверки критерия непрерывной обратимости из теоремы 17.1 достаточно использовать неравенство Коши — Буняковского (8.3):

$$\| A[x] \| \cdot \| x \| \geq (A[x], x) \geq \nu \| x \|^2 \Rightarrow \| A[x] \| \geq \nu \| x \|.$$

Следствие 2 теоремы 17.1. Пусть X — нормированное пространство, $A\colon X \to X$ — линейный непрерывный оператор, $I\colon X \to X$ — тождественный оператор. Пусть $\|A\| < 1$. Тогда линейный оператор $I - A$ непрерывно обратим и $\|(I - A)^{-1} \| \leq \dfrac{1}{1 - \|A\|}$.

Если в пространстве X есть скалярное произведение, то оператор $I - A$ к тому же положительно определенный.

Доказательство. В доказательстве используем соотношение (16.3) для нормы линейного непрерывного оператора: $\|A[x]\| \leq \|A\| \cdot \| x \|$. А также используем следствие из неравенства треугольника для нормы (см. определение 7.1):

$$\| x - y \| \geq | \| x \| - \| y \| |.$$

Проверим выполнение критерия непрерывной обратимости из теоремы 17.1 для линейного оператора $I - A$:

$$\begin{aligned} \|(I - A)[x]\| = \| x - A[x] \| \geq | \| x \| - \| A[x] \| | \geq \\ \geq | \| x \| - \| A \| \cdot \| x \| | = (1 - \|A\|) \cdot \| x \|. \end{aligned}$$

Таким образом, линейный оператор $I - A$ непрерывно обратим и

$$\|(I - A)^{-1}\| \le \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

Если в пространстве X есть скалярное произведение, то оператор $I - A$ положительно определенный:

$$((I - A)[x], x) = (x, x) - (A[x], x) \ge \|x\|^2 - \|A[x]\| \cdot \|x\| \ge$$
$$\ge \|x\|^2 - \|A\| \cdot \|x\|^2 = (1 - \|A\|) \cdot \|x\|^2.$$

Следствие доказано.

17.2. ПОНЯТИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ

Говоря об устойчивости решения какой-либо математической задачи, имеют в виду, что небольшие изменения данных задачи приводят к небольшому изменению ее решения. И наоборот, решение называют неустойчивым, если небольшие изменения данных задачи могут привести к существенному изменению ее решения. В зависимости от того, какие именно данные подвергаются изменениям, получаются разные виды устойчивости. Опишем самый простой вид устойчивости.

Рассмотрим оператор A: $X \to Y$, действующий в нормированных пространствах, и операторное уравнение

$$A[x] = y. \tag{17.1}$$

Как обычно, элемент y предполагается известным, а элемент x надо найти. Решение уравнения (17.1) называют *устойчивым*, если малое изменение y приводит к малому изменению x.

Требование устойчивости возникает по крайней мере в двух типичных ситуациях.

Во-первых, в прикладных задачах правая часть уравнения, как правило, получена в результате эксперимента, а значит, сопровождается некоторыми помехами, погрешностью, известна неточно. Желательно, чтобы эти помехи не сильно влияли на решение уравнения.

Во-вторых, устойчивость важна для построения приближенного решения уравнения. Допустим, вместо точного решения x удалось построить некий элемент $\tilde{x}$, который претендует на приближенное решение уравнения (17.1). Но как проверить близость $\tilde{x}$ к x, если точное решение x неизвестно? Можно поступить так: подставить $\tilde{x}$ в левую часть уравнения (17.1) и сравнить результат с известной правой частью уравнения. Обозначим результат этой подстановки $A[\tilde{x}] = \tilde{y}$. Если оказалось, что $\tilde{y} \approx y$, то отсюда делаем вывод, что $\tilde{x} \approx x$ в расчете на устойчивость решения уравнения (17.1).

Опишем то же самое в более строгих терминах. Пусть требуется построить последовательность приближенных решений x_n уравнения (17.1), сходящуюся к его точному решению x. Допустим, удалось построить приближения x_n таким образом, что $A[x_n] \to y$. Обозначим $A[x_n] = y_n$. Если решение уравнения (17.1) устойчиво, то из $y_n \to y$ вытекает $x_n \to x$. Иными словами,

$$y_n \to y \Rightarrow \underbrace{A^{-1}[y_n]}_{x_n} \to \underbrace{A^{-1}[y]}_{x}.$$

Теперь очевидно, что свойство устойчивости равносильно непрерывности оператора A^{-1}.

С оператором A^{-1} связан также вопрос: как построить приближенное решение (17.1) с заранее заданной точностью? Проще всего это сделать для линейных операторных уравнений. Из соотношения (16.3) для нормы линейного непрерывного оператора A^{-1} вытекает следующая оценка:

$$\|x_n - x\| = \|A^{-1}[y_n] - A^{-1}[y]\| = \|A^{-1}[y_n - y]\| \leq$$
$$\leq \|A^{-1}\| \cdot \|y_n - y\| = \|A^{-1}\| \cdot \|A[x_n] - y\|.$$

Если требуется найти приближенное решение уравнения (17.1) с точностью $\varepsilon > 0$, то достаточно построить такое приближение x_n, что

$$\|A[x_n] - y\| \leq \frac{\varepsilon}{\|A^{-1}\|}.$$

Тогда

$$\|x_n - x\| \le \|A^{-1}\| \cdot \|A[x_n] - y\| \le \varepsilon.$$

Погрешность, которая получается при подстановке приближенного решения x_n в уравнение (17.1), равна значению $A[x_n] - y$ и называется *невязкой* приближенного решения. Ясно, что невязка точного решения равна нулю. Многие схемы приближенного решения основаны на том, чтобы контролировать величину невязки.

Таким образом, непрерывная обратимость оператора A является важным условием для сходимости приближенных методов, а норма оператора A^{-1} нужна для контроля за точностью приближений. При этом оператор A^{-1} строить вовсе не требуется (если удалось его построить, то это обеспечит сразу точное решение уравнения (17.1) и актуальность приближенного решения понизится). Достаточно иметь оценку сверху для его нормы. Поэтому теорема 17.1 и ее следствия содержат, кроме основного утверждения, оценку для нормы обратного оператора.

17.3. УСЛОВИЯ ДЛЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ОПРЕДЕЛЕННОСТИ ОПЕРАТОРОВ ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ

Рассмотрим в гильбертовом пространстве дифференциальный оператор Штурма — Лиувилля

$$A\colon L^2(a; b) \to L^2(a; b), \quad A[x] = -(px')' + qx, \quad (17.2)$$

где $p(t)$ — непрерывно дифференцируемая функция; $q(t)$ — непрерывная функция.

В качестве области определения рассмотрим линейное подпространство $D_A \subset L^2(a; b)$, состоящее из дважды непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющих граничным условиям $x(a) = x(b) = 0$.

Добавим дополнительные требования на коэффициенты операторы (17.2):

$$p(t) > 0,\ q(t) \ge 0 \text{ на } [a; b]. \quad (17.3)$$

Покажем, что при этих требованиях оператор Штурма — Лиувилля положительно определенный, а значит, непрерывно обратим.

Для этого понадобится специальное неравенство, позволяющее оценить норму функции через норму ее производной в пространстве $L^2(a;\,b)$. Используем простую связь между функцией и ее производной:

$$x(t)=\int_a^t x'(s)ds,\ \text{ если }\ x(a)=0.$$

Применяем неравенство Коши — Буняковского (8.5):

$$x^2(t)=\left(\int_a^t x'(s)ds\right)^2\le\int_a^t ds\cdot\int_a^t x'^2(s)ds\le(t-a)\|x'\|^2_{L^2(a;b)};$$

$$\|x\|^2_{L^2(a;b)}=\int_a^b x^2(t)dt\le\|x'\|^2_{L^2(a;b)}\cdot\int_a^b(t-a)dt=\frac{(b-a)^2}{2}\|x'\|^2_{L^2(a;b)}.$$

Таким образом, доказано, что для любой непрерывно дифференцируемой функции $x(t)$, удовлетворяющей условию $x(a)=0$, выполняется неравенство, называемое *неравенством Фридрихса*:

$$\|x\|^2_{L^2(a;b)}\le\frac{(b-a)^2}{2}\|x'\|^2_{L^2(a;b)}.$$

Далее используем это неравенство и метод интегрирования по частям, чтобы доказать положительную определенность оператора Штурма — Лиувилля. Для любого $x\in D_A$ имеем следующую цепочку соотношений:

$$(A[x],x)=\int_a^b(-(px')'+qx)xdt=-\int_a^b(px')'xdt+\int_a^b qx^2dt=$$

$$=-\underbrace{px'x\Big|_a^b}_{=0}+\int_a^b px'^2dt+\int_a^b qx^2dt\ge$$

$$\ge\min_{t\in[a;b]}p(t)\cdot\|x'\|^2_{L^2(a;b)}+\min_{t\in[a;b]}q(t)\cdot\|x\|^2_{L^2(a;b)}\ge$$

$$\ge\frac{2}{(b-a)^2}\min_{t\in[a;b]}p(t)\cdot\|x\|^2_{L^2(a;b)}+\min_{t\in[a;b]}q(t)\cdot\|x\|^2_{L^2(a;b)}.$$

Благодаря требованиям (17.3) приходим к выводу, что

$$\nu = \frac{2}{(b-a)^2}\min_{t\in[a;b]} p(t) + \min_{t\in[a;b]} q(t) > 0. \qquad (17.4)$$

Следовательно, оператор (17.2) положительно определенный:

$$(A[x], x) \geq \nu\cdot \|x\|^2, \quad x \in D_A.$$

Тогда по следствию 1 теоремы 17.1 оператор Штурма — Лиувилля непрерывно обратим. Рассмотрим соответствующее операторное уравнение, равносильное задаче Дирихле:

$$A[x] = y,\ x \in D_A \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -(px')' + qx = y; \\ x(a) = x(b) = 0. \end{cases}$$

Из непрерывной обратимости оператора Штурма — Лиувилля вытекает (см. пункт 17.3), что решение этой задачи устойчиво и для его поиска применимы классические приближенные схемы, минимизирующие невязку (см. § 19 и № 56, 58 в сборнике задач).

Замечание о требованиях (17.3). Ключевое условие (17.4) и приводящие к нему выкладки можно реализовать не только в ситуации (17.3). Например, если $p(t) > 0$ на $[a; b]$, то коэффициент $q(t)$, вообще говоря, может принимать не слишком большие отрицательные значения (так чтобы число (17.4) оставалось положительным).

17.4. УСЛОВИЯ ДЛЯ НЕПРЕРЫВНОЙ ОБРАТИМОСТИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ФРЕДГОЛЬМА

Рассмотрим интегральный оператор Фредгольма:

$$A[x] = \int_a^b K(t,s)x(s)ds.$$

Пусть ядро $K(t, s)$ представляет собой непрерывную функцию двух переменных в квадрате $[a; b] \times [a; b]$. Рассмотрим действие этого оператора в двух ситуациях, в банаховом пространстве и в гильбертовом пространстве:

$$A\colon C[a;\, b] \to C[a;\, b];$$

$$A\colon L^2(a;\, b) \to L^2(a;\, b).$$

В § 16, пункт 16.2, установлена непрерывность оператора Фредгольма в каждой из этих ситуаций. Однако ни в одной из них данный оператор не является непрерывно обратимым. Это подтверждается хотя бы тем, что в ряде случаев обратным оператором для A является линейный дифференциальный оператор, действие которого ни в пространстве $C[a;\, b]$, ни в пространстве $L^2(a;\, b)$ не обладает непрерывностью (см. § 16, пункт 16.3). В отсутствие непрерывной обратимости оператора A решение уравнения

$$A[x] = y \Leftrightarrow \int_a^b K(t, s)x(s)ds = y(t)$$

не отличается устойчивостью (см. пункт 17.3), хотя существуют методы решения и таких уравнений. Подробнее об этом можно прочитать в [6], [7].

Диагноз меняется, если рассмотреть уравнение с оператором $I - A$:

$$x - A[x] = y \Leftrightarrow x(t) - \int_a^b K(t,s)x(s)ds = y(t). \qquad (17.5)$$

Применим к нему следствие 2 теоремы 17.1. При условии $\|A\| < 1$ оператор $I - A$ непрерывно обратимый, причем в пространстве $L^2(a;\, b)$ он еще и положительно определенный. Следовательно, решение уравнения (17.5) устойчиво, для его поиска применимы классические приближенные схемы, минимизирующие невязку.

Опишем здесь *метод замены ядра на вырожденное*. Определение вырожденного ядра имеется в § 5, пункт 5.4. Допустим, ядро $K(t,\, s)$ раскладывается в ряд Тейлора в квадрате $[a;\, b] \times [a;\, b]$. Тогда заменяем его на многочлен Тейлора степени n и получаем вырожденное ядро:

$$K(t,\, s) \approx K_n(t,\, s).$$

Смысл такой замены заключается в том, что уравнение (17.5) с вырожденным ядром поддается точному решению.

Кроме того, условие $\|A\| < 1$ означает, что оператор A сжимающий (см. комментарий к соотношению (16.3)), и уравнение (17.5) с вырожденным ядром удобно решать методом простых итераций. Если при замене ядра на многочлен Тейлора добиться высокой точности, то невязка приближенного решения будет мала.

Решение уравнения (17.5) методом замены ядра на вырожденное реализовано в сборнике задач (№ 51). Другие приближенные методы, которые годятся для решения уравнения (17.5), предложены в § 19 и в сборнике задач (№ 57).

§ 18.
ОПТИМИЗАЦИЯ ФУНКЦИОНАЛОВ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Функционалом называют оператор, принимающий значения в пространстве R, т. е. числовой оператор:

$$F: X \to R.$$

Функционал — обобщение понятия числовой функции на случай, когда аргументом может быть не только одна или несколько вещественных переменных, но элемент любого множества X. С другой стороны, функционал является частным случаем еще более общего понятия оператора A: $X \to Y$, ведь значениями оператора могут быть не только числа, но и векторы, матрицы, функции, числовые последовательности и т. д. в зависимости от состава пространства Y.

Если для оператора A типичной задачей является уравнение $A[x] = y$, то для функционала F обычно ищут оптимальные (экстремальные) значения: $\min F$ или $\max F$. Оптимизация функционала изучается в рамках курсов вариационного исчисления, экстремальных задач, линейного и выпуклого программирования, оптимального управления и т. д.

Данный параграф включен в теорию линейных операторов по следующим причинам. Во-первых, линейные функционалы являются частным случаем линейных операторов. Во-вторых, с задачей оптимизации функционала тесно связаны линейные операторные уравнения (см. § 19). Одна из ключевых методик точной оптимизации функционала описана во втором пункте параграфа, один из методов приближенной оптимизации — в третьем пункте. Численная реализация представлена в сборнике задач (№ 55).

18.1. ТЕОРЕМА РИССА ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ

Определение 18.1. Пусть X — множество, оператор $F: X \to R$ называется *функционалом*.

Отличие понятия функционала от понятия отображения (оператора) заключается в том, что значениями функционала обязательно являются вещественные числа. Поскольку функционал — это частный случай оператора, то для него справедливо все то, что сообщали об операторах предыдущие параграфы модуля III.

Пусть X — линейное пространство. Функционал F называется *линейным*, если его область определения $D_F \subset X$ — линейное подпространство и для любых $x_1, x_2 \in D_F$, $\alpha, \beta \in R$

$$F[\alpha x_1 + \beta x_2] = \alpha F[x_1] + \beta F[x_2].$$

Пусть X — нормированное пространство. Функционал F называется *непрерывным*, если для любой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D_F$ и элемента $x \in D_F$ верно следующее:

$$x_n \to x \Rightarrow F[x_n] \to F[x].$$

Критерий непрерывности и схема вычисления нормы линейного функционала такие же, как для линейного оператора (см. § 16, пункт 16.1).

Приведем примеры функционалов.

1. Классическим примером линейного функционала является определенный интеграл:

$$F: C[a;b] \to R, \quad F[x] = \int_a^b x(t)dt.$$

С геометрической точки зрения действие этого функционала связано с вычислением площади криволинейной трапеции, образованной графиком функции $x(t)$ и осью абсцисс. Докажем непрерывность функционала с помощью критерия из теоремы 16.1 и вычислим норму:

$$\|F[x]\|_R = |F[x]| = \left|\int_a^b x(t)dt\right| \le \int_a^b |x(t)|\,dt \le$$
$$\le (b-a)\max_{t\in[a;b]}|x(t)| = (b-a)\,\|x\|_{C[a;b]}.$$

Функционал F непрерывный и $\|F\| \le b - a$. При $x(t) \equiv 1$ все неравенства в этой цепочке обращаются в равенства, поэтому $\|F\| = b - a$.

2. Классическим примером нелинейного функционала служит норма. Пусть X — нормированное пространство:

$$F\colon X \to R, \quad F[x] = \|x\|.$$

Непрерывность этого функционала очевидна, если воспользоваться следствием из неравенства треугольника для нормы (см. определение 7.1):

$$\|x - y\| \ge \big|\|x\| - \|y\|\big|.$$

Действительно,

$$\|x_n - x\| \to 0 \Rightarrow \|x_n\| - \|x\| \to 0;$$
$$x_n \to x \Rightarrow F[x_n] \to F[x].$$

3. Другим примером нелинейного функционала может быть функционал длины дуги:

$$F: C^1[a;b] \to R, \quad F[x] = \int_a^b \sqrt{1 + (x'(t))^2}\,dt.$$

Можно доказать, что этот функционал непрерывный в случае $F\colon C^1[a;\, b] \to R$, но не является непрерывным, если действует в пространстве $C[a;\, b]$ или $L^2(a;\, b)$.

Теорема 18.1 (теорема Рисса о представлении линейных непрерывных функционалов в гильбертовом пространстве). Пусть H — гильбертово пространство, $F\colon H \to R$ —

линейный непрерывный функционал. Тогда существует единственный элемент $u \in H$, такой что $F[x] = (u, x)$ для любого $x \in H$. Причем $\|F\| = \|u\|_H$.

Доказательство. Докажем существование такого представления. Рассмотрим линейное подпространство в H, состоящее из решений уравнения $F[x] = 0$:

$$H_0 = \{x \in H \colon F[x] = 0\}.$$

Если $H_0 = H$, то это значит, что $F[x] = 0$ для любого $x \in H$. Тогда положим $u = 0$. Если $H_0 \neq H$, то легко показать, что найдется такой элемент $h \in H$, что $h \neq 0$ и $h \perp H_0$. Используя линейность функционала F, докажем, что элемент $x - \frac{F[x]}{F[h]}h$ принадлежит подпространству H_0 при любом $x \in H$:

$$F\left[x - \frac{F[x]}{F[h]}h\right] = F[x] - \frac{F[x]}{F[h]}F[h] = 0.$$

Тогда

$$h \perp x - \frac{F[x]}{F[h]}h.$$

А это значит, что

$$0 = \left(h, x - \frac{F[x]}{F[h]}h\right) = (h, x) - \frac{F[x]}{F[h]}\|h\|^2;$$

$$F[x] = \frac{(h, x)}{\|h\|^2}F[h] = \left(\frac{F[h]}{\|h\|^2}h, x\right).$$

Осталось обозначить $u = \frac{F[h]}{\|h\|^2}h$, и представление линейного функционала в виде $F[x] = (u, x)$ готово.

Докажем единственность этого представления. Предположим, что $F[x] = (u, x) = (\tilde{u}, x)$ для любого $x \in H$. Тогда $(u - \tilde{u}, x) = 0$ для любого $x \in H$. В частности $(u - \tilde{u}, u - \tilde{u}) = 0$, а это может быть только в случае $u = \tilde{u}$ (см. определение 8.1).

Докажем равенство норм $\|F\| = \|u\|_H$. Применяя неравенство Коши — Буняковского (8.3), получаем оценку для нормы функционала:

$$|F[x]| = |(u, x)| \le \|u\| \cdot \|x\| \Rightarrow \|F\| \le \|u\|.$$

При $x = u$ неравенство обращается в равенство, поэтому

$$\|F\| = \|u\|.$$

Теорема доказана.

Использованию этой теоремы для конкретных функционалов посвящен № 52 в сборнике задач.

18.2. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ ФУНКЦИОНАЛОВ

Допустим, требуется найти экстремальные значения функционала F на его области определения D_F:

$$\min_{x \in D_F} F[x] \quad \text{или} \quad \max_{x \in D_F} F[x] \tag{18.1}$$

и элементы $x \in D_F$, на которых они достигаются.

Эта задача называется вариационной, экстремальной или задачей оптимизации.

Оптимизации подвергаются как линейные, так и нелинейные функционалы, причем более богатая и сложная теория возникает, естественно, во втором случае. Одна из ключевых методик исследования нелинейного функционала на экстремум основана на операции дифференцирования. Все типы дифференцирования (числовых функций одной и нескольких вещественных переменных, вектор-функций в конечномерных пространствах, функционалов и операторов в бесконечномерных пространствах) объединяет общая идея: выделение линейной компоненты приращения дифференцируемой величины.

Определение 18.2. Рассмотрим функционал $F: H \to R$, действующий в гильбертовом пространстве H, с областью определения $D_F \subset H$. Зафиксируем элемент $x \in D_F$, рассмотрим все достаточно малые по норме приращения аргумента $\Delta x \in H$, такие что $x + \Delta x \in D_F$. Функционал F

называется *дифференцируемым* на элементе x, если его приращение может быть представлено в виде

$$F[x + \Delta x] - F[x] = \delta_x F[\Delta x] + o(\| \Delta x \|) \text{ при } \| \Delta x \| \to 0, \quad (18.2)$$

где $\delta_x F[\Delta x]$ — значение линейного непрерывного функционала $\delta_x F\colon H \to R$. Как обычно, символ $o(\| \Delta x \|)$ означает числовую величину более высокого порядка малости, чем $\| \Delta x \|$, т. е. она стремится к нулю быстрее, чем $\| \Delta x \|$.

Функционал $\delta_x F$ называется *первой вариацией* функционала F на элементе x.

Таким образом, первая вариация — это линейная часть приращения функционала, следовательно, является аналогом слова «дифференциал», которое обычно применяют для числовых функций одной или нескольких вещественных переменных. Ясно, что если функционал F линейный непрерывный, то он совпадает со своей первой вариацией.

Применим к первой вариации теорему 18.1: существует единственный элемент $u \in H$, такой что $\delta_x F[\Delta x] = (u, \Delta x)$. Элемент u определяется элементом $x \in D_F$, обозначим $u = F'[x]$ и будем считать его значением оператора $F'\colon H \to H$ с областью определения D_F. Назовем этот оператор *градиентом* функционала F. Тогда представление (18.2) перепишется в виде

$$F[x + \Delta x] - F[x] = (F'[x], \Delta x) + o(\| \Delta x \|). \quad (18.3)$$

Покажем, как выглядит формула (18.3) для простейших функционалов — числовых функций одной и нескольких вещественных переменных.

1. Для числовой функции одной вещественной переменной

$$F\colon R \to R, \quad F[x] = f(x),$$

формула (18.3) сводится к широко известному соотношению:

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x) \cdot \Delta x + o(| \Delta x |). \quad (18.4)$$

Действительно, градиент функции одной переменной — это ее производная, скалярное произведение в пространстве R совпадает с обычным произведением чисел, норма совпадает с модулем числа.

2. Далее рассмотрим числовую функцию n вещественных переменных, иными словами, функционал в пространстве R^n:

$$F\colon R^n \to R, \quad F[x] = f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Градиент функции нескольких переменных представляет собой вектор частных производных

$$F'[x] = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ \ldots, \ \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

Скалярное произведение векторов в пространстве R^n вычисляется как сумма попарных произведений координат, норма вектора вычисляется как квадратный корень из суммы квадратов координат. Формула (18.3) превращается в известное соотношение:

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \cdot \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \cdot \Delta x_2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \cdot \Delta x_n + o(\| \Delta x \|),$$

где $x = (x_1, \ x_2, \ \ldots, \ x_n)$, $\Delta x = (\Delta x_1, \ \Delta x_2, \ \ldots, \ \Delta x_n)$, $\|\Delta x\| =$ $= \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \ldots + \Delta x_n^2}$.

Таким образом, дифференцирование функционала в абстрактном гильбертовом пространстве лишь обобщает классический принцип дифференцирования для числовых функций одной или нескольких вещественных переменных.

Однако возникает трудность — как практически продифференцировать функционал $F[x]$ и выразить $F'[x]$? Опишем два способа рассуждения.

1. Для простых функционалов F можно попробовать непосредственно выделить линейную часть приращения $F[x + \Delta x] - F[x]$ (найти первую вариацию) и преобразовать ее к виду скалярного произведения в пространстве H, чтобы выразить градиент.

2. Можно свести дифференцирование функционала к дифференцированию функции одной вещественной переменной, методы и правила которого хорошо известны. Возьмем приращение аргумента специального вида:

$$\Delta x = t\eta,\ t \in R,\ \eta \in H.$$

От элемента η потребуем $\|\eta\| = 1$, $x + t\eta \in D_F$ при всех достаточно малых $t \in R$. Кроме того, в каждом конкретном случае можно потребовать от η выполнение других условий, удобных для вычисления. Тогда, с одной стороны, все это подставляем в соотношение (18.3):

$$F[x + t\eta] - F[x] = (F'[x], \eta) \cdot t + o(|t|).$$

С другой стороны, посмотрим на $F[x + t\eta]$ как на числовую функцию одной вещественной переменной t, т. е. $f(t) = F[x + t\eta]$, и запишем для нее соотношение (18.4):

$$F[x+t\eta]-F[x]=\left.\frac{dF[x+t\eta]}{dt}\right|_{t=0}\cdot t+o(|t|).$$

Сопоставляя две последние формулы, получаем, что

$$\left.\frac{dF[x+t\eta]}{dt}\right|_{t=0}=(F'[x],\eta). \qquad (18.5)$$

Поэтому, чтобы выделить отсюда $F'[x]$, надо вычислить левую часть этого соотношения и преобразовать ее к виду скалярного произведения в данном пространстве.

Возвращаемся к обсуждению экстремальной задачи (18.1). Если функционал F принимает экстремальное значение на элементе x, то функция $f(t) = F[x + t\eta]$ имеет экстремум в точке $t = 0$. Выпишем необходимое условие экстремума для функции одной вещественной переменной:

$$\left.\frac{dF[x+t\eta]}{dt}\right|_{t=0}=0.$$

Для достаточно широкого класса функционалов из этого условия и представления (18.5) вытекает равенство нулю градиента функционала:

$$F'[x] = 0. \qquad (18.6)$$

Операторное уравнение (18.6) называется *уравнением Эйлера — Лагранжа*. Таким образом, равенство нулю градиента — это классическое необходимое условие экстремума как для числовых функций одной и нескольких вещественных переменных, так и для абстрактных функционалов. Достаточные условия и более тонкий анализ типа экстремума можно найти в большинстве учебников по вариационному исчислению (например, [8], [10]). Как правило, эти условия выводятся для конкретного, наиболее распространенного типа нелинейных функционалов:

$$F[x] = \int_a^b \varphi(s, x(s), x'(s))ds.$$

Вычислению градиента, выделению линейной части приращения функционала и оптимизации функционала, в том числе при помощи уравнения Эйлера — Лагранжа, посвящены № 53–55 в сборнике задач.

18.3. МЕТОД РИТЦА ДЛЯ ПРИБЛИЖЕННОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ФУНКЦИОНАЛОВ

Рассмотрим функционал F: $H \to R$, действующий в гильбертовом пространстве H. Допустим, $D_F \subset H$ является бесконечномерным линейным подпространством. Предположим, что экстремальная задача (пусть это будет задача минимума) имеет единственное решение:

$$\min_{x \in D_F} F[x] = F[\hat{x}],$$

но найти элемент $\hat{x}$ представляется трудным.

Тогда возникает необходимость найти приближенный минимум функционала, а точнее, построить *минимизирующую последовательность* $x_n \in D_F$:

$$F[x_n] \to F[\hat{x}].$$

Опишем один из универсальных методов приближенной оптимизации функционала — *метод Ритца* (в честь швейцарского математика начала XX в. Вальтера Ритца).

Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — полная линейно независимая система в пространстве H (не обязательно ортогональная), причем $e_k \in D_F$. Эту систему традиционно называют *координатной*, иногда аппроксимационной или базисной.

Рассмотрим всевозможные линейные комбинации первых n элементов координатной системы $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$:

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k, \quad c_k \in R.$$

Такие элементы x_n образуют конечномерное линейное подпространство (см. определения 6.3, 6.6):

$$X_n = \mathrm{Lin}\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}.$$

Очевидно, $X_n \subset D_F$. Идею метода Ритца можно сформулировать так: минимизировать функционал F на конечномерном подпространстве X_n вместо бесконечномерного подпространства D_F в надежде на приближенное равенство

$$\min_{x \in D_F} F[x] \approx \min_{x_n \in X_n} F[x_n].$$

Поскольку элементы x_n отличаются друг от друга только набором числовых коэффициентов c_k, то $F[x_n]$ можно считать числовой функцией n вещественных переменных, т. е. $F[x_n] = F(c_1, c_2, \ldots, c_n)$. Необходимое условие экстремума для функции нескольких переменных — равенство нулю градиента, т. е. всех частных производных:

$$\frac{\partial F(c_1, c_2, \ldots, c_n)}{\partial c_k} = 0, \; k = 1, 2, \ldots, n. \qquad (18.7)$$

Система (18.7) содержит n уравнений относительно неизвестных $c_1, c_2, \ldots, c_n$ и приводит к расчетной формуле метода Ритца.

Лемма 18.1 (сходимость метода Ритца). Пусть H — гильбертово пространство, $F: H \to R$ — функционал, определенный на линейном подпространстве $D_F \subset H$, $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — полная линейно независимая система в пространстве H, $e_k \in D_F$. Если функционал F непрерывный, то построенная методом Ритца последовательность x_n является для него минимизирующей.

Доказательство. В соответствии с принятыми выше обозначениями пусть $\hat{x} \in H$ — элемент, доставляющий минимум функционалу F в подпространстве D_F. Поскольку система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ полная, то существует сходящаяся последовательность:

$$\hat{x}_n \in X_n,\ \hat{x}_n \to \hat{x} \ \text{ в пространстве } H.$$

В качестве $\hat{x}_n$ можно взять, например, элемент наилучшего приближения для $\hat{x}$ в подпространстве X_n (см. § 11, п. 11.3, следствие теоремы 11.1). Из непрерывности функционала F следует числовая сходимость

$$F[\hat{x}_n] \to F[\hat{x}].$$

Построенный по методу Ритца элемент x_n доставляет минимум функционалу F в подпространстве X_n. Тогда для каждого n имеется следующее расположение чисел:

$$F[\hat{x}] \le F[x_n] \le F[\hat{x}_n].$$

Правая часть двойного неравенства стремится к левой при $n \to \infty$. Отсюда вытекает сходимость

$$F[x_n] \to F[\hat{x}].$$

Лемма доказана.

Замечание к лемме 18.1. В описании метода Ритца и в условиях леммы 18.1 предполагается, что D_F является линейным подпространством. На самом деле метод Ритца чаще приходится применять в ситуации, когда область определения функционала F является «почти» линейным подпространством, с точностью до сдвига на фиксированный элемент x_0. Тогда минимизацию функционала F проводят на элементах вида

$$x_n = x_0 + \sum_{k=1}^{n} c_k e_k.$$

Подробнее об этом смотрите в сборнике задач (№ 55), где продемонстрирована реализация метода Ритца именно в такой ситуации.

Метод Ритца сводит минимизацию функционала к минимизации функции нескольких вещественных переменных. Вместо трудоемкого вычисления градиента функционала и решения уравнения Эйлера — Лагранжа (18.6) предлагается вычислить градиент функции нескольких вещественных переменных и решить конечную систему (18.7), которая зачастую оказывается системой линейных алгебраических уравнений.

§ 19.
ВАРИАЦИОННЫЙ И ПРОЕКЦИОННЫЙ ПОДХОДЫ К ПРИБЛИЖЕННОМУ РЕШЕНИЮ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Главной темой этого параграфа вновь является решение линейного операторного уравнения

$$A[x] = y.$$

Обычно действие происходит в функциональных пространствах, где y — известная функция, x — неизвестная функция, оператор A дифференциальный или интегральный. Функциональные пространства, как правило, бесконечномерные. Этот фактор делает задачу $A[x] = y$ сложной, например, по сравнению с решением конечной системы линейных алгебраических уравнений:

$$\mathrm{A}x = y,$$

где $\mathrm{A} \in M_{n\times n}$ — числовая матрица, $x, y \in R^n$.

Свести бесконечномерную задачу $A[x] = y$ к решению конечной системы линейных алгебраических уравнений — вот главная цель для многих приближенных методов.

В этом параграфе описаны два классических подхода к достижению этой цели: вариационный и проекционный. Они продемонстрированы на примере метода наименьших квадратов и метода Галёркина. В первых двух пунктах параграфа в центре внимания находятся ключевые идеи и получение расчетных формул, пригодных к использованию в конкретных задачах. Условия и доказательства сходимости для метода наименьших квадратов и метода Галёркина изложены в третьем пункте параграфа. Численная реализация представлена в сборнике задач (№ 56–58).

Вариационные и проекционные методы — название широкого круга алгоритмов, к разработке которых были причастны такие российские математики, как Борис Григорьевич Галёркин, Иван Григорьевич Бубнов, Георгий Иванович Петров, Леонид Витальевич Канторович и др., поэтому в названиях конкретных разновидностей этих методов часто встречаются имена этих ученых. Причем названия четко не закреплены, поэтому, скажем, тот алгоритм, который в этом пособии назван методом Галёркина, можно встретить также под другими названиями: метод Бубнова — Галёркина, энергетический метод, метод моментов и даже метод Ритца, хотя последний все же правильнее относить к методам оптимизации функционалов. Иногда методами Галёркина или Петрова — Галёркина называют вообще все проекционные методы.

Основные идеи этих методов были выдвинуты еще в начале XX века, но оказались удивительно плодотворными после перехода к массовому использованию компьютерных технологий. Среди многочисленных приложений можно назвать задачи механики конструкций (например, моделирование оболочек), прогнозирование метеорологических процессов, расчеты гидродинамических течений (например, моделирование турбулентности) и др.

19.1. ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ

Рассмотрим гильбертово пространство H и линейный оператор $A\colon H \to H$, определенный на бесконечномерном линейном подпространстве $D_A \subset H$. Предположим, что операторное уравнение

$$A[x] = y$$

имеет единственное решение $\hat{x} \in D_A$, но найти элемент $\hat{x}$ представляется трудным. Возникает необходимость построения приближенного решения, а точнее последовательности приближений:

$$x_n \to \hat{x}.$$

Сформулируем идею *вариационного подхода* к решению этой задачи. Она заключается в том, чтобы свести решение уравнения $A[x] = y$ к минимизации некоторого функционала $F[x]$: $\hat{x}$ — решение уравнения $A[x]=y$ тогда и только тогда, когда $\hat{x}$ доставляет минимум функционалу $F[x]$.

Минимизацию функционала F осуществляют чаще всего методом Ритца (см. § 18, пункт 18.3). В результате ожидают получить сходящуюся последовательность приближенных решений для исходного уравнения (в расчете на сходимость метода Ритца).

В зависимости от выбора функционала F получаются разные *вариационные методы*. Есть по крайней мере два классических способа выбрать подходящий функционал F.

I. ФУНКЦИОНАЛ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Рассмотрим функционал

$$F[x] = \|A[x] - y\|^2. \qquad (19.1)$$

Он называется *функционалом наименьших квадратов* для уравнения $A[x] = y$. Очевидно, что $\hat{x}$ — решение уравнения $A[x] = y$ тогда и только тогда, когда $\hat{x}$ доставляет минимум функционалу F:

$$\min_{x \in D_A} F[x] = F[\hat{x}] = 0.$$

Метод наименьших квадратов — это метод приближенного решения линейного операторного уравнения $A[x] = y$, который заключается в применении метода Ритца к функционалу наименьших квадратов (19.1).

По методу Ритца выбираем в пространстве H координатную систему $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ (линейно независимую и полную), причем $e_k \in D_A$, минимизируем функционал (19.1) на элементах вида $x_n = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i$, $c_i \in R$.

Подставляем x_n в (19.1):

$$F[x_n] = \|A[x_n] - y\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^{n} c_i A[e_i] - y \right\|^2 =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} c_i A[e_i] - y, \ \ \sum_{i=1}^{n} c_i A[e_i] - y \right).$$

Записываем необходимое условие минимума (18.7) для функции нескольких вещественных переменных $F[x_n] = F(c_1, c_2, \ldots, c_n)$. Используем правило дифференцирования произведения, симметричность и линейность скалярного произведения, линейность оператора A:

$$\frac{\partial F}{\partial c_k} = \left(A[e_k], \ \ \sum_{i=1}^{n} c_i A[e_i] - y \right) + \left(\sum_{i=1}^{n} c_i A[e_i] - y, \ A[e_k] \right) =$$

$$= 2\left(\sum_{i=1}^{n} c_i A[e_i] - y, \ A[e_k] \right) =$$

$$= 2\sum_{i=1}^{n} c_i (A[e_i], \ A[e_k]) - 2(y, \ A[e_k]) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Отсюда получаем расчетную формулу для метода наименьших квадратов:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i (A[e_i], A[e_k]) = (y, A[e_k]), \quad k = 1, 2, \ldots, n, \quad (19.2)$$

которая представляет из себя систему n линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

II. ФУНКЦИОНАЛ ЭНЕРГИИ

Допустим, оператор A симметричный и положительно определенный (см. определения 15.2 и 17.2).

Рассмотрим функционал

$$F[x] = (A[x], x) - 2(y, x). \quad (19.3)$$

Он называется *функционалом энергии* для уравнения $A[x] = y$.

Покажем, что решение $\hat{x}$ уравнения $A[x] = y$ доставляет минимум функционалу энергии. Для этого достаточно представить функционал (19.3) в виде

$$F[x] = (A[x-\hat{x}],\ x-\hat{x}) - (A[\hat{x}], \hat{x}). \qquad (19.4)$$

Упражнение. На основании симметричности скалярного произведения и симметричности оператора A установить эквивалентность представлений (19.3), (19.4).

Благодаря положительной определенности оператора A оба слагаемых в формуле (19.4) неотрицательны, а значит, минимум достигается при $x = \hat{x}$:

$$\min_{x \in D_A} F[x] = F[\hat{x}] = -(A[\hat{x}], \hat{x}).$$

Метод Галёркина — это метод приближенного решения линейного операторного уравнения $A[x] = y$, который заключается в применении метода Ритца к функционалу энергии (19.3).

По методу Ритца выбираем в пространстве H координатную систему $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ (линейно независимую и полную), причем $e_k \in D_A$, минимизируем функционал (19.3) на элементах вида

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i, \quad c_i \in R.$$

Подставляем x_n в (19.3):

$$F[x_n] = (A[x_n], x_n) - 2(y, x_n) =$$
$$= \left(\sum_{i=1}^{n} c_i A[e_i],\ \ \sum_{i=1}^{n} c_i e_i \right) - 2\left(y,\ \ \sum_{i=1}^{n} c_i e_i \right).$$

Записываем необходимое условие минимума (18.7) для функции нескольких вещественных переменных $F[x_n] = F(c_1, c_2, \ldots, c_n)$. Используем правило дифференцирования произведения, линейность и симметричность скалярного произведения и оператора A:

$$\frac{\partial F}{\partial c_k} = \left(A[e_k],\ \sum_{i=1}^{n} c_i e_i \right) + \left(\sum_{i=1}^{n} c_i A[e_i],\ c_k \right) - 2(y,\ e_k) =$$

$$= \left(e_k,\ \sum_{i=1}^{n} c_i A[e_i] \right) + \left(\sum_{i=1}^{n} c_i A[e_i],\ c_k \right) - 2(y,\ e_k) =$$

$$= 2\sum_{i=1}^{n} c_i (A[e_i],\ e_k) - 2(y,\ e_k) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Отсюда получаем расчетную формулу для метода Галёркина:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i (A[e_i], e_k) = (y, e_k), \quad k = 1, 2, \ldots, n, \qquad (19.5)$$

которая представляет из себя систему n линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных c_1, c_2, ..., c_n.

19.2. ПРОЕКЦИОННЫЕ МЕТОДЫ

Рассмотрим гильбертово пространство H и линейный оператор A: $H \to H$, определенный на бесконечномерном линейном подпространстве $D_A \subset H$. Предположим, что операторное уравнение

$$A[x] = y$$

имеет единственное решение $\hat{x} \in D_A$, но найти элемент $\hat{x}$ представляется трудным.

Возникает необходимость построения приближенного решения, а точнее последовательности приближений:

$$x_n \to \hat{x}.$$

Опишем *проекционный подход* к решению этой задачи. Как известно, разность $A[x_n] - y$ называется *невязкой* приближенного решения x_n. Невязка выражает погрешность, которая получается при подстановке приближенного решения x_n в уравнение $A[x] = y$. Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}, \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — две полные линейно независимые системы в пространстве H, причем $e_k \in D_A$. Систему e_k называют *координатной*, систему φ_k *проекционной*. Идея проекционного подхода заключается в том, чтобы искать приближенное решение уравнения $A[x] = y$ в виде линейной комбинации первых n элементов координатной системы $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ из условия ортогональности невязки первым n элементам проекционной системы $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$:

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i, \; A[x_n] - y \perp \varphi_k, \; k = 1, 2, \ldots, n. \qquad (19.6)$$

В зависимости от выбора проекционной системы φ_k получаются разные *проекционные методы*.

Поясним идеологию проекционных методов двумя следующими замечаниями.

1. С учетом линейных свойств ортогональности идею проекционных методов можно сформулировать так: вместо решения уравнения $A[x] = y$ в бесконечномерном подпространстве D_A ищем приближенное решение в конечномерном подпространстве $X_n = \mathrm{Lin}\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ из условия ортогональности невязки другому конечномерному подпространству $Y_n = \mathrm{Lin}\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ (см. определения 6.3, 6.6).

2. Логика проекционных методов такова. Допустим, существует предел последовательности невязок $A[x_n] - y$ при $n \to \infty$. Условие (19.6) приводит к тому, что этот предел ортогонален всей системе $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$, а поскольку система полная (см. определение 10.1), то он равен нулю. Таким образом, можно надеяться, что $A[x_n] - y \to 0$ и отсюда $x_n \to \hat{x}$, если оператор A непрерывно обратим. Эти соображения придают разумное основание проекционным методам, но в общем случае не гарантируют, что последовательность приближенных решений, полученных одним из таких методов, сходится к точному. В каждой конкретной ситуации это требует специального доказательства.

Расчетная формула проекционных методов легко составляется из условия (19.6). Подставляем $x_n = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i e_i$ в формулу $(A[x_n] - y, \varphi_k) = 0$, используем линейность скалярного произведения и линейность оператора A. После преобразований получаем систему n линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных c_1, $c_2, \ldots, c_n$:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i (A[e_i], \varphi_k) = (y, \varphi_k), \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Заметим, что если $\varphi_k = e_k$, то данный алгоритм приводит к расчетной формуле (19.5) метода Галёркина, а если $\varphi_k = A[e_k]$, то к расчетной формуле (19.2) метода наименьших квадратов. Поэтому можно дать альтернативные определения этим методам, с точки зрения проекционного подхода.

Метод Галёркина — это метод поиска приближенного решения для линейного операторного уравнения $A[x] = y$ в виде линейной комбинации первых n элементов координатной системы $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ из условия ортогональности невязки этим же элементам e_k:

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i, \quad A[x_n] - y \perp e_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Метод наименьших квадратов — это метод поиска приближенного решения для линейного операторного уравнения $A[x] = y$ в виде линейной комбинации первых n элементов координатной системы $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ из условия ортогональности невязки элементам $A[e_k]$:

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i, \quad A[x_n] - y \perp A[e_k], \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Таким образом, метод Галёркина и метод наименьших квадратов относятся одновременно и к вариационным, и к проекционным, поскольку допускают два варианта интерпретации: либо через минимизацию соответствующих функционалов, либо через ортогональность невязки. Проекционная интерпретация проще, прозрачнее, быстрее приводит к расчетной формуле, однако именно вариационный подход позволяет обосновать сходимость этих методов.

19.3. СХОДИМОСТЬ МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ И МЕТОДА ГАЛЁРКИНА

Для доказательства сходимости метода наименьших квадратов и метода Галёркина используем их вариационное описание.

Теорема 19.1 (сходимость метода наименьших квадратов). Пусть H — гильбертово пространство, $A: H \to H$ — линейный оператор, определенный на бесконечномерном линейном подпространстве $D_A \subset H$, с множеством значений R_A. Пусть $y \in R_A$ и оператор A непрерывно обратим, что гарантирует существование единственного решения $\hat{x} \in D_A$ уравнения $A[x] = y$.

Предположим, $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset D_A$ — полная линейно независимая система в пространстве H, причем система $\{A[e_k]\}_{k=1}^{\infty}$ также полна в H. Пусть x_n — последовательность приближенных решений уравнения $A[x] = y$, полученная методом наименьших квадратов на основе системы e_k. Тогда $x_n \to \hat{x}$ в пространстве H.

В частности, условия теоремы 19.1 выполнены, если оператор A симметричный и положительно определенный, но не только в этом случае.

Доказательство. Применяя метод Ритца к функционалу наименьших квадратов (19.1), получаем приближенное решение в виде $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k e_k$ из условия минимизации квадрата расстояния между $A[x_n]$ и y:

$$\|A[x_n] - y\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^{n} c_k A[e_k] - y \right\|^2.$$

Согласно определению 11.2 это значит, что $A[x_n]$ — элемент наилучшего приближения для элемента y в подпространстве

$$Y_n = \mathrm{Lin}\{A[e_1], A[e_2], \ldots, A[e_n]\}.$$

Полнота системы $\{A[e_k]\}_{k=1}^{\infty}$ обеспечивает сходимость $A[x_n] \to y$ (см. § 11, пункт 11.3, следствие теоремы 11.1).

Непрерывная обратимость оператора A извлекает отсюда $x_n \to \hat{x}$.

Теорема доказана.

Теорема 19.2 (сходимость метода Галёркина). Пусть H — гильбертово пространство, A: $H \to H$ — линейный оператор, определенный на бесконечномерном линейном подпространстве $D_A \subset H$, с множеством значений R_A. Пусть $y \in R_A$ и оператор A симметричный, положительно определенный, что гарантирует существование единственного решения $\hat{x} \in D_A$ уравнения $A[x] = y$ (см. § 17, пункт 17.1, следствие 1 теоремы 17.1).

Предположим, $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset D_A$ — полная линейно независимая система в пространстве H. Пусть x_n — последовательность приближенных решений уравнения $A[x] = y$, полученная методом Галёркина на основе системы e_k. Тогда $x_n \to \hat{x}$ в пространстве H.

Доказательство. По условию теоремы оператор A положительно определенный:

$$\exists \nu > 0\text{: } (A[x], x) \geq \nu \| x \|^2,\ x \in D_A.$$

Для обоснования сходимости метода Галёркина надо применить лемму 18.1 к функционалу энергии (19.3), (19.4), при этом гарантируя его непрерывность. Заметим, что непрерывность функционала энергии была бы очевидна, если бы в условиях теоремы 19.1 оператор A предполагался непрерывным. Но такое предположение сильно ограничило бы сферу применения теоремы (например, дифференциальные операторы зачастую не являются непрерывными в гильбертовом пространстве, см. § 16, пункт 16.3). Отсюда возникает идея: провести построение нового гильбертова пространства и продолжить функционал (19.3), (19.4) на это пространство так, чтобы он оказался непрерывным.

Для элементов $x,\ y \in D_A$ определим новое скалярное произведение:

$$[x, y] = (A[x], y).$$

Проверим аксиомы I–III скалярного произведения (см. определение 8.1):

I. $[x, x] = (A[x], x) \geq \nu\|x\|^2$, поэтому $[x, x] \geq 0$, причем $[x, x] = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

II. $[x, y] = (A[x], y) = (x, A[y]) = (A[y], x) = [y, x]$;

III. $[\alpha x_1 + \beta x_2, y] = (A[\alpha x_1 + \beta x_2], y) = \alpha(A[x_1], y) + \beta(A[x_2], y) = \alpha[x_1, y] + \beta[x_2, y]$.

Новое скалярное произведение порождает новую норму:

$$\|x\|_A = [x, x] = \sqrt{(A[x], x)}.$$

Таким образом, линейное подпространство $D_A \subset H$ получает структуру нормированного и метрического пространства, однако может оказаться неполным. Его пополнение обозначим H_A и назовем энергетическим пространством для оператора A (операция пополнения упоминается в § 3). Пропустим несколько технических выкладок, которые позволяют убедиться в цепочке вложений трех множеств:

$$D_A \subset H_A \subset H.$$

Благодаря положительной определенности оператора A старая норма пространства H мажорируется новой нормой в пространстве H_A:

$$\|x\|^2 \leq \frac{1}{\nu}\|x\|_A^2\,. \tag{19.7}$$

Заметим, что если система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ полная в пространстве H, то она будет полная и в пространстве H_A. Это следует из симметричности и обратимости оператора A, а также из определения 10.1 полной системы. На уровне грубой прикидки доказательство выглядит так: если $0 = [e_k, h] = (A[e_k], h) = (e_k, A[h])$, то $A[h] = 0$, отсюда $h = 0$, иначе оператор A не обратим.

Функционал энергии (19.4) можно представить в виде

$$F[x] = \|x - \hat{x}\|_A^2 - \|\hat{x}\|_A^2$$

и считать, что он определен в гильбертовом пространстве H_A. В таком виде функционал F действует аналогично норме и поэтому он, очевидно, непрерывный в пространстве H_A (см. § 18, пункт 18.1, пример 2). Тогда согласно лемме 18.1, примененной к функционалу F и гильбертовому пространству H_A, метод Ритца дает минимизирующую последовательность x_n:

$$F[x_n] \to F[\hat{x}] \iff \|x_n - \hat{x}\|_A^2 - \|\hat{x}\|_A^2 \to -\|\hat{x}\|_A^2 \iff \|x_n - \hat{x}\|_A^2 \to 0.$$

Получаем сходимость $x_n \to \hat{x}$ в энергетическом пространстве H_A. Благодаря оценке (19.7) из нее вытекает сходимость $x_n \to \hat{x}$ в исходном пространстве H.

Более детальное описание энергетического пространства смотрите в [11].

Теорема доказана.

Замечание к теоремам 19.1, 19.2. Значение условия $y \in R_A$ в теоремах 19.1, 19.2 заключается в том, что в этом случае существует решение $\hat{x} \in D_A$ уравнения $A[x] = y$. Если же $y \in H$, но $y \notin R_A$, то уравнение $A[x] = y$ не разрешимо в области определения оператора A. В этом случае все равно можно строить сходящуюся последовательность приближенных решений методом Галёркина или методом наименьших квадратов. Тот элемент, к которому будет сходиться последовательность приближенных решений, называют *обобщенным решением* уравнения $A[x] = y$. Обобщенное решение нельзя прямо подставить в уравнение $A[x] = y$ и получить верное равенство, но его можно считать решением в некотором аппроксимативном смысле (см. [1], [11]).

Классические случаи применения методов Галёркина и наименьших квадратов — линейные операторные уравнения в гильбертовом пространстве $L^2(a; b)$ с симметричным положительно определенным оператором A. Например, это может быть краевая задача с дифференциальным оператором Штурма — Лиувилля или интегральное уравнение с оператором Фредгольма (см. сборник задач (№ 56–58)). В пространстве $L^2(a; b)$ сходимость приближенных решений среднеквадратичная, но, как и в случае рядов Фурье (см. § 12, пункт 12.1), при «хороших» данных задачи и при удачном выборе координатной системы можно наблюдать равномерную сходимость.

В заключение отметим, что все подходы и методы этого параграфа изложены для случая, когда линейное уравнение $A[x] = y$ рассматривается в линейном подпространстве D_A. На самом деле их можно применить и в ситуации, когда линейное уравнение $A[x] = y$ рассматривается в «почти» линейном подпространстве, с точностью до сдвига на фиксированный элемент x_0. Тогда приближенное решение ищут среди элементов вида $x_n = x_0 + \sum_{k=1}^{n} c_i e_i$, выводят модифицированные расчетные формулы. В сборнике задач (№ 58) продемонстрировано использование метода Галёркина в такой ситуации.

Подробное изложение теории вариационных и проекционных методов содержится в учебниках [3], [11] и в монографии [12].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лебедев, В. И*. Функциональный анализ и вычислительная математика : учеб. пособие. — 4-е изд., перераб. и доп. — М. : Физматлит, 2005. — 296 с.
2. *Колмогоров, А. Н*. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. — 7-е изд. — М. : Физматлит, 2004. — 572 с.
3. *Треногин, В. А*. Функциональный анализ : учебник. — 4-е изд., испр. — М. : Физматлит, 2007. — 488 с.
4. *Фёдоров, В. М*. Курс функционального анализа. — СПб. : Лань, 2005. — 352 с.
5. *Кудрявцев, Л. Д*. Краткий курс математического анализа : учебник : в 3 т. Т. 1–2. — 3-е изд. — М. : Физматлит, 2005. — 424 с.
6. *Крылов, В. И*. Вычислительные методы высшей математики : в 2 т. / В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырный. — Минск : Вышэйшая школа, 1972. — 584 с.
7. *Краснов, М. Л*. Интегральные уравнения (введение в теорию). — М. : КомКнига, 2010. — 304 с.
8. *Волков, В. Т*. Интегральные уравнения. Вариационное исчисление: курс лекций : учеб. пособие / В. Т. Волков, А. Г. Ягола. — 2-е изд., испр. — М. : Изд-во КДУ, 2009. — 140 с.
9. *Суетин, П. К*. Классические ортогональные многочлены. — М. : Физматлит, 2007. — 480 с.
10. *Романко, В. К*. Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. — 2-е изд. — М. : Лаборатория Базовых Знаний, 2001. — 344 с.
11. *Михлин, С. Г*. Вариационные методы в математической физике. — 2-е изд. — М. : Наука, 1970. — 512 с.
12. *Флетчер, К*. Численные методы на основе метода Галёркина. — М. : Мир, 1988. — 352 с.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Базис
— ортогональный, ортонормированный *72*
— полиномиальный *76*
— тригонометрический *74*
— Хаара *76*

Градиент функционала *142*

Задача
— вариационная, эстремальная, оптимизации *141*
— Дирихле *109*, *134*
— Коши, начальная *43*, *109*
— краевая *109*
— Штурма — Лиувилля *116*
Замыкание множества *26*

Коэффициент
— сжатия *30*
— Фурье *81*
Критерий
— непрерывной обратимости для линейного оператора *128*
— непрерывности для линейного оператора *121*
— обратимости для линейного оператора *106*

Линейная комбинация *49*
Линейная оболочка *50*

Метод
— вариационный *151*
— Галёркина *153*, *156*
— замены ядра на вырожденное *135*
— наименьших квадратов *151*, *156*
— проекционный *155*
— простых итераций, последовательных приближений *33*
— Ритца *145*
Метрика *16*
Многочлены Лежандра, Чебышёва, Лаггера, Эрмита *75*
Множество
— замкнутое *25*
— значений оператора *98*
— ограниченное *16*

Невязка приближенного решения *132*, *154*
Неравенство
— Бесселя *83*
— Гёльдера *56*
— Коши — Буняковского *60*
— треугольника для метрики *16*
— треугольника для нормы *53*
— Фридрихса *133*
Норма *53*
— линейного оператора *122*

Область определения, область задания оператора *98*
Оператор *98*
— интегральный Вольтерры *102*, *110*
— дифференциальный *103*, *109*, *115*, *125*, *132*
— дифференциальный Штурма — Лиувилля *103*, *115*, *132*, *160*
— интегральный Фредгольма *102*, *110*, *114*, *124*, *134*, *160*
— линейный *100*
— непрерывно обратимый *127*
— непрерывный *30*, *121*
— нулевой *101*
— обратимый *105*
— обратный *106*
— положительно определенный *129*
— сжимающий *30*
— симметричный *113*
— тождественный *101*
Ортогональная проекция *85*
Оценка
— апостериорная для метода простых итераций *35*
— априорная для метода простых итераций *34*
— нормы линейного непрерывного оператора *123*

Первая вариация функционала *142*
Подпространство
— бесконечномерное *51*
— конечномерное *51*
— линейное *46*
— собственное *112*
Полунорма *54*
Последовательность
— минимизирующая *145*
— сходящаяся *23*, *54*
— фундаментальная *27*, *54*
— числовая ограниченная *11*
— числовая суммируемая *10*
Предел последовательности в метрическом пространстве *23*
Принцип сжимающих операторов *31*
Пространство
— n-мерных числовых векторов *10*
— банахово *55*
— бесконечномерное *51*
— весовое *63*
— вещественных чисел *10*
— гильбертово *61*
— конечномерное *51*
— Лебега, суммируемых функций *12*
— линейное *49*
— метрическое *16*
— непрерывных функций *11*
— нормированное *53*
— ограниченных функций *12*
— ограниченных числовых последовательностей *11*
— полное *27*
— со скалярным произведением *59*
— суммируемых числовых последовательностей *10*
— функциональное *14*
— числовых матриц *10*
Процесс
— нормировки *65*
— ортогонализации Грама — Шмидта *67*

Равенство Парсеваля *82*
Размерность линейного пространства *51*
Ряд
— Тейлора, степенной *93*
— Фурье, ортогональный *81*, *94*

Система
— координатная *145*, *155*
— линейно зависимая *50*
— линейно независимая *50*
— ортогональная, ортонормированная *65*
— полиномиальная *76*
— полная *72*
— проекционная *155*

— ступенчатых функций Хаара *76*
— тригонометрическая *74*
— экспоненциальная *76*
Скалярное произведение *60*
— с весом *64*
Собственное число *112*
Собственный вектор, функция *112*
Сходимость *23*, *54*
— равномерная *24*, *89*
— среднеквадратичная *25*, *64*, *89*
— точечная, в точке *24*, *89*

Теорема
— о неподвижной точке *31*
— о сходимости метода Галёркина *158*
— о сходимости метода наименьших квадратов *157*
— о сходимости ряда Фурье *82*
— об ортогонализации *67*
— Пифагора *66*
— Рисса о представлении линейного непрерывного функционала *139*

Уравнение
— интегральное Вольтерры *43*
— интегральное Фредгольма *41*, *135*
— Эйлера — Лагранжа *144*

Устойчивость решения уравнений *130*

Функционал *138*
— дифференцируемый *141*
— линейный *138*
— наименьших квадратов *151*
— непрерывный *138*
— энергии *152*
Функция
— гладкая, кусочно-гладкая *11*
— непрерывная, кусочно-непрерывная *11*
— непрерывно дифференцируемая *11*
— ограниченная *12*
— ступенчатая *76*
— суммируемая (интегрируемая) *12*
Частичная сумма рядов Фурье *82*

Шар *16*, *54*

Элемент наилучшего приближения *85*
Эффект Гиббса *91*

Ядро
— вырожденное *41*, *135*
— интегрального оператора *41*, *102*

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение 5

Модуль I
Теория сжимающих операторов

§ 1. Список основных пространств 10

§ 2. Метрические пространства 15
2.1. Понятие метрики 16
2.2. Примеры метрических пространств 16

§ 3. Сходимость в метрическом пространстве 23

§ 4. Сжимающие операторы 29
4.1. Принцип сжимающих операторов 30
4.2. Метод последовательных приближений,
или простых итераций 33

§ 5. Приложение принципа сжимающих операторов
к задаче приближенного решения уравнений 36
5.1. Числовые уравнения 37
5.2. Системы линейных алгебраических уравнений 38
5.3. Нелинейные функциональные уравнения 39
5.4. Интегральные уравнения Фредгольма 41
5.5. Интегральные уравнения Вольтерры 43

Модуль II
Теория рядов Фурье в гильбертовом пространстве

§ 6. Линейные пространства 46
6.1. Понятия линейного пространства
и линейного подпространства 46
6.2. Линейно независимые системы 49
6.3. Размерность линейного пространства 51

§ 7. Нормированные пространства 53
7.1. Понятия нормы, полунормы и банахова пространства 53
7.2. Основные банаховы пространства 55
7.3. Другие попытки введения нормы 57

§ 8. Пространства со скалярным произведением 59
8.1. Понятия скалярного произведения и гильбертова пространства 59
8.2. Основные гильбертовы пространства 61
8.3. Весовые пространства Лебега 63

§ 9. Ортогональные системы 65
9.1. Процесс ортогонализации 65
9.2. Построение ортогональных многочленов Лежандра, Чебышёва, Лагерра, Эрмита 68

§ 10. Полные системы 72
10.1. Понятия полной системы и ортогонального базиса 72
10.2. Полные системы и ортогональные базисы в пространствах Лебега 74
I. Тригонометрические системы 74
II. Полиномиальные системы 75
III. Системы ступенчатых функций 76

§ 11. Ряды Фурье в гильбертовом пространстве и задача аппроксимации 78
11.1. Разложение вектора по ортонормированной системе в конечномерном пространстве 79
11.2. Разложение вектора по ортонормированной системе в бесконечномерном пространстве. Сходимость ряда Фурье 81
11.3. Приложение рядов Фурье к решению задач аппроксимации 85

§ 12. Замечания о сходимости рядов Фурье 88
12.1. Качество сходимости ряда Фурье 88
12.2. Сравнение тригонометрической и полиномиальной аппроксимации 92
12.3. Сравнение ряда Фурье и ряда Тейлора 93

Модуль III
Теория линейных операторов

§ 13. Линейные операторы 100
13.1. Понятие линейного оператора. Примеры 100
13.2. Линейные интегральные операторы Фредгольма и Вольтерры 102
13.3. Линейные дифференциальные операторы, операторы Штурма — Лиувилля 103

§ 14. Обратный оператор 105
14.1. Понятие обратимости. Критерий для линейных операторов 105
14.2. Обратимость линейных дифференциальных операторов второго порядка с начальными и граничными условиями 109

§ 15. Собственные числа и собственные векторы линейных операторов 111
15.1. Понятие собственного числа и собственного вектора 112
15.2. Собственные векторы симметричных операторов 113
15.3. Системы собственных функций для симметричных интегральных и дифференциальных операторов. Задача Штурма — Лиувилля 114
15.4. Применение собственных векторов для решения линейных уравнений 117

§ 16. Непрерывность операторов 120
16.1. Понятие непрерывности. Критерий для линейного оператора 121
16.2. Непрерывность интегральных операторов Фредгольма 124
16.3. Условия непрерывности для линейных дифференциальных операторов 125

§ 17. Непрерывность обратного оператора 127
17.1. Понятие непрерывной обратимости. Критерий для линейных операторов 127
17.2. Понятие устойчивости для решения операторного уравнения 130
17.3. Условия для положительной определенности операторов Штурма — Лиувилля 132
17.4. Условия для непрерывной обратимости интегральных операторов Фредгольма 134

§ 18. Оптимизация функционалов в гильбертовом пространстве 137
18.1. Теорема Рисса для линейных непрерывных функционалов 138
18.2. Дифференцирование и оптимизация функционалов 141
18.3. Метод Ритца для приближенной оптимизации функционалов 145

§ 19. Вариационный и проекционный подходы к приближенному решению линейных операторных уравнений 149
19.1. Вариационные методы 150
I. Функционал наименьших квадратов 151
II. Функционал энергии 152
19.2. Проекционные методы 154
19.3. Сходимость метода наименьших квадратов и метода Галёркина 157

Список литературы 162

Предметный указатель 163

Надежда Викторовна ФИЛИМОНЕНКОВА

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ ПО ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ АНАЛИЗУ

Учебное пособие

Зав. редакцией
физико-математической литературы *Н. Р. Нигмадзянова*
Ответственный редактор *Н. В. Черезова*
Технический редактор *Е. С. Жукович*
Корректор *Т. С. Симонова*
Подготовка иллюстраций *А. П. Маркова*
Верстка *Е. Е. Егорова*
Выпускающий *О. В. Шилкова*

ЛР № 065466 от 21.10.97
Гигиенический сертификат 78.01.07.953.П.007216.04.10
от 21.04.2010 г., выдан ЦГСЭН в СПб

Издательство «ЛАНЬ»
lan@lanbook.ru; www.lanbook.com
192029, Санкт-Петербург, Общественный пер., 5.
Тел./факс: (812) 412-29-35, 412-05-97, 412-92-72.
Бесплатный звонок по России: 8-800-700-40-71

Подписано в печать 08.04.15.
Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Формат $84\times108\ ^1/_{32}$.
Печать офсетная. Усл. п. л. 9,24. Тираж 700 экз.

Заказ № .

Отпечатано в полном соответствии
с качеством предоставленных материалов
в ОАО «ИПК “Чувашия”».
428019, г. Чебоксары, пр. И. Яковлева, д. 13.
Тел.: (8352) 56-00-23