№ 18 (Вариант 19)

Ходосевич Данила
3 МО, 2 группа

18. Дано нелинейное уравнение в пространстве непрерывных функций $C[a;b]$.

А. Используя принцип сжимающих операторов, доказать, что данное уравнение имеет единственное решение $x(t) \in C[a;b]$.

В. Методом простых итераций найти приближенное решение этого уравнения с точностью $\varepsilon = 0{,}01$, используя априорную оценку числа итераций. В качестве ответа предъявить график приближенного решения.

Для вычислений и построения графика использовать математические пакеты.

А) $t\sqrt{2+|x(t)|} = t^2 + x(t)$, $[a,b] = [-1;2]$

А) $x(t) = t\sqrt{2+|x(t)|} - t^2$

$\exists\, F(x) = t\sqrt{2+|x(t)|} - t^2$

$\forall t \in [-1;2]: |F(x) - F(y)| = |t\sqrt{2+|x(t)|} - \cancel{t^2} - t\sqrt{2+|y(t)|} + \cancel{t^2}| =$

$= \underbrace{|t|}_{\le 2} \cdot |\sqrt{2+|x(t)|} - \sqrt{2+|y(t)|}| \le 2|\sqrt{2+|x(t)|} - \sqrt{2+|y(t)|}| \ominus$

$\exists\, f(u) = \sqrt{2+u}$, $f'(u) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2+u}}$

По теореме Лагранжа: $f(a) - f(b) = f'(c)(a-b)$

$\ominus\ 2|f(|x(t)|) - f(|y(t)|) = 2|f'(c)| \cdot \underbrace{|(|x(t)| - |y(t)|)|}_{\le x(t) - y(t)} =$

$= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2+u}} \cdot \underbrace{||x(t)| - |y(t)||}_{\le \sup|x(t)-y(t)|,\ t\in[-1;2]} \le \frac{\sqrt{2}}{2} \sup|x(t) - y(t)|,\ t \in [-1;2]$

$|x(t)| \ge 0$, $|y(t)| \ge 0$, $c \in [|x(t)|; |y(t)|]$, то $c \ge 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2+u}}$ достигает наибольшего зн при $c = 0$

$\forall t \in [-1;2]: |F(x) - F(y)| \le \frac{\sqrt{2}}{2} \sup|x(t) - y(t)|,\ t\in[-1;2] \Rightarrow$

$\Rightarrow \sup|F(x) - F(y)| \le \frac{\sqrt{2}}{2} \sup|x(t) - y(t)|,\ t \in [-1;2] \Rightarrow$

$\Rightarrow \rho(|F(x) - F(y)|) \le \frac{\sqrt{2}}{2}\rho(x;y)$, $\frac{\sqrt{2}}{2} = \underbrace{k}_{<1}$ – коэф. сжатия

$\Rightarrow$ $x = F(x)$ имеет единственное решение

В) ∃ a – точное значение, $x_0 = 2$ – начальное приближение

$x_n = F(x_{n-1})$ – рекуретная ф-ла для получения последовательности приближений

$$x_1 = t\sqrt{2+2} - t^2 = 2t - t^2$$

$$\rho(x_0, x_1) = \sup|x_0(t) - x_1(t)| = |2 - 2(-1) + (-1)^2| = 5, \ t \in [-1; 2]$$

$$k = \frac{\sqrt{2}}{2}, \ \varepsilon = 0{,}01$$

$$N_{apr} = \log_k\left[\frac{\varepsilon(1-k)}{\rho(x_0, x_1)}\right] + 1 = \left[\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{0{,}01 \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{5}\right] + 1 = 21{,}5$$

```python
import matplotlib.pyplot as plt
t = [x/100 for x in range(-100, 200)]
aprior_est = 22
def F(x, t):
    val = t * (2 + abs(x))** (0.5) - t**2
    return val
x = []
for i in range(len(t)):
    cur_val_for_x = 2
    for j in range(aprior_est):
        cur_val_for_x = F(cur_val_for_x, t[i])
    x.append(cur_val_for_x)
plt.plot(t, x)
plt.xlabel('t')
plt.ylabel('x(t)')
plt.grid(True)
plt.show()
```