



UNIVERZITET U SARAJEVU
ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET
ODSJEK ZA AUTOMATIKU I ELEKTRONIKU
STRUKTURE I REŽIMI RADA ELEKTROENERGETSKIH SISTEMA

Runge-Kutta metode za rješavanje diferencijalnih jednačina

SEMINARSKI RAD

Studenti:

Zerina Jašarspahić

Burhan Ljubović

Harun Špago

Profesor:

Red. prof. dr Izudin Džafić

Sarajevo, juni 2023. godine

Sažetak

U ovom radu ukratko je objašnjeno rješavanje diferencijalnih jednačina pomoću Runge-Kutta metoda. Glavni dio ovog rada bavi se implementacijom navedenih metoda u programskom jeziku C++. Također, u radu je dat primjer rješavanja RLC kruga pomoću metoda Runge-Kutta.

Ključne riječi: Runge-Kutta metode, diferencijalne jednačine, programski jezik C++, RLC krug

Abstract

This paper explains the Runge-Kutta methods for solving differential equations. The main part of this paper is about the implementation of the mentioned methods in the C++ programming language. Also, the paper gives an example of solving an RLC circuit using the Runge-Kutta methods.

Keywords: Runge-Kutta methods, differential equations, the C++ programming language, RLC circuit

Sadržaj

Popis slika	3
1 Općenito o Runge-Kutta metodama	1
1.1 Osnovni pojmovi	1
1.2 Opći oblik Runge-Kutta metoda	2
1.3 Runge-Kutta metoda prvog reda	3
1.4 Runge-Kutta metode drugog reda	4
1.5 Runge-Kutta metode četvrtog reda	6
2 Matematički model serijskog RLC kola	9
2.1 Izvođenje diferencijalne jednačine	9
2.2 Rješavanje jednačine	10
2.3 Poređenje stvarnog odziva i odziva dobivenog RK4 metodom	13
3 Analiza stabilnosti za Runge-Kutta 4 metod	18
4 Prilozi	25
5 Zaključak	26
Literatura	27

Popis slika

2.0.1 Shema RLC kola	9
2.3.1 Odvojeni prikaz stvarnog odziva i odziva dobivenog sa RK4 za korak $h = 0.001$ s	13
2.3.2 Prikaz stvarnog odziva i odziva dobivenog sa RK4 za korak $h = 0.001$ s	13
2.3.3 Prikaz greške između stvarnog odziva i odziva dobivenog sa RK4 za korak $h = 0.001$ s	14
2.3.4 Odvojeni prikaz stvarnog odziva i odziva dobivenog sa RK4 za korak $h = 0.01$ s	14
2.3.5 Prikaz stvarnog odziva i odziva dobivenog sa RK4 za korak $h = 0.01$ s	14
2.3.6 Prikaz greške između stvarnog odziva i odziva dobivenog sa RK4 za korak $h = 0.01$ s	15
2.3.7 Odvojeni prikaz stvarnog odziva i odziva dobivenog sa RK4 za korak $h = 0.05$ s	15
2.3.8 Prikaz stvarnog odziva i odziva dobivenog sa RK4 za korak $h = 0.05$ s	15
2.3.9 Prikaz greške između stvarnog odziva i odziva dobivenog sa RK4 za korak $h = 0.05$ s	16
2.3.10 Odvojeni prikaz stvarnog odziva i odziva dobivenog sa RK4 za korak $h = 0.1$ s	16
2.3.11 Prikaz stvarnog odziva i odziva dobivenog sa RK4 za korak $h = 0.1$ s	16
2.3.12 Prikaz greške između stvarnog odziva i odziva dobivenog sa RK4 za korak $h = 0.1$ s	17
3.0.1 Područje stabilnosti <i>Eulero</i> ve metode	21
3.0.2 Područje stabilnosti <i>Runge - Kutta 4</i> metoda	23

Poglavlje 1

Općenito o Runge-Kutta metodama

Za opisivanje velikog broja matematskih modela koriste se obične diferencijalne jednačine. Međutim, veoma često obične diferencijalne jednačine nije moguće riješiti egzaktnim putem, te se iz tog razloga koriste određene numeričke metode za njihovo približno rješavanje. Upravo su Runge-Kutta metode jedne od najpoznatijih klasa metoda za numeričko rješavanje običnih diferencijalnih jednačina.

1.1 Osnovni pojmovi

Obična diferencijalna jednačina je oblika 1.1.1:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1.1.1)$$

Jednačina oblika 1.1.1 povezuje promjenljivu x , nepoznatu funkciju $y(x)$ i njene izvode $y'(x)$, $y''(x)$, ..., $y^{(n)}(x)$, pri čemu F označava poznatu funkciju više promjenljivih. Red najviše derivacije koja se pojavljuje u diferencijalnoj jednačini predstavlja red diferencijalne jednačine. Kod obične diferencijalne jednačine potrebno je naći nepoznatu funkciju jedne promjenljive $y(x)$.

Najjednostavnija obična diferencijalna jednačina je oblika 1.1.2:

$$y' = f(x) \quad (1.1.2)$$

U jednačini oblika 1.1.2 f je poznata funkcija koja je neprekidna na nekom intervalu $[a, b]$.

Obične diferencijalne jednačine mogu imati nijedno, jedno ili beskonačno mnogo rješenja. Za običnu diferencijalnu jednačinu oblika 1.1.3 je potreban i početni uvjet $y(x_0) = y_0$.

$$y' = f(x, y) \quad (1.1.3)$$

Obična diferencijalna jednačina skupa s početnim uvjetom čine Cauchyjev problem za jednačinu oblika 1.1.3. [1]

1.2 Opći oblik Runge-Kutta metoda

Ideja je da se diferencijalna jednačina oblika 1.1.3, uz dati početni uslov, na intervalu $[a, b]$ može riješiti ukoliko se interval podijeli na n jednakih dijelova, odnosno da važi 1.2.1:

$$h = \frac{b-a}{n} \quad (1.2.1)$$

Na osnovu 1.2.1, može se zaključiti da važe 1.2.2, odnosno 1.2.3:

$$h = x_{i+1} - x_i, \quad i = 0, \dots, n-1 \quad (1.2.2)$$

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, \dots, n \quad (1.2.3)$$

Vrijednost y_{i+1} u tački x_{i+1} se računa pomoću poznate vrijednosti y_i u tački x_i , pa dalje važi 1.2.4:

$$y_{i+1} = y_i + h\Phi(x_i, y_i, h; f) \quad i = 0, \dots, n-1 \quad (1.2.4)$$

Funkcija Φ se naziva funkcija prirasta. U zavisnosti od izbora funkcije prirasta, zavisit će i izbor Runge-Kutta metode.

Ako se funkcija Φ zapiše kao 1.2.5,

$$\Phi(x_i, y_i, h) = \sum_{j=1}^r \omega_j k_j(x_i, y_i, h) \quad (1.2.5)$$

dobije se opći oblik Runge-Kutta metode 1.2.6:

$$y_{i+1} = y_i + h \sum_{j=1}^r \omega_j k_j(x_i, y_i, h) \quad i = 0, \dots, n-1 \quad (1.2.6)$$

Članovi k_j su zadani kao 1.2.7:

$$k_j(x_i, y_i, h) = f \left(x_i + \alpha_j h, y_i + h \sum_{l=1}^{r-1} \beta_{jl} k_l(x_i, y_i, h) \right) \quad j = 1, \dots, r \quad (1.2.7)$$

Broj r predstavlja red metode. Red metode govori koliko se puta mora izračunati funkcija f u svakom koraku. Također, različit izbor koeficijenata ω_j , α_j i β_{jl} definira različitu Runge-Kutta metodu. [2]

1.3 Runge-Kutta metoda prvog reda

Koristeći opći oblik 1.2.6 Runge-Kutta metoda, pri čemu je $r = 1$, može se dobiti oblik 1.3.1:

$$y_{i+1} = y_i + h \sum_{j=1}^1 \omega_j k_j(x_i, y_i, h) = y_i + h \omega_1 k_1(x_i, y_i, h) \quad i = 0, \dots, n-1 \quad (1.3.1)$$

Koristeći izraze 1.2.7 i 1.3.1, može se dobiti oblik 1.3.2:

$$y_{i+1} = y_i + h \omega_1 f(x_i, y_i) \quad i = 0, \dots, n-1 \quad (1.3.2)$$

Ako se izraz $y_{i+1} = y(x_i + h)$ razvije u Tajlorov red oko tačke x_i , dobiva se oblik 1.3.3, pri čemu je $y'(x_i) = f(x_i, y_i)$ na osnovu izraza 1.1.3:

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y(x_i + h) = y(x_i) + \frac{y'(x_i)}{1!} h + \Theta(h^2) \quad i = 0, \dots, n-1 \\ y_{i+1} &= y_i + h f(x_i, y_i) + \Theta(h^2) \quad i = 0, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

Uz zanemarenje greške u gornjem izrazu, dobiva se oblik 1.3.4 koji predstavlja Runge-Kutta metod prvog reda (skraćeno RK-1 metod), ili drugačije rečeno Eulerov metod. [3]

$$y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i) \quad i = 0, \dots, n-1 \quad (1.3.4)$$

Primjer. Koristeći RK-1, odnosno Eulerov metod s korakom $h = 0.1$, za datu jednačinu 1.3.5 odrediti $y(0.2)$.

$$2y' + y = x \quad y(0) = 1 \quad (1.3.5)$$

Izrada primjera. Jednačina 1.3.5 se može zapisati i u obliku 1.3.6:

$$y' = \frac{x-y}{2} \quad y(0) = 1 \quad (1.3.6)$$

Ako se upotrijebi izraz 1.1.3, onda se jednačina može napisati i na način 1.3.7:

$$f(x,y) = \frac{x-y}{2} \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 1 \quad (1.3.7)$$

Koristeći oblik 1.3.4, može se dobiti rješenje $y_2 = y(0.2)$ pomoću 1.3.8 i 1.3.9.

$$\begin{aligned} x_0 &= 0, \quad y_0 = 1 \\ y_1 &= y_0 + hf(x_0, y_0) \\ y_1 &= 1 + 0.1 \cdot f(0, 1) \\ y_1 &= 0.95 \\ y_1 &= y(0.1) \end{aligned} \quad (1.3.8)$$

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + h = 0 + 0.1 = 0.1, \quad y_1 = 0.95 \\ y_2 &= y_1 + hf(x_1, y_1) \\ y_2 &= 0.95 + 0.1 \cdot f(0.1, 0.95) \\ y_2 &= 0.9075 \\ y_2 &= y(0.2) \end{aligned} \quad (1.3.9)$$

1.4 Runge-Kutta metode drugog reda

Koristeći opći oblik 1.2.6 Runge-Kutta metoda, pri čemu je $r = 2$, može se dobiti oblik 1.4.1:

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + h \sum_{j=1}^2 \omega_j k_j(x_i, y_i, h) \quad i = 0, \dots, n-1 \\ y_{i+1} &= y_i + h\omega_1 k_1(x_i, y_i, h) + h\omega_2 k_2(x_i, y_i, h) \quad i = 0, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (1.4.1)$$

Također, za $k_1(x_i, y_i, h)$ i $k_2(x_i, y_i, h)$ važe oblici 2.2.31 i 2.2.32 respektivno, koji su dobiveni iz izraza 1.2.7:

$$k_1(x_i, y_i, h) = f(x_i, y_i) \quad i = 0, \dots, n-1 \quad (1.4.2)$$

$$k_2(x_i, y_i, h) = f(x_i + \alpha_2 h, y_i + h\beta_{21}k_1(x_i, y_i, h)) \quad i = 0, \dots, n-1 \quad (1.4.3)$$

Potrebno je odrediti koeficijente ω_1 , ω_2 , α_2 i β_{21} . U zavisnosti od odabira navedenih parametara, dobiva se različita Runge-Kutta metoda drugog reda (ili skraćeno RK-2). Zaključuje se da postoji beskonačno mnogo metoda RK-2, za razliku od metode RK-1 koja je jednoznačno

određena.

Najčešća varijanta RK-2 metode za koeficijente uzima $\omega_1 = \frac{1}{2}$, $\omega_2 = \frac{1}{2}$, $\alpha_2 = 1$ i $\beta_{21} = 1$, pa se dobiva oblik 1.4.4:

$$\begin{aligned}y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{2}(k_1(x_i, y_i, h) + k_2(x_i, y_i, h)) & i = 0, \dots, n-1 \\k_1(x_i, y_i, h) &= f(x_i, y_i) & i = 0, \dots, n-1 \\k_2(x_i, y_i, h) &= f(x_i + h, y_i + hf(x_i, y_i)) & i = 0, \dots, n-1\end{aligned}\tag{1.4.4}$$

Također, veoma često se koristi RK-2 metoda koja za koeficijente uzima $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 1$, $\alpha_2 = \frac{1}{2}$ i $\beta_{21} = \frac{1}{2}$, pa se dobiva oblik 1.4.5: [3]

$$\begin{aligned}y_{i+1} &= y_i + hk_2(x_i, y_i, h) & i = 0, \dots, n-1 \\k_1(x_i, y_i, h) &= f(x_i, y_i) & i = 0, \dots, n-1 \\k_2(x_i, y_i, h) &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}f(x_i, y_i)\right) & i = 0, \dots, n-1\end{aligned}\tag{1.4.5}$$

Primjer. Koristeći RK-2 s korakom $h = 0.1$, za datu jednačinu 1.4.6 odrediti $y(0.2)$.

$$2y' + y = x \quad y(0) = 1\tag{1.4.6}$$

Izrada primjera. Jednačina 1.4.6 se može zapisati i u obliku 1.4.7:

$$y' = \frac{x-y}{2} \quad y(0) = 1\tag{1.4.7}$$

Ako se upotrijebi izraz 1.1.3, onda se jednačina može napisati i na način 1.4.8:

$$f(x, y) = \frac{x-y}{2} \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 1\tag{1.4.8}$$

Koristeći oblik 1.4.4, može se dobiti rješenje $y_2 = y(0.2)$ pomoću 1.4.9 i 1.4.10.

$$\begin{aligned}x_0 &= 0, \quad y_0 = 1 \\y_1 &= y_0 + \frac{h}{2}f(x_0, y_0) + \frac{h}{2}f(x_0 + h, y_0 + hf(x_0, y_0)) \\y_1 &= 1 + 0.05 \cdot f(0, 1) + 0.05 \cdot f(0.1, 1 + 0.1 \cdot f(0, 1)) \\y_1 &= 0.95375 \\y_1 &= y(0.1)\end{aligned}\tag{1.4.9}$$

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_0 + h = 0 + 0.1 = 0.1, \quad y_1 = 0.95375 \\
y_2 &= y_1 + \frac{h}{2}f(x_1, y_1) + \frac{h}{2}f(x_1 + h, y_1 + hf(x_1, y_1)) \\
y_2 &= 0.95375 + 0.05 \cdot f(0.1, 0.95375) + 0.05 \cdot f(0.1, 0.95375 + 0.1 \cdot f(0.1, 0.95375)) \\
y_2 &= 0.912129688 \\
y_2 &= y(0.2)
\end{aligned} \tag{1.4.10}$$

1.5 Runge-Kutta metode četvrtog reda

Koristeći opći oblik 1.2.6 Runge-Kutta metoda, pri čemu je $r = 4$, može se dobiti oblik 1.5.1:

$$\begin{aligned}
y_{i+1} &= y_i + h \sum_{j=1}^4 \omega_j k_j(x_i, y_i, h) \quad i = 0, \dots, n-1 \\
y_{i+1} &= y_i + h\omega_1 k_1(x_i, y_i, h) + h\omega_2 k_2(x_i, y_i, h) + h\omega_3 k_3(x_i, y_i, h) + h\omega_4 k_4(x_i, y_i, h)
\end{aligned} \tag{1.5.1}$$

Također, za $k_1(x_i, y_i, h)$, $k_2(x_i, y_i, h)$, $k_3(x_i, y_i, h)$ i $k_4(x_i, y_i, h)$ važe oblici 1.5.2, 1.5.3, 1.5.4 i 1.5.5 respektivno, koji su dobiveni iz izraza 1.2.7:

$$k_1(x_i, y_i, h) = f(x_i, y_i) \quad i = 0, \dots, n-1 \tag{1.5.2}$$

$$k_2(x_i, y_i, h) = f(x_i + \alpha_2 h, y_i + h\beta_{21} k_1(x_i, y_i, h)) \quad i = 0, \dots, n-1 \tag{1.5.3}$$

$$k_3(x_i, y_i, h) = f\{x_i + \alpha_3 h, y_i + h[\beta_{31} k_1(x_i, y_i, h) + \beta_{32} k_2(x_i, y_i, h)]\} \quad i = 0, \dots, n-1 \tag{1.5.4}$$

$$k_4(x_i, y_i, h) = f\{x_i + \alpha_4 h, y_i + h[\beta_{41} k_1(x_i, y_i, h) + \beta_{42} k_2(x_i, y_i, h) + \beta_{43} k_3(x_i, y_i, h)]\} \quad i = 0, \dots, n-1 \tag{1.5.5}$$

Potrebno je odrediti koeficijente $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta_{21}, \beta_{31}, \beta_{32}, \beta_{41}, \beta_{42}$ i β_{43} . U zavisnosti od odabira navedenih parametara, dobiva se različita Runge-Kutta metoda četvrtog reda (ili skraćeno RK-4).

Najčešća varijanta RK-4 metode, ili još poznate pod imenom "klasična Runge-Kutta metoda", za koeficijente uzima $\omega_1 = \frac{1}{6}, \omega_2 = \frac{2}{6}, \omega_3 = \frac{2}{6}, \omega_4 = \frac{1}{6}, \alpha_2 = \frac{1}{2}, \alpha_3 = \frac{1}{2}, \alpha_4 = 1, \beta_{21} = \frac{1}{2}$,

$\beta_{31} = 0, \beta_{32} = \frac{1}{2}, \beta_{41} = 0, \beta_{42} = 0$ i $\beta_{43} = 1$, pa se dobiva oblik 1.5.6: [2]

$$\begin{aligned}
 y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{6} (k_1(x_i, y_i, h) + 2k_2(x_i, y_i, h) + 2k_3(x_i, y_i, h) + k_4(x_i, y_i, h)) \\
 k_1(x_i, y_i, h) &= f(x_i, y_i) \quad i = 0, \dots, n-1 \\
 k_2(x_i, y_i, h) &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1(x_i, y_i, h)\right) \quad i = 0, \dots, n-1 \\
 k_3(x_i, y_i, h) &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_2(x_i, y_i, h)\right) \quad i = 0, \dots, n-1 \\
 k_4(x_i, y_i, h) &= f(x_i + h, y_i + hk_3(x_i, y_i, h)) \quad i = 0, \dots, n-1
 \end{aligned} \tag{1.5.6}$$

Primjer. Koristeći RK-4 s korakom $h = 0.1$, za datu jednačinu 1.5.7 odrediti $y(0.2)$.

$$2y' + y = x \quad y(0) = 1 \tag{1.5.7}$$

Izrada primjera. Jednačina 1.5.7 se može zapisati i u obliku 1.5.8:

$$y' = \frac{x-y}{2} \quad y(0) = 1 \tag{1.5.8}$$

Ako se upotrijebi izraz 1.1.3, onda se jednačina može napisati i na način 1.5.9:

$$f(x, y) = \frac{x-y}{2} \quad x_0 = 0, y_0 = 1 \tag{1.5.9}$$

Koristeći oblik 1.5.6, može se dobiti rješenje $y_2 = y(0.2)$ pomoću 1.5.10 i 1.5.11.

$$\begin{aligned}
 &x_0 = 0, y_0 = 1 \\
 y_1 &= y_0 + \frac{h}{6}f(x_0, y_0) + \frac{2h}{6}f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}f(x_0, y_0)\right) + \\
 &\quad + \frac{2h}{6}f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}f(x_0, y_0)\right)\right) + \\
 &\quad + \frac{h}{6}f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}f(x_0, y_0)\right)\right)\right) \\
 &y_1 = 0.95369 \\
 &y_1 = y(0.1)
 \end{aligned} \tag{1.5.10}$$

$$\begin{aligned}x_1 &= x_0 + h = 0.1, \quad y_1 = 0.95369 \\y_2 &= y_1 + \frac{h}{6}f(x_1, y_1) + \frac{2h}{6}f\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{h}{2}f(x_1, y_1)\right) + \\&\quad + \frac{2h}{6}f\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{h}{2}f\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{h}{2}f(x_1, y_1)\right)\right) + \\&\quad + \frac{h}{6}f\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + hf\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{h}{2}f\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{h}{2}f(x_1, y_1)\right)\right)\right)\end{aligned}\tag{1.5.11}$$
$$\begin{aligned}y_2 &= 0.91451 \\y_2 &= y(0.2)\end{aligned}$$

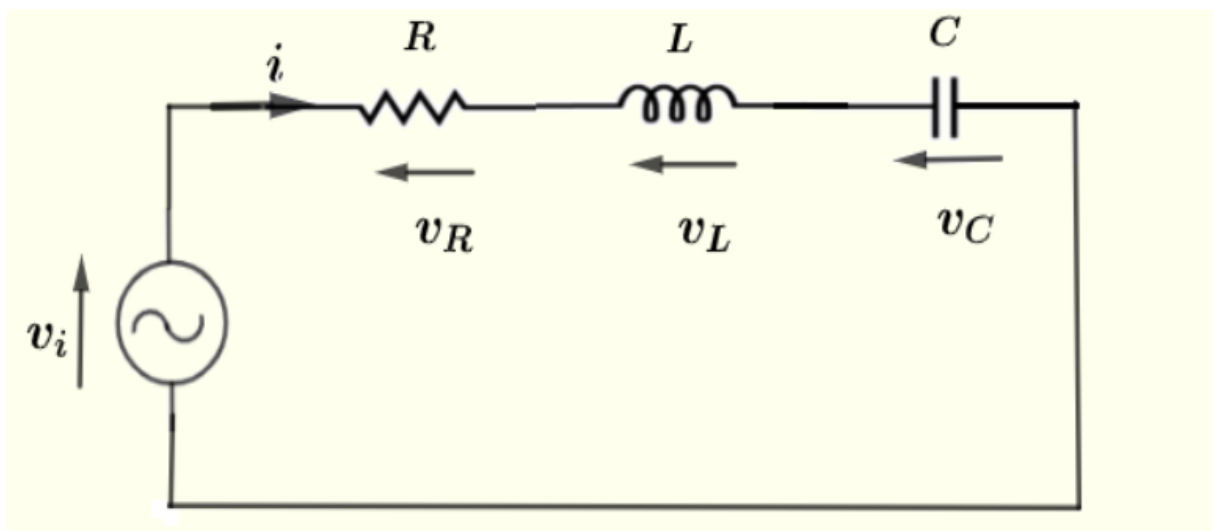
* * *

Na osnovu izloženog može se zaključiti da su metode Runge-Kutta vrlo pogodne za dobivanje približnog rješenja obične diferencijalne jednačine. Naravno, ukoliko običnu diferencijalnu jednačinu nije moguće riješiti egzaktnim putem, onda Runge-Kutta metode dobivaju na značaju jer daju približno rješenje. Glavna ideja je da se segment $[a, b]$ na kojem se želi pronaći rješenje obične diferencijalne jednačine, podijeli na n dijelova s korakom h . Na osnovu početnih vrijednosti x_0 i y_0 moguće je dobiti vrijednost y_1 u tački x_1 , zatim na osnovu dobivenih x_1 i y_1 moguće je dobiti vrijednost y_2 u tački x_2 . Postupak se dalje ponavlja, pri čemu se u konačnosti dobije n vrijednosti rješenja diferencijalne jednačine u n tačaka. Jasno je da se odabirom manjeg koraka i većeg reda metode Runge-Kutta dobiva bolja aproksimacija. Međutim, ne treba zanemariti činjenicu da se za manji korak i veći red metode dobiva složeniji algoritam rješavanja obične diferencijalne jednačine.

Poglavlje 2

Matematički model serijskog RLC kola

Kao konkretan problem koji je potrebno riješiti, odabrano je RLC kolo. Svi elementi su u serijskoj vezi, kao što je prikazano na slici 2.0.1.



Slika 2.0.1: Shema RLC kola

2.1 Izvođenje diferencijalne jednačine

Primjenom Kirchhoffovog zakona napona dobije se sljedeća jednačina 2.1.1:

$$0 = v_i - v_r - v_l - v_c \quad (2.1.1)$$

Prebacivanjem ulaznog napona na lijevu stranu, jednačina poprima oblik 2.1.2:

$$v_i = v_r + v_l + v_c \quad (2.1.2)$$

$$v_l = L \frac{di}{dt} \quad (2.1.3)$$

$$v_i = i \cdot R + L \frac{di}{dt} + v_c \quad (2.1.4)$$

$$i = i_c = C \frac{dv_c}{dt} \quad (2.1.5)$$

$$v_i = RC \frac{dv_c}{dt} + LC \frac{d^2 v_c}{dt^2} + v_c \quad (2.1.6)$$

$$\frac{v_i}{LC} = \ddot{v}_c + \frac{R}{L} \dot{v}_c + \frac{1}{LC} v_c \quad (2.1.7)$$

2.2 Rješavanje jednačine

Potrebno je pronaći homogeno rješenje jednačine 2.1.7:

$$\ddot{v}_c + \frac{R}{L} \dot{v}_c + \frac{1}{LC} v_c = 0 \quad (2.2.1)$$

$$v_c = e^{\lambda t} \quad (2.2.2)$$

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + \frac{R}{L} e^{\lambda t} + \frac{1}{LC} e^{\lambda t} = 0 \quad (2.2.3)$$

$$\lambda^2 + \frac{R}{L} + \frac{1}{LC} = 0 \quad (2.2.4)$$

$$\lambda_{12} = \frac{-\frac{R}{L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}}}{2} \quad (2.2.5)$$

$$D = \frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC} \quad (2.2.6)$$

$$\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC} > 0 \quad (2.2.7)$$

$$R^2 C - 4L > 0 \quad (2.2.8)$$

$$R^2 C > 4L \quad (2.2.9)$$

Odziv će biti aperiodski ako je zadovoljena relacija 2.2.10:

$$RC > 4 \frac{L}{R} \quad (2.2.10)$$

Ukoliko je zadovoljena relacija 2.2.11, onda će odziv biti oscilatorni sa prigušenjem.

$$RC < 4\frac{L}{R} \quad (2.2.11)$$

Odziv će biti granično aperiodski ako je zadovoljena relacija 2.2.12:

$$RC = 4\frac{L}{R} \quad (2.2.12)$$

Razmatra se oscilatorni slučaj 2.2.11:

$$\lambda_{12} = \frac{-\frac{R}{L} \pm \sqrt{D}}{2} = -\frac{R}{2L} \pm \frac{j\sqrt{|D|}}{2} = -\beta \pm j\omega_1 \quad (2.2.13)$$

$$y_h = Ae^{(-\beta+j\omega_1)t} + \tilde{A}e^{(-\beta-j\omega_1)t} = e^{-\beta t} (A_1 \sin \omega_1 t + A_2 \cos \omega_1 t)^1 \quad (2.2.14)$$

Proračun partikularnog rješenja:

$$u = A + a \sin(\omega_2 t) \quad (2.2.15)$$

$$y_p = K + k_1 \sin(\omega_2 t) + k_2 \cos(\omega_2 t) \quad (2.2.16)$$

$$\dot{y}_p = k_1 \omega_2 \cos(\omega_2 t) - k_2 \omega_2 \sin(\omega_2 t) \quad (2.2.17)$$

$$\ddot{y}_p = -k_1 \omega_2^2 \sin(\omega_2 t) - k_2 \omega_2^2 \cos(\omega_2 t) \quad (2.2.18)$$

$$\ddot{y}_p + \frac{R}{L}\dot{y}_p + \frac{1}{LC}y_p = \frac{A + a \sin(\omega_2 t)}{LC} \quad (2.2.19)$$

$$\begin{aligned} & -k_1 \omega_2^2 \sin(\omega_2 t) - k_2 \omega_2^2 \cos(\omega_2 t) + \frac{R}{L}(k_1 \omega_2 \cos(\omega_2 t) - k_2 \omega_2 \sin(\omega_2 t)) \\ & + \frac{1}{LC}(K + k_1 \sin(\omega_2 t) + k_2 \cos(\omega_2 t)) = \frac{K}{LC} = \frac{A}{LC} \implies K = A \end{aligned} \quad (2.2.20)$$

$$\frac{a}{LC} = -k_1 \omega_2^2 + \frac{R}{L}k_2 \omega_2 + \frac{k_1}{LC} \quad (2.2.21)$$

$$-k_2 \omega_2^2 + \frac{R}{L}k_1 \omega_2 + \frac{k_2}{LC} = 0 \quad (2.2.22)$$

¹pošto su svojstvene vrijednosti λ_1 i λ_2 konjugovano-kompleksne vrijednosti, onda su i koeficijenti koji idu uz njih konjugovano-kompleksne vrijednosti A i \tilde{A}

$$\frac{a}{LC} = -k_1 \left(\omega_2^2 - \frac{1}{LC} \right) - \frac{R}{L} k_2 \omega_2 \quad (2.2.23)$$

$$-k_2 \left(\omega_2^2 - \frac{1}{LC} \right) + \frac{R}{L} \omega_2 k_1 = 0 \quad (2.2.24)$$

$$\frac{a}{LC} = -k_1 v_1 - v_2 k_2 \quad (2.2.25)$$

$$0 = -k_2 v_1 + v_2 k_1 \quad (2.2.26)$$

$$\frac{a}{LC} = -k_1 v_1 - k_2 v_2 \quad (2.2.27)$$

$$0 = -k_2 v_1 + k_1 v_2 \quad (2.2.28)$$

Matrični zapis relacija 2.2.27 i 2.2.28:

$$\begin{bmatrix} -\frac{a}{LC} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ -v_2 & v_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \quad (2.2.29)$$

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ -v_2 & v_1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\frac{a}{LC} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.2.30)$$

Konačno rješenje diferencijalne jednačine:

$$y = y_h + y_p \quad (2.2.31)$$

$$y = K + k_1 \sin(\omega_2 t) + k_2 \cos(\omega_2 t) \quad (2.2.32)$$

$$y = e^{-\beta t} (A_1 \sin(\omega_1 t) + A_2 \cos(\omega_1 t)) + K + k_1 \sin(\omega_2 t) + k_2 \cos(\omega_2 t) \quad (2.2.33)$$

$$y(0) = A_2 + K + k_2 \implies A_2 = y(0) - K - k_2 \quad (2.2.34)$$

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) = & -\beta e^{-\beta t} (A_2 \sin(\omega_1 t) + A_2 \cos(\omega_1 t)) + e^{-\beta t} (A_2 \omega_1 \cos(\omega_1 t) \\ & - A_2 \omega_1 \sin(\omega_1 t)) + k_1 \omega_2 \cos(\omega_2 t) - k_2 \omega_2 \sin(\omega_2 t) \end{aligned} \quad (2.2.35)$$

$$\dot{y}(0) = -\beta A_2 + A_1 \omega_1 + k_1 \omega_2 \quad (2.2.36)$$

$$A_1 = \frac{1}{\omega_1} (\dot{y}(0) + \beta A_2 - k_1 \omega_2) \quad (2.2.37)$$

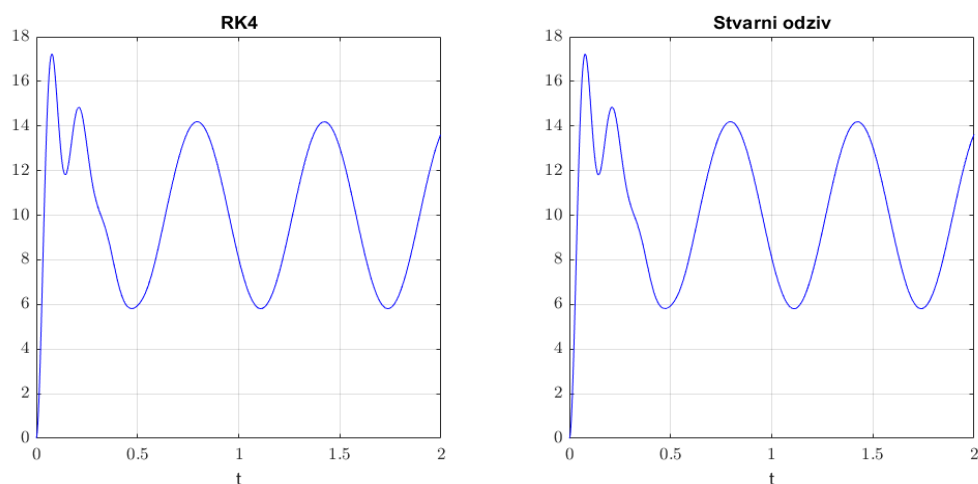
2.3 Poređenje stvarnog odziva i odziva dobivenog RK4 metodom

U nastavku će biti analiziran odziv RLC kruga, pri čemu su pojedine vrijednosti u krugu uzete proizvoljno s ciljem da se dobije prigušeno oscilatoran odziv. Vrijednosti su date ispod:

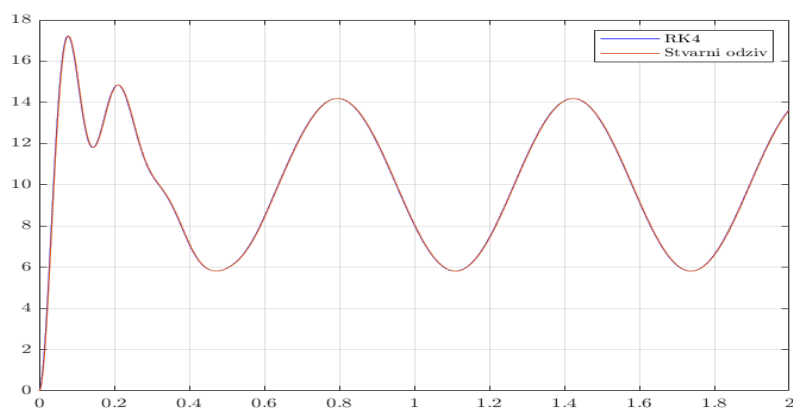
- $R = 10 \, \Omega$,
- $C = 1 \, \mu F$ i
- $L = 0.5 \, H$.

Prilikom analize mijenjat će se diskretni vremenski korak solvera h .

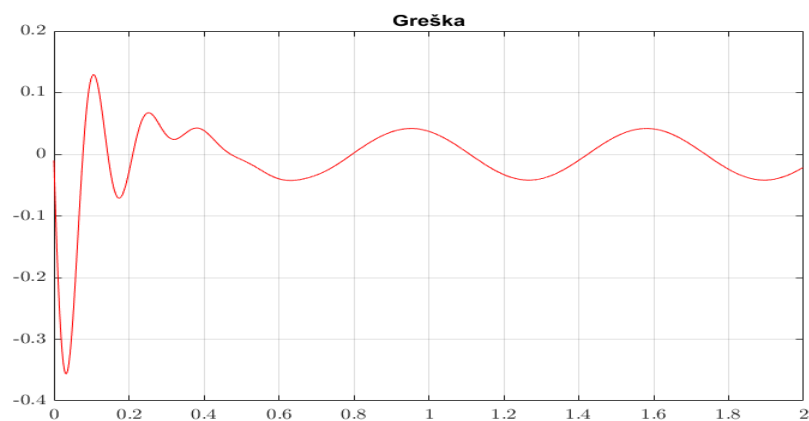
1. $h = 0.001 \, s$



Slika 2.3.1: Odvojeni prikaz stvarnog odziva i odziva dobivenog sa RK4 za korak $h = 0.001 \, s$

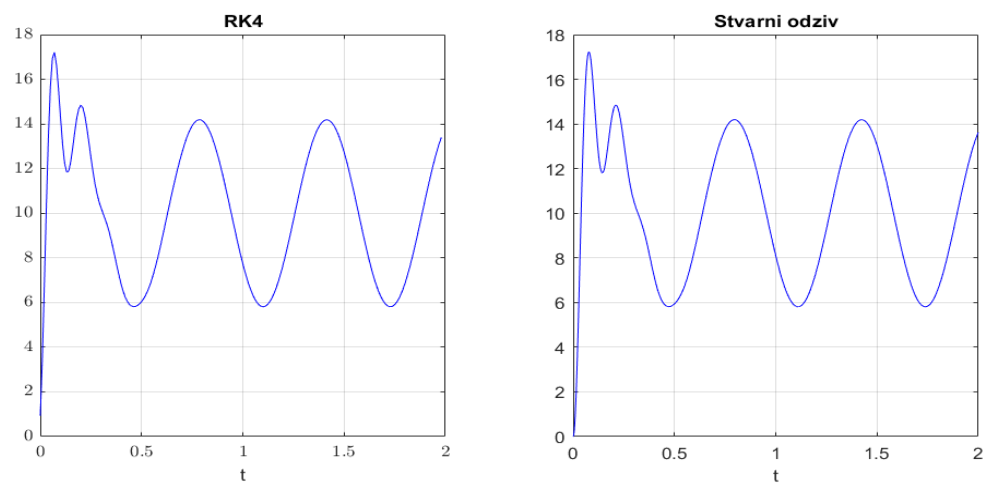


Slika 2.3.2: Prikaz stvarnog odziva i odziva dobivenog sa RK4 za korak $h = 0.001 \, s$

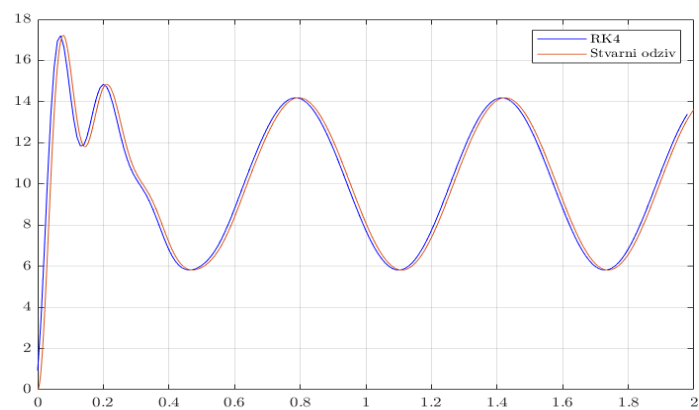


Slika 2.3.3: Prikaz greške između stvarnog odziva i odziva dobivenog sa RK4 za korak $h = 0.001$ s

2. $h = 0.01$ s



Slika 2.3.4: Odvojeni prikaz stvarnog odziva i odziva dobivenog sa RK4 za korak $h = 0.01$ s

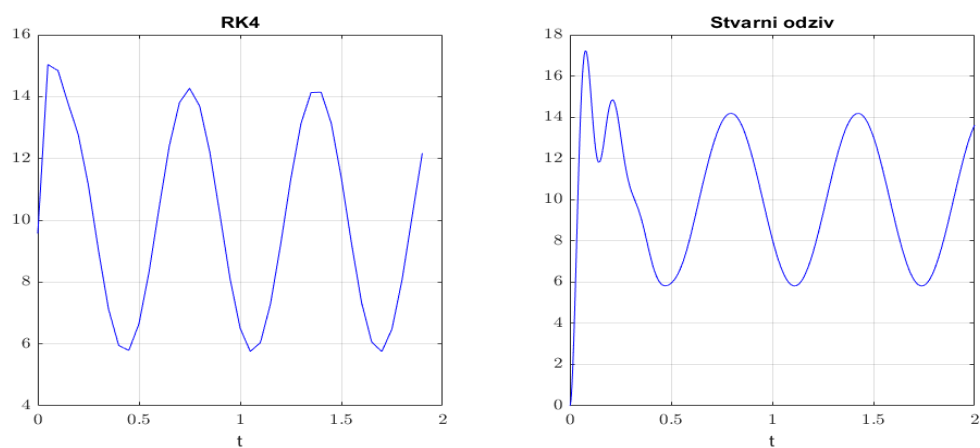


Slika 2.3.5: Prikaz stvarnog odziva i odziva dobivenog sa RK4 za korak $h = 0.01$ s

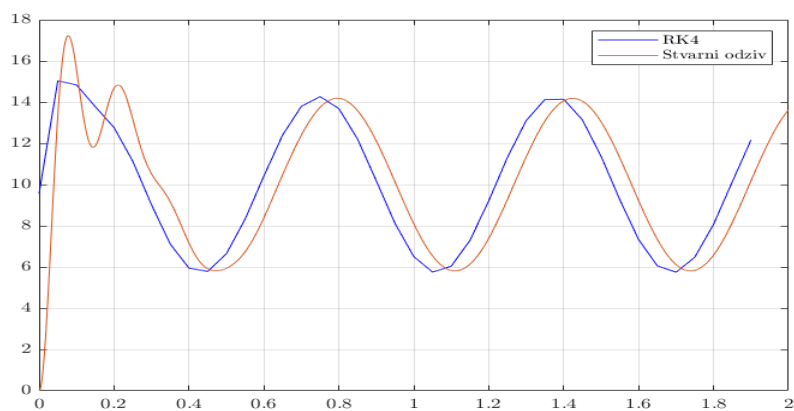


Slika 2.3.6: Prikaz greške između stvarnog odziva i odziva dobivenog sa RK4 za korak $h = 0.01$ s

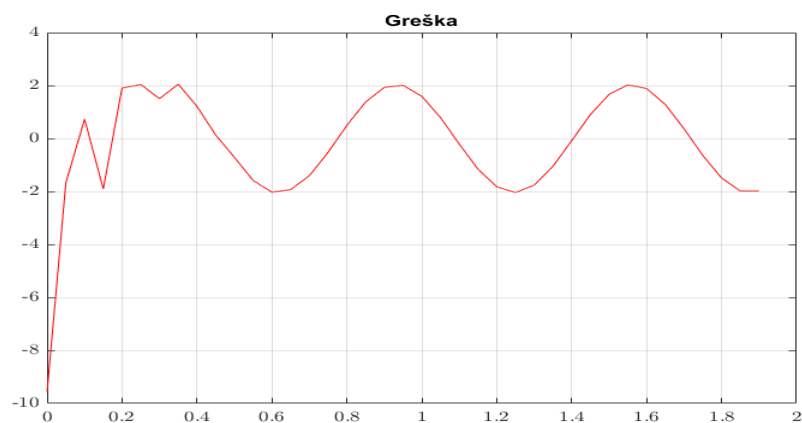
3. $h = 0.05$ s



Slika 2.3.7: Odvojeni prikaz stvarnog odziva i odziva dobivenog sa RK4 za korak $h = 0.05$ s

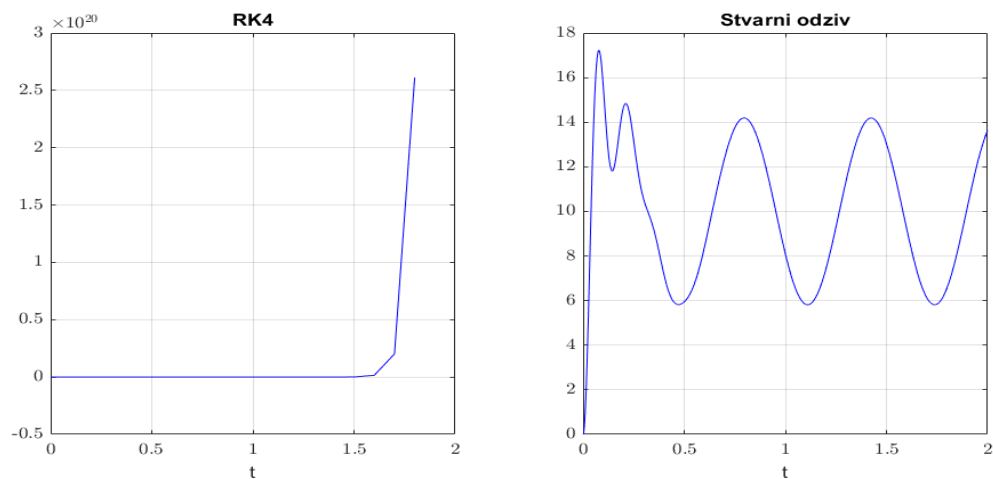


Slika 2.3.8: Prikaz stvarnog odziva i odziva dobivenog sa RK4 za korak $h = 0.05$ s

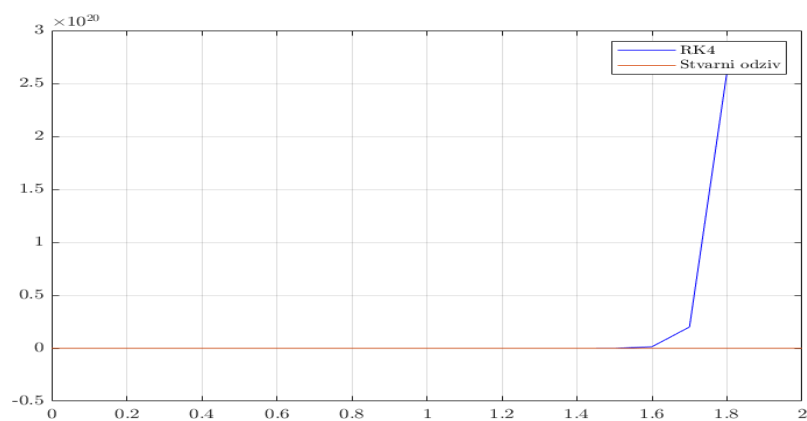


Slika 2.3.9: Prikaz greške između stvarnog odziva i odziva dobivenog sa RK4 za korak $h = 0.05$ s

4. $h = 0.1$ s



Slika 2.3.10: Odvojeni prikaz stvarnog odziva i odziva dobivenog sa RK4 za korak $h = 0.1$ s



Slika 2.3.11: Prikaz stvarnog odziva i odziva dobivenog sa RK4 za korak $h = 0.1$ s



Slika 2.3.12: Prikaz greške između stvarnog odziva i odziva dobivenog sa RK4 za korak $h = 0.1$ s

Iz priloženih slika se jasno vidi da tačnost metode direktno ovisi o odabranom koraku h , kao i o brzini promjene odziva. Bitno je napomenuti da za neke korake, u ovom slučaju je to korak $h = 0.1$, odziv sistema divergira, dok stvarni odziv konvergira. Što znači da stabilnost sistema u kontinualanom domenu ne implicira njegovu stabilnost u diskretnom domenu, pa je potrebno izvršiti analizu numeričkih metoda.

Poglavlje 3

Analiza stabilnosti za Runge-Kutta 4 metod

Na osnovu priloženog iz prethodnog poglavlja, može se zaključiti da stabilnost sistema u kontinualnom domenu, ne znači njegovu stabilnost u diskretnom domenu. Za početak će biti napravljen uvod u samu stabilnost sistema, pri čemu će se analiza bazirati na analizi autonomnih sistema¹.

Posmatra se linearan sistem dat jednačinom 3.0.1:

$$\dot{y}(t) = \lambda y(t) \quad (3.0.1)$$

Opće je poznato da je ovaj sistem stabilan za $\lambda < 0$, odnosno odziv sistema $y(t) \rightarrow 0$ kada $t \rightarrow \infty$. Postavlja se pitanje kako ovaj zaključak iz kontinualanog domena prenijeti u diskretni domen. Odgovor je jako jednostavan i leži u činjenici da se sve numeričke metode koje pripadaju familiji Runge-Kutta metoda mogu zapisati u obliku 3.0.2:

$$y_{k+1} = R(h\lambda)y_k \quad (3.0.2)$$

U izrazu 3.0.2 h je diskretni korak, dok je λ svojstvena vrijednost. Ako se postavi zahtjev kao za kontinulani domen, odnosno $y(t) \rightarrow 0$ kada $t \rightarrow \infty$, što je analogno $y_{k+1} \rightarrow 0$ kada $k \rightarrow \infty$ u diskretnom domenu, moguće je izdvojiti 3 slučaja za funkciju $R(h\lambda)$:

1. $|R(h\lambda)| < 1$ - što će uzrokovati da sa svakom iteracijom, y_k postaje manje i u konačnici teži nuli ($y_{k+1} < y_k$),
2. $|R(h\lambda)| = 1$ - što će uzrokovati da je $y_{k+1} = y_k$, te je odziv konstantan,
3. $|R(h\lambda)| > 1$ - što će uzrokovati stalan rast y_k , odnosno $y_k \rightarrow \infty$, što znači da je sistem nestabilan ($y_{k+1} > y_k$).

¹Autonomni sistem - sistem bez ulaznih poremećaja, odnosno svi poremećaji u ovakvom sistemu su posljedica početnih uvjeta

Može se zaključiti da za metodu čiju stabilnost je potrebno ispitati, nužno je izvesti izraz za *funkciju stabilnosti*, odnosno $R(h\lambda)$ te postaviti uvjet $|R(h\lambda)| < 1$ kako bi sistem bio asimptot-ski stabilan ili $|R(h\lambda)| \leq 1$ ako se zahtijeva isključivo stabilnost.

U nastavku će biti analizirana stabilnost linearnog slučaja.

Neka je dat linearni sistem jednačina sa 3.0.3.:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y} \quad (3.0.3)$$

gdje je $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrica svojstvenih vrijednosti. Rješenje ovog sistema je dato kao 3.0.4:

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i \cdot t} \mathbf{u}_i \quad (3.0.4)$$

gdje su C_i koeficijenti, a \mathbf{u}_i odgovarajući vektori svojstvenih vrijednosti. Stabilnost sistema ovisi o položaju svojstvenih vrijednosti u kompleksnoj ravni. Ako sve svojstvene vrijednosti leže u lijevoj poluravni, sistem je stabilan u smislu *Lyapunova*.

Ako bi se problem dat sa 3.0.3. želio riješiti numerički korištenjem *Eulerove* metode dobio, bi se sljedeći sistem jednačina:

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k + h\mathbf{A}\mathbf{y}_k \quad (3.0.5)$$

$$\mathbf{y}_{k+1} = (\mathbf{I} + h\mathbf{A}) \mathbf{y}_k \quad (3.0.6)$$

Ako se sada \mathbf{y}_k napiše preko svojstvenih vektora dobije se sljedeće:

$$\mathbf{y}_k = \alpha_1^{(k)} \mathbf{u}_1 + \alpha_2^{(k)} \mathbf{u}_2 + \dots + \alpha_n^{(k)} \mathbf{u}_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i^{(k)} \mathbf{u}_i \quad (3.0.7)$$

Ukoliko se izraz za \mathbf{y}_k vrati u izraz za *Eulerov* metod, dobije se izraz 3.0.8:

$$\mathbf{y}_{k+1} = (\mathbf{I} + h\mathbf{A}) \sum_{i=1}^n \alpha_i^{(k)} \mathbf{u}_i \quad (3.0.8)$$

Pošto je \mathbf{u}_i svojstveni vektor matrice \mathbf{A} , primjenom pravila 3.0.9:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_i = \lambda_i \cdot \mathbf{u}_i \quad (3.0.9)$$

za i - ti element sume moguće je pisati:

$$(\mathbf{I} + h\mathbf{A}) \mathbf{u}_i = \mathbf{u}_i + h\mathbf{A}\mathbf{u}_i = (1 + h\lambda_i) \mathbf{u}_i \quad (3.0.10)$$

Sada je moguće napisati sljedeći izraz za \mathbf{y}_{k+1} :

$$\mathbf{y}_{k+1} = \sum_{i=1}^n \alpha_i^{(k)} (1 + h\lambda_i) \mathbf{u}_i \quad (3.0.11)$$

Također je moguće napisati:

$$\mathbf{y}_{k+1} = \sum_{i=1}^n \alpha_i^{(k+1)} \mathbf{u}_i \quad (3.0.12)$$

odnosno:

$$\alpha_i^{(k+1)} = \alpha_i^{(k)} (1 + h\lambda_i) \quad (3.0.13)$$

Nadalje se može očitati funkcija stabilnosti za *Eulerov* metod:

$$R(h\lambda_i) = 1 + h\lambda_i \quad (3.0.14)$$

Ukoliko se nametne uslov $|R(h\lambda_i)| \leq 1$, slijedi da je sistem stabilan ako vrijedi:

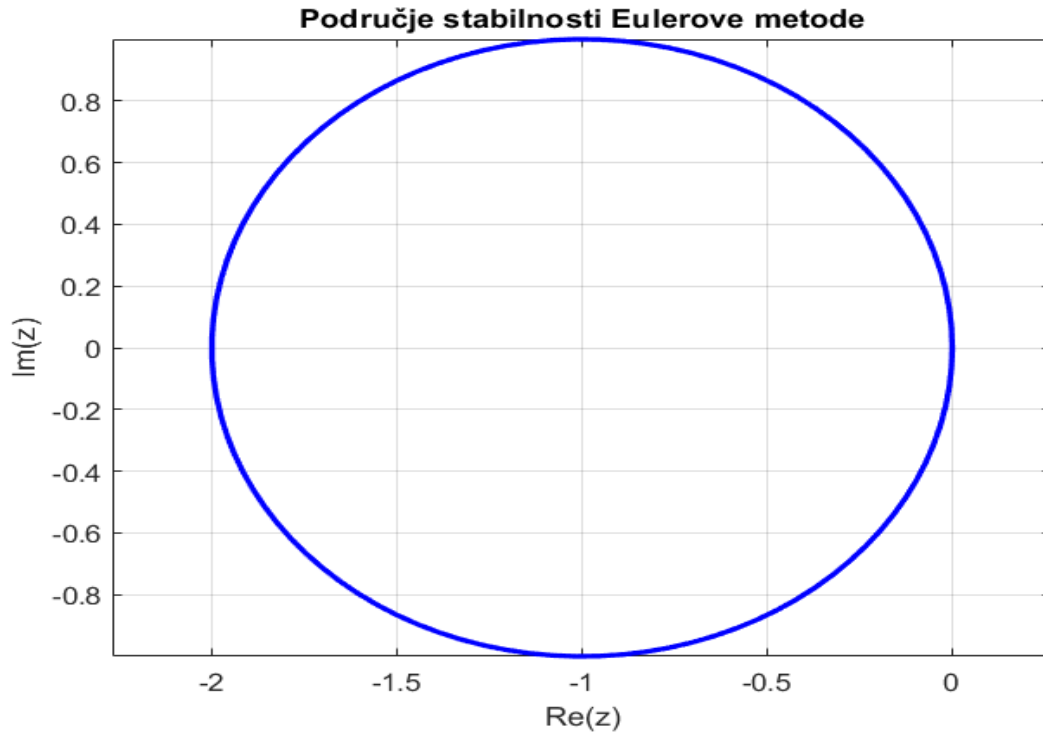
$$|1 + h\lambda_i| \leq 1 \quad (3.0.15)$$

Tačnije, sistem je asimptotski stabilan ako vrijedi:

$$|1 + h\lambda_i| < 1 \quad (3.0.16)$$

Uslov za stabilnost Eulerove metode se sastoji u tome, da za svaku svojstvenu vrijednost λ_i matrice A , $h\lambda_i$ mora ležati unutar kružnice poluprečnika 1 s centrom u $z = -1$ u kompleksnoj ravlini.

Na slici 3.0.1. prikazano je područje stabilnosti *Eulerove metode*.



Slika 3.0.1: Područje stabilnosti *Eulerove metode*

Kako bi se analizirala stabilnost *RK4* metoda potrebno je dobiti istu ovisnost između \mathbf{y}_{k+1} i \mathbf{y}_k , odnosno potrebno je izvesti izraz za funkciju stabilnosti.

Ako se primijeni *RK4* metod na problem dat jednačinom , dobije se:

$$\mathbf{k}_1 = h\mathbf{F}(t_k, \mathbf{y}_k) = h\mathbf{A} \cdot \mathbf{y}_k \quad (3.0.17)$$

$$\mathbf{k}_2 = h\mathbf{F}\left(t_k + \frac{h}{2}, \mathbf{y}_k + \frac{\mathbf{k}_1}{2}\right) = \left(h\mathbf{A} + \frac{h^2\mathbf{A}^2}{2}\right) \mathbf{y}_k \quad (3.0.18)$$

$$\mathbf{k}_3 = h\mathbf{F}\left(t_k + \frac{h}{2}, \mathbf{y}_k + \frac{\mathbf{k}_2}{2}\right) = \left(h\mathbf{A} + \frac{h^2\mathbf{A}^2}{2} + \frac{h^3\mathbf{A}^3}{4}\right) \mathbf{y}_k \quad (3.0.19)$$

$$\mathbf{k}_4 = h\mathbf{F}(t_k, \mathbf{y}_k + \mathbf{k}_3) = \left(h\mathbf{A} + h^2\mathbf{A}^2 + \frac{h^3\mathbf{A}^3}{2} + \frac{h^4\mathbf{A}^4}{4}\right) \mathbf{y}_k \quad (3.0.20)$$

Izraz za *RK4* je:

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k + \frac{\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4}{6} \quad (3.0.21)$$

Uvrštavanjem prethodno navedenih izraza dobije se sljedeće jednačina:

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k + \frac{1}{6} \left(6h\mathbf{A} + 3h^2\mathbf{A}^2 + h^3\mathbf{A}^3 + \frac{h^4\mathbf{A}^4}{4} \right) \mathbf{y}_k \quad (3.0.22)$$

$$\mathbf{y}_{k+1} = \left(\mathbf{I} + h\mathbf{A} + \frac{h^2\mathbf{A}^2}{2} + \frac{h^3\mathbf{A}^3}{6} + \frac{h^4\mathbf{A}^4}{24} \right) \mathbf{y}_k \quad (3.0.23)$$

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{G}(h)\mathbf{y}_k \quad (3.0.24)$$

gdje je:

$$\mathbf{G}(h) = \mathbf{I} + h\mathbf{A} + \frac{h^2\mathbf{A}^2}{2} + \frac{h^3\mathbf{A}^3}{6} + \frac{h^4\mathbf{A}^4}{24} \quad (3.0.25)$$

Ako se sada vrijednost \mathbf{y}_k zamijeni sa 3.0.7, dobije se:

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{G}(h) \sum_{i=1}^n \alpha_i^{(k)} \mathbf{u}_i \quad (3.0.26)$$

Na i -ti član sume može se primijeniti izraz 3.0.9, pa slijedi:

$$\mathbf{G}(h)\mathbf{u}_i = \left(\mathbf{I} + h\mathbf{A} + \frac{h^2\mathbf{A}^2}{2} + \frac{h^3\mathbf{A}^3}{6} + \frac{h^4\mathbf{A}^4}{24} \right) \mathbf{u}_i \quad (3.0.27)$$

$$\mathbf{G}(h)\mathbf{u}_i = \left(1 + h\lambda_i + \frac{h^2\lambda_i^2}{2} + \frac{h^3\lambda_i^3}{6} + \frac{h^4\lambda_i^4}{24} \right) \mathbf{u}_i \quad (3.0.28)$$

$$\mathbf{G}(h)\mathbf{u}_i = R(h\lambda_i)\mathbf{u}_i \quad (3.0.29)$$

Sada vrijednost \mathbf{y}_{k+1} iznosi:

$$\mathbf{y}_{k+1} = \sum_{i=1}^n \alpha_i^{(k)} R(h\lambda_i) \mathbf{u}_i \quad (3.0.30)$$

Izraz 3.0.30 se može napisati u obliku 3.0.31:

$$\mathbf{y}_{k+1} = \sum_{i=1}^n \alpha_i^{(k+1)} \mathbf{u}_i \quad (3.0.31)$$

Važi da je:

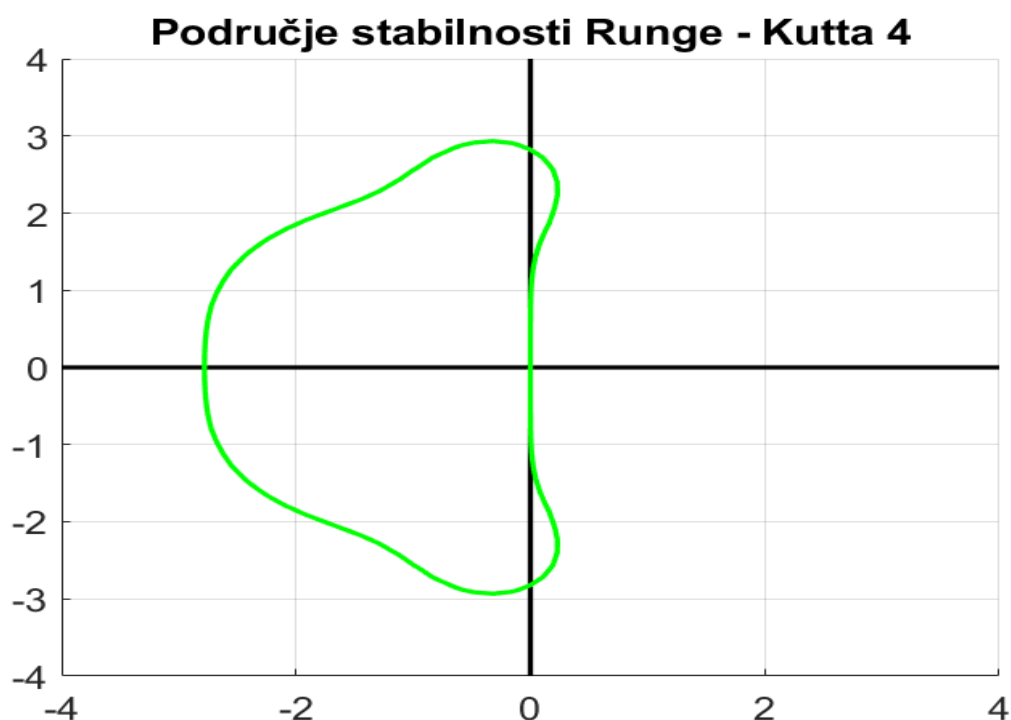
$$\alpha_i^{(k+1)} = \alpha_i^{(k)} R(h\lambda_i) \quad (3.0.32)$$

Ponovo je za stabilnost potrebno da vrijedi:

$$|R(h\lambda_i)| \leq 1 \quad (3.0.33)$$

$$\left| 1 + h\lambda_i + \frac{h^2\lambda_i^2}{2} + \frac{h^3\lambda_i^3}{6} + \frac{h^4\lambda_i^4}{24} \right| \leq 1 \quad (3.0.34)$$

Smjenom $h\lambda_i = z$, gdje $z \in \mathbb{C}$, dobije se kriva u kompleksnoj ravni koja opisuje područje stabilnosti za *Runge-Kutta 4* metod (slika 3.0.2). Za stabilnost sistem je ponovo potrebno da sve svojstvene vrijednosti λ_i leže unutar krive date jednačinom 3.0.34.



Slika 3.0.2: Područje stabilnosti *Runge - Kutta 4* metoda

Opće je poznato da sistem opisan jednačinom 3.0.35

$$\dot{x} = \lambda x \quad (3.0.35)$$

ima stabilno ishodište ako λ leži u lijevom dijelom kompleksne ravni. Za numeričke metode ishodište je stabilno ako $h\lambda$ leže u lijevoj poluravni. Za RK4 metod potrebno je ograničiti vrijednosti koraka h na dovoljno male vrijednosti kako bi $R(h\lambda) \leq 1$. Postavlja se pitanje da li će sistem biti stabilan, ako ima svojstvenu vrijednost koja leži na imaginarnoj osi.

Posmatra se sistem opisan jednačinom 3.0.36:

$$\dot{x} = i\omega x \quad (3.0.36)$$

Za spomenuti sistem *Eulerov metod* je vrlo loš izbor, jer proizvod $h\lambda$ ne 'gura' λ prema ishodištu, odnosno funkcija stabilnosti za *Eulerov metod* nikada neće završiti unutar kružnice date na slici 3.0.1. Međutim, *RK4 metod* može i u ovom slučaju 'gurnuti' λ prema ishodištu kako bi se zadovoljio uslov stabilnosti $|R(h\lambda)| \leq 1$, odnosno kako bi RK4 funkcija stabilnosti završila unutar oblasti 3.0.2.

Ispod su definisane dvije osobine stabilnosti numeričkih metoda:

1. A - stabilnost - numerička metoda ima svojstvo da je ishodište stabilno bez obzira na veličinu koraka,
2. L - stabilnost - numerička metoda ima ovo svojstvo ako je A - stabilna i ako vrijedi $R(h\lambda) \rightarrow 0$ kada $h\lambda \rightarrow \infty$.

Za kontinualni sistem dat jednačinom 3.0.37

$$\dot{x} = \lambda x \quad (3.0.37)$$

odziv će rapidno brzo opadati ako $\lambda \rightarrow -\infty$.

Poglavlje 4

Prilozi

Kao prilog ovom radu bit će dat link za github repositorij na kojem se nalazi čitav kod solvera koji je implementiran u C++ programskom jeziku:
<https://github.com/Spago123/Runge-Kutta-LinearODEsolver>.

Poglavlje 5

Zaključak

Na osnovu izloženog može se zaključiti da su metode Runge-Kutta vrlo pogodne za dobivanje približnog rješenja obične diferencijalne jednačine. Naravno, ukoliko običnu diferencijalnu jednačinu nije moguće riješiti egzaktnim putem, onda Runge-Kutta metode dobivaju na značaju jer daju približno rješenje.

Poznato je da se svaki električni krug koji ima L i C komponente, može opisati pomoću običnih diferencijalnih jednačina. To dovodi do zaključka da se RLC kola mogu rješavati koristeći neki od Runge-Kutta metoda. Samim time, moguće je napraviti šablon za rješavanje RLC krugova, koji se nadalje može implementirati u nekom od viših programskih jezika.

Literatura

- [1] Senada Kalabušić, E. P., Obične diferencijalne jednačbe. Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Sarajevu, 2014, dostupno na: https://mehmednurkanovic.com/wp-content/uploads/2017/07/Obicne_diferencijalne_jednadzbe_Senada_Kalabusic_Esmir_Pilav.pdf
- [2] Maksimović, A., Numeričke metode. Institut Ruđer Bošković, 2006, dostupno na: <https://www2.irb.hr/korisnici/maks/pdf/tjedan7.pdf>
- [3] Ćosić, D., Runge-Kutta metode za numeričko rješavanje diferencijalnih jednačbi. Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku, 2018, dostupno na: <https://repozitorij.mathos.hr/islandora/object/mathos%3A235/datastream/PDF/view>