随机过程

现实世界中的许多随机性现象是随时间的变化而发生改变的，即动态随机性现象，我们称这种随时间的变化而改变的随机现象为随机过程。其实质是刻画动态随机现象的随机变量与时间有关.

第一讲　随机过程的基本概念

第二讲　平稳随机过程

第三讲　马尔可夫随机过程

第一讲　随机过程的基本概念

一、随机过程及其统计特性

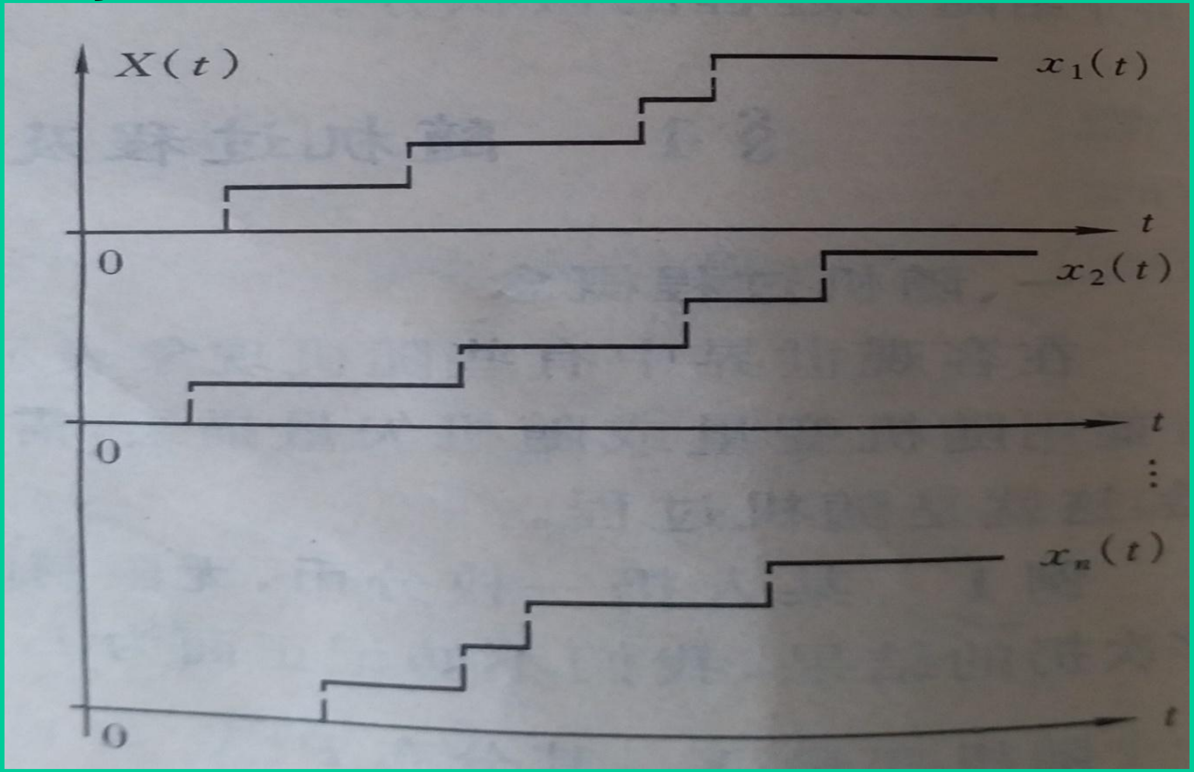
二、两个随机过程及其统计特性

三、复随机过程

四、随机过程的分析性质

一、随机过程及其统计特性

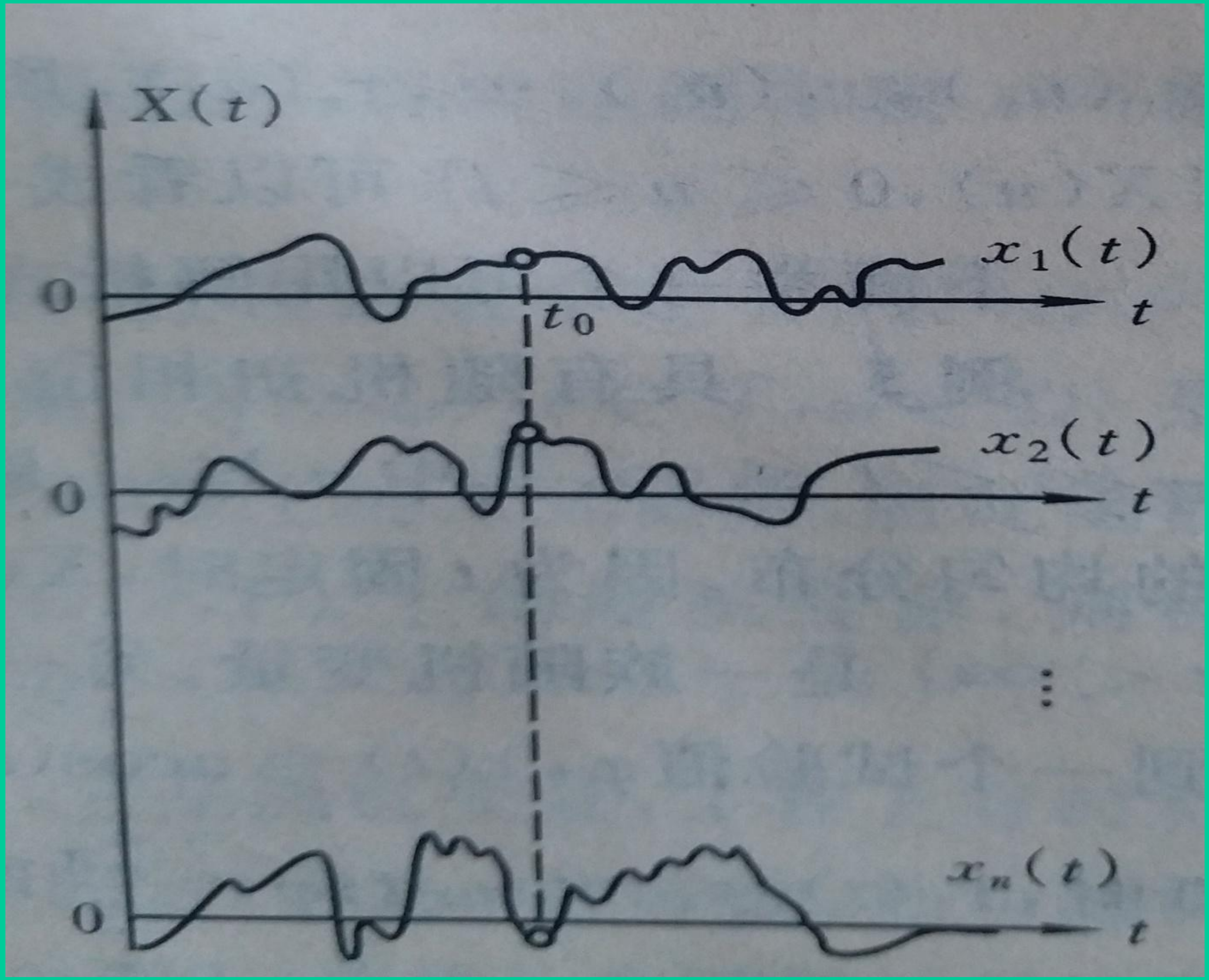
引例1: 某寻呼台在时间段[0,t]内接到的呼唤次数是与t有关的随机变量$X(t)$，对于固定的t, $X(t)$是一个取非负整数的随机变量，故$\{X(t),t\geq 0\}$是随机过程。



$$X(t) \sim \pi(\lambda t),$$

$$p\{X(t)=k\}=\frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}, k=0,1,\cdots, t\geq 0.$$

引例2:(热噪声电压)电子元件或器件由于内部微观粒子（如电子）的随机热骚动所引起的端电压称为热噪声电压，在无线电通讯技术中，接收机在接收信号时，机内的热噪声电压要对信号产生持续的干扰，为要消除这种干扰（假设没有其他干扰因素），就必须考虑热噪声电压随时间变化的过程，现以电阻的热噪声电压为例说明这种变化过程的描述方法，我们通过某种装置对电阻两端的热噪声电压进行长时间的测量，并把结果记录下来，作为一次试验结果，便得到一个电压-时间函数（即电压关于时间t的函数）X(t),如图.



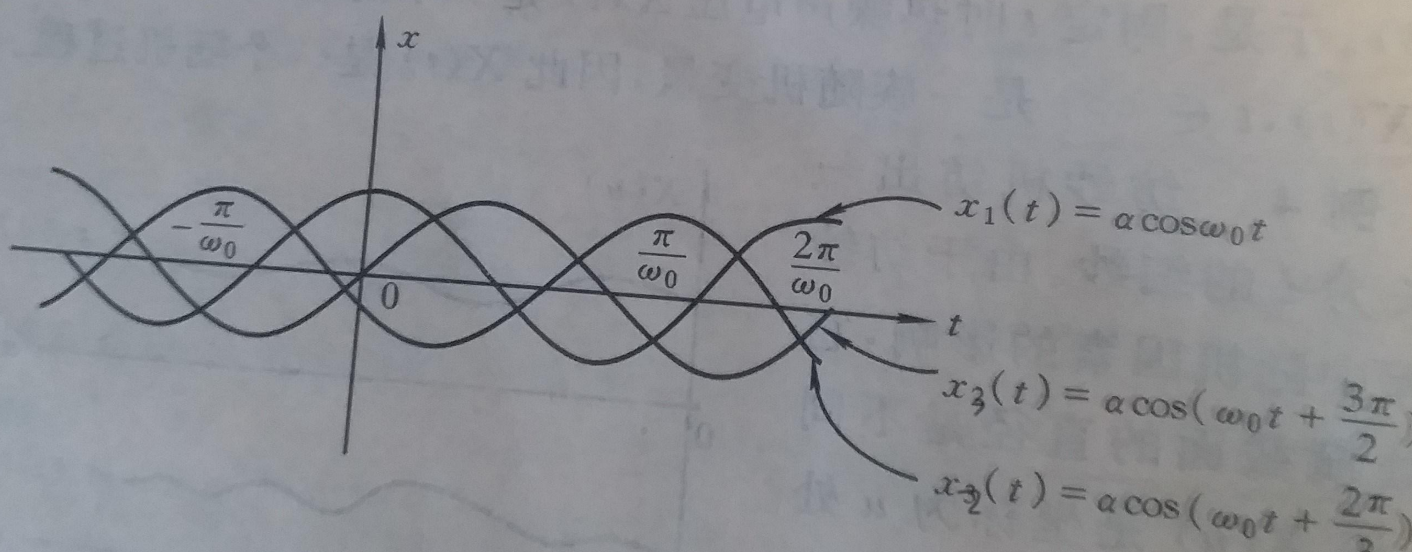
它在任一确定时刻的值是随机变量.

如何描述这样的变化过程：

1.）如果对其变化过程的全过程做一次观察，得到一个位置与时间关系的函数$x_1(t)$，若再次观察，又得到函数$x_2(t)$，…，因而得到一族函数.

2.）如果在时刻t观察质点的位置$x(t)$，则$x(t)$是一个随机变量，这样对于每个时刻t便得到一个随机变量$X(t)$，于是我们就得到一族随机变量$\{X(t), t\geqslant 0\}$，（最初始时刻为t=0），它描述了此随机的运动过程.

具有随机初相位的简谐波 $X(t)=a\cos(\omega_0 t+\Phi)$，$-\infty<t<\infty$，其中 a 与 ω_0 是正常数，而 Φ 服从在区间 $[0,2\pi]$ 上的均匀分布。因为 t 固定时，$X(t)$ 是随机变量，所以 $\{X(t),-\infty<t<\infty\}$ 是一族随机变量。另一方面，对随机变量 Φ 做一次试验得到一个试验值 φ，$x(t)=a\cos(\omega_0 t+\varphi)$ 就是一条样本曲线。如：$\varphi=0$ 时，$x_1(t)=a\cos\omega_0 t$；$\varphi=\dfrac{2\pi}{3}$ 时，$x_2(t)=a\cos\left(\omega_0 t+\dfrac{2\pi}{3}\right)$；$\varphi=\dfrac{3\pi}{2}$ 时，$x_3(t)=a\cos\left(\omega_0 t+\dfrac{3\pi}{2}\right)$；等等（见图 1－5）。因而，从两种不同角度看，$X(t)$ 都是随机过程。



1、随机过程的定义

定义1 设E是一随机实验，样本空间为$\Omega=\{e\}$，参数$T\subset(-\infty,+\infty)$，如果对每个$e\in\Omega$，总有一个确定的时间函数$X(e,t)$与之对应，这样对于所有的$e\in\Omega$，就得到一族时间t的函数，我们称此族时间t的函数为随机过程，而族中每一个函数称为这个随机过程的样本函数。---从样本空间，得到一族函数，实质固定e，改变t.

定义2：设E是一随机实验，样本空间为$\Omega=\{e\}$，参数$T\subset(-\infty,+\infty)$，如果对任意$t\in T$，有一定义在$\Omega$上的随机变量$X(\boldsymbol{e},t)$与之对应，则称$\{X(\boldsymbol{e},t),t\in T\}$为随机过程，简记为$\{X(t),t\in T\}$或$\{X(t)\}$，也可记为$X(t)$．-----从时间角度，得一族随机变量．实质固定t，改变e．

注释：(1) 随机过程$\{X(t),t\in T\}$是定义在$\Omega\times T$上的二元函数，因此可以从两个角度去理解，因而有如上的两个定义。

在理论分析往往用随机变量族的描述方式，在实际测量和处理中往往采用样本函数族的描述方式。

(2) 通常将随机过程$\{X(t), t\in T\}$解释为一个物理系统，

$X(t)$表示系统在时刻t所处的状态，$X(t)$的所有可能状态所构成的集合称为状态空间，记为S，分离散型及连续性. 对于给定的$t_0\in T$，及$x\in S$，$X(t_0)=x$说成是在时刻t_0，系统处于状态x. ---t固定.

(3) 从定义2的角度上看，随机过程是有限维随机变量的推广.

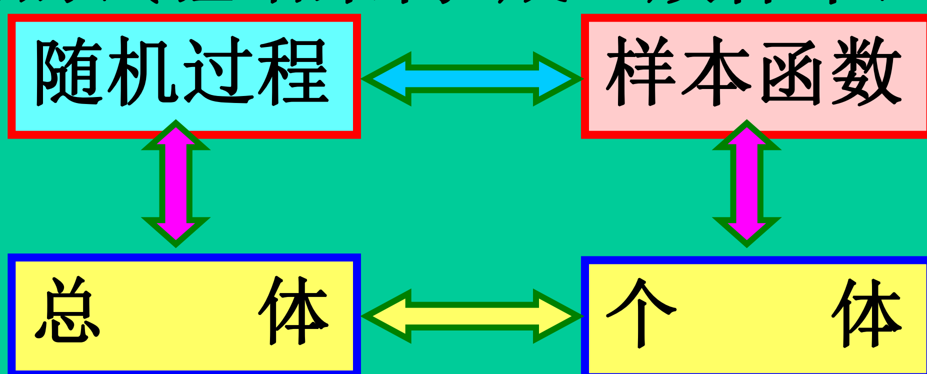
（4）t的所有取值集合T称为参数空间，分离散型（时间序列）及连续性，为确定性变量.

对于一切 $t \in T, X(t)$所有可能取的一切值的 全体称为随机过程的状态 空间.

对随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 进行一次试验 (即在 T 上进行一次全程 观测), 其结果是 t 的函数, 记为$x(t), t \in T$,

称它为随机过程的一个 样本函数或样本曲线 .

所有不同的试验结果构 成一族样本函数 .



例1、设具有随机初相位的简谐波$X(t)=a\cos(\omega t+\varphi)$, $-\infty<t<+\infty$,其中$a>0,\omega$为常数，φ的分布律为$P\{\varphi=0\}=P\{\varphi=\pi\}=\dfrac{1}{2}$.

求:(1)$x_1(t,0), x_2(t,\pi)$--固定φ的样本函数;

(2)$X(0)$，$X(1)$，$X(t)$的分布律.--固定t的随机变量

解:(1)$x_1(t,0)=a\cos(\omega t+0)=a\cos\omega t$,

$x_2(t,\pi)=a\cos(\omega t+\pi)=-a\cos\omega t$.

(2)当$t=0$时，$X(0)=a\cos\varphi=\begin{cases} a, & \varphi=0 \\ -a, & \varphi=\pi \end{cases}$

$\therefore X(0)$的分布律为$P\{X(0)=a\}=P\{X(0)=-a\}=\dfrac{1}{2}$.

当$t=1$时，$X(1)=a\cos(\omega+\varphi)=\begin{cases} a\cos\omega, & \varphi=0 \\ -a\cos\omega, & \varphi=\pi \end{cases}$

$\therefore X(1)$的分布律为$P\{X(1)=a\cos\omega\}=$

$P\{X(1)=-a\cos\omega\}=\dfrac{1}{2}.$

$\because X(t)=a\cos(\omega t+\varphi)=\begin{cases} a\cos\omega t, & \varphi=0 \\ -a\cos\omega t, & \varphi=\pi \end{cases}$

$X(t)$的分布律为$P\{X(t)=a\cos\omega t\}=$

$P\{X(t)=-a\cos\omega t\}=\dfrac{1}{2}.$

注：$X(t)$具有相同的分布类型.

2、随机过程的分类

（1）按状态空间S和时间T是可列集还是连续集分类：

(a). 离散型随机过程: T是连续集，且$\forall t\in T, X(t)$是离散型随机变量，则称过程$\{X(t), t\in T\}$为离散型随机过程。如引例1

(b). 连续型随机过程: T是连续集, 且$\forall t\in T, X(t)$是连续型随机变量, 则称过程$\{X(t), t\in T\}$为连续型随机过程. 如引例2

(c). 离散型随机序列: T是可列集，且$\forall t\in T$，$X(t)$为离散型随机变量，则称过程$\{X(t), t\in T\}$为离散型随机序列。通

常T取为$T=\{0, 1, 2...\}$或$T=\{0, \pm 1, \pm 2...\}$，此时随机序列常记成$\{X_n, n=0, 1, ...\}$或$\{X_n, n\geq 0\}$。如将一颗骰子上抛n次.

(d). 连续型随机序列：T是可列集，且$\forall t\in T, X(t)$是连续型随机变量，则称过程$\{X(t), t\in T\}$为连续型随机序列.

如设$Y(1),Y(2),\cdots,Y(n)$表示n个班的某科成绩，它们相互独立，且$Y(i)\sim N(\mu_i,\sigma_i^2)$,即$f_{Y(i)}(y_i)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i}e^{-\frac{(y_i-\mu_i)^2}{2\sigma_i^2}}$，

$-\infty< y<-\infty, i=1,2,\cdots,n.$

(2) 按分布特性分类：

依照过程在不同时刻状态的统计依赖关系分类。

例如：平稳过程，马尔可夫过程、独立增量过程等。

3、随机过程的概率分布

(1)定义

给定随机过程 $\{X(t), t \in T\}$.

对于每一个固定的 $t \in T$, 随机变量 $X(t)$ 的分布函数一般与 t 有关,记为

$$F_X(x,t) = P\{X(t) \le x\}, x \in \mathrm{R}.$$

称它为随机过程 $\{X(t), t \in T\}$的一维分布函数 .

$\{F_X(x,t), t \in T\}$称为一维分布函数族 .

注：若$X(t)$为连续性，$f(x,t)$为概率密度，

则$F_X(x,t) = \int_{-\infty}^{x} f(x,t)dx \Leftrightarrow \dfrac{dF_X(x,t)}{dx} = f(x,t).$

对任意$n\ (n=2,3,\cdots)$个不同的时刻$t_1,\cdots,t_n\in T$,
引入n维随机变量$(X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_n))$.

分布函数 $F_X(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)$

$$=P\{X(t_1)\le x_1, X(t_2)\le x_2,\cdots,X(t_n)\le x_n\},$$

$$x_i\in \mathrm{R},\quad i=1,2,\cdots,n.$$

对固定的n,称$\{F_X(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n),t_i\in T\}$
为随机过程$\{X(t),t\in T\}$的n维分布函数族.

（2）性质：

对称性：对$(1,2,\cdots,n)$的任意排列（$j_1,j_2,\cdots,j_n$），有

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)=F(x_{j_1},x_{j_2},\cdots,x_{j_n};t_{j_1},t_{j_2},\cdots,t_{j_n}).$$

$$\because P\{X(t_1)\le x_1,X(t_2)\le x_2,\cdots,X(t_n)\le x_n\}$$

$$=P\{X(t_{j_1})\le x_{j_1},X(t_{j_2})\le x_{j_2},\cdots,X(t_{j_n})\le x_{j_n}\}.$$

相容性：设$m\le n$，则$F(x_1,x_2,\cdots,x_m;t_1,t_2,\cdots,t_m)$

$$=F(x_1,x_2,\cdots,x_m,\infty,\cdots,\infty;t_1,t_2,\cdots,t_n).$$

$$\because 左=P\{X(t_1)\le x_1,X(t_2)\le x_2,\cdots,X(t_m)\le x_m,-\infty<X(t_{m+1})$$

$$<+\infty,-\infty<X(t_{m+2})<+\infty,\cdots,-\infty<X(t_n)<+\infty\}=右.$$

例2、设随机过程$X(t)=A\cos t, -\infty<t<+\infty$,其中$A$为随机变量，其分布律（列）为$P\{A=i\}=\dfrac{1}{3}$，$i=1,2,3.$

求(1)一维分布函数$F(x,\dfrac{\pi}{4})$，$F(x,\dfrac{\pi}{2})$;

（2）二维分布函数$F(x_1,x_2;0,\dfrac{\pi}{3})$.

解: $\because X(\dfrac{\pi}{4})=A\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}A}{2}$,

$\therefore X(\dfrac{\pi}{4})$的可能取值为$\dfrac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2},\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

$$P\{X(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}\}=P\{A\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\}=P\{A=1\}=\frac{1}{3}.$$

$$P\{X(\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}\}=P\{A\cos\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}\}=P\{A=2\}=\frac{1}{3}.$$

$$P\{X(\frac{\pi}{4})=\frac{3\sqrt{2}}{2}\}=P\{A\cos\frac{\pi}{4}=\frac{3\sqrt{2}}{2}\}=P\{A=3\}=\frac{1}{3}.$$

$$\therefore F(x,\frac{\pi}{4})=\begin{cases}0, & x<\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{1}{3}, & \frac{\sqrt{2}}{2}\le x<\sqrt{2}\\ \frac{2}{3}, & \sqrt{2}\le x<\frac{3\sqrt{2}}{2}\\ 1, & x\ge\frac{3\sqrt{2}}{2}\end{cases}$$

$$\because X(\frac{\pi}{2}) = 0, \therefore F(x, \frac{\pi}{2}) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$(2) \because F(x_1, x_2; 0, \frac{\pi}{3}) = P\{X(0) \leq x_1, X(\frac{\pi}{3}) \leq x_2\}$$

$$= P\{A \leq x_1, A\cos\frac{\pi}{3} \leq x_2\}$$

$$= P\{A \leq x_1, \frac{A}{2} \leq x_2\}$$

$$= P\{A \leq x_1, A \leq 2x_2\}$$

$$= \begin{cases} P\{A \leq x_1\}, & x_1 \leq 2x_2 \\ P\{A \leq 2x_2\}, & x_1 > 2x_2 \end{cases}$$

$$\therefore F(x_1,x_2;0,\frac{\pi}{3})=\begin{cases}0, & x_1\le 2x_2, x_1<1,\text{或}x_1>2x_2, x_2<\frac{1}{2}\\ \frac{1}{3} & x_1\le 2x_2, 1\le x_1<2,\text{或}x_1>2x_2,\frac{1}{2}\le x_2<1\\ \frac{2}{3} & x_1\le 2x_2, 2\le x_1<3,\text{或}x_1>2x_2, 1\le x_2<\frac{3}{2}\\ 1 & x_1\le 2x_2, x_1\ge 3,\text{或}x_1>2x_2, x_2\ge\frac{3}{2}\end{cases}$$

例3 设随机过程$X(t)=V\cos\omega t, -\infty<t<+\infty$,其中$\omega$为常数,

$V\sim U(0,1)$,即$f_V(v)=\begin{cases}1 & 0<v<1,\\ 0 & \text{其它}.\end{cases}$

(1)求$f(x,0), f(x,\frac{\pi}{4\omega}), f(x,\frac{3\pi}{4\omega}), f(x,\frac{\pi}{\omega})$;

(2)求$F(x,\frac{\pi}{2\omega})$.

解:(1)当$t=0$时,$X(0)=V, \therefore F(x,0)=P\{X(0)\le x\}$

$$=P\{V\le x\}=\int_{-\infty}^{x} f_V(v)dv=\begin{cases}0 & x\le 0,\\ x & 0<x<1,\\ 1 & x\ge 1.\end{cases}$$

$$\therefore f(x,0)=F'(x,0)=\begin{cases}1 & 0<x<1,\\ 0 & \text{其它}.\end{cases}$$

当$t=\dfrac{\pi}{4\omega}$时，$X(\dfrac{\pi}{4\omega})=\dfrac{V}{\sqrt{2}}$，$\therefore F(x,\dfrac{\pi}{4\omega})=P\{X(\dfrac{\pi}{4\omega})\le x\}=$

$$P\{\frac{V}{\sqrt{2}}\le x\}=P\{V\le\sqrt{2}x\}=\int_{-\infty}^{\sqrt{2}x}f_V(v)dv=\begin{cases}0 & x\le 0,\\ \sqrt{2}x & 0<x<\dfrac{1}{\sqrt{2}},\\ 1 & x\ge\dfrac{1}{\sqrt{2}}.\end{cases}$$

$$\therefore f(x,\frac{\pi}{4\omega})=F'(x,\frac{\pi}{4\omega})=\begin{cases}\sqrt{2} & 0<x<\dfrac{1}{\sqrt{2}},\\ 0 & \text{其它}.\end{cases}$$

当$t=\dfrac{3\pi}{4\omega}$时，$X(\dfrac{3\pi}{4\omega})=-\dfrac{V}{\sqrt{2}}$，$\therefore F(x,\dfrac{3\pi}{4\omega})=P\{X(\dfrac{3\pi}{4\omega})\le x\}=$

$$P\{-\frac{V}{\sqrt{2}} \le x\} = P\{V \ge -\sqrt{2}x\} = 1-P\{V < -\sqrt{2}x\}=1-\int_{-\infty}^{-\sqrt{2}x} f_V(v)dv$$

$$=\begin{cases} 1 & x \ge 0, \\ 1+\sqrt{2}x & -\frac{1}{\sqrt{2}} < x < 0, \\ 1-1=0 & x \le -\frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

$$\therefore f(x,\frac{3\pi}{4\omega}) = F'(x,\frac{3\pi}{4\omega}) = \begin{cases} \sqrt{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} < x < 0, \\ 0 & \text{其它}. \end{cases}$$

当$t=\dfrac{\pi}{\omega}$时，$X(\dfrac{\pi}{\omega})=-V, \therefore F(x,\dfrac{\pi}{\omega})=P\{X(\dfrac{\pi}{\omega})\le x\}=P\{-V\le x\}$

$$=P\{V\ge -x\}=1-P\{V<-x\}=1-\int_{-\infty}^{-x}f_V(v)dv=\begin{cases}1 & x\ge 0,\\ 1+x & -1<x<0,\\ 1-1=0 & x\le -1.\end{cases}$$

$$\therefore f(x,\frac{\pi}{\omega})=F'(x,\frac{\pi}{\omega})=\begin{cases}1 & -1<x<0,\\ 0 & \text{其它}.\end{cases}$$

（2）$t=\dfrac{\pi}{2\omega}$时，$X(\dfrac{\pi}{2\omega})=0,$

$$\therefore F(x,\frac{\pi}{2\omega})=P\{X(\frac{\pi}{2\omega})\le x\}=\begin{cases}1 & x\ge 0,\\ 0 & x<0.\end{cases}$$

4. 随机过程的数字特征----随机变量函数的数字特征

① 函数 $\mu_X(t)=E[X(t)],\ t\in T$

为$\{X(t),t\in T\}$的均值函数.

② $\psi_X^2(t)=E[X^2(t)]$ 为$\{X(t),t\in T\}$的均方值函数.

③ $\sigma_X^2(t)=D_X(t)=D[X(t)]=E[X(t)-EX(t)]^2$

$=E[X^2(t)-2\mu_X(t)X(t)+\mu_X^2(t)]^2.$

$=E[X^2(t)]-\mu_X^2(t)$ 为$\{X(t),t\in T\}$的方差函数.

④ $R_X(s,t)=E[X(s)X(t)]$为$\{X(t),t\in T\}$的自相关函数,
简称相关函数

⑤ $C_X(s,t)=Cov(X(s),X(t))$

$$=E\{[X(s)-\mu_X(s)][X(t)-\mu_X(t)]\}$$

$$=E[X(s)X(t)]-\mu_X(t)E[X(s)]-\mu_X(s)E[X(t)]+\mu_X(s)\mu_X(t)$$

$$=E[X(s)X(t)]-\mu_X(s)\mu_X(t)=R_X(s,t)-\mu_X(s)\mu_X(t).$$

为$\{X(t),t\in T\}$的(自)协方差函数.

注：诸数字特征的关系：

$$\psi_X^2(t)=R_X(t,t),\ C_X(s,t)=R_X(s,t)-\mu_X(s)\cdot\mu_X(t)$$

$$\sigma_X^2(t)=C_X(t,t)=R_X(t,t)-\mu_X^2(t)=\psi_X^2(t)-\mu_X^2(t)$$

例4.设随机过程 $X(t)=cos(t+\theta)$, $t\in(-\infty,+\infty)$，其中

$p\{\theta=0\}=p\{\theta=\pi\}=\dfrac{1}{2}$，求其数字特征.

解:

$$(1)\mu_X(t)=E[X(t)]=E\cos(t+\theta)=\cos(t+0).\frac{1}{2}+\cos(t+\pi).\frac{1}{2}=0.$$

$$(2)R_X(s,t)=E[X(s)X(t)]=E[\cos(s+\theta)\cos(t+\theta)]$$

$$=\cos t\cos s.\frac{1}{2}+\cos t\cos s.\frac{1}{2}=\cos t\cos s.$$

$$(3)C_X(s,t)=R_X(s,t)-\mu_X(s)\mu_X(t)=\cos t\cos s.$$

$$(4)\psi_X^2(t)=R_X(t,t)=\cos^2 t,$$

$$(5)\sigma_X^2(t)=C_X(t,t)=R_X(t,t)-\mu_X^2(t)$$

$$=\psi_X^2(t)-\mu_X^2(t)=\cos^2 t.$$

例5 求随机相位余弦波

$$X(t)=a\cos(\omega t+\Theta),\quad t\in(-\infty,+\infty),$$

的均值函数、方差函数 和自相关函数 , 其中a和ω是正常数， Θ是在$(0,2\pi)$上服从均匀分布的随机 变量.

解: Θ的概率密度为 $f(\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}, & 0<\theta<2\pi,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

① $\mu_X(t)=E[X(t)]=E[a\cos(\omega t+\Theta)]$

$$=\int_0^{2\pi}a\cos(\omega t+\theta)\cdot\frac{1}{2\pi}\mathrm{d}\theta=0.$$

② $R_X(s,t) = E[X(s)X(t)]$

$$= E[a^2\cos(\omega s + \Theta)\cos(\omega t + \Theta)]$$

$$= a^2\int_0^{2\pi}\cos(\omega s + \theta)\cos(\omega t + \theta)\cdot\frac{1}{2\pi}\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{a^2}{2\pi}\times\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[\cos(\omega(s+t)+2\theta)+\cos(\omega(s-t)]\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{a^2}{2}\cos\omega(s-t).$$

(3) $C_X(s,t) = R_X(s,t) - \mu_X(s)\mu_X(t) = \dfrac{a^2}{2}\cos\omega(s-t).$

(4) $\psi_X^2(t) = R_X(t,t) = \dfrac{a^2}{2},$

(5) $\sigma_X^2(t) = C_X(t,t) = R_X(t,t) - \mu_X^2(t) = \psi_X^2(t) - \mu_X^2(t) = \dfrac{a^2}{2}.$

例6 设随机过程$X(t)=Y+Zt,\ t\in T=(-\infty,+\infty)$,其中$Y$，$Z$是相互独立的服从$N(0,1)$的随机变量，求$\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$的数字特征及一，二维概率密度。

解: $\forall t\in T$，由正态分布的性质知$X(t)$服从正态分布:

$$E[X(t)]=E(Y)+tE(Z)=0,\quad D[X(t)]=D(Y)+t^2D(Z)$$

$$=1+t^2=\sigma_X^2(t)$$

$$R_X(s,t)=E[X(s)X(t)]=E[(Y+Zs)(Y+Zt)]$$

$$=E(Y^2)+(s+t)EYEZ+stEZ^2=1+st.$$

$$C_X(s,t)=R_X(s,t)-\mu_X(s)\mu_X(t)=1+st.$$

$$\psi_X^2(t)=R_X(t,t)=1+t^2,\sigma_X^2(t)=C_X(t,t)=1+t^2.$$

所以一维概率密度为

$$f(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi(1+t^2)}}e^{-\frac{x^2}{2(1+t^2)}}$$

又由正态分布的性质知，对于任意 $s,t\in T$,

$(X(s),X(t))$服从二维正态分布而

$E[X(s)]=E[X(t)]=0$；$D[X(s)]=1+s^2$,$D[X(t)]=1+t^2$

$$C_X(s,t)=E[(Y+Zs)(Y+Zt)]=1+st$$

$$\rho_X(s,t)=\frac{1+st}{\sqrt{(1+s^2)(1+t^2)}}$$

所以二维概率密度为

$$f(x_1,x_2;s,t)=\frac{1}{2\pi\sqrt{(1+s^2)+(1+t^2)}\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$\exp\left(\frac{-1}{2(1-s^2)}\left[\frac{x_1^2}{1+s^2}-2\rho\frac{x_1x_2}{\sqrt{(1+s^2)(1+t^2)}}+\frac{x_2^2}{1+t^2}\right]\right)$$

其中$\rho=\rho_x(s, t)$.

练习1 设 A,B 是两个随机变量.

试求随机过程 $X(t)=At+B, t\in T=(-\infty,+\infty)$ 的均值函数和自相关函数.

如果A,B相互独立，且 $A\sim N(0,1)$，$B\sim U(0,2)$，问 $X(t)$的均值函数和自相关函数又是什么？

练习2 设随机过程 $X(t)=Y\cos\omega t+Z\sin\omega t, t\geq 0$,其中$Y,Z$是相互独立的随机变量，且$E(Y)=E(Z)=0, D(Y)=D(Z)=\sigma^2$，求$\{X(t), t\geq 0\}$均值函数 $\mu_X(t)$和自相关函数$R_X(s,t)$。

1、解 $X(t)$的均值函数和自相关函 数分别为

$$\mu_X(t) = E[X(t)] = E(At+B) = tE(A) + E(B).$$

$$R_X(t_1,t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = E[(At_1+B)(At_2+B)]$$

$$= t_1t_2E(A^2) + (t_1+t_2)E(AB) + E(B^2),\ t_1,t_2 \in T.$$

当$A \sim N(0,1), B \sim U(0,2)$且 A,B相互独立时，

$$E(A)=0,\ E(A^2)=1,\ E(B)=1,\ E(B^2) = DB + E^2B = \frac{4}{3},$$

$$E(AB) = E(A)E(B) = 0,$$

所以可得 $\mu_X(t) = 1,$

$$R_X(t_1,t_2) = t_1t_2 + \frac{4}{3},\quad t_1,t_2 \in T.$$

练习2设随机过程 $X(t)=Y\cos\omega t+Z\sin\omega t, t\geq 0$,其中$Y,Z$是相互独立的随机变量，且$E(Y)=E(Z)=0$, $D(Y)=D(Z)=\sigma^2$，求$\{X(t),t\geq 0\}$均值函数 $\mu_x(t)$和自相关函数$R_x(s,t)$。

解: $\mu_x(t)=E[X(t)]=E[Y\cos\omega t+Z\sin\omega t]$

$$=\cos\omega t\cdot E(Y)+\sin\omega t\cdot E(Z)=0,$$

因为Y与Z相互独立,于是 由题意，$E(Y)=E(Z)=E(YZ)=0$, $E(Y^2)=E(Z^2)=\sigma^2$.

$$R_X(s,t)=E[X(s)X(t)]$$

$$=E\{[Y\cos\omega s+Z\sin\omega s][Y\cos\omega t+Z\sin\omega t]\}$$

$$=\cos\omega s\cdot\cos\omega t\cdot E(Y^2)+\sin\omega s\cdot\sin\omega t\cdot E(Z^2)$$

$$=\sigma^2\cos\omega(t-s)$$

二、二维随机过程

1. 定义：

$X(t)$、$Y(t)$为定义在同一样本空间Ω和同一参数集T上的随机过程，对于任意$t\in T$，若$(X(t),Y(t))$是二维随机变量，则称$\{(X(t),Y(t)),t\in T\}$为二维随机过程。

2. 有限维分布函数和独立性

(1) $\{(X(t),Y(t)),t\in T\}$为二维随机过程，对于任意的正整数n和m，以及任意的$t_1, t_2, \ldots, t_n$；$t'_1, t'_2, \ldots, t'_m\in T$，称$n+m$元函数

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_n;\ y_1,y_2,\ldots,y_m;\ t_1,t_2,\ldots,t_n;\ t'_1,t'_2,\ldots,t'_m)$$

$$=P\{X(t_1)\le x_1,\ldots,X(t_n)\le x_n;\ Y(t'_1)\le y_1,\ldots,Y(t'_m)\le y_m\}$$

为$\{(X(t),Y(t)),t\in T\}$的$n+m$维分布函数，类似的可定义有限维分布函数族。

（2）若对于任意的正整数n和m，以及任意的$t_1,t_2,\ldots,t_n$；$t'_1,t'_2,\ldots,t'_m\in T$，任意的$x_1,x_2,\ldots,x_n$；$y_1,y_2,\ldots,y_m\in R$,有

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_n;\ y_1,y_2,\ldots,y_m;\ t_1,t_2,\ldots,t_n;\ t'_1,t'_2,\ldots,t'_m)$$

$$=F_X\{X(t_1)\le x_1,\ldots,X(t_n)\le x_n\}\,F_Y\{Y(t'_1)\le y_1,\ldots,Y(t'_m)\le y_m\}$$

称 $\{X(t)\}$ 与 $\{Y(t)\}$ 相互独立，其中F_X，F_Y分别为 $\{X(t)\}$，$\{Y(t)\}$ 的有限维分布函数.

3．二维随机过程的数字特征

（1） 互相关函数：称 $R_{XY}(s,t)=E[X(s)Y(t)]$

为 $\{(X(t), Y(t)), t\in T\}$ 的互相关函数.

$$R_{XY}(s,t)=R_{YX}(t,s) \neq R_{XY}(t,s),$$
$$R_{XY}(s,t) \neq R_{YX}(s,t)=R_{XY}(t,s).$$

(2) 互协方差函数：

称 $C_{XY}(s,t)=E\{[X(s)-\mu_X(s)][Y(t)-\mu_Y(t)]\}$

为$\{(X(t),Y(t)),t\in T\}$的互协方差函数.

显然 $C_{XY}(s,t)=R_{XY}(s,t)-\mu_X(s)\mu_Y(t)$

若对于任意的$s,t\in T$,有$C_{XY}(s,t)=0$, 称$\{X(t)\}$, $\{Y(t)\}$不相关.

若$\{X(t)\}$,$\{Y(t)\}$相互独立，且二阶矩存在，则$\{X(t)\}$,$\{Y(t)\}$不相关.

例7. 设有两个随机过程$X(t)=g_1(t+\varepsilon)$和$Y(t)=g_2(t+\varepsilon)$，其中$g_1(t)$和$g_2(t)$都是周期为L的周期函数, ε是在$(0, L)$上服从均匀分布的随机变量. 求互相关函数$R_{XY}(s，t)$的表达式.

解: $$R_{XY}(s,t)=E[X(s)Y(t)]=E[g_1(s+\varepsilon)g_2(t+\varepsilon)]$$

$$=\int_0^L g_1(s+\varepsilon)g_2(t+\varepsilon)\frac{1}{L}d\varepsilon$$

令$x=s+\varepsilon$, 利用$g_1(t)$和$g_2(t)$的周期性，有

$$R_{XY}(s,t) \overset{x=s+\varepsilon}{=} \frac{1}{L}\int_{S}^{S+L} g_1(x)g_2(t-s+x)dx = \frac{1}{L}[\int_{S}^{0} g_1(x)g_2(t-s+x)dx$$

$$+\int_{0}^{L} g_1(x)g_2(t-s+x)dx + \int_{L}^{S+L} g_1(x)g_2(t-s+x)dx]$$

$$\overset{x=y+L}{=} \frac{1}{L}[\int_{S}^{0} g_1(x)g_2(t-s+x)dx + \int_{0}^{L} g_1(x)g_2(t-s+x)dx$$

$$+\int_{0}^{S} g_1(y+L)g_2(t-s+y+L)dy]$$

$$= \frac{1}{L}[\int_{S}^{0} g_1(x)g_2(t-s+x)dx + \int_{0}^{L} g_1(x)g_2(t-s+x)dx$$

$$+\int_{0}^{S} g_1(y)g_2(t-s+y)dy] = \frac{1}{L}\int_{0}^{L} g_1(x)g_2(t-s+x)dx.$$

例8. 设$X(t)$为信号过程, $Y(t)$为噪声过程，令

$W(t)=X(t)+Y(t)$，则

(1) $W(t)$的均值函数为 $\mu_W(t)=\mu_X(t)+\mu_Y(t)$.

(2) 其自相关函数为

$$R_W(s,t)=E\{[X(s)+Y(s)][X(t)+Y(t)]\}$$

$$=R_X(s,t)+R_{XY}(s,t)+R_{YX}(s,t)+R_Y(s,t)$$

两个随机过程的之和的自相关函数为各个随机过程的相关函数与它们的互相关函数之和。若两个随机过程的均值函数均恒为零，且互不相关时，有

$$R_W(s,t)=R_X(s,t)+R_Y(s,t)$$

$\because X(s)$与$Y(t)$互不相关

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_{XY}(s,t) = R_{XY}(s,t) - \mu_X(s)\mu_Y(t) = 0 \\ C_{YX}(s,t) = R_{YX}(s,t) - \mu_Y(s)\mu_X(t) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} R_{XY}(s,t) = \mu_X(s)\mu_Y(t) \\ R_{YX}(s,t) = \mu_Y(s)\mu_X(t) \end{cases}$$

又$\mu_X(s) = \mu_X(t) = \mu_Y(t) = \mu_Y(s) = 0,$

$\therefore R_{XY}(s,t) = R_{YX}(s,t) = 0.$

故$R_W(s,t) = R_X(s,t) + R_Y(s,t).$

三、复随机过程

1、定义：设$X(t)$、$Y(t)$（$t\in T$）为定义在同一样本空间的实随机过程，则称$Z(t)=X(t)+iY(t)$为复随机过程.

注：复随机过程$Z(t)$的概率分布可用二维随机过程（$X(t)$，$Y(t)$）的所有的$m+n$维分布函数或概率密度给出.

2、数字特征函数

(1) 均值函数：$\mu_Z(t)=EZ(t)=EX(t)+iEY(t)=\mu_X(t)+i\mu_Y(t)$.

注1：$\overline{\mu_Z(t)}=\overline{EZ(t)}=E\bar{Z}(t)=EX(t)-iEY(t)=\mu_X(t)-i\mu_Y(t)=\mu_{\bar{Z}}(t)$.

(2) 均方值函数$\varphi^2{}_Z(t)=E\left|Z(t)\right|^2=E(Z(t)\bar{Z}(t))$

$=E[(X(t)+iY(t))(X(t)-iY(t))]=EX^2(t)+EY^2(t)$

$=\varphi^2{}_X(t)+\varphi^2{}_Y(t)$.

（3）方差函数$\sigma^2{}_Z(t)=D_Z(t)=E\left|Z(t)-EZ(t)\right|^2$

$$= E[(Z(t)-EZ(t))\overline{Z(t)-EZ(t)}]$$

$$= E[(Z(t)-EZ(t))(\bar{Z}(t)-\bar{E}Z(t))]$$

$$= E(Z(t)\bar{Z}(t))-EZ(t)E\bar{Z}(t)-EZ(t)E\bar{Z}(t)+EZ(t)\bar{E}Z(t)$$

$$=\varphi^2{}_Z(t)-EZ(t)E\bar{Z}(t)$$

$$=\varphi^2{}_Z(t)-(EX(t)+iEY(t))(EX(t)-iEY(t))$$

$$=\varphi^2{}_X(t)+\varphi^2{}_Y(t)-E^2X(t)-E^2Y(t)$$

$$=\sigma^2{}_X(t)+\sigma^2{}_Y(t)$$

$=DX(t)+DY(t)$（$X(t)$与$Y(t)$不一定独立）

(4) 自相关函数 $R_Z(s,t)=E[Z(s)\bar{Z}(t)]$

$=E[(X(s)+iY(s))(X(t)-iY(t))]$

$=E[X(s)X(t)-iX(s)Y(t)+iY(s)X(t)+Y(s)Y(t)]$

$=EX(s)X(t)-iEX(s)Y(t)+iEY(s)X(t)+EY(s)Y(t)$

$=R_X(s,t)-iR_{XY}(s,t)+iR_{YX}(s,t)+R_Y(s,t)=R_Z(t,s)$

$(R_{XY}(s,t)=EX(s)X(t)\neq R_{YX}(s,t)=EY(s)X(t))$

注2： 当 $s=t$，$R_Z(t,t)=R_X(t,t)+R_Y(t,t)$

$=\varphi^2{}_X(t)+\varphi^2{}_Y(t)=\varphi^2{}_Z(t)$. $(R_{XY}(t,t)=R_{YX}(t,t))$

（5）（自）协方差函数$C_Z(s,t)=E[(Z(s)-EZ(s))\overline{Z(t)-EZ(t)}]$

$=E[(Z(s)-EZ(s))(\bar{Z}(t)-\bar{E}Z(t))]$

$=E[Z(s)\bar{Z}(t)-Z(s)E\bar{Z}(t)-\bar{Z}(t)EZ(s)+EZ(s)\bar{E}Z(t)]$

$=E(Z(s)\bar{Z}(t))-EZ(s)E\bar{Z}(t)-E\bar{Z}(t)EZ(s)+EZ(s)\bar{E}Z(t)$

$=E(Z(s)\bar{Z}(t))-EZ(s)E\bar{Z}(t)=R_Z(s,t)-\mu_Z(s)\bar{\mu}_Z(t)$

注3：当$s=t$，$C_Z(t,t)=R_Z(t,t)-\mu_Z(t)\bar{\mu}_Z(t)$

$=\varphi^2{}_Z(t)-(EX(t)+iEY(t))(EX(t)-iEY(t))$

$=\varphi^2{}_X(t)+\varphi^2{}_Y(t)-E^2X(t)-E^2Y(t)$

$=\sigma^2{}_X(t)+\sigma^2{}_Y(t)=\sigma^2{}_Z(t)=D_Z(t)$．

注4： 当$C_Z(s,t)=0 \Leftrightarrow R_Z(s,t)=\mu_Z(s)\bar{\mu}_Z(t) \Leftrightarrow Z(s)$与$Z(t)$不相关$\Leftrightarrow Z(s)$与$Z(t)$独立$\Leftrightarrow E[Z(s)\bar{Z}(t)] = EZ(s)E\bar{Z}(t)$.

3、二维复随机过程

（1）互相关函数$R_{Z_1Z_2}(s,t)=E[Z_1(s)\bar{Z}_2(t)]$

（2）互协方差函数

$$C_{Z_1Z_2}(s,t)=E[(Z_1(s)-EZ_1(s))\overline{Z_2(t)-EZ_2(t)}]$$

$$= E[(Z_1(s)-\mu_{Z_1}(s))(\bar{Z}_2(t)-\bar{\mu}_{Z_2}(t))]$$

例9.设复随机过程$Z(t)=\sum_{k=1}^{N}A_k e^{i(\omega_0 t+\varphi_k)}, t\in R$,其中$\omega_0$为正常数,

N是固定的正整数,A_k与φ_k相互独立,且$A_k\sim N(0,\sigma^2), \varphi_k\sim$

$\cup(0,2\pi), k=1,2,\cdots,N$.求$\mu_Z(t)$与$R_Z(s,t)$.

解:$\because A_k e^{i(\omega_0 t+\varphi_k)}=A_k[\cos(\omega_0 t+\varphi_k)+i\sin(\omega_0 t+\varphi_k)]$,

$\therefore Z(t)$为N个复谐波信号叠加而成的信号,是复随机过程.

$$\mu_Z(t)=EZ(t)=\sum_{k=1}^{N}E(A_k)\{E\cos(\omega_0 t+\varphi_k)+iE\sin(\omega_0 t+\varphi_k)\}$$

$$=\sum_{k=1}^{N}E(A_k)\{\int_0^{2\pi}\cos(\omega_0 t+\varphi_k)\times\frac{1}{2\pi}d\varphi_k+i\int_0^{2\pi}\sin(\omega_0 t+\varphi_k)\times\frac{1}{2\pi}d\varphi_k\}$$

$$=0.$$

$$R_Z(s,t) = E[Z(s)\bar{Z}(t)] = E(\sum_{j=1}^{N} A_j e^{i(\omega_0 s+\varphi_j)} \sum_{k=1}^{N} A_k e^{-i(\omega_0 t+\varphi_k)})$$

$$= E(\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} A_j A_k e^{i\omega_0 (s-t)} e^{i(\varphi_j-\varphi_k)}).$$

而$Ee^{i(\varphi_j-\varphi_k)} = E\cos(\varphi_j-\varphi_k) + iE\sin(\varphi_j-\varphi_k)$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(\varphi_j-\varphi_k)\times(\frac{1}{2\pi})^2 d\varphi_j d\varphi_k +$$

$$i\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin(\varphi_j-\varphi_k)\times(\frac{1}{2\pi})^2 d\varphi_j d\varphi_k$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}[\int_0^{2\pi} \cos\varphi_j d\varphi_j \int_0^{2\pi} \cos\varphi_k d\varphi_k + \int_0^{2\pi} \sin\varphi_j d\varphi_j \int_0^{2\pi} \sin\varphi_k d\varphi_k]$$

$$+\frac{i}{4\pi^2}[\int_0^{2\pi}\sin\varphi_j d\varphi_j\int_0^{2\pi}\cos\varphi_k d\varphi_k-\int_0^{2\pi}\cos\varphi_j d\varphi_j\int_0^{2\pi}\sin\varphi_k d\varphi_k]$$

$$=\begin{cases}1 & j=k\\ 0 & j\neq k\end{cases}.$$

$$\therefore R_Z(s,t)=e^{i\omega_0(s-t)}\sum_{k=1}^{N}EA_k^2$$

$$=e^{i\omega_0(s-t)}\sum_{k=1}^{N}(DA_k+E^2A_k)=N\sigma^2e^{i\omega_0(s-t)}.$$

四、随机过程的分析性质

1. 均方极限

1) 定义：设随机序列$\{X_n, n=1,2,\cdots\}$和随机变量X，且$E|X_n|^2<\infty, E|X|^2<\infty$，若$\lim\limits_{n\to\infty} E|X_n - X|^2=0$，则称随机序列$\{X_n\}$均方收敛于$X$，$X$是$X_n$的均方极限.记$\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} E|X_n - X|^2=0$.

注1：对$\forall\varepsilon>0, \lim\limits_{n\to+\infty} p\{|X_n - X|<\varepsilon\}=1$，称随机序列$\{X_n\}\xrightarrow{p=1} X$.

注2：因$\{X_n\}$为随机变量不确定，故通过均方极限来判断$\{X_n\}$是否收敛于X.

2) Schwarz不等式：设X_1，X_2为随机变量，则

$$E^2|X_1X_2| \le E|X_1|^2 E|X_2|^2 \Leftrightarrow E|X_1X_2| \le \sqrt{E|X_1|^2 E|X_2|^2}.$$

注: $E^2|X| \le E|X|^2 \Leftrightarrow E|X| \le \sqrt{E|X|^2}\,(D|X| = E|X|^2 - E^2|X| \ge 0)$

3) 均方收敛的充要条件: $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}} |X_n - X_m| = 0.$

证: $\Rightarrow \because 0 \le E|X_n - X_m|^2 = E|X_n - X + X - X_m|^2$

$= E|X_n - X|^2 + 2E|X_n - X||X_m - X| + E|X_m - X|^2 \le$

$E|X_n - X|^2 + 2\sqrt{E|X_n - X|^2 E|X_m - X|^2} + E|X_m - X|^2 \to 0(n\to\infty, m\to\infty)$

$\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} E|X_n - X|^2 = 0, \lim\limits_{m\to\infty} E|X_m - X|^2 = 0.$

$\therefore m\to\infty, n\to\infty$时，$E|X_n - X_m|^2 \to 0$，（迫敛性）

即 $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}} E|X_n - X_m|^2 = 0 \Rightarrow \lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}} |X_n - X_m| = 0. \Leftarrow$ 可由测度论证明.

4) 均方收敛的性质:

(1) 唯一性：若$\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X, \lim\limits_{n\to\infty} X_n = Y$，则$P\{X=Y\}=1.$

证：$\because 0 \le E|X-Y|^2 = E|(X_n-X)-(X_n-Y)|^2$

$\le E|X_n-X|^2 + 2E(|X_n-X||X_n-Y|) + E|X_n-Y|^2$

$\le E|X_n-X|^2 + 2\sqrt{E|X_n-X|^2 E|X_n-Y|^2} + E|X_n-Y|^2$

$\to 0 (n\to\infty), (\because \lim\limits_{n\to\infty} E|X_n-X|^2 = 0, \lim\limits_{n\to\infty} E|X_n-Y|^2 = 0)$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} E|X-Y|^2 = E|X-Y|^2 = 0$,（追敛性）

$\therefore P\{X-Y=0\}=1 \Leftrightarrow P\{X=Y\}=1.$

(2) 线性运算性：若$\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X, \lim\limits_{n\to\infty} Y_n = Y$，则对$a,b$常数，有

$\lim\limits_{n\to\infty}(aX_n + bY_n) = aX + bY.$

证：$\because 0 \le E\left|aX_n+bY_n - aX-bY\right|^2 = E\left|a(X_n-X)+b(Y_n-Y)\right|^2$

$\le a^2E\left|X_n-X\right|^2+2|a||b|E(|X_n-X||Y_n-Y|)+b^2E\left|Y_n-Y\right|^2$

$\le a^2E\left|X_n-X\right|^2+2|a||b|\sqrt{E\left|X_n-X\right|^2E\left|Y_n-Y\right|^2}+b^2E\left|Y_n-Y\right|^2$

$\to 0(n\to\infty),(\because \lim\limits_{n\to\infty} X_n=X \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} E\left|X_n-X\right|^2=0,$

$\lim\limits_{n\to\infty} Y_n=Y \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} E\left|Y_n-Y\right|^2)$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} E\left|aX_n+bY_n - aX-bY\right|^2 = 0$（追敛性）$\Leftrightarrow$

$\lim\limits_{n\to\infty}$（aX_n+bY_n）$=aX+bY$.

(3) 若$\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X$，则$\lim\limits_{n\to\infty} EX_n = EX = E(\lim\limits_{n\to\infty} X_n)$

证：$\because \lim\limits_{n\to\infty} X_n = X, 0 \le \left|EX_n - EX\right| = \left|E(X_n - X)\right| \le \sqrt{E\left|X_n - X\right|^2}$

$\to 0 (n \to \infty)$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} EX_n = EX = E(\lim\limits_{n\to\infty} X_n).$

(4) 若$\lim\limits_{m\to\infty} X_m = X, \lim\limits_{n\to\infty} Y_n = Y$，则$\lim\limits_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} E(X_m Y_n) = E(XY).$

证：$0 \le \left|E(X_m Y_n) - E(XY)\right| = \left|E(X_m Y_n - XY)\right| =$

$\left|E[(X_m - X)(Y_n - Y) + X(Y_n - Y) + (X_m - X)Y]\right| \le$

$$E\left|(X_m-X)(Y_n-Y)\right|+E\left|X(Y_n-Y)\right|+E\left|(X_m-X)Y\right|\le$$

$$\sqrt{E\left|X_m-X\right|^2 E\left|Y_n-Y\right|^2}+\sqrt{E\left|X\right|^2 E\left|Y_n-Y\right|^2}+\sqrt{E\left|X_m-X\right|^2 E\left|Y\right|^2}$$

$$\to 0(n\to\infty,m\to\infty)$$

$$\because \lim_{m\to\infty} E\left|X_m-X\right|^2=0,\lim_{n\to\infty} E\left|Y_n-Y\right|^2=0$$

$$\therefore \lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} E(X_m Y_n)=E(XY).$$（追敛性）

注1：当$m=n,X_m=Y_n$,则$\lim\limits_{n\to\infty} EX_n^2=EX^2$,

注2: $\lim\limits_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} X_m Y_n=XY,\lim\limits_{n\to\infty} X_n^2=X^2$,

需$E\left|X_m Y_n-XY\right|^2,\lim\limits_{n\to\infty} E\left|X_n^2-X^2\right|^2$存在.

5）随机过程$X(t)$的均方极限：

设随机过程$\{X(t),t\in T\}$和随机变量X，且$E|X(t)|^2<\infty$,

$E|X|^2<\infty$,若$\lim\limits_{t\to t_0}E|X(t)\text{-}X|^2=0$，则称随机过程$\{X(t),t\in T\}$

均方收敛于X, X是$t\to t_0$时$X(t)$的均方极限.记$\lim\limits_{t\to t_0}X(t)=X$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{t\to t_0}E|X(t)\text{-}X|^2=0.$

2、均方连续

1）定义：若随机过程$\{X(t),t\in T\}$，对$t_0\in T$，有$\lim\limits_{t\to t_0}X(t)=X(t_0)$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{t\to t_0}E|X(t)\text{-}X(t_0)|^2=0$，则称$X(t)$在$t_0$处均方连续. 若$X(t)$

在$\forall t\in T$连续，则称$X(t)$在T上均方连续.

2)均方连续准则(均方连续充要条件)

$\lim\limits_{t\to t_0} X(t)=X(t_0) \Leftrightarrow R_X(s,t)$在$(t_0,t_0)$处连续

$\Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{s\to t_0\\ t\to t_0}} R_X(s,t)=R_X(t_0,t_0).$

证：$\Rightarrow \because \lim\limits_{s\to t_0} X(s)=X(t_0), \lim\limits_{t\to t_0} X(t)=X(t_0)$(均方极限唯一性)

$\therefore \lim\limits_{\substack{s\to t_0\\ t\to t_0}} R_X(s,t)=\lim\limits_{\substack{s\to t_0\\ t\to t_0}} E[X(s)X(t)]=E[X(t_0)X(t_0)]$

$=R_X(t_0,t_0)$, (均方极限性质4，极限与期望可交换性)

$\therefore R_X(s,t)$在(t_0,t_0)处连续.

$\Leftarrow \because E\left|X(t)-X(t_0)\right|^2=EX^2(t)-2E[X(t)X(t_0)]+EX^2(t_0)$

$=R_X(t,t)-2R_X(t,t_0)+R_X(t_0,t_0).$

$\because \lim\limits_{\substack{s\to t_0\\ t\to t_0}} R_X(s,t)=R_X(t_0,t_0),$

$\therefore \lim\limits_{t\to t_0} R_X(t,t)=\lim\limits_{t\to t_0} R_X(t,t_0)=R_X(t_0,t_0),$

$\therefore \lim\limits_{t\to t_0} E\left|X(t)-X(t_0)\right|^2=0$，即$\lim\limits_{t\to t_0} X(t)=X(t_0)$，

故$X(t)$在t_0处连续.

注1：$X(t)$在T上连续，则$R_X(s,t)$在(t,t)处连续；

注2：若$\lim\limits_{t\to t_0} X(t)=X(t_0)\Rightarrow \lim\limits_{t\to t_0} EX(t)=E(\lim\limits_{t\to t_0} X(t))=EX(t_0)$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{t\to t_0}\mu_X(t)=\mu_X(t_0)$，即$\mu_X(t)$在$t_0$处连续.（均方极限性质3）

例10、设$X(t)=a\cos(\omega t+\Theta)$，$t\in(-\infty,+\infty)$，其中$a$和$\omega$是正常数，$\Theta$是在$(0,2\pi)$上服从均匀分布的随机变量.证明$X(t)$是均方连续的.

证明 Θ的概率密度为 $f(\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}, & 0<\theta<2\pi,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

$$R_X(s,t)=E[X(s)X(t)]$$

$$=E[a^2\cos(\omega s+\theta)\cos(\omega t+\theta)]$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}\cos(\omega s+\theta)\cos(\omega t+\theta)\cdot\frac{1}{2\pi}\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{a^2}{2\pi}\times\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[\cos(\omega(s+t)+2\theta)+\cos\omega(s-t)]\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}\cos\omega(s-t).$$

$\therefore\ \forall t_0 \in \mathrm{R}$,

$$\lim_{\substack{s\to t_0\\ t\to t_0}} R_X(s,t) = \lim_{\substack{s\to t_0\\ t\to t_0}} \frac{a^2}{2}\cos\omega(s-t) = \frac{a^2}{2} = R_X(t_0,t_0).$$

$\therefore\ R_X(s,t)$在(t_0,t_0)处连续，即$X(t)$在R均方上连续.

3、均方可导

1）定义：若随机过程$\{X(t),t\in T\}$在$t_0\in T$处的均方极限$\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{X(t)\text{-}X(t_0)}{t\text{-}t_0}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{X(t_0+\Delta t)\text{-}X(t_0)}{\Delta t}$存在，则称此极限为$X(t)$在$t_0$处的均方导数，记$X'(t_0)=\left.\dfrac{dX(t)}{dt}\right|_{t=t_0}$,并称$X(t)$在$t_0$处的均方可导.

注1：$X(t)$在t_0处的均方可导$\Leftrightarrow$

$$\lim_{\Delta t\to 0} E\left|\frac{X(t_0+\Delta t)-X(t_0)}{\Delta t}-X'(t_0)\right|^2=0.$$

注2：若$X(t)$在t_0处的均方可导. 则$X(t)$在t_0处的均方连续，反之，不一定.

注3：若$\forall t\in T, X'(t)=\dfrac{dX(t)}{dt}$存在，则称$X(t)$在$T$上均方可导. 且$X'(t)$为一新的随机过程.

2) 均方可导准则（均方可导充要条件）

$X(t)$在$t\in T$处的均方可导$\Leftrightarrow$

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h'\to 0}}\left[\frac{R_X(t+h,t+h')-R_X(t,t+h')}{h}+\frac{R_X(t,t+h')-R_X(t,t)}{h'}\right]$$

存在.（$R_X(s,t)$的广义二阶偏导数存在, 证明见教材）

3) 均方可导性质

(1)若$X(t)$为随机变量X，则$X'=0$.

(2)若$X(t)$均方可导, 则$\mu_{X'}(t)=EX'(t)=\dfrac{dEX(t)}{dt}=\mu_X'(t)$.

(3)若$X(t)$、$Y(t)$均方可导, 则对常数a, b, 有

$[aX(t)+bY(t)]'=aX'(t)+bY'(t)$.

(4)若$f(t)$是可微函数，$X(t)$均方可导，则

$[f(t)X(t)]'=f'(t)X(t)+f(t)X'(t)$.

(5)若$X(t)$均方可导, 则$R_{X'}(s,t)=E[X'(s)X'(t)]$

$$=\frac{\partial^2 R_X(s,t)}{\partial s\partial t}=\frac{\partial^2 R_X(s,t)}{\partial t\partial s}.$$

$$\left(R_{X'X}(s,t)=\frac{\partial R_X(s,t)}{\partial s}, R_{XX'}(s,t)=\frac{\partial R_X(s,t)}{\partial t}\right)$$

(5)证明：$R_{X'}(s,t)=E[X'(s)X'(t)]$

$$=E[\lim_{h\to 0}\frac{X(s+h)-X(s)}{h}\times\lim_{h'\to 0}\frac{X(t+h')-X(t)}{h'}]$$

$$=\lim_{h\to 0}\lim_{h'\to 0}[\frac{R_X(t+h,s+h')-R_X(t+h,s)}{h}-\frac{R_X(t,s+h')-R_X(t,s)}{h'}]$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\partial R_X(t+h,s)}{\partial s}-\frac{\partial R_X(t,s)}{\partial s}}{h}=\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial R_X(s,t)}{\partial s})=\frac{\partial^2 R_X(s,t)}{\partial t\partial s}.$$

同理可证$R_{X'}(s,t)=\dfrac{\partial^2 R_X(s,t)}{\partial s\partial t}.$

例11、设$X(t)=At, t\geq 0, A\sim N(0,\sigma^2)$,求$\mu_{X'}(t)$及$R_{X'}(s,t)$.

解: $\because \mu_X(t)=EX(t)=tEA=0,$

$R_X(s,t)=EX(s)X(t)=stEA^2=st\sigma^2,$

$\therefore \mu_{X'}(t)=\mu'_X(t)=0,$

$$R_{X'}(s,t)=\frac{\partial^2 R_X(s,t)}{\partial s\partial t}=\frac{\partial^2 R_X(s,t)}{\partial t\partial s}=\sigma^2.$$

或$\because X'(t)=(At)'=A, \therefore \mu_{X'}(t)=EX'(t)=EA=0.$

$R_{X'}(s,t)=E[X'(s)X'(t)]=EA^2=DA+E^2A=\sigma^2.$

4、均方可积

1）定义： 设$\{X(t), t\in[a,b]\}$是随机过程，$f(t)$在$[a,b]$上有定义，将区间$[a,b]$分成n个子区间，分点$a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$，记$\Delta t_k=t_k-t_{k-1}, k=1,2,\cdots,n$.

$\forall \xi_k\in[t_{k-1},t_k]$，令$\lambda=\max\limits_{1\le k\le n}\{\Delta_k\}$，若均方极限

$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)X(\xi_k)\Delta t_k$存在，且与子区间的划分及$\xi_k$取法无关，则称此极限为$f(t)X(t)$在$[a,b]$上的均方积分. 记$\int_a^b f(t)X(t)dt$.也称$f(t)X(t)$在$[a,b]$上是均方可积的.

注1：$X(t)$在$[a,b]$上均方可积$\Leftrightarrow$

$$\lim_{\lambda\to 0} E\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)X(\xi_k)\Delta_k - \int_a^b f(t)X(t)dt\right|^2 = 0.$$

注2：若$X(t)$在$[a,b]$上均方连续$\Leftrightarrow R_X(s,t)$连续.

则$X(t)$在$[a,b]$上均方可积$\Leftrightarrow \int_a^b X(t)dt$存在.

注3：若$X(t)$在$[a,b]$上均方可导，且$X'(t)$在$[a,b]$上均方连续，则$\int_a^b X'(t)dt = X(b) - X(a)$.

注4：均方可积可推广无穷区间，$\int_a^{+\infty} X(t)dt$.

2)均方可积准则（均方可积充要条件）

$f(t)X(t)$在$[a,b]$上的均方可积$\Leftrightarrow$

$\int_a^b\int_a^b f(s)f(t)R_X(s,t)dsdt$存在，且$E\left|\int_a^b f(t)X(t)dt\right|^2$

$=\int_a^b\int_a^b f(s)f(t)R_X(s,t)dsdt.$

特别，$X(t)$在$[a,b]$上的均方可积$\Leftrightarrow\int_a^b\int_a^b R_X(s,t)dsdt$存在,

且$E\left|\int_a^b X(t)dt\right|^2=\int_a^b\int_a^b R_X(s,t)dsdt.$

3)均方可积性质

(1)若X是随机变量，则$\int_a^b f(t)Xdt=X\int_a^b f(t)dt;$

(2)$\int_a^b X(t)dt=\int_a^c X(t)dt+\int_c^b X(t)dt;$

$$(3)\int_a^b[\alpha X(t)+\beta Y(t)]dt=\alpha\int_a^b X(t)dt+\beta\int_a^b Y(t)dt;$$

$$(4)E\int_a^b f(t)X(t)dt=\int_a^b f(t)EX(t)dt=\int_a^b f(t)\mu_X(t)dt$$

即$E\int_a^b X(t)dt=\int_a^b EX(t)dt=\int_a^b \mu_X(t)dt;$

(5)设$X(t)$在$[a,b]$上均方连续，则$Y(t)=\int_a^t X(s)ds, t\in[a,b]$

在$[a,b]$均方可导，且$Y'(t)=X(t)$，

$$\mu_Y(t)=EY(t)=\int_a^t EX(s)ds=\int_a^t \mu_X(s)ds,$$

$$R_Y(s,t)=E[Y(s)Y(t)]=\int_a^s\int_a^t R_X(s,t)dsdt$$

$$=\int_a^s\int_a^t R_X(u,v)dudv.$$

例12、设$X(t)=A\cos\alpha t+B\sin\alpha t, t\geq 0, \alpha$为常数，$A$与$B$相互独立，且服从$\cup(-1,1)$,试问$X(t)$是否均方可积，若均方可积，令$Y(t)=\int_0^t X(s)ds$, 求$Y(t)$的数字特征.

解$:\because \mu_X(t)=EX(t)=\cos\alpha tEA+\sin\alpha tEB=0,$

$$R_X(s,t)=EX(s)X(t)$$

$$=E[(A\cos\alpha s+B\sin\alpha s)(A\cos\alpha t+B\sin\alpha t)]$$

$$=\cos\alpha s\cos\alpha tEA^2+EAB(\cos\alpha s\sin\alpha t+\sin\alpha s\cos\alpha t)$$

$$+\sin\alpha s\sin\alpha tEB^2,$$

$$EA^2=DA+E^2A=\frac{2^2}{12}=\frac{1}{3}=DB+E^2B=EB^2,$$

$EAB=EAEB=0$(A与B相互独立).

$$\therefore R_X(s,t)=\frac{1}{3}\cos\alpha(s-t), s,t\geq 0.$$

$$\forall t_0 \in [0,+\infty), \lim_{\substack{s\to t_0\\ t\to t_0}} R_X(s,t) = R_X(t_0,t_0) = \frac{1}{3},$$

$\therefore X(t)$均方连续，故$X(t)$在$[0,+\infty)$均方可积.

$$\therefore \mu_Y(t) = \int_0^t EX(s)ds = 0,$$

$$R_Y(s,t) = \int_0^s \int_0^t R_X(u,v)dudv = \frac{1}{3}\int_0^s \int_0^t \cos\alpha(u-v)dudv$$

$$= \frac{1}{3}[\int_0^s \cos\alpha u du \int_0^t \cos\alpha v dv + \int_0^s \sin\alpha u du \int_0^t \sin\alpha v dv]$$

$$= \frac{1}{3\alpha^2}[\sin\alpha s \sin\alpha t + (1-\cos\alpha s)(1-\cos\alpha t)]$$

$$= \frac{1}{3\alpha^2}(1-\cos\alpha s - \cos\alpha t + \cos\alpha(s-t)).$$

$$\varphi^2{}_Y(t) = R_Y(t,t) = \frac{2}{3\alpha^2}(1-\cos\alpha t).$$

$$C_Y(s,t) = R_Y(s,t) - \mu_Y(s)\mu_Y(t) = R_Y(s,t)$$

$$= \frac{1}{3\alpha^2}(1-\cos\alpha s - \cos\alpha t + \cos\alpha(s-t)).$$

$$\sigma^2{}_Y(t) = C_Y(t,t) = D_Y(t) = \frac{2}{3\alpha^2}(1-\cos\alpha t).$$

或 $Y(t) = \int_0^t X(s)ds = \int_0^t [A\cos\alpha s + B\sin\alpha s]ds$

$$= \frac{A\sin\alpha t}{\alpha} + \frac{B(1-\cos\alpha t)}{\alpha}$$

$$\mu_Y(t) = EY(t) = \frac{\sin\alpha t EA}{\alpha} + \frac{(1-\cos\alpha t)EB}{\alpha} = 0.$$

其它数字特征计算繁琐.