例3 设由三种同型号的造纸机 A_1, A_2, A_3 使用四种不同涂料 B_1, B_2, B_3, B_4 制造同版纸,对每种不同搭配进行两次重复测量光洁度,数据如下：

机器＼涂料	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	42.5，42.6	42.0，42.2	43.9，43.6	42.2，42.5
A_2	42.1，42.3	41.7，41.5	43.1，43.0	42.5，41.6
A_3	43.6，43.8	43.6，43.2	44.1，44.2	42.9，43.0

在显著水平 $\alpha = 0.05$ 下，检验不同机器、不同涂料及他们的交互作用的对光洁度的影响是否显著？

解: 本题属于两因素重复试验的方差分析问题,为便于计算,将测量结果的数据均减去 42,所得

B＼A	B_1	B_2	B_3	B_4	$T_{i..}=\sum\limits_{j=1}^{4}\sum\limits_{k=1}^{2}x_{ijk}$	$T_{i..}^2=(\sum\limits_{j=1}^{4}\sum\limits_{k=1}^{2}x_{ijk})^2$	$\sum\limits_{j=1}^{4}\sum\limits_{k=1}^{2}x_{ijk}^2$
A_1	0.5，0.6 (1.1),1.21	0，0.2 (0.2),0.04	1.9，1.6 (3.5),12.25	0.2，0.5 (0.7),0.49	5.5	30.25	7.11
A_2	0.1，0.3 (0.4),0.16	-0.3，-0.5 (-0.8),0.64	1.1，1.0 (2.1),4.41	-0.5，-0.4 (-0.9),0.81	0.8	0.64	3.06
A_3	1.6，1.8 (3.4),11.56	1.6，1.2 (2.8),7.84	2.1，2.2 (4.3),18.49	0.9，1.0 (1.9),3.61	12.4	153.76	20.86
$T_{.j.}=\sum\limits_{i=1}^{3}\sum\limits_{k=1}^{2}x_{ijk}$	4.9	2.2	9.9	1.7	$\sum\limits_{i=1}^{3}\sum\limits_{j=1}^{4}\sum\limits_{k=1}^{2}x_{ijk}$ =18.7	$\sum\limits_{i=1}^{3}T_{i..}^2=$ 184.65	$\sum\limits_{i=1}^{3}\sum\limits_{j=1}^{4}\sum\limits_{k=1}^{2}x_{ijk}^2=$ 31.03
$T_{.j.}^2=(\sum\limits_{i=1}^{3}\sum\limits_{k=1}^{2}x_{ijk})^2$	24.01	4.84	98.01	2.89	$\sum\limits_{j=1}^{4}T_{.j.}^2=$ 129.75		
$\sum\limits_{i=1}^{3}\sum\limits_{k=1}^{2}x_{ijk}^2$	12.93	8.52	35.15	4.91	$\sum\limits_{j=1}^{4}\sum\limits_{i=1}^{3}T_{ij\cdot}^2=\sum\limits_{j=1}^{4}\sum\limits_{i=1}^{3}(\sum\limits_{k=1}^{2}x_{ijk})^2=61.51$		

方差分析结果不变,由条件知 $r=3, s=4, t=2, n=24$,故由所给数据列表计算如下:

其中, $T_{i..}=\sum_{j=1}^{4}\sum_{k=1}^{2}x_{ijk}$, $T_{.j.}=\sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{2}x_{ijk}$, $T_{ij\bullet}=\sum_{k=1}^{t}X_{ijk}$, $T_{...}=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}\sum_{k=1}^{2}x_{ijk}$,

$$S_T=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}\sum_{k=1}^{2}(x_{ijk}-\overline{x})^2=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}\sum_{k=1}^{2}x_{ijk}^2-\frac{T_{...}^2}{n}=31.03-\frac{18.7^2}{24}=16.4596$$

$$S_A=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}\sum_{k=1}^{2}(\overline{x}_{i..}-\overline{x})^2=st\sum_{i=1}^{3}(\overline{x}_{i..}-\overline{x})^2=\frac{1}{st}\sum_{i=1}^{3}T_{i..}^2-\frac{T_{...}^2}{n}=\frac{1}{8}\times184.65-\frac{18.7^2}{24}=8.5109$$

$$S_B=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}\sum_{k=1}^{2}(\overline{x}_{.j.}-\overline{x})^2=rt\sum_{j=1}^{4}(\overline{x}_{.j.}-\overline{x})^2=\frac{1}{rt}\sum_{j=1}^{4}T_{.j.}^2-\frac{T_{...}^2}{n}=\frac{1}{6}\times129.75-\frac{18.7^2}{24}=7.0546$$

$$S_E=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}\sum_{k=1}^{2}(x_{ijk}-\overline{x}_{ij.})^2=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}\sum_{k=1}^{2}x_{ijk}^2-\frac{1}{t}\sum_{j=1}^{4}\sum_{i=1}^{3}(\sum_{k=1}^{2}x_{ijk})^2=31.03-\frac{1}{2}\times61.51=0.275$$

$S_{A\times B}=S_T-S_A-S_B-S_E=0.6191.$ 于是得方差分析表如下：

方差来源	离差平方和	自由度	均方离差平方和	F比值	显著性
因素 A	$S_A=8.5109$	$r-1=2$	$\overline{S}_A=S_A/2=4.2555$	$\dfrac{\overline{S}_A}{\overline{S}_E}=185.53$	高度显著
因素 B	$S_B=7.0546$	$s-1=3$	$\overline{S}_B=S_B/3=2.3515$	$\dfrac{\overline{S}_B}{\overline{S}_E}=154.03$	高度显著
交互作用 $A\times B$	$S_{A\times B}=0.6191$	$(r-1)(s-1)=6$	$\overline{S}_{A\times B}=S_{A\times B}/6=0.1032$	$\dfrac{\overline{S}_{A\times B}}{\overline{S}_E}=4.51$	显著
误差 E	$S_E=0.275$	$rs(t-1)=12$	$\overline{S}_E=S_E/12=0.0229$		
总和	$S_T=16.4596$	$rst-1=23$			

当 $\alpha=0.05$ 时，查表得 $F_{0.05}(2,12)=3.89<185.83, F_{0.05}(3,12)=3.49<154.03, F_{0.05}(6,12)=3<4.51.$

故机器、涂料对光洁度的影响高度显著，他们的交互作用对光洁度影响显著。