第三讲 马尔可夫过程

过程 (或系统) 在时刻 t_0 所处的状态为已知的条件下,过程在时刻 $t > t_0$所处状态的条件分布与时刻 t_0 所处的状态有关,而与过程在时刻 t_0之前所处的状态无关的特性称为马尔可夫性或无后效性.

即:过程“将来”的情况与“过去”的情况是无关的.

一、马尔可夫过程的定义及分类

二、马尔可夫链及其概率分布

三、时间连续状态离散的马尔可夫过程

一、马尔可夫过程的定义及分类

1. 马尔可夫过程的定义

具有马尔可夫性的随机过程称为马尔可夫过程.

用分布函数表述马尔可夫性:

设 I: 随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 的状态空间，

如果对时间 t 的任意n个数值:

$t_1 < t_2 < \cdots < t_n, n \geq 3, t_i \in T,$

在条件 $X(t_i) = x_i$,$x_i \in I, i = 1,2,\cdots n-1$下，

$X(t_n)$的条件分布函数恰等于 在条件$X(t_{n-1}) = x_{n-1}$

下 $X(t_n)$ 的条件分布函数

即： $X(t_n)$在条件$X(t_i)=x_i$下的条件分布函数

$$P\{X(t_n)\le x_n \mid X(t_1)=x_1, X(t_2)=x_2,\cdots,X(t_{n-1})=x_{n-1}\}$$

$$=P\{X(t_n)\le x_n \mid X(t_{n-1})=x_{n-1}\}, x_n\in R \quad (1.1)$$

或写成 $X(t_n)$在条件$X(t_{n-1})=x_{n-1}$下的条件分布函数

$$F_{t_n|t_1\cdots t_{n-1}}(x_n,t_n \mid x_1,x_2,\cdots,x_{n-1};t_1,t_2,\cdots,t_{n-1})$$

$$=F_{t_n|t_{n-1}}(x_n,t_n \mid x_{n-1},t_{n-1}),$$

这时称过程 $\{X(t),t\in T\}$ 具有马尔可夫性或无后 效性．并称此过程为马尔可夫过程.

2. 马尔可夫过程的分类

（1）时间离散，状态离散--马尔可夫链。如直线上随机移动的质点.

（2）时间连续，状态离散。如110呼叫次数（泊松过程）.

（3）时间连续，状态连续。如布朗运动或维纳过程.

二、马尔可夫链及其概率分布

1. 马尔可夫链的定义

时间和状态都是离散的马尔可夫过程称为马尔可夫链，简称为马氏链，

记为 $\{X_n = X(n), n = 0,1,2,\cdots\}$.

它可以看作在时间集 $T_1 = \{0,1,2,\cdots\}$上对离散状态的马氏过程相继观察的结 果.

即设时间和状态都是离散的随机序列

$$\{X_n = X(n), n = 0,1,2,\cdots\},$$

状 态 空 间 为 $I = \{a_1, a_2, \cdots\}$, $a_i \in I$.

对任意的正整数 n, τ 和 $0 \le t_1 < t_2 < \cdots < t_\tau < m$;

$t_i, m, n+m \in T_1$, 有

$$P\{X_{m+n} = a_j \mid X_{t_1} = a_{i_1}, X_{t_2} = a_{i_2}, \cdots, X_{t_\tau} = a_{i_\tau}, X_m = a_i\}$$

$$= P\{X_{m+n} = a_j \mid X_m = a_i\},$$ 其中 $a_i \in I$.

1）转移概率

称条件概率 $P_{ij}(m,m+n)=P\{X_{m+n}=a_j \mid X_m=a_i\}$

为马氏链在时刻 m 处于状态 a_i条件下，在时刻

$m+n$ 转移到状态 a_j的转移概率.

说明：转移概率具有特点：

$$(1)\ 0\le P_{ij}(m,m+n)\le 1;$$

$$(2)\ \sum_{j=1}^{\infty} P_{ij}(m,m+n)=1,\ i=1,2,\cdots.$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} P_{ij}(m, m+n) = P\{\bigcup_{j=1}^{\infty} X(m+n) = a_j \mid X(m) = a_i\}$$

$$= P\{I \mid X(m) = a_i\} = \frac{P\{X(m) = a_i\}}{P\{X(m) = a_i\}} = 1.$$

由转移概率组成的矩阵

此矩阵的每一行元素之和等于1.

$$P(m, m+n) = (P_{ij}(m, m+n))$$

称为马氏链的转移概率矩阵. 它是随机矩阵.

2）平稳性

当转移概率 $P_{ij}(m, m+n)$ 只与 i, j 及时间间距 n 有关时，称转移概率具有平稳性.

同时也称此链是齐次的或时齐的.

此时, 记 $P_{ij}(m,m+n) = P_{ij}(n)$,

$$P_{ij}(n) = P\{X_{m+n} = a_j \mid X_m = a_i\}.$$

称为马氏链的n步转移概率

$P(n) = (P_{ij}(n))$为n步转移概率矩阵 .

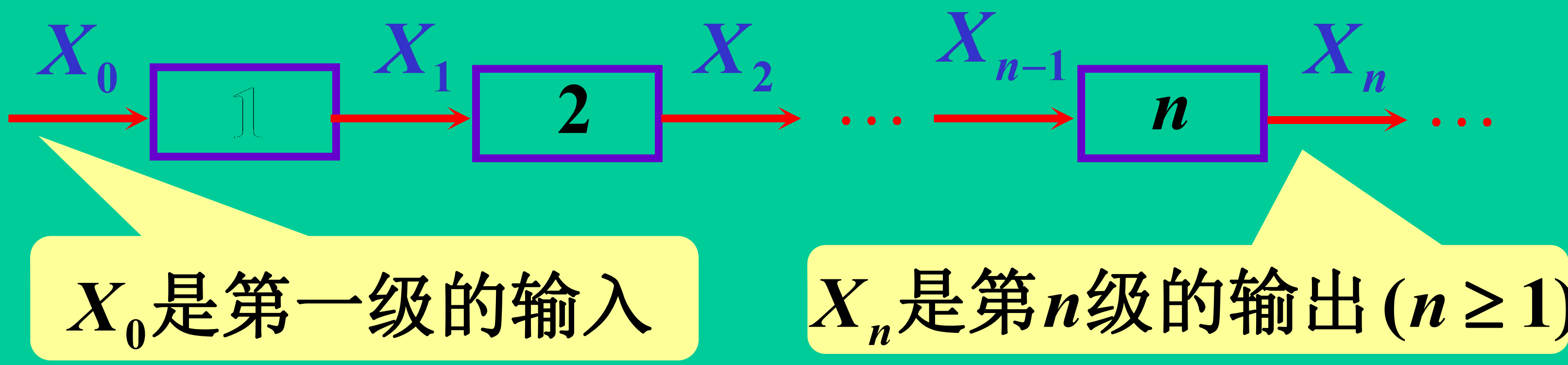
一步转移概率 $p_{ij} = P_{ij}(1) = P\{X_{m+1} = a_j \mid X_m = a_i\}.$

一步转移概率矩阵

$$
\begin{array}{cc}
 & X_{m+1}\text{的状态} \\
 & \begin{array}{ccccc} a_1 & a_2 & \cdots & a_j & \cdots \end{array} \\
X_m\text{的状态} \quad \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{array} & \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1j} & \cdots \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2j} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ p_{i1} & p_{i2} & \cdots & p_{ij} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \end{bmatrix} = P(1)
\end{array}
$$

记为P.

例1 (0 − 1传输系统) 只传输数字 0 和 1 的串联系统如图:



设一个单位时间传输一级,

设每一级的传真率为 p, 误码率为$q = 1 - p$,

分析: $\{X_n, n = 0,1,2,\cdots\}$是一随机过程,

状态空间 $I = \{0, 1\}$,

且当$X_n = i, i \in I$为已知时，

X_{n+1}所处的状态分布只与$X_n = i$有关，

而与时刻n以前所处的状态无关，

所以它是一个马氏链，且是齐次的.

一步转移概率

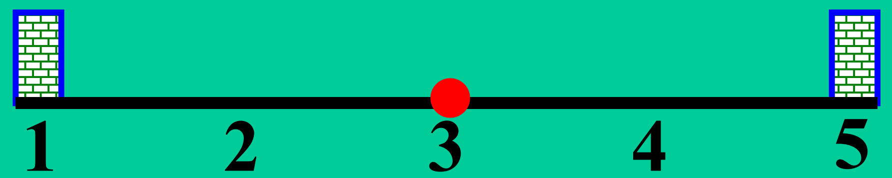
$$p_{ij} = P\{X_{n+1} = j \mid X_n = i\} = \begin{cases} p, j = i \\ q, j \neq i, \end{cases} \quad i, j = 0,1$$

一步转移概率矩阵

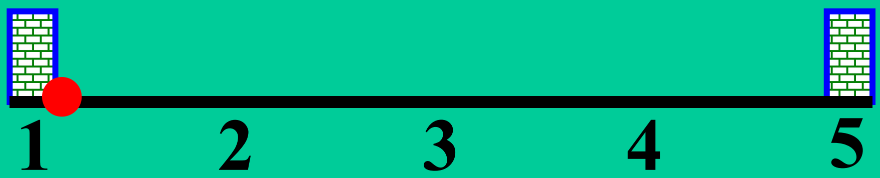
$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} 0 & 1 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} p & q \\ q & p \end{bmatrix} \end{array}$$

例2 一维随机游动

一随机游动的质点 在如图所示直线的点集 $I=\{1,2,3,4,5\}$ 上作随机游动，并且仅仅在1秒、2秒等时刻发生游动。



游动的概率规则 如果 Q 现在位于点 $i(1<i<5)$，则下一时刻各 $\frac{1}{3}$ 的概率向左或向右移动一格，或以 $\frac{1}{3}$ 的概率在原处；



如果Q现在位于1（或5）这点上，

则下一时刻就以概率1移动到2（或4）这一点上.

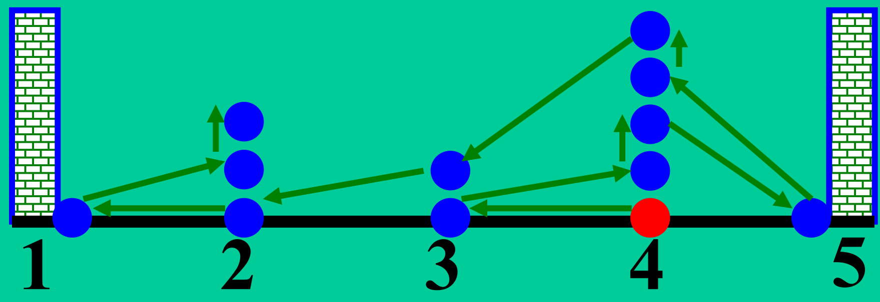
1和5这两点称为反射壁.

上面这种游动称为带有两个反射壁的随机游动.

模拟方法:

产生均匀分布的随机数序列13232211122…,

其中1表示左移；2表示不动；3表示右移.



理论分析:

以X_n表示时刻n时Q的位置.

则$\{X_n, n=0,1,2,\cdots\}$是一随机过程.

状态空间就是 I. 且当$X_n = i$, $i \in I$为已知时,

X_{n+1}所处的状态分布只与 $X_n = i$有关,

而与时刻n以前如何到达 i 是完全无关的,

所以它是一个马氏链, 且是齐次的.

一步转移概率

$$p_{ij} = P\{X_{n+1} = j \mid X_n = i\}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{3}, j = i-1, i, i+1, 1 < i < 5 \\ 1,\ \ i = 1, j = 2 \text{ 或 } i = 5, j = 4 \\ \\ 0, \left| j-1 \right| \geq 2. \end{cases}$$

一步转移概率矩阵

$$P=\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

说明: 改变游动的概率规则，就可得到不同方式的随机游动和相应的马氏链. 如果把点 1 改为吸收壁，相应链的转移概率矩阵 只须把 p 中第 1 行改为 (1,0,0,0,0).

2、n步转移概率及其矩阵计算

设 $\{X(n), n \in T_1\}$是一齐次马氏链,则对任意的 $u, v \in T_1$,有

$$P_{ij}(u+v) = \sum_{k=1}^{\infty} P_{ik}(u) p_{kj}(v), \ \ i, j = 1, 2, \cdots.$$

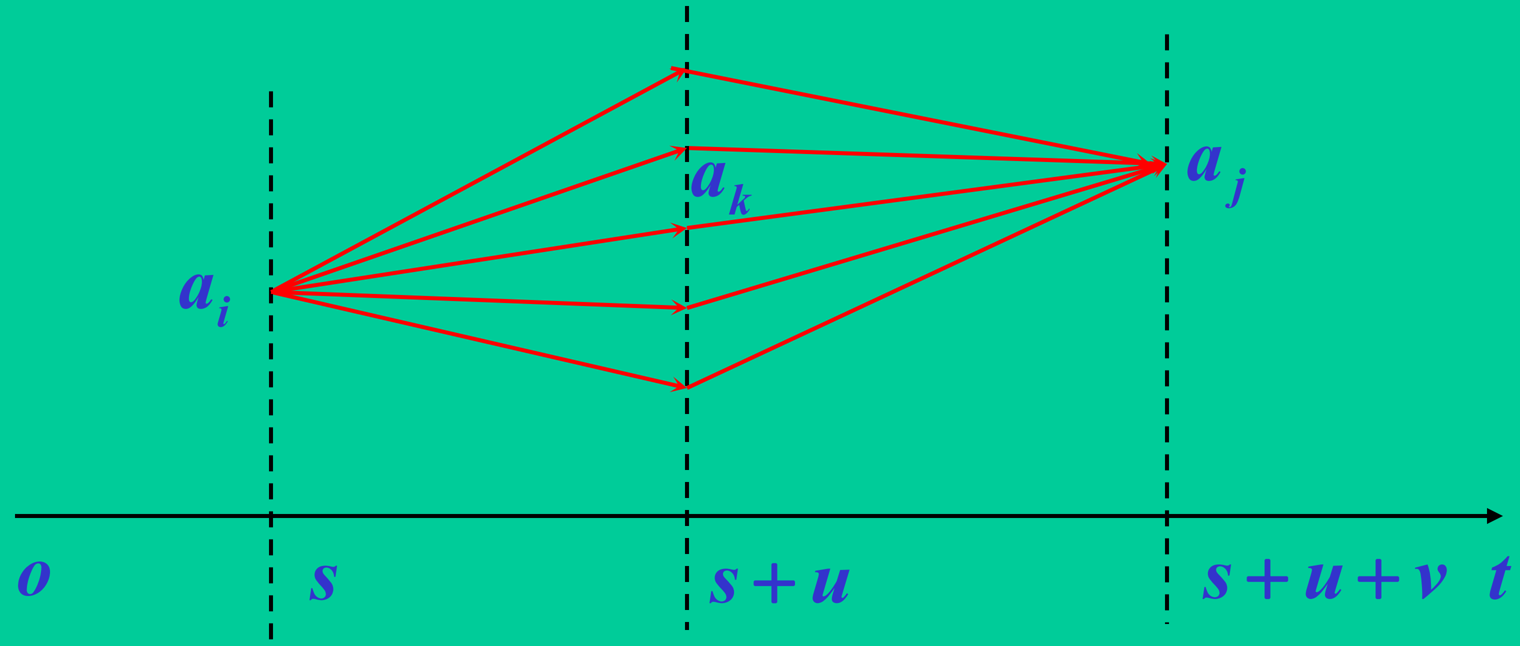
切普曼-科尔莫戈罗夫方程(简称C -K方程)

说明 $C-K$ 方程基于下列事实：

"从时刻 s 所处的状态 a_i 出发，经时段 $u+v$ 转移到状态 a_j，即 $X(s+u+v) = a_j$".

这一事件可分解成:

"从 $X(s)=a_i$ 出发,先经时段 u 转移到中间状态 $a_k\ (k=1,2\cdots)$, 在从 a_k 经时段 v 转移到状态 a_j" 等事件的和事件. 如下图所示:



证明 先固定 $a_k \in I$ 和 $s \in T_1$,

由条件概率定义和乘法定理得

$$P\{X(s+u+v)=a_j, X(s+u)=a_k \mid X(s)=a_i\}$$

$$= P\{X(s+u)=a_k \mid X(s)=a_i\}$$

$$\cdot P\{X(s+u+v)=a_j \mid X(s+u)=a_k, X(s)=a_i\}$$

$$= P\{X(s+u)=a_k \mid X(s)=a_i\}$$

$$\cdot P\{X(s+u+v)=a_j \mid X(s+u)=a_k\}$$

$$= P_{ik}(u)P_{kj}(v).$$ (马氏性和齐次性)

因事件组 "$X(s+u)=a_k$", $k=1,2,\cdots$ 构成一划分,

故有：

$$P_{ij}(u+v)=P\{X(s+u+v)=a_j \mid X(s)=a_i\}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}P\{X(s+u+v)=a_j, X(s+u)=a_k \mid X(s)=a_i\}.$$

考虑到马氏性和齐次性, 即得 *C-K* 方程.

C-K 方程也可写成矩阵形式:

$$P(u+v)=P(u)P(v).$$

利用$C-K$方程我们容易确定n步转移概率.

在$P(u+v)=P(u)P(v)$中，$v=n-1$，令$u=1$,

得递推关系：$P(n)=P(1)P(n-1)=PP(n-1)$,

从而可得 $P(n)=p^n$.

结论 1、一般由n步转移概率矩阵确定n转移概率;

2、齐次马氏链的 n 步转移概率矩阵是一步转移概率矩阵的n次方,链的有限维分布可由初始分布和一步转移概率完全确定.

3、齐次马氏链的分布

1） 初始概率分布

记 $p_i(0)=P\{X_0=X(0)=a_i\},a_i\in I,i=1,2,\cdots.$

称它为马氏链的初始分布. $\sum_{i=1}^{\infty}p_i(0)=1.$

2） 绝对(一维)概率分布

马氏链在任意时刻 $n\in T_1$的一维分布：

记 $p_j(n)=P\{X_n=X(n)=a_j\},a_j\in I,j=1,2,\cdots.$

称它为马氏链的绝对概率分布.

$$P\{X_n = a_j\} = \sum_{i=1}^{+\infty} P\{X_0 = a_i, X_n = a_j\}$$

$$= \sum_{i=1}^{+\infty} P\{X_n = a_j \mid X_0 = a_i\} P\{X_0 = a_i\},$$

即 $$p_j(n) = \sum_{i=1}^{+\infty} p_i(0) p_{ij}(n), j = 1,2,\cdots.$$ ———全概公式

绝对分布由初始分布和转移概率矩阵决定

用行向量表示为

$$p(n) = (p_1(n), p_2(n), \cdots, p_j(n), \cdots).$$

特点： $$\sum_{j=1}^{\infty} p_j(n) = 1.$$

3）有限维概率分布

对于任意 n 个时刻 $t_1 < t_2 < \cdots < t_n, t_i \in T_1$ 以及状态

$a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots a_{i_n} \in I$, 马氏链的 n 维分布：

$$P\{X_{t_1} = a_{i_1}, X_{t_2} = a_{i_2}, \cdots, X_{t_n} = a_{i_n}\}$$

$$= P\{X_{t_1} = a_{i_1})P\{X_{t_2} = a_{i_2} \mid X_{t_1} = a_{i_1}\}\cdots$$

$$\cdot P\{X_{t_n} = a_{i_n} \mid X_{t_1} = a_{i_1}, X_{t_2} = a_{i_2}, \cdots, X_{t_{n-1}} = a_{i_{n-1}}\}$$

$$= P\{X_{t_1} = a_{i_1}\}P\{X_{t_2} = a_{i_2} \mid X_{t_1} = a_{i_1}\}\cdots$$

$$\cdot P\{X_{t_n} = a_{i_n} \mid X_{t_{n-1}} = a_{i_{n-1}}\}$$

有限维分布仍由初始分布
转移概率决定

$$= p_{i_1}(t_1)P_{i_1 i_2}(t_2 - t_1)\cdots\cdots P_{i_{n-1}i_n}(t_n - t_{n-1}).$$

其中 $p_{i_1}(t_1) = \sum_{i=1}^{+\infty} p_i(0) p_{ii_1}(t_1), i_1 = 1, 2, \cdots.$

例3 $\{X_n, n \geq 0\}$是具有三个状态 0,1,2 的齐次马氏链, 一步转移概率矩阵为

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 3/4 & 1/4 \end{bmatrix} \end{array},$$

初始分布 $p_i(0) = P\{X_0 = i\} = 1/3, \quad i = 0,1,2.$

试求： $(1) P_{12}(2) = p\{X_2 = 2 \mid X_0 = 1\};$

$(2)\ \ P\{X_0 = 0, X_2 = 1\};$

$(3) p_1(2) = P\{X_2 = 1\};$

$(4)\ \ P\{X_1 = 1, X_2 = 2\};$

$(5)\ \ P\{X_1 = 0, X_3 = 2, X_5 = 1\};$

$(6) p\{X_0 = 0, X_1 = 1, X_2 = 2\}.$

解　先求出二步转移概率矩阵

$$P(2)=P^2=\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 5/8 & 5/16 & 1/16 \\ 5/16 & 1/2 & 3/16 \\ 3/16 & 9/16 & 1/4 \end{bmatrix} \end{array}.$$

于是：$(1)P_{12}(2)=p\{X_2=2\mid X_0=1\}=\dfrac{3}{16}$,－－转移概率

$(2)\ \ P\{X_0=0, X_2=1\}$－－－有限维概率

$$=P\{X_0=0\}P\{X_2=1\mid X_0=0\}$$

$$=P_0(0)P_{01}(2)=\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{16}=\frac{5}{48};$$

$$(3)\quad p_1(2)=P\{X_2=1\}=\sum_{i=0}^{2}p_i(0)P\{X_2=1\mid X_0=i\}$$

$$=p_0(0)P_{01}(2)+p_1(0)P_{11}(2)+p_2(0)P_{21}(2)$$

$$=\frac{1}{3}\left[\frac{5}{16}+\frac{1}{2}+\frac{9}{16}\right]$$

$$P(2)=P^2=\begin{array}{c|ccc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 5/8 & 5/16 & 1/16 \\ 1 & 5/16 & 1/2 & 3/16 \\ 2 & 3/16 & 9/16 & 1/4 \end{array}.$$

$$=\frac{11}{24}.\text{----绝对概率分布}$$

$$(4)\quad P\{X_1=1,X_2=2\}=P\{X_1=1\}P\{X_2=2\mid X_1=1\}$$

$$=p_1(1)\ p_{12}(1)=\sum_{i=0}^{2}p_i(0)P\{X_1=1\mid X_0=i\}P\{X_2=2\mid X_1=1\}$$

$$=\sum_{i=0}^{2}\frac{1}{3}p_{i1}(1)p_{12}(1)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right)\frac{1}{4}=\frac{1}{8}.$$

(5) $P\{X_1=0, X_3=2, X_5=1\}$

$$=P\{X_1=0\}P\{X_3=2\mid X_1=0\}P\{X_5=1\mid X_3=2\}$$

$$=p_0(1)\ p_{02}(2)\ p_{21}(2)$$

$$=\sum_{i=0}^{2} p_i(0)P\{X_1=0\mid X_0=i\}P\{X_3=2\mid X_1=0\}P\{X_5=1\mid X_3=2\}$$

$$=\sum_{i=0}^{2}\frac{1}{3}p_{i0}(1)p_{02}(2)\ p_{21}(2)$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right)\times\frac{1}{16}\times\frac{9}{16}$$

$$=\frac{3}{256}.$$

$$P=\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 3/4 & 1/4 \end{bmatrix} \end{array},$$

$$(6)\, p\{X_0=0, X_1=1, X_2=2\}$$
$$= p\{X_0=0\}p\{X_1=1 \mid X_0=0\}p\{X_2=2 \mid X_1=1\}$$
$$= p_0(0)p_{01}(1)p_{12}(1)$$
$$= \frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}$$
$$= \frac{1}{48}.$$

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 3/4 & 1/4 \end{bmatrix} \end{array},$$

4、遍历性及其极限分布

1）定义 设齐次马氏链的状态空 间为 I，若对于所有的 $a_i, a_j \in I$，转移概率 $P_{ij}(n)$ 存在极限

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}(n) = \pi_j \qquad (\text{不依赖于 } i)$$

或

$$P(n) = P^n \xrightarrow[(n\to+\infty)]{} \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_j & \cdots \\ \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_j & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_j & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \end{bmatrix}$$

则称此链具有遍历性.

若 $\sum_j \pi_j = 1$，则称 $\pi = (\pi_1, \pi_2, \cdots)$ 为链的极限分布.

意义 对固定的状态 j,不管链在某一时刻的什么状态 i 出发，通过长时间的转移到达 状态 j 的概率都趋近于 π_j .

2）若齐次马氏链具有遍历性，则 $\lim_{n\to\infty} p_j(n) = \pi_j$

证：$\because\ p_j(n) = \sum_{i=1}^{+\infty} p_i(0) p_{ij}(n), j = 1,2,\cdots.$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} p_j(n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{+\infty} p_i(0) p_{ij}(n) =$$

$$\sum_{i=1}^{+\infty} p_i(0) \lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) = \sum_{i=1}^{+\infty} p_i(0)\pi_j = \pi_j \sum_{i=1}^{+\infty} p_i(0) = \pi_j .$$

3）（有限链）遍历性的充分条件

设齐次马氏链的状态空 间为$I=\{a_1,a_2,\cdots,a_N\}$，P 是它的一步转移概率矩阵， 如果存在正整数 m，使对任意的 $a_i,a_j\in I$，都有

$$P_{ij}(m)>0,\quad i,j=1,2,\cdots,N,$$

则此链具有遍历性，

且有极限分布 $\pi=(\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_N)$，

它是方程组 $\pi=\pi P$ 满足条件$\pi_j>0,\sum_{j=1}^{N}\pi_j=1$

的唯一解.

说明

1. 求证遍历性即找一正整数 m，使 m 步转移概率矩阵 P^m 无零元.

2. 极限分布转化为了求解方程组.

3. 在定理的条件下马氏链的极限分布是平稳分布.

例4　例3是否遍历？如是求其极限分布(平稳分布).

解　因二步转移概率矩阵

$$P(2)=P^2=\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 5/8 & 5/16 & 1/16 \\ 5/16 & 1/2 & 3/16 \\ 3/16 & 9/16 & 1/4 \end{bmatrix} \end{array}.$$

$\therefore\ p_{ij}(2)>0$,即马氏链具有遍历性.

令（π_1, π_2, π_3）$P=(\pi_1, \pi_2, \pi_3)$,得

$$\begin{cases} \frac{3}{4}\pi_1+\frac{1}{4}\pi_2=\pi_1 \\ \frac{1}{4}\pi_1+\frac{1}{2}\pi_2+\frac{3}{4}\pi_3=\pi_2 \\ \frac{1}{4}\pi_2+\frac{1}{4}\pi_3=\pi_3 \\ \pi_1+\pi_2+\pi_3=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi_2=\pi_1 \\ \pi_1=3\pi_3 \\ \pi_2=3\pi_3 \\ \pi_1+\pi_2+\pi_3=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \pi_1=\pi_2=\frac{3}{7}, \quad \pi_3=\frac{1}{7}.$$

故所求极限分布为$(\frac{3}{7},\frac{3}{7},\frac{1}{7})$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ P=\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} & \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 3/4 & 1/4 \end{bmatrix}, \end{array}$$

例5　设一马氏链的一步转移概率阵为

$$P=\begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix},$$

试讨论它的遍历性.

解　$$P(2)=P^2=\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix},$$

当 n 为奇数时, $P(n)=P(1)=P$,

当 n 为偶数时, $P(n)=P(2)$.

表明　对任意固定的 $j(=1,2,3,4)$, 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}(n)$ 都不存在.故此链不具遍历性.

例6

设齐次马氏链$\{X(n),n=0,1,2,\cdots\}$的状态空间$S=\{1,2,3,4\}$,

其一步转移概率矩阵为$\begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$,初始概率分

布律为$p_i(0)=p\{X(0)=i\}=\dfrac{1}{4}, i=1,2,3,4.$

求:(1) $p\{X(3)=2 \mid X(1)=1\}$

(2) $p_1(2)=p\{X(2)=1\}$,

(3) $p\{X(0)=1, X(1)=2, X(3)=3\}$,

(4) $p\{X(1)=2, X(3)=3, X(5)=4\}$,

(5)此链是否具有遍历性？若是求其极限分布.

解:(1) $\because p\{X(3)=2 \mid X(1)=1\}=p_{12}(2)$,

$$P(2)=P^2=P\times P=\begin{bmatrix} 3/9 & 4/9 & 2/9 & 0 \\ 2/9 & 4/9 & 2/9 & 1/9 \\ 1/9 & 2/9 & 4/9 & 2/9 \\ 0 & 2/9 & 4/9 & 3/9 \end{bmatrix},$$

$$\therefore p\{X(3)=2 \mid X(1)=1\}=\frac{4}{9}.$$

$$(2)\because\ p_1(2)=p\{X(2)=1\}=\sum_{i=1}^{4}p_i(0)p_{i1}(2),$$

$$\therefore\ p_1(2)=p\{X(2)=1\}=\frac{1}{4}(\frac{3}{9}+\frac{2}{9}+\frac{1}{9}+0)=\frac{1}{6}.$$

$$(3)\,p\{X(0)=1,X(1)=2,X(3)=3\}$$

$$=p\{X(0)=1\}p\{X(1)=2\mid X(0)=1\}p\{X(3)=3\mid X(1)=2\}$$

$$=\frac{1}{4}\times p_{12}(1)p_{23}(2)=\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{9}=\frac{1}{27}.$$

$$(4)\,p\{X(1)=2,X(3)=3,X(5)=4\}$$

$$=p\{X(1)=2\}p\{X(3)=3\mid X(1)=2\}p\{X(5)=4\mid X(3)=3\}$$

$$=p_2(1)p_{23}(2)p_{34}(2)$$

$$=\sum_{i=1}^{4}p_i(0)p\{X(1)=2\mid X(0)=i\}p\{X(3)=3\mid X(1)=2\}$$

$$p\{X(5)=4\mid X(3)=3\}=\frac{1}{4}\times(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+0)\times\frac{2}{9}\times\frac{2}{9}=\frac{4}{243}.$$

$$(5) \because p^3 = \begin{bmatrix} 3/9 & 4/9 & 2/9 & 0 \\ 2/9 & 4/9 & 2/9 & 1/9 \\ 1/9 & 2/9 & 4/9 & 2/9 \\ 0 & 2/9 & 4/9 & 3/9 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7/27 & 12/27 & 6/27 & 2/27 \\ 6/27 & 10/27 & 8/27 & 3/27 \\ 3/27 & 8/27 & 10/27 & 6/27 \\ 2/27 & 6/27 & 12/27 & 7/27 \end{bmatrix}.$$

$\therefore\ p_{ij}(3) > 0$,故马氏链具有遍历性.

令 $(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4)P=(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4)$,得

$$\begin{cases} \frac{1}{3}\pi_1+\frac{1}{3}\pi_2=\pi_1 \\ \frac{2}{3}\pi_1+\frac{1}{3}\pi_2+\frac{1}{3}\pi_3=\pi_2 \\ \frac{1}{3}\pi_2+\frac{1}{3}\pi_3+\frac{2}{3}\pi_4=\pi_3 \\ \frac{1}{3}\pi_3+\frac{1}{3}\pi_4=\pi_4 \\ \pi_1+\pi_2+\pi_3+\pi_4=1 \end{cases} \Rightarrow \pi_1=\pi_4=\frac{1}{6},\quad \pi_2=\pi_3=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

$$\begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

故所求极限分布为 $(\frac{1}{6},\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{6})$.

三、时间连续状态离散的马尔可夫过程

1、定义及概率分布

（1）定义

设随机过程$\{X(t),t\geq 0\}$的状态空间为E,若对$\forall 0\leq t_1<t_2<\cdots<t_m<+\infty$,任意正整数$s$,$\forall i_1,i_2,\cdots,i_{m-1},i,j\in E$,有

$$p\{X(t_m+s)=j\,|\,X(t_1)=i_1,\cdots,X(t_{m-1})=i_{m-1},X(t_m)=i\}$$

$$=p\{X(t_m+s)=j\,|\,X(t_m)=i\}\overset{t_m=t}{=}p\{X(t+s)=j\,|\,X(t)=i\}=p_{ij}(t,t+s).$$

则称$\{X(t),t\geq 0\}$为时间连续，状态离散的马氏过程，其中s为时间间隔，称条件概率$p_{ij}(t,t+s)$为马氏过程在t时刻经过s时间的转移概率函数.

注:1、若$p_{ij}(t,t+s)$只与i,j,s有关，而与t无关，即$p_{ij}(t,t+s)=p_{ij}(s)$，则称$\{X(t),t\geq 0\}$为时间连续，状态离散的齐次马氏过程，特别当$E=\{1,2,\cdots,N\}$,则称$\mathrm{p}(s)=(p_{ij}(s))_{N\times N}$为概率转移函数矩阵.

2、$\sum_{j=1}^{N} p_{ij}(s)=1.$

3、当$s=0$时，$p_{ij}(0)=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$,即$\mathrm{p}(0)=\mathrm{I}$(单位矩阵或初始分布).

（2）转移概率函数矩阵计算

若$\{X(t),t\geq 0\}$为时间连续，状态离散的齐次马氏过程，

则对$\forall i,j\in E, p_{ij}(s+t)=\sum_{k=1}^{N} p_{ik}(s)p_{kj}(t)\Leftrightarrow$

$\mathrm{p}(s+t)=\mathrm{p}(s)\mathrm{p}(t)--C-K$方程.

（3）概率函数分布

1) 初始分布：设齐次马氏过程$\{X(t),t\geq 0\}$的状态空间

$E=\{1,2,\cdots,N\}$,在$t=0$时刻的概率分布律为$p\{X(0)=i\}$

$=p_i(0),\forall i\in E$为此马氏过程的初始概率分布. 易知

$\sum_{i=1}^{N}p_i(0)=1,(p_1(0),\ p_2(0),\cdots,\ p_N(0))$为初始分布向量.

2) 绝对分布：$p_j(t)=p\{X(t)=j\}=p\{\bigcup_{i=1}^{N}X(0)=i,X(t)=j\}$

$$=\sum_{i=1}^{N}p\{X(0)=i,X(t)=j\}=\sum_{i=1}^{N}p\{X(0)=i\}p\{X(t)=j\mid X(0)=i\}$$

$=\sum_{i=1}^{N}p_i(0)p_{ij}(t)$－－全概公式.$\sum_{j=1}^{N}p_j(t)=1$

2、遍历性及极限分布

(1) 定义：设齐次马氏过程$\{X(t),t\geq 0\}$的状态空间$E=\{1,2,\cdots,N\}$,若对$\forall i,j\in E,\lim\limits_{t\to+\infty}p_{ij}(t)=p_j$存在且与$i$无关，则称齐次马氏过程$\{X(t),t\geq 0\}$具有遍历性的.

称$p_j(j\in E)$为极限分布.

（2）若齐次马氏过程$\{X(t),t\geq 0\}$具有遍历性的，则

$$\lim_{t\to+\infty}p_j(t)=p_j.$$

证明：$\because\{X(t),t\geq 0\}$具有遍历性的，即$\lim\limits_{t\to+\infty}p_{ij}(t)=p_j$.

$$\therefore \lim_{t\to+\infty}p_j(t)=\lim_{t\to+\infty}p\{\bigcup_{i=1}^{N}X(0)=i,X(t)=j\}$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\sum_{i=1}^{N}p\{X(0)=i,X(t)=j\}$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\sum_{i=1}^{N}p\{X(0)=i\}p\{X(t)=j\mid X(0)=i\}$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\sum_{i=1}^{N}p_i(0)p_{ij}(t)$$

$$=\sum_{i=1}^{N}p_i(0)\lim_{t\to+\infty}p_{ij}(t)$$

$$=\sum_{i=1}^{N}p_i(0)p_j=1\times p_j=p_j.$$

(3)遍历性判定充分条件：设齐次马氏过程$\{X(t),t\geq 0\}$的状态空间$E=\{1,2,\cdots,N\}$,若$\exists t_0$,对$\forall i,j\in E$,有$p_{ij}(t_0)>0$,则$\{X(t),t\geq 0\}$具有遍历性的.

即$P(t_0)=(p_{ij}(t_0))_{N\times N}$无零元素.

3、独立增量过程

（1）定义

给定二阶矩过程 $\{X(t), t \geq 0\}$, 称随机变量 $X(t)-X(s), 0 \leq s < t$ 为随机过程在区间 $(s,t]$ 上的增量.如果对任意选定的 正整数 n 和任意选定的 $0 \leq t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, n 个增量

$$X(t_1)-X(t_0), X(t_2)-X(t_1), \cdots, X(t_n)-X(t_{n-1})$$

相互独立, 则称 $\{X(t), t \geq 0\}$ 为独立增量过程.

特征:在互不重叠的区间上, 状态的增量是相 互独立的.

在 $X(0)=0$ 的条件下, 独立增量过程的有限维分布函数族可以由增 量 $X(t)-X(s)$ $(0 \leq s < t)$ 的分布确定.

(2) 独立增量过程协方差函数

独立增量过程的协方差函数 $C_X(s,t)$.

设 $X(0)=0$, 方差函数 $D_X(t)$已知.

记 $Y(t)=X(t)-\mu_X(t)$.

当$X(t)$具有独立增量时，$Y(t)$也具有独立增量; $Y(0)=0,\ E[Y(t)]=0,\ D_Y(t)=E[Y^2(t)]=D_X(t)$.

（$\therefore E[Y(t)]=E[X(t)-\mu_X(t)]=\mu_X(t)-\mu_X(t)=0$)

因此,当$0\le s<t$时,有

$$C_X(s,t)=E\{[X(s)-\mu_X(s)][X(t)-\mu_X(t)]\}$$

$$=E[Y(s)Y(t)]$$

$$=E\{[Y(s)-Y(0)][(Y(t)-Y(s))+Y(s)]\}$$

$$=\ E[Y(s)-Y(0)]E[Y(t)-Y(s)]+E[Y^2(s)]$$

$$=D_X(s).（\because E[Y(t)]=0,\ E[Y(s)-Y(0)]=0）$$

因此，对任意$s,t\ge 0$，协方差函数可用方差函 数表示为

$$C_X(s,t)=D_X(\min(s,t)).$$

如果对任意的实数 h 和 $0 \le s+h < t+h$,

$X(t+h)-X(s+h)$ 和 $X(t)-X(s)$ 具有相同的分布,

则称增量具有平稳性.

如果增量具有平稳性, 那么增量 $X(t)$-$X(s)$ 的分布函数只依赖于时间差 t-s, 而不依赖于 t 和 s 本身.

当增量具有平稳性时, 称相应的独立增量过程是齐次的或时齐的.

注：时间连续状态离散的平稳独立增量过程;

时间连续状态连续的平稳独立增量过程。

（3）时间连续状态离散的平稳独立增量过程必为齐次马尔可夫过程。

证明: $\because \{X(t), t \geq 0\}$为平稳独立增量过程,

$$\therefore\ p\{X(t_m+s)=j \mid X(t_1)=i_1, X(t_2)=i_2, \cdots, X(t_{m-1})=i_{m-1}, X(t_m)=i\}$$

$$=\frac{p\{X(t_1)=i_1, X(t_2)=i_2, \cdots, X(t_{m-1})=i_{m-1}, X(t_m)=i, X(t_m+s)=j\}}{p\{X(t_1)=i_1, X(t_2)=i_2, \cdots, X(t_{m-1})=i_{m-1}, X(t_m)=i\}}$$

$$=\frac{p\{X(t_1)=i_1, X(t_2)-X(t_1)=i_2-i_1, \cdots, X(t_m)-X(t_{m-1})=i-i_{m-1}, X(t_m+s)-X(t_m)=j-i\}}{p\{X(t_1)=i_1, X(t_2)-X(t_1)=i_2-i_1, \cdots, X(t_m)-X(t_{m-1})=i-i_{m-1}\}}$$

$$=\frac{p\{X(t_1)=i_1\}p\{X(t_2)-X(t_1)=i_2-i_1\}\cdots p\{X(t_m)-X(t_{m-1})=i-i_{m-1}\}p\{X(t_m+s)-X(t_m)=j-i\}}{p\{X(t_1)=i_1\}p\{X(t_2)-X(t_1)=i_2-i_1\}\cdots p\{X(t_m)-X(t_{m-1})=i-i_{m-1}\}}$$

$$=\ p\{X(t_m+s)-X(t_m)=j-i\}$$

$$= \frac{p\{X(t_m+s)-X(t_m)=j-i\}\,p\{X(t_m)=i\}}{p\{X(t_m)=i\}}$$

$$= \frac{p\{X(t_m)=i, X(t_m+s)-X(t_m)=j-i\}}{p\{X(t_m)=i\}} = \frac{p\{X(t_m)=i, X(t_m+s)=j\}}{p\{X(t_m)=i\}}$$

$$= \frac{p\{X(t_m+s)=j \mid X(t_m)=i\}\,p\{X(t_m)=i\}}{p\{X(t_m)=i\}}$$

$$= p\{X(t_m+s)=j \mid X(t_m)=i\} = p_{ij}(s).$$

$\therefore X(t)$为马尔可夫过程.

又$p\{X(t_m+s)-X(t_m)=j-i\} = p\{X(t_m+s)=j \mid X(t_m)=i\}$.

$\therefore X(t)$为齐次马尔可夫过程.

4、泊松过程

（1）定义

设$\{N(t),t\geq 0\}$的状态空间$E=\{0,1,2,\cdots\}$,且满足：

（1）$N(t)$为平稳独立增量过程；

（2）$N(t)\sim\pi(\lambda t)$,即$p\{N(t)=k\}=p\{N(t+a)-N(a)=k\}$

$=\dfrac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!},k\in E,\lambda>0.$称$\{N(t),t\geq 0\}$为泊松（计数）过程.

（2）等价定义

设$\{N(t),t\geq 0\}$的状态空间$E=\{0,1,2,\cdots\}$,且满足：

（1）$N(t)$为平稳独立增量过程；

（2）当Δt很小时，$p\{N(t+\Delta t)-N(t)=1\}=\lambda(\Delta t)+o(\lambda(\Delta t)).$

称$\{N(t),t\geq 0\}$为泊松（计数）过程.

证：$p\{N(t+\Delta t)-N(t)=1\}=\lambda(\Delta t)e^{-\lambda(\Delta t)}$

$$=\lambda(\Delta t)(1+\frac{-\lambda(\Delta t)}{1!}+\frac{(-\lambda(\Delta t))^2}{2\,!}+\cdots+\frac{(-\lambda(\Delta t))^n}{n!}+\cdots)$$

$$=\lambda(\Delta t)-\frac{(\lambda(\Delta t))^2}{1!}+\cdots+\frac{(-1)^n(\lambda(\Delta t))^{n+1}}{n!}+\cdots$$

$$=\lambda(\Delta t)+o(\lambda(\Delta t)).(\Delta t\to 0)$$

（3）泊松过程的数字特征

1） $E[N(t)]=\lambda t,$ 均值函数 非平稳过程

$D_N(t)=\mathrm{Var}[N(t)]=\lambda t,$ 方差函数

2）$R_N(s,t)=E[N(s)N(t)]=\lambda^2 st+\lambda\min\{s,t\},s,t\geq 0.$

相关函数

$C_N(s,t)=\lambda\min\{s,t\},\quad s,t\geq 0.$ 协方差函数

若 λ 是时间t的函数 $\lambda=\lambda(t),t\geq 0,$ 则称泊松过程是非齐次的.

3） $N(t)-N(s)\sim\pi(\lambda(t-s)),\quad t>s\geq 0$

平稳独立增量过程

证:1）同概率论,

2) 设$s\leq t,R_N(s,t)=E[N(s)N(t)]$

$=E[(N(s)-N(0))(N(t)-N(s)+N(s))]$

$=E[(N(s)-N(0))(N(t)-N(s))]+EN^2(s).(N(0)=0)$

$=E(N(s)-N(0))E(N(t)-N(s))+DN(s)+E^2N(s)$

$(\because N(t)$为独立增量过程)

$$= EN(s)(EN(t) - EN(s)) + \lambda s + (\lambda s)^2$$

$$= \lambda s(\lambda t - \lambda s) + \lambda s + (\lambda s)^2 = \lambda^2 st + \lambda s = \lambda^2 st + \lambda \min\{s, \ t\}.$$

$$C_N(s,t) = R_N(s,t) - EN(s)EN(t) = \lambda^2 st + \lambda \min\{s, \ t\} - \lambda^2 st$$

$$= \lambda \min\{s, \ t\}.$$

3）$\because N(t) - N(s)$与$N(t\text{-s}) - N(0)$同分布，

$$\therefore p\{N(t) - N(s) = k\} = p\{N(t\text{-s}) - N(0) = k\}$$

$$= p\{N(t\text{-s}) = k\} = \frac{(\lambda(t\text{-s}))^k e^{-\lambda(t\text{-s})}}{k!},$$

即$N(t) - N(s) \sim \pi(\lambda(t\text{-s}))$．

一、 考试时间：下学期开学初；

二、 考试形式：闭卷，可使用计算器勿带手机，务必遵守考场纪律；

三、 考试地点：关注研究生院安排；

四、 考试内容：紧扣大纲与目标，双基及计算为主；

五、 答疑时间：12月15日19：05-21：40；

六、 答疑形式：腾讯会议ID(341-8578-8982).