第二讲　　平稳（随机）过程

一、平稳过程的概念

二、相关函数的性质

三、各态历经性

四、平稳过程的（功率）谱密度

五、线性系统中的平稳过程

一、平稳随机过程的概念

在实际中有相当多的随机过程,不仅它现在的状态,而且它过去的状态,都对未来状态的发生有着很强的影响.

如果过程的统计特性不随时间的推移而变化,则称之为平稳随机过程.

随机过程 $\begin{cases}\text{非平稳过程：过程的统计特性随时间而改变;}\\ \text{平稳过程：过程的统计特性不随时间而改变.}\end{cases}$

1.严平稳过程定义

如果对于任意的$n(n=1,2,\cdots),t_1,t_2,\cdots,t_n\in T$

和任意实数h，当$t_1+h,t_2+h,\cdots,t_n+h\in T$时，

n维随机变量 $(X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_n))$

和$(X(t_1+h),X(t_2+h),\cdots,X(t_n+h))$

具有相同的分布函数，即

$$F_X(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)=$$

$$F_X(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1+h,t_2+h,\cdots,t_n+h)$$

则称随机过程$\{X(t),t\in T\}$

具有平稳性,并同时称此过程为平稳随机过程,

或简称平稳过程 严(强) 平稳过程或狭义平稳过程.

注1：若$X(t)$为严平稳过程，其一维分布函数$\forall t\in T$，有$F(x,t)=F(x)$，特别，状态空间为连续性，则$f(x,t)=f(x)$. $X(t)$为离散性，分布律不随t改变.

注2：二维分布函数有$F(x_1,x_2;\ t_1,t_2)=F(x_1,x_2;\ t_1+h,t_2+h)=F(x_1,x_2;\ 0,t_2-t_1)=F(x_1,x_2;\ t,t+\tau)$，仅与时间间隔有关，而与起点$t_1$与终点$t_2$无关.

平稳过程的参数集T一般为:

$$(-\infty,+\infty),\quad [0,+\infty),\ \{0,\pm1,\pm2,\cdots\}\ \text{或}\ \{0,1,2,\cdots\}.$$

当T为离散情况,称平稳过程$\{X_n\}$为平稳随机序列,或平稳时间序列.

说明

(1)将随机过程划分为平稳过程和非平稳过程有重要的实际意义.过程若是平稳的可使问题的分析尤为简化.

(2)平稳过程的数字特征有很好的性质.

2、平稳过程数字特征的特点:

设$X(t)$为严平稳过程，则

（1） $\mu_X(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} xF'(x,t)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty} xF'(x)\,\mathrm{d}x$

$=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x=\mu_X$(常数);

(2) 设平稳过程 $X(t)$ 的自相关函数

$$R_x(t_1,t_2)=E[X(t_1)\cdot X(t_2)]\text{ 存在}.$$

那么平稳过程的自相关函数仅是时间差$t_2-t_1=\tau$的单变函数. (即不随时间的推移而变化).

$$R_X(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1x_2 f(x_1,x_2;\ 0,t_2-t_1)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2=R_X(t_2-t_1)$$

$$\overset{t_2-t_1=\tau}{=} R_X(\tau)=R_X(t,t+\tau)=EX(t)X(t+\tau).$$

（3）$\varphi_X^2 = R_X(t,t) = R_X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx$(常数).

（4）协方差函数可以表示为

$$C_X(t,t+\tau) = E\{[X(t)-\mu_X][X(t+\tau)-\mu_X]\}$$

$$= R_X(\tau) - \mu_X^2 = C_X(\tau).$$

若令 $\tau = 0$,

则（5）$\sigma_X^2 = C_X(0) = R_X(0) - \mu_X^2$(常数).

说明： 1）要确定一个随机过程的分布函数, 并进而判定其平稳性在实际中不易办到，可通过数字特征体现统计特性.

2）由概率论知识知，数字特征相同，分布不一定相同.

相对严平稳过程，有宽平稳过程.

3. 广义（弱或宽）平稳过程

定义1 给定二阶矩过程$\{X(t), t \in T\}$，如果对任意$t, t+\tau \in T$：

$$E[X(t)] = \mu_X \quad (\text{常数})$$

$$R_X(t, t+\tau) = E[X(t)X(t+\tau)] = R_X(\tau)$$

则称$\{X(t), t \in T\}$为宽平稳过程，或广义平稳过程.

说明 (1) 严平稳过程只要二阶矩存在，则它必定也是宽平稳的. 反之不成立.

(2) 宽平稳的正态过程必定也是严平稳的.

(3)不做特别说明，一般指宽平稳过程.

例1 设$\{X_k, k=1,2,\cdots\}$是互不相关的随机变量序列, 且$E(X_k)=0$, $E(X_k^2)=\sigma^2$, 则有

$$R_X(k,l)=E(X_kX_l)=\begin{cases}\sigma^2, & k=l,\\ 0, & k\neq l,\end{cases}$$

当$k\neq l, R_X(k,l)=EX_kEX_l=0.(\because X_k$与$X_l$互不相关)

即相关函数只与$k-l$有关, 所以它是宽平稳的随机序列.

如果$X_1, X_2, \cdots, X_k, \cdots$是独立同分布的, 则序列是严平稳的.

例2、设随机过程$X(t)=\cos(t+\varphi), -\infty < t < +\infty$,其中$\varphi$为随机变量，其分布律（列）为$P\{\varphi=0\}=P\{\varphi=\pi\}=\frac{1}{2}$, $X(t)$是否为平稳过程.

解: $\because \mu_X(t)=EX(t)=\frac{1}{2}\cos(t+0)+\frac{1}{2}\cos(t+\pi)=0$，（常数）

$\therefore R_X(s,t)=EX(s)X(t)=\cos s\cos t\times\frac{1}{2}+\cos s\cos t\times\frac{1}{2}$

$=\cos s\cos t.$

$\therefore R_X(s,t)$与s,t有关，故$X(t)$不是平稳过程.

再如$Y(t)\sim\pi(\lambda t), \because \mu_Y(t)=EY(t)=\lambda t, \therefore Y(t)$为非平稳过程.

例3 设随机过程 $X(t)=Y\cos\omega t+Z\sin\omega t, t\geq 0$,其中$\omega$为常数,

Y,Z是相互独立的随机变量,$E(Y)=E(Z)=0, D(Y)=D(Z)=\sigma^2$,

$\{X(t), t\geq 0\}$是否为平稳过程。

解: $\mu_X(t)=E[X(t)]=E[Y\cos\omega t+Z\sin\omega t]$

$=\cos\omega t\cdot E(Y)+\sin\omega t\cdot E(Z)=0$,

因为Y与Z相互独立,于是

$$\boldsymbol{E(Y)=E(Z)=E(YZ)=E(ZY)=0,}$$

$$\boldsymbol{E(X^2)=E(Y^2)=\sigma^2.}$$

$$R_X(s,t)=E[X(s)X(t)]$$

$$=E\{[Y\cos\omega s+Z\sin\omega s][Y\cos\omega t+Z\sin\omega t]\}$$

$$=\cos\omega s\cdot\cos\omega t\cdot E(Y^2)+\sin\omega s\cdot\sin\omega t\cdot E(Z^2)$$

$$=\sigma^2\cos\omega(t-s)\overset{t-s=\tau}{=}\sigma^2\cos\omega\tau$$

$\therefore$ **$X(t)$是平稳过程.**

二、相关函数的性质

1. 自相关函数性质

性质1 $R_X(0)=E[X^2(t)]=\Psi_X^2\geq\mu_X{}^2\geq 0.$

$\because D_X(t)=EX^2(t)-E^2X(t)=\psi^2{}_X(t)-\mu_X{}^2(t)\geq 0.$

性质2 $R_X(-\tau)=R_X(\tau)$,即 $R_X(\tau)$ 是 τ 的偶函数.

$\because R_X(-\tau)=E[X(t)X(t-\tau)]=E[X(t-\tau)X(t)]=R_X(\tau).$

性质3 关于自相关函数和自协方差函数有不等式

$$|R_X(\tau)| \le R_X(0) \text{和} |C_X(\tau)| \le C_X(0) = \sigma_X^2 .$$

$$|R_X(\tau)| = |E[X(t)X(t+\tau)]| \le E|X(t)X(t+\tau)| \le$$

$$\sqrt{EX^2(t)EX^2(t+\tau)} = \sqrt{R^2{}_X(0)} = R_X(0).$$

$$|C_X(\tau)| = |R_X(\tau) - \mu_X(t)\mu_X(t+\tau)| \le |R_X(0) - \mu_X^2| = C_X(0) = \sigma_X^2 .$$

此式表明:

自相关(自协方差)函数都在$\tau = 0$处取到最大值.

类似地,可推得有关互相关函数和互协方差函数的不等式.

性质4　$R_X(\tau)$ 是非负定的.

即　对于任意数组 $t_1, t_2, \cdots, t_n \in T$ 和任意实值函数 $g(t)$ 都有

$$\sum_{i,j=1}^{n} R_X(t_i - t_j) g(t_i) g(t_j) \geq 0.$$

说明

对于任一连续函数, 只要具有非负定性, 那么该函数必是某平衡过程的自相关函数.　所以对于平稳过程而言,自相关函数的非负定性是最本质的.

证明 根据自相关函数的定义和均值运算性质有

$$\sum_{i,j=1}^{n} R_X(t_i - t_j)g(t_i)g(t_j)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} E[X(t_i)X(t_j)]g(t_i)g(t_j)$$

$$= E\left\{\sum_{i,j=1}^{n} X(t_i)X(t_j)g(t_i)g(t_j)\right\}$$

$$= E\left\{\left[\sum_{i=1}^{n} X(t_i)g(t_i)\right]^2\right\} \geq 0.$$

性质5 $X(t)$为均方连续平稳过程 $\Leftrightarrow \lim\limits_{\tau\to 0} R_X(\tau)=R_X(0)$（连续）

证：$\Rightarrow \because X(t)$为平稳过程，

$$\therefore E\left|X(t)-X(t_0)\right|^2=R_X(t,t)-2R_X(t,t_0)+R_X(t_0,t_0)$$

$$=2[R_X(0)-R_X(t-t_0)]\overset{t-t_0=\tau}{=}2[R_X(0)-R_X(\tau)]$$

又 $\because X(t)$均方连续，$\therefore \lim\limits_{t\to t_0} E\left|X(t)-X(t_0)\right|^2=0,$

$$\lim_{t\to t_0}[R_X(0)-R_X(\tau)]=\lim_{\tau\to 0}[R_X(0)-R_X(\tau)]=R_X(0)-\lim_{\tau\to 0}R_X(\tau)=0.$$

$$\therefore \lim_{\tau\to 0}R_X(\tau)=R_X(0).$$

$\Leftarrow \because \lim\limits_{\tau\to 0}R_X(\tau)=R_X(0)$，$\therefore \lim\limits_{t\to t_0} E\left|X(t)-X(t_0)\right|^2=0,$

故$X(t)$在t_0处均方连续.

2、联合平稳过程及互相关函数性质

定义2 同时考虑两个平稳过程：$X(t)$ 和 $Y(t)$.

如果它们的互相关函数也只是时间差的单 变量函数 ,即

$$R_{XY}(t,t+\tau)=E[X(t)Y(t+\tau)]=R_{XY}(\tau),$$

那么称 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 是平稳相关的,或两过程是联合宽平稳的.

性质1 $R_{XY}(-\tau)=R_{YX}(\tau)$.

$$R_{XY}(-\tau)=E[X(t+\tau)Y(t)]=E[Y(t)X(t+\tau)]=R_{YX}(\tau)$$
$$\neq R_{XY}(\tau).$$

注意: 互相关函数既不是奇函数,也不是偶函数,

性质2 $\quad \left|R_{XY}(\tau)\right|^2 \le R_X(0)R_Y(0), \ \left|C_{XY}(\tau)\right|^2 \le C_X(0)C_Y(0).$

$$\left|R_{XY}(\tau)\right|^2 = \left|E[X(t)Y(t+\tau)]\right|^2 \le E\left|X(t)Y(t+\tau)\right|^2 \le$$

$$EX^2(t)EY^2(t+\tau) = R_X(0)R_Y(0).$$

此时，互协方差函数

$$C_{XY}(t,t+\tau) = R_{XY}(t,t+\tau) - \mu_X(t)\mu_Y(t+\tau)$$

$$= R_{XY}(\tau) - \mu_X\mu_Y = C_{XY}(\tau).$$

例4、 设$X(t),Y(t),t\in T$为互不相关的平稳过程，$Z(t)=X(t)+Y(t)$，则$Z(t)$为平稳过程.

证：$\because X(t),Y(t)$为互不相关的平稳过程，

$\therefore \mu_Z(t)=EZ(t)=EX(t)+EY(t)=\mu_X+\mu_Y$（常数）

$\therefore R_Z(t,t+\tau)=E[Z(t)Z(t+\tau)]$

$=E[(X(t)+Y(t))(X(t+\tau)+Y(t+\tau))]$

$=R_X(t,t+\tau)+R_{XY}(t,t+\tau)+R_{YX}(t,t+\tau)+R_Y(t,t+\tau)$

$=R_X(\tau)+R_{XY}(\tau)+R_{XY}(-\tau)+R_Y(\tau)=R_Z(\tau).$

$\therefore Z(t)$为平稳过程.

三、各态历经性

1. 各态历经性的概念

设$X(t)$为平稳过程，则

$$\mu_X = EX(t) \approx \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k(t) \approx \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x(t_k) \approx \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t)dt,$$

$$R_X(t,t+\tau) = EX(t)X(t+\tau) \approx \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k(t)x_k(t+\tau)$$

$$\approx \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x(t_k)x(t_k+\tau) \approx \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t)X(t+\tau)dt.$$

注：空间平均转为时间平均

1）时间均值和时间相关函数

随机过程 $X(t)$ 沿整个时间轴上的两种时间平均

$$\langle X(t)\rangle = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)\mathrm{d}t$$

和 $$\langle X(t)X(t+\tau)\rangle = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)X(t+\tau)\mathrm{d}t$$

称为随机过程 $X(t)$ 的时间均值和时间相关函数.

例5 计算随机相位余弦波 $X(t)=a\cos(\omega t+\Theta)$ 的时间平均 $\langle X(t)\rangle$ 和 $\langle X(t)X(t+\tau)\rangle$.

解 $$\langle X(t)\rangle=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}a\cos(\omega t+\Theta)\mathrm{d}t$$

$$=\lim_{T\to+\infty}\frac{a}{2T}\int_{-T}^{T}[\cos\omega t\cos\Theta-\sin\omega t\sin\Theta]dt$$

$$=\lim_{T\to+\infty}\frac{a\cos\Theta\sin\omega T}{\omega T}=0.$$

$$\langle X(t)X(t+\tau)\rangle$$

$$=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}a^2\cos(\omega t+\Theta)\cos[\omega(t+\tau)+\Theta]\mathrm{d}t$$

$$=\lim_{T\to+\infty}\frac{a^2}{4T}\int_{-T}^{T}[\cos(2\omega t+\omega\tau+2\Theta)+\cos\omega\tau]\mathrm{d}t$$

$$=\lim_{T\to+\infty}\frac{a^2}{4T}\int_{-T}^{T}[\cos 2\omega t\cos(\omega\tau+2\Theta)-\sin 2\omega t\sin(\omega\tau+2\Theta)]\mathrm{d}t$$

$$+\lim_{T\to+\infty}\frac{a^2}{4T}\int_{-T}^{T}\cos\omega\tau\mathrm{d}t$$

$$=0+\lim_{T\to+\infty}\frac{\cos\omega\tau a^2}{4T}\times 2T$$

$$=\frac{a^2}{2}\cos\omega\tau.$$

例5解 Θ是在$(0,2\pi)$上服从均匀分布的随机变

$$\mu_X(t)=E[X(t)]=\int_0^{2\pi}a\cos(\omega t+\theta)\cdot\frac{1}{2\pi}\mathrm{d}\theta=0=<X(t)>$$

$$R_X(t,t+\tau)=E[X(t)X(t+\tau)]$$

$$=E[a^2\cos(\omega t+\Theta)\cos(\omega t+\omega\tau+\Theta)]$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}\cos(\omega t+\Theta)\cos(\omega t+\omega\tau+\Theta)\cdot\frac{1}{2\pi}\mathrm{d}\Theta$$

$$=\frac{a^2}{2\pi}\times\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[\cos(\omega(2t+\tau)+2\Theta)+\cos\omega\tau]\mathrm{d}\Theta$$

$$=\frac{a^2}{2}\cos\omega\tau=<X(t),X(t+\tau)>.$$

$\therefore X(t)$平稳且各态历经.

由于 $\mu_X = E[X(t)] = \langle X(t) \rangle$,

$$R_X(\tau) = E[X(t)X(t+\tau)] = \langle X(t)X(t+\tau) \rangle.$$

结论

对于随机相位余弦波,用时间平均和集平均分别算得的均值和自相关函数是相等的.这一特性并不是随机相位余弦波所独有的.

2）各态历经性的定义

设 $X(t)$ 是一平稳过程,

(1) 如果 $\langle X(t) \rangle = E[X(t)] = \mu_X$ 以概率 1 成立,

即$P\{<X(t)>=\mu_X\}=1 \Leftrightarrow <X(t)>=\mu_X$.

则称随机过程$X(t)$的均值具有各态历经性.

(2) 如果对于实数τ,

$\langle X(t)X(t+\tau)\rangle = E[X(t)X(t+\tau)] = R_X(\tau)$ 以概率1成立,

即$P\{<X(t)X(t+\tau)>=R_X(\tau)\}=1 \Leftrightarrow <X(t)X(t+\tau)>=R_X(\tau)$.

则称随机过程 $X(t)$ 的自相关函数 具有各态历经性.

当$\tau=0$时,称均方值具有各态历经性.

(3) 如果 $X(t)$ 的均值和自相关函数都具有各态历经性,则称 $X(t)$ 是(宽)各态历经过程 .

或者说 $X(t)$ 是各态历经的. 如例5

说明

(1)“以概率1成立” 是对 $X(t)$ 的所有样本函数而言 .

(2)各态历经性有时也称作遍历性或埃尔古德性(ergodicity).

(3)并不是任意一个平稳过程都是各态历经的.

例如平稳过程$X(t)=Y$,

其中Y 是方差不为零的随机变量，

因为$\langle X(t)\rangle=\langle Y\rangle=Y$,

即时间均值随Y取不同的值而不同，

于是$\langle X(t)\rangle$不可能以概率1等于常数.

故平稳过程$X(t)=Y$不是各态历经的.

即各态历经性过程必为宽平稳过程，反之不一定成立.

例6、设$X(t)=X,-\infty<t<+\infty$,其中X的分布律为

$P\{X=i\}=\dfrac{1}{3}$, $i=1,2,3$.讨论$X(t)$的各态历经性.

解: $\because \mu_X(t)=EX(t)=1\times\dfrac{1}{3}+2\times\dfrac{1}{3}+3\times\dfrac{1}{3}=2.$

$$R_X(t,t+\tau)=E[X(t)X(t+\tau)]$$

$$=EX^2=1^2\times\frac{1}{3}+2^2\times\frac{1}{3}+3^2\times\frac{1}{3}=\frac{14}{3}.$$

$\therefore X(t)$为平稳过程.

又$\therefore <X(t)>=\lim\limits_{T\to+\infty}\dfrac{1}{2T}\displaystyle\int_{-T}^{T}X(t)dt=\lim\limits_{T\to+\infty}\dfrac{1}{2T}\int_{-T}^{T}Xdt$

$=X\neq\mu_X$,

$$<X(t),X(t+\tau)>=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)X(t+\tau)dt$$

$$=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X^2dt=X^2\neq R_X(t,t+\tau).$$

故$X(t)$不具有各态历经性.

或$\because p\{<X(t)>=2\}=p\{X=2\}=\frac{1}{3}\neq 1,$

$\therefore X(t)$的数学期望不具有各态历经性.

又$\because p\{<X(t),X(t+\tau)>=\frac{14}{3}\}=p\{X^2=\frac{14}{3}\}=0\neq 1,$

$X(t)$的时间相关函数不具有各态历经性.

2、各态历经性的条件

定理一 (均值各态历经定理)

平稳过程 $X(t)$ 的均值具有各态历经性的充要条件是

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{\tau}{2T}\right)[R_X(\tau)-\mu_X^2]\mathrm{d}\tau=0.$$

$$\langle X(t)\rangle=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)\mathrm{d}t=\mu_X \Leftrightarrow \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{\tau}{2T}\right)C_X(\tau)\mathrm{d}\tau=0.$$

证明 先计算 $\langle X(t)\rangle$ 的均值和方差

$$E\{\langle X(t)\rangle\}=E\left\{\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)\mathrm{d}t\right\}$$

交换运算顺序, 并且 $E[X(t)]=\mu_X$,

得 $E\{\langle X(t)\rangle\} = E\{\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}E[X(t)]\mathrm{d}t = \mu_X.$

$\langle X(t)\rangle$ 的方差为 $D[\langle X(t)\rangle] = E\{[\langle X(t)\rangle - \mu_X]^2\}$

$$= E[\langle X(t)\rangle^2 - 2\langle X(t)\rangle\mu_X + \mu_X^2]$$

$$= \lim_{T\to+\infty} E\left\{\left[\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)\mathrm{d}t\right]^2\right\} - \mu_X^2$$

$$= \lim_{T\to+\infty} E\left\{\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}X(t_1)\mathrm{d}t_1\int_{-T}^{T}X(t_2)\mathrm{d}t_2\right\} - \mu_X^2.$$

$$= \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}E[X(t_1)X(t_2)]\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2 - \mu_X^2$$

由$\langle X(t)\rangle$的平稳性　$E[X(t_1)X(t_2)]=R_X(t_2-t_1)$,

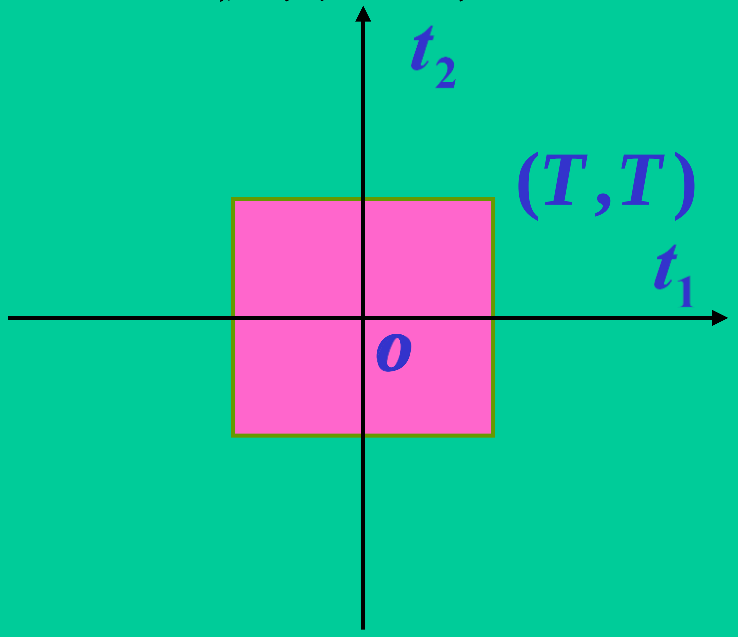
则上式可改写成

$$D[\langle X(t)\rangle]=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}R_X(t_2-t_1)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2-\mu_X^2.$$

令$\tau_1=t_1+t_2$

$\tau_2=-t_1+t_2$

积分区域



由$\langle X(t)\rangle$的平稳性 $E[X(t_1)$

$$=\iint_{\Diamond} R_X(\tau_2)\frac{1}{2}\cdot \mathrm{d}\tau_1 \mathrm{d}\tau_2$$

则上式可改写成

$$D[\langle X(t)\rangle]=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{4T^2}\boxed{\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}R_X(t_2-t_1)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2}-\mu_X^2.$$

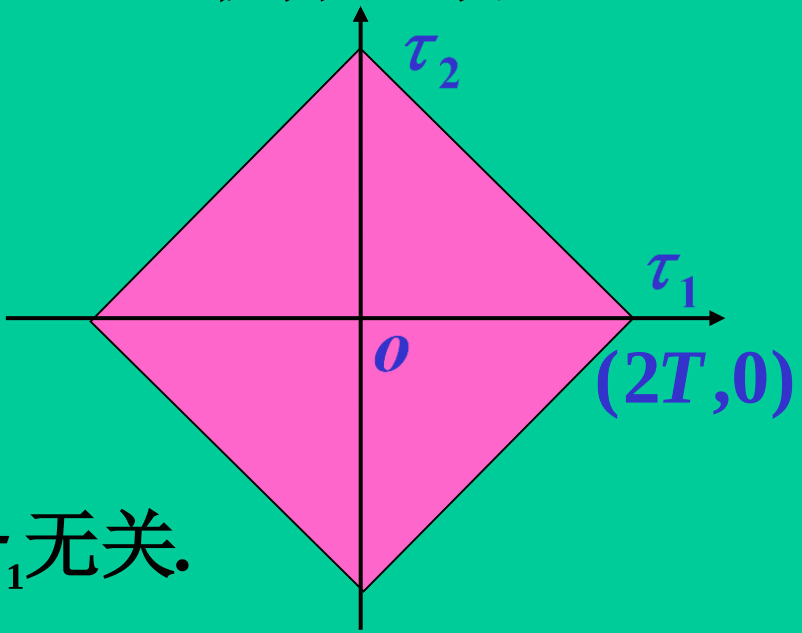
令$\tau_1=t_1+t_2$

$\tau_2=-t_1+t_2$

此变换的雅可比行列式

$$\left|\frac{\partial(t_1,t_2)}{\partial(\tau_1,\tau_2)}\right|=\frac{1}{2},$$

积分区域



$R_X(\tau_2)$是τ_2的偶函数,且与τ_1无关.

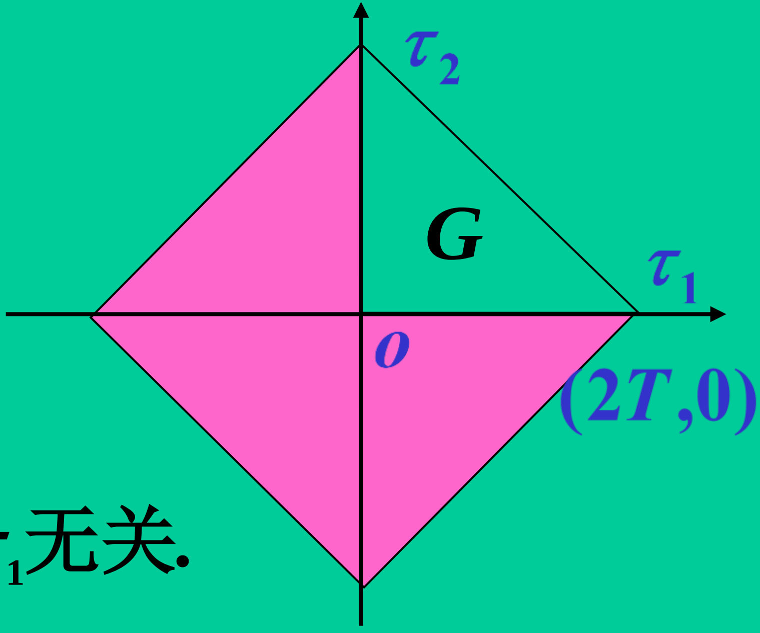
因而积分值为图中绿色区域 G 上积分值的4 倍，

即 $$\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} R_X(t_2-t_1)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2 = 4\iint_G R_X(\tau_2)\frac{1}{2}\mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}\tau_2$$

$$= 2\int_0^{2T}\mathrm{d}\tau_2\int_0^{2T-\tau_2} R_X(\tau_2)\mathrm{d}\tau_1$$

$$=2\int_0^{2T}(2T-\tau)R_X(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

积分区域



$R_X(\tau_2)$是τ_2的偶函数,且与τ_1无关.

所以 $D[\langle X(t)\rangle]=\lim\limits_{T\to+\infty}\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^{2T}\left(1-\dfrac{\tau}{2T}\right)R_X(\tau)\mathrm{d}\tau-\mu_X^2$

$$=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{\tau}{2T}\right)[R_X(\tau)-\mu_X^2]\mathrm{d}\tau.$$

由于 $\langle X(t)\rangle=E\{\langle X(t)\rangle\}$

以概率1成立的充要条件是 $D[\langle X(t)\rangle]=0.$

根据 $E\{\langle X(t)\rangle\}=E[X(t)],$ 故 $\langle X(t)\rangle=E[X(t)],$

因此以概率1成立的充要条件是

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{\tau}{2T}\right)[R_X(\tau)-\mu_X^2]\mathrm{d}\tau=0.$$

推论

在 $\lim_{\tau\to+\infty} R_X(\tau)$ 存在条件下, 若 $\lim_{\tau\to+\infty} R_X(\tau) = \mu_X{}^2$,

则有 $\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{\tau}{2T}\right)[R_X(\tau)-\mu_X^2]\mathrm{d}\tau = 0.$

均值具有各态历经性;

若 $\lim_{\tau\to+\infty} R_X(\tau) \neq \mu_X{}^2$,

则 $\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{\tau}{2T}\right)[R_X(\tau)-\mu_X^2]\mathrm{d}\tau \neq 0.$

均值不具有各态历经性.

定理二 (自相关函数各态历经定理)

平稳过程 $X(t)$ 的自相关函数 $R_X(\tau)$ 具有各态历经性的充要条件是

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{\tau_1}{2T}\right)[R_Y(\tau_1)-\mu_Y^2]\mathrm{d}\tau_1=0\Leftrightarrow$$

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{\tau_1}{2T}\right)[B(\tau_1)-R_X^2(\tau)]\mathrm{d}\tau_1=0,$$

$$\Leftrightarrow\langle X(t)X(t+\tau)\rangle=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)X(t+\tau)\mathrm{d}t=R_X(\tau)$$

其中 $B(\tau_1)=E[X(t)X(t+\tau)X(t+\tau_1)X(t+\tau+\tau_1)].$

注：令 $Y(t)=X(t)X(t+\tau)$，则 $\mu_Y=E[X(t)X(t+\tau)]=R_X(\tau),$
$R_Y(\tau_1)=E[Y(t)Y(t+\tau_1)]=E[X(t)X(t+\tau)X(t+\tau_1)X(t+\tau+\tau_1)]$
$=B(\tau_1).$

说明

(1) 令 $\tau=0$, 即得均方值具有各态历经性的充要条件.

(2) 若以 $\langle X(t)Y(t+\tau)\rangle$ 代替 $\langle X(t)X(t+\tau)\rangle$, $R_{XY}(\tau)$ 代替 $R_X(\tau)$, 则可得互相关函数的各态历经性定理.

(3)在实际应用中通常只考虑定义在 $0\le t<+\infty$ 上的平稳过程. 此时上面的所有时间平均都应以 $0\le t<+\infty$ 上的时间平均来代替.

定理三 $$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T X(t)\mathrm{d}t = E[X(t)] = \mu_X$$

以概率1成立的充要条件是

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\left(1-\frac{\tau}{T}\right)[R_X(\tau)-\mu_X^2]\mathrm{d}\tau = 0.$$

即 $$\langle X(t)\rangle = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T X(t)\mathrm{d}t=\mu_X \Leftrightarrow \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\left(1-\frac{\tau}{T}\right)C_X(\tau)\mathrm{d}\tau = 0.$$

定理四 $\langle X(t)X(t+\tau)\rangle = \lim\limits_{T\to+\infty}\dfrac{1}{T}\int_0^T X(t)X(t+\tau)\mathrm{d}t$

$$= E[X(t)X(t+\tau)] = R_X(\tau)$$

以概率1成立的充要条件是

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\left(1-\frac{\tau_1}{T}\right)[R_Y(\tau_1)-\mu_Y^2]\mathrm{d}\tau_1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\left(1-\frac{\tau_1}{T}\right)[B(\tau_1)-R_X^2(\tau)]\mathrm{d}\tau_1 = 0.$$

其中 $B(\tau_1) = E[X(t)X(t+\tau)X(t+\tau_1)X(t+\tau+\tau_1)]$.

$\because B(\tau_1)=R_Y(\tau_1), \mu_Y = R_X(\tau).$

例7、设$X(t)=A\cos\omega t+B\sin\omega t,-\infty<t<+\infty$,其中$\omega$为常数$A,B\sim N(0,\sigma^2)$,且相互独立. 讨论$X(t)$的是否具有各态历经性?

解:$\because \mu_X(t)=EX(t)=E(A\cos\omega t+B\sin\omega t)$

$=EA\cos\omega t+EB\sin\omega t=0$(常数)

$\therefore R_X(t,t+\tau)=E[X(t)X(t+\tau)]$

$=E[(A\cos\omega t+B\sin\omega t)(A\cos(\omega t+\omega\tau)+B\sin(\omega t+\omega\tau))]$

$=EA^2\cos\omega t\cos(\omega t+\omega\tau)+EB^2\sin\omega t\sin(\omega t+\omega\tau)$

$=\sigma^2\cos\omega\tau=R_X(\tau).$

$\therefore X(t)$为平稳过程.

法1 $\because \lim\limits_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}(1-\frac{\tau}{2T})(R_X(\tau)-\mu^2{}_X)d\tau$

$=\lim\limits_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}(1-\frac{\tau}{2T})\ \sigma^2\cos\omega\tau d\tau$

$=\lim\limits_{T\to+\infty}\frac{\sigma^2}{T}[\frac{\sin(2T\omega)}{\omega}-\frac{\tau\sin\omega\tau}{2T\omega}\Big|_0^{2T}-\frac{\cos\omega\tau}{2T\omega^2}\Big|_0^{2T}]$

$=\sigma^2\lim\limits_{T\to+\infty}\frac{1-\cos 2T\omega}{2T^2\omega^2}=0.$

$\therefore$由定理1知$X(t)$的数学期望具有各态历经.

法2. $<X(t)>=\lim\limits_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}(A\cos\omega t+B\sin\omega t)\ dt$

$=\lim\limits_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^{T}A\cos\omega t dt=\lim\limits_{T\to+\infty}\frac{A\sin\omega T}{T\omega}=0=\mu_X$.（简单）

$$\because \langle X(t), X(t+\tau) \rangle = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t)X(t+\tau)dt$$

$$= \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} [A\cos\omega t + B\sin\omega t][A\cos(\omega t+\omega\tau) + B\sin(\omega t+\omega\tau)]dt$$

$$= \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} [A^2\cos\omega t\cos(\omega t+\omega\tau) + AB\cos\omega t\sin(\omega t+\omega\tau)]dt$$

$$+ \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} [BA\sin\omega t\cos(\omega t+\omega\tau) + B^2\sin\omega t\sin(\omega t+\omega\tau)]dt$$

$$= \lim_{T\to+\infty} \frac{A^2}{4T}\int_{-T}^{T} [\cos(2\omega t+\omega\tau) + \cos\omega\tau]dt + \lim_{T\to+\infty} \frac{AB}{2T}\int_{-T}^{T} \sin(2\omega t+\omega\tau)dt$$

$$+ \lim_{T\to+\infty} \frac{B^2}{4T}\int_{-T}^{T} [\cos\omega\tau - \cos(2\omega t+\omega\tau)]dt = \frac{A^2+B^2}{2}\cos\omega\tau \neq R_X(\tau).$$

$\therefore X(t)$的自相关函数不具有各态历经性.

说明　各态历经定理的重要价值：

从理论上给出了如下保证：

一个平稳过程 $X(t)$，只要它满足定理三和定理四，便可以根据“以概率1成立”的含义，从一次试验所得到的样本函数 $x(t)$ 来确定出该过程的均值和自相关函数，即

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\mathrm{d}t=\mu_X$$

和

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x(t)x(t+\tau)\mathrm{d}t=R_X(\tau).$$

3、各态历经性在平稳过程中的应用（时间平均代替空间平均）

如果试验记录 $x(t)$ 只在时间区间$[0,T]$上给出

则有下以无偏估计式:

$$<X(t)>=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\mathrm{d}t=\mu_X \Leftrightarrow \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x(t_k)\approx\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k(t)=\hat{\mu}_X,$$

$$\langle X(t)X(t+\tau)\rangle=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T X(t)X(t+\tau)\mathrm{d}t=R_X(\tau)$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x(t_k)x(t_k+\tau)\approx\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k(t)x_k(t+\tau)=\hat{R}_X(\tau)$$

在实际中一般不可能给出 $x(t)$ 表达式,因而通常通过模拟方法或数字方法来测量或计算估计式的值.

各态历经定理的条件是比较宽的,工程中碰到到的大多数平稳过程都能满足. 但要去验证它们是否成立却是十分困难的.

在实践中, 通常事先假定所研究的平稳过程具有各态历经性, 并从这个假定出发, 对由此而产生的各种资料进行分析处理, 看所得的结论是否与实际相符. 如果不符, 则要修改假设另作处理.

四、平稳过程的功率谱密度

1. 相关函数的谱分解

$\{X(t),t\in R\}$为均方连续的平稳过程，且 $R_X(\tau)$ 绝对可积，

即 $\int_{-\infty}^{+\infty}|R_X(\tau)|\mathrm{d}\tau<+\infty$. 则$R_X(\tau)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}[\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\tau]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega$

称$\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\tau=S_X(\omega)=F[R_X(\tau)]$为$X(t)$的（自）谱密度.

$$R_X(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S_X(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\omega=F^{-1}[S_X(\omega)].$$

注:1）$R_X(\tau)$（时域）$\xrightarrow{F}S_X(\omega)$（频域）$\xrightarrow{F^{-1}}R_X(\tau)$（时域）；

2）称$F_X(\omega)=\int_{-\infty}^{\omega}S_X(\omega)\mathrm{d}\omega=\int_{-\infty}^{\omega}S_X(\lambda)\mathrm{d}\lambda$为单增（自）谱函数，

故$F'_X(\omega)=S_X(\omega)\geq 0.$

例8、 设$\{X(t), -\infty < t < +\infty\}$为平稳过程，且$R_X(\tau)=e^{-\alpha|\tau|}$，其中$\alpha > 0$,为常数. 求$X(t)$的谱密度和自谱函数.

解：$\because S_X(\omega) = F[R_X(\tau)] = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau$

$$=\int_{-\infty}^{0} e^{(\alpha-i\omega)\tau}d\tau + \int_{0}^{+\infty} e^{-(\alpha+i\omega)\tau}d\tau$$

$$= \frac{e^{(\alpha-i\omega)\tau}}{\alpha-i\omega}\Big|_{-\infty}^{0} - \frac{e^{-(\alpha+i\omega)\tau}}{\alpha+i\omega}\Big|_{0}^{+\infty} = \frac{1}{\alpha-i\omega} + \frac{1}{\alpha+i\omega} = \frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}.$$

即$R_X(\tau) = F^{-1}[S_X(\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S_X(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega = e^{-\alpha|\tau|}$.

$$F_X(\omega)=\int_{-\infty}^{\omega} S_X(\omega)d\omega=\int_{-\infty}^{\omega}\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}d\omega$$

$$= 2\int_{-\infty}^{\omega}\frac{d\frac{\omega}{\alpha}}{1+(\frac{\omega}{\alpha})^2} = 2\arctan\frac{\omega}{\alpha} + \pi.$$

例9 已知平稳过程 $X(t)$ 的自相关函数为

$$R_X(\tau)=e^{-a|\tau|}\cos\omega_0\tau,$$

求 $X(t)$ 的谱密度 $S(\omega)$.

解 $S_X(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a|\tau|}\cos\omega_0\tau\cdot e^{-i\omega\tau}\mathrm{d}\tau$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a|\tau|}\left(\frac{e^{i\omega_0\tau}+e^{-i\omega_0\tau}}{2}\right)e^{-i\omega\tau}\mathrm{d}\tau$$

$$=\frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a|\tau|}e^{-i(\omega-\omega_0)\tau}\mathrm{d}\tau+\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a|\tau|}e^{-i(\omega+\omega_0)\tau}\mathrm{d}\tau\right]$$

注：欧拉公式: $\begin{cases}e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta\\ e^{-i\theta}=\cos\theta-i\sin\theta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\\ \sin\theta=\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\end{cases}$

这两个积分分别是$e^{-a|\tau|}$的傅立叶变换在$\omega-\omega_0$，$\omega+\omega_0$处的值；所以

$$S_X(\omega)=\frac{1}{2}\left[\frac{2a}{a^2+(\omega-\omega_0)^2}+\frac{2a}{a^2+(\omega+\omega_0)^2}\right]$$

$$=a\left[\frac{1}{a^2+(\omega-\omega_0)^2}+\frac{1}{a^2+(\omega+\omega_0)^2}\right].$$

注：利用例8

例10 已知谱密度 $S_X(\omega)=\dfrac{\omega^2+4}{\omega^4+10\omega^2+9}$,

求平稳过程 $X(t)$ 的自相关函数和均方值.

解　由公式知自相关函数

$$R_X(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\omega^2+4}{\omega^4+10\omega^2+9}\cdot e^{i\omega\tau}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\omega^2+4}{(\omega^2+9)(\omega^2+1)}e^{i\omega\tau}d\omega.$$

利用留数定理，可算得

$$R_X(\tau)=\frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi i\left\{\frac{\omega^2+4}{(\omega+3i)(\omega-3i)(\omega+i)(\omega-i)}e^{i\omega\tau}\right.$$

$$\left.\text{在 }\omega=\pm \mathrm{i},\pm 3\mathrm{i}\text{ 处的留数之和}\right\}$$

$$=\frac{1}{48}(9e^{-|\tau|}+5e^{-3|\tau|}),$$

均方值为 $\Psi_X^2=R_X(0)=\dfrac{7}{24}.$

说明 $S_X(\omega)=S_0\dfrac{\omega^{2n}+a_{2n-2}\omega^{2n-2}+\cdots+a_0}{\omega^{2m}+b_{2m-2}\omega^{2m-2}+\cdots+b_0},$

其中$(S_0>0)$, $m>n$, 分母无实根. 有理谱密度

或$\because S_X(\omega)=\dfrac{\omega^2+4}{\omega^4+10\omega^2+9}=\dfrac{\omega^2+4}{(\omega^2+1)(\omega^2+9)}$

$$=\frac{1}{8}\left(\frac{3}{\omega^2+1}+\frac{5}{\omega^2+3^2}\right)$$

$$\therefore R_X(\tau)=\frac{1}{8}\left[F^{-1}\left(\frac{\frac{3}{2}\times 2\times 1}{\omega^2+1^2}\right)+F^{-1}\left(\frac{\frac{5}{6}\times 2\times 3}{\omega^2+3^2}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{8}\left(\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-|\tau|}+\frac{5}{6}\mathrm{e}^{-3|\tau|}\right)=\frac{1}{48}\left(9\mathrm{e}^{-|\tau|}+5\mathrm{e}^{-3|\tau|}\right).$$

$$\varphi_X^2=R_X(0)=\frac{7}{24}.$$

注：利用例8 $F[e^{-\alpha|\tau|}]=\dfrac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}\Leftrightarrow F^{-1}\left[\dfrac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}\right]=e^{-\alpha|\tau|}.$

2、自谱密度的性质与计算

（1）性质

性质1　$S_X(\omega)$是ω的实的、非负的偶函数.

$$\because S_X(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(\tau)\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(\tau)\cos\omega\tau\mathrm{d}\tau$$

$$-i\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(\tau)\ \sin\omega\tau\mathrm{d}\tau=2\int_0^{+\infty}R_X(\tau)\cos\omega\tau\mathrm{d}\tau.(R_X(\tau)=R_X(-\tau))$$

$$\therefore S_X(-\omega)=2\int_0^{+\infty}R_X(\tau)\cos(-\omega\tau)\mathrm{d}\tau=2\int_0^{+\infty}R_X(\tau)\ \cos\omega\tau\mathrm{d}\tau.$$

即$S_X(-\omega)=S_X(\omega)$.

又$\because F_X(\omega)=\int_{-\infty}^{\omega}S_X(\lambda)\mathrm{d}\lambda$为单增,

$$\therefore F_X'(\omega)=S_X(\omega)\geq 0.$$

性质2 $S_X(\omega)$和自相关函数 $R(\tau)$ 是一傅立叶变换对.

即$$S_X(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau)\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\tau = F[R_X(\tau)]$$

$$R_X(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S_X(\omega)\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\omega = F^{-1}[S_X(\omega)]$$

它们统称为维纳-辛钦(Wiener-Khinchin)公式.

说明:

1. 平稳过程在自相关函数绝对可积的条件下,维纳-辛钦公式成立.

2. $S_X(\omega)$和$R(\tau)$ 都是偶函数, 所以维纳-辛钦公式还可以写成如下的形式:

$$S_X(\omega)=2\int_0^{+\infty}R_X(\tau)\cos\omega\tau\,\mathrm{d}\tau,$$

$$R_X(\tau)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}S_X(\omega)\cos\omega\tau\,\mathrm{d}\omega.$$

3. 维纳-辛钦公式又称为平稳过程自相关函数的谱表示式. 它揭示了从时间角度描述平稳过程 $X(t)$ **的统计规律和从频率角度描述** $X(t)$ **的统计**规律之间的联系.

在应用上我们可以根据实际情形选择时间域方法或等价的频率域方法去解决实际问题.

(2）δ 函数 定义与性质

在实际问题中常常碰到这样一些平稳过程, 它们的自相关函数非绝对可积，故自相关函数或谱密度在常义情形 下的傅立叶变换或逆变换不存在,

此时如果允许谱密度和自相 **关函数含有δ函数，**

有关实际问题仍能得到圆满解决.

如$\boldsymbol{R_X(\tau)=1}$**，**$\boldsymbol{R_X(\tau)=\sigma^2\cos\omega_0\tau}$**.**

在这种情况下, 自相关函数为常数或余弦型函数的平稳过程, 其谱密度都是离散的.

上面所说的δ函数是单位冲激函数$\delta(t)$的简称，

它是一种广义函数.

设$q(t)=\begin{cases}0, t\neq 0\\ q, t=0\end{cases}$，$i(t)=?$

由电学知识知，当$t\neq 0$时，$i(t)=0$;

当$t=0$时，$i(t)|_{t=0}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{q(t)-q(0)}{t-0}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{-q}{t}=\infty.$

即$i(t)=\begin{cases}0, t\neq 0\\ \infty, t=0\end{cases}.$

需寻找一个为函数表示0时刻的电流$i(t)$且可用于工程计算.

狄拉克(Dirac)最早给出了$\delta(t)$的如下定义：

设$\delta_\varepsilon(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\varepsilon} & 0\le t\le\varepsilon\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$，称$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\delta_\varepsilon(t)=\delta(t)$为$\delta$函数.

通常用单位有向线段来表示.

δ函数的基本性质是：

a) $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_0^{\varepsilon}\delta_\varepsilon(t)dt=1.$ ---$\delta(t)$的强度.

b）对任一在 $t=0$ 的连续函数 $f(t)$，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)f(t)\mathrm{d}t=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{\varepsilon}\frac{1}{\varepsilon}f(t)\mathrm{d}t=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\times\varepsilon f(\xi)=\lim_{\xi\to 0}f(\xi)=f(0).$$

由上述性质得$F[\delta(\tau)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\tau)e^{-i\omega\tau}\mathrm{d}\tau=e^{-i\omega\tau}\big|_{\tau=0}=1.$

据此可以写出以下傅立叶变换对：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\tau)e^{-i\omega\tau}\mathrm{d}\tau=1\leftrightarrow\delta(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}1\cdot e^{i\omega\tau}\mathrm{d}\omega$$

$$\delta(\tau)\xrightarrow{F}S_X(\omega)=1\xrightarrow{F^{-1}}\delta(\tau);$$

令 $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}1\cdot e^{-i\omega\tau}\mathrm{d}\tau=\delta(\omega)\Leftrightarrow\int_{-\infty}^{+\infty}1\cdot e^{-i\omega\tau}\mathrm{d}\tau=2\pi\delta(\omega)$

$F^{-1}(2\pi\delta(\omega))=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}2\pi\delta(\omega)e^{i\varpi\tau}\mathrm{d}\omega=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\omega)e^{i\varpi\tau}\mathrm{d}\omega=1$

上式表明：当自相关函数 $R_X(\tau)=1$时，

谱密度 $S_X(\omega)=2\pi\delta(\omega)$

$R_X(\tau)=1\xrightarrow{F}S_X(\omega)=2\pi\delta(\omega)\xrightarrow{F^{-1}}R_X(\tau)=1;$

例11.已知平稳过程$X(t)$的自相关函数 $R_X(\tau)=\frac{a^2}{2}\cos\omega_0\tau,$

求 $S_X(\omega)$.

解：$S_X(\omega)=F[R_X(\tau)]=\dfrac{a^2}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\omega_0\tau e^{-i\omega\tau}d\tau$

$$=\frac{a^2}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{i\omega_0\tau}+e^{-i\omega_0\tau})e^{-i\omega\tau}d\tau$$

$$=\frac{a^2}{4}[\int_{-\infty}^{+\infty}1\times e^{-i(\omega-\omega_0)\tau}d\tau+\int_{-\infty}^{+\infty}1\times e^{-i(\omega+\omega_0)\tau}d\tau]$$

$$=\frac{a^2}{4}[2\pi\delta(\omega-\omega_0)+2\pi\delta(\omega+\omega_0)]$$

$$=\frac{\pi a^2}{2}(\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)).$$

由例可见，自相关函数为常数或余弦型函数的平稳过程,其谱密度都是离散的.

（3）傅氏变换及其逆变换的性质

1)线性性质：设α，β为常数，$F[f_1(t)]=F_1(\omega), F[f_2(t)]$ $=F_2(\omega)$，则$F[\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)]=\alpha F_1(\omega)+\beta F_2(\omega)$.

$\Leftrightarrow F^{-1}[\alpha F_1(\omega)+\beta F_2(\omega)]=\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)$.

2)位移性质：$F[f(t\pm t_0)]=e^{\pm i\omega t_0}F[f(t)]$.

证：$F[f(t+t_0)]=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t+t_0)e^{-i\omega t}dt$

$$\underset{du=dt}{\overset{u=t+t_0}{=}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-i\omega(u-t_0)}du$$

$$=e^{i\omega t_0}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-i\omega u}du=e^{i\omega t_0}F[f(t)].$$

注：$F^{-1}[F(\omega\mp\omega_0)]=e^{\pm i\omega_0 t}f(t)$.

$$\Leftrightarrow F[e^{\pm i\omega_0 t} f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm i\omega_0 t} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i(\omega \mp \omega_0)t} dt = F(\omega \mp \omega_0).$$

如$F[1]=2\pi\delta(\omega)$，则$F[e^{i\omega_0 t}]=F[e^{i\omega_0 t}\times 1]=2\pi\delta(\omega-\omega_0)$．

3) 微分性质：设$f(t)$可微，且$\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = 0$,

则$F[f'(t)]=(i\omega)F[f(t)]$.

证：$F[f'(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)e^{-i\omega t}dt = f(t)e^{-i\omega t}\Big|_{-\infty}^{+\infty} +(i\omega)\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$

$$= f(t)(\cos\omega t - i\sin\omega t)\Big|_{-\infty}^{+\infty} +(i\omega)\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$$

$$=(i\omega)\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt=(i\omega)F[f(t)].(\lim_{t\to\infty} f(t) = 0)$$

注：$F[f^{(n)}(t)]=(i\omega)^n F[f(t)]$.

4)积分性质： 设 $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_{-\infty}^{t} f(t)dt = 0,$

则$F[\int_{-\infty}^{t} f(t)dt]=\frac{1}{i\omega}F[f(t)].$

证：$\because \frac{\mathrm{d}\int_{-\infty}^{t} f(t)dt}{dt} = f(t),$

$\therefore F[f(t)] = F[\frac{d\int_{-\infty}^{t} f(t)dt}{dt}] = i\omega F[\int_{-\infty}^{t} f(t)dt]$

$\Leftrightarrow F[\int_{-\infty}^{t} f(t)dt]=\frac{1}{i\omega}F[f(t)].$

注： $F[\int_{-\infty}^{\tau} f(t)dt\int_{-\infty}^{\tau} f(s)ds] = \frac{F[f(\tau)]}{(i\omega)^2}.$

5)卷积性质：设$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)f_2(\tau-t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau-t)f_2(t)dt$,

则$F[f_1(t)*f_2(t)]=F[f_1(t)]F[f_2(t)]=F_1(\omega)F_2(\omega)$.

证：$F[f_1(t)*f_2(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}[\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)f_2(\tau-t)dt]e^{-i\omega\tau}d\tau$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)e^{-i\omega t}dt\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(\tau-t)]e^{-i\omega(\tau-t)}d\tau$$

$$\underset{d\tau=dy}{\overset{\tau-t=y}{=}} F_1(\omega)\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(y)]e^{-i\omega y}dy=F_1(\omega)F_2(\omega).$$

注：$F^{-1}[F_1(\omega)F_2(\omega)]=f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)f_2(\tau-t)dt$.

$$F[f_1(t)f_2(t)]=\frac{1}{2\pi}F_1(\omega)*F_2(\omega)\ .$$

例12

已知平稳过程$X(t)$的自相关函数 $R_X(\tau)=5+4e^{-3|\tau|}\cos^2 2\tau$,

求 $S_X(\omega)$.

解: $\because R_X(\tau)=5+2e^{-3|\tau|}+2e^{-3|\tau|}\cos 4\tau$,

$\therefore S_X(\omega)=F[R_X(\tau)]=5F[1]+2F[e^{-3|\tau|}]+2F[e^{-3|\tau|}\cos 4\tau]$

$$=10\pi\delta(\omega)+\frac{2\times 2\times 3}{\omega^2+9}+2[\frac{3}{(\omega-4)^2+9}+\frac{3}{(\omega+4)^2+9}]$$

$$=10\pi\delta(\omega)+\frac{12}{\omega^2+9}+\frac{6}{(\omega-4)^2+9}+\frac{6}{(\omega+4)^2+9}.$$

注：利用例8及9结果或查p-76表.

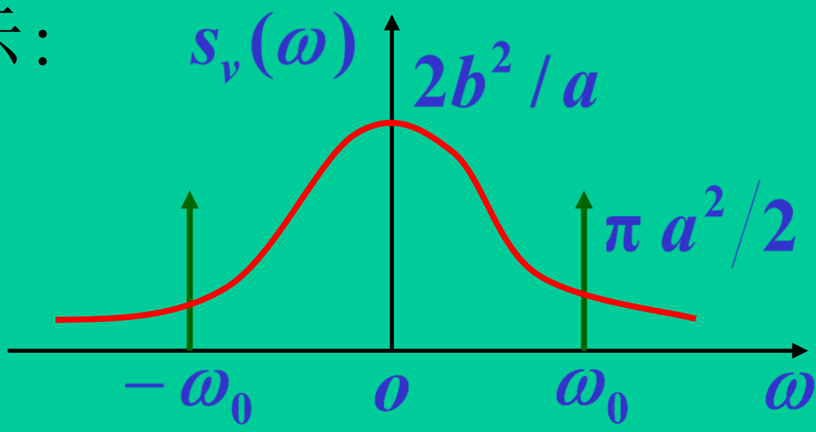
练习 求自相关函数 $R_V(\tau)=\dfrac{a^2}{2}\cos\omega_0\tau+b^2\mathrm{e}^{-\alpha|\tau|}$ 所对应谱密度 $S_V(\omega)$.

练习 求自相关函数 $R_V(\tau)=\frac{a^2}{2}\cos\omega_0\tau+b^2e^{-\alpha|\tau|}$ 所对应谱密度 $S_V(\omega)$.

解 所要求的谱密度为 利用例8及例11

$$S_V(\omega)=\frac{\pi}{2}a^2[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]+\frac{2\alpha b^2}{\alpha^2+\omega^2}.$$

相应的谱密度如图所示:



此图说明了谱密度是如何表明噪声以外的周期信号的.

3、互谱密度及其性质

(1))互谱密度的定义

设 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 是两个平稳相关的随机过程.

如果互相关函数 $R_{XY}(\tau)$ 绝对可积，称

$S_{XY}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}R_{XY}(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\tau$, 为平稳过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的互谱密度.

$$S_{XY}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}R_{XY}(\tau)\cos\omega\tau\mathrm{d}\tau-i\int_{-\infty}^{+\infty}R_{XY}(\tau)\sin\omega\tau\mathrm{d}\tau,$$

记 $\mathrm{Re}[S_{XY}(\omega)]=\int_{-\infty}^{+\infty}R_{XY}(\tau)\cos\omega\tau\mathrm{d}\tau,$

$\mathrm{Im}[S_{XY}(\omega)]=\int_{-\infty}^{+\infty}R_{XY}(\tau)\sin\omega\tau\mathrm{d}\tau.$($R_{XY}(\tau)$非奇非偶函数)

$R_{XY}(\tau)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S_{XY}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\omega.$ 即 $F^{-1}[S_{XY}(\omega)]=R_{XY}(\tau).$

（2）互谱密度的性质：

$$1)S_{XY}(-\omega)=\overline{S_{XY}(\omega)}=S_{YX}(\omega)$$

证:$1)S_{XY}(-\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}R_{XY}(\tau)\cos(-\omega\tau)\,\mathrm{d}\tau-i\int_{-\infty}^{+\infty}R_{XY}(\tau)\sin(-\omega\tau)\,\mathrm{d}\tau$

$=\int_{-\infty}^{+\infty}R_{XY}(\tau)\ \cos\omega\tau\mathrm{d}\tau+i\int_{-\infty}^{+\infty}R_{XY}(\tau)\ \sin\omega\tau\mathrm{d}\tau=\overline{S_{XY}(\omega)}.$

又$S_{XY}(-\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}R_{XY}(\tau)\ e^{-i(-\omega\tau)}\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}R_{XY}(\tau)\ e^{i\omega\tau}\mathrm{d}\tau$

$\overset{\tau=-t}{\underset{d\tau=-dt}{=}}-\int_{+\infty}^{-\infty}R_{XY}(-t)\ e^{-i\omega t}\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}R_{YX}(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t$

$=\int_{-\infty}^{+\infty}R_{YX}(t)\cos\omega t\mathrm{d}t-i\int_{-\infty}^{+\infty}R_{YX}(t)\sin\omega t\mathrm{d}t=S_{YX}(\omega).$

$(R_{YX}(t)=R_{XY}(-t)).$

注：$S_{XY}(\omega)$关于ω非奇非偶函数

2) $\mathrm{Re}[S_{XY}(\omega)]$ 和 $\mathrm{Re}[S_{YX}(\omega)]$ 是 ω 的偶函数，

$\mathrm{Im}[S_{XY}(\omega)]$和$\mathrm{Im}[S_{YX}(\omega)]$是$\omega$的奇函数.

证: $\mathrm{Re}[S_{XY}(-\omega)]=\int_{-\infty}^{+\infty}R_{XY}(\tau)\cos(-\omega\tau)\mathrm{d}\tau$

$=\int_{-\infty}^{+\infty}R_{XY}(\tau)\cos\omega\tau\mathrm{d}\tau=\mathrm{Re}[S_{XY}(\omega)]=\mathrm{Re}[S_{YX}(\omega)]$

同理可证$\mathrm{Re}[S_{YX}(\omega)]$为$\omega$的偶函数,

$\mathrm{Im}[S_{XY}(-\omega)]=\int_{-\infty}^{+\infty}R_{XY}(\tau)\sin(-\omega\tau)\mathrm{d}\tau=-\int_{-\infty}^{+\infty}R_{XY}(\tau)\sin\omega\tau\mathrm{d}\tau$

$=-\mathrm{Im}[S_{XY}(\omega)]=\mathrm{Im}[S_{YX}(\omega)]$.

同理可证$\mathrm{Im}[S_{YX}(\omega)]$为$\omega$的奇函数.

说明: 互谱密度不再是ω的实的、正的偶函数.

3）互谱密度与自谱密度之间成立有不等式

$$|S_{XY}(\omega)|^2 \le S_X(\omega)S_Y(\omega).$$ (证明参见教材p82)

注意

(1) 在应用上当考虑多个平稳过程之和的频率结构时，要运用互谱密度.

例13设 $Z(t) = X(t) + Y(t)$,

其中 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 是平稳相关的.

求 $\mu_Z(t), R_Z(\tau), S_Z(\omega)$.

$$\mu_Z(t)=\mu_X(t)+\mu_Y(t)=\mu_X+\mu_Y,$$

根据例4知 $Z(t)$ 的自相关函数是

$$R_Z(t,t+\tau)=E[Z(t)Z(t+\tau)]$$

$$=E[(X(t)+Y(t))(X(t+\tau)+Y(t+\tau))]$$

$$=R_X(\tau)+R_{XY}(\tau)+R_{YX}(\tau)+R_Y(\tau)=R_Z(\tau).$$

根据维纳-辛钦公式，$Z(t)$ 的自谱密度为

$$S_Z(\omega)=F[R_Z(\tau)]=S_X(\omega)+S_{XY}(\omega)+S_{YX}(\omega)+S_Y(\omega)$$

$$=S_X(\omega)+S_{XY}(\omega)+S_{XY}(-\omega)+S_Y(\omega)$$

$$=S_X(\omega)+S_Y(\omega)+2\mathrm{Re}[S_{XY}(\omega)].$$

(2) 互谱密度并不象自谱密度那样具有物理意义，引入这个概念主要是为了能在频率域上描述两个平稳过程的相关性.

例如: **对具有零平均值的平稳过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$,**

$S_{XY}(\omega)=0$ 与 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 不相关是等价的.

五、线性系统中的平稳过程

1、线性时不变系统

定义：设L为一系统，$L(x_1(\mathrm{t}))=y_1(\mathrm{t}), L(x_2(\mathrm{t}))=y_2(\mathrm{t})$.若满足：

（1）对任意常数$c_1, c_2, L[c_1x_1(\mathrm{t})+c_2x_2(\mathrm{t})]=c_1y_1(\mathrm{t})+c_2y_2(\mathrm{t})$;

$--$线性系统.

（2）$L(x(\mathrm{t}+\tau))=y(\mathrm{t}+\tau)$.$--$定常或时不变系统.

则称L为线性时不变系统.

设线性时不变系统为：

$$b_n y^{(n)}(t)+b_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\cdots+b_1y'(t)+b_0y(t)=$$
$$a_m x^{(m)}(t)+a_{m-1}x^{(m-1)}(t)+\cdots+a_1x'(t)+a_0x(t), t\in R.$$

两边取傅氏变换得

$$b_nF[y^{(n)}(t)]+b_{n-1}F[y^{(n-1)}(t)]+\cdots+b_1F[y'(t)]+b_0F[y(t)]=$$
$$a_mF[x^{(m)}(t)]+a_{m-1}F[x^{(m-1)}(t)]+\cdots+a_1F[x'(t)]+a_0F[x(t)]$$

$$(i\omega)^n b_n F[y(t)] + (i\omega)^{n-1} b_{n-1} F[y(t)] + \cdots + b_0 F[y(t)] =$$
$$(i\omega)^m a_m F[x(t)] + (i\omega)^{m-1} a_{m-1} F[x(t)] + \cdots + a_0 F[x(t)]$$

令$F[y(t)]=F_y(\omega)$，$F[x(t)]=F_x(\omega)$，

则$F_y(\omega)=\dfrac{a_m(i\omega)^m+a_{m-1}(i\omega)^{m-1}+\cdots+a_1(i\omega)+a_0}{b_n(i\omega)^n+b_{n-1}(i\omega)^{n-1}+\cdots+b_1(i\omega)+b_0}F_x(\omega)$．

记$H(\omega)=\dfrac{a_m(i\omega)^m+a_{m-1}(i\omega)^{m-1}+\cdots+a_1(i\omega)+a_0}{b_n(i\omega)^n+b_{n-1}(i\omega)^{n-1}+\cdots+b_1(i\omega)+b_0}=H(i\omega)$,

———频率响应函数或传递函数.

则$F_y(\omega)=H(\omega)F_x(\omega)$．

注:1）$h(t)=F^{-1}[H(\omega)]=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}H(\omega)e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega$

——脉冲响应函数.

2）$y(t)=F^{-1}[H(\omega)F_x(\omega)]=h(t)*x(t)$

$=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t-\lambda)h(\lambda)\mathrm{d}\lambda=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\lambda)h(t-\lambda)\mathrm{d}\lambda$

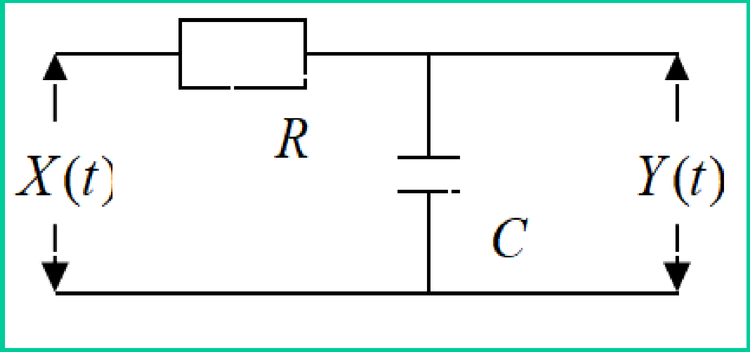
$--$系统响应(输出)函数.

3）若$\int_0^{+\infty}|h(t)|\mathrm{d}t<\infty$,则称系统是稳定的.

例14.在如图所示的R-C电路系统中，$x(t)$，$y(t)$分别表示系统的输入和输出，求出系统的频率响应及脉冲响应函数.

解：由电学知识知，$x(t)$，$y(t)$

构成线性时不变系统，且满足线性



微分方程：$\mathrm{RC}y'(t)+y(t)=x(t)$，

令$\alpha=\dfrac{1}{\mathrm{RC}}$，则

$$y'(t)+\alpha y(t)=\alpha x(t)\Leftrightarrow F[y'(t)]+\alpha F[y(t)]=\alpha F[x(t)]\Leftrightarrow$$

$$(i\omega)F_y(\omega)+\alpha F_y(\omega)=\alpha F_x(\omega)\Rightarrow F_y(\omega)=\frac{\alpha}{i\omega+\alpha}F_x(\omega).$$

$\therefore$ 频率响应函数为$H(\omega)=\dfrac{\alpha}{i\omega+\alpha}$,

$\therefore$ 脉冲响应函数为$h(t)=F^{-1}[H(\omega)]=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\alpha}{i\omega+\alpha}e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega$

$$=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha t} & t>0\\ 0 & t\le 0\end{cases}$$

$\because F[h(t)]=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}h(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t=\int_{0}^{+\infty}\alpha e^{-\alpha t}e^{-i\omega t}\mathrm{d}t=\alpha\int_{0}^{+\infty}e^{-(\alpha+i\omega)t}\mathrm{d}t$

$$=-\frac{\alpha e^{-(\alpha+i\omega)t}}{i\omega+\alpha}\Bigg|_0^{+\infty}=\frac{\alpha}{i\omega+\alpha}=H(\omega).$$

2、线性时不变系统对平稳随机输入的响应

定理1.设时不变线性系统L的脉冲响应函数为$h(t)$, 输入$\{X(t), t\in R\}$

为一平稳过程，$R_X(\tau), S_X(\omega)$分别为其相关函数和谱密度，

且$R_X(\tau)$绝对可积（即$\int_0^{+\infty}|R_X(\tau)|\mathrm{d}\tau<+\infty$）. 则

1) 输出$Y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}X(t-\lambda)h(\lambda)\mathrm{d}\lambda$

$=\int_0^{+\infty}X(t-\lambda)h(\lambda)\mathrm{d}\lambda=h(t)*X(t)$.$(t>0)$

2) $\mu_Y(t)=\mu_X\int_0^{+\infty}h(\lambda)\mathrm{d}\lambda$ ——常数

$R_Y(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}h(\lambda_1)h(\lambda_2)R_X(\lambda_1+\tau-\lambda_2)\mathrm{d}\lambda_1\mathrm{d}\lambda_2$

$=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}h(\lambda_1)h(\lambda_2)R_X(\lambda_1+\tau-\lambda_2)\mathrm{d}\lambda_1\mathrm{d}\lambda_2$

即输出$\{Y(t), t\in R\}$为平稳过程.

3）$S_Y(\omega)=\left|H(\omega)\right|^2 S_X(\omega)=F[R_Y(\tau)]\Leftrightarrow R_Y(\tau)=F^{-1}[S_Y(\omega)]$.

证：$\because X(t)$为平稳过程，$\therefore \mu_X(t)=\mu_X$，$R_X(t,t+\tau)=R_X(\tau)$，

1)类似经典控制推证，

2）$\mu_Y(t)=EY(t)=E[\int_0^{+\infty} X(t-\lambda)h(\lambda)\mathrm{d}\lambda]$

$=\int_0^{+\infty} h(\lambda)EX(t-\lambda)\mathrm{d}\lambda=\mu_X\int_0^{+\infty} h(\lambda)\mathrm{d}\lambda$ ——常数

$R_Y(t,t+\tau)=E[Y(t)Y(t+\tau)]$

$=E[\int_0^{+\infty} X(t-\lambda_1)h(\lambda_1)\mathrm{d}\lambda_1\int_0^{+\infty} X(t+\tau-\lambda_2)h(\lambda_2)\mathrm{d}\lambda_2]$

$=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} h(\lambda_1)h(\lambda_2)E[X(t-\lambda_1)X(t+\tau-\lambda_2)]\mathrm{d}\lambda_1\mathrm{d}\lambda_2$

$=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} h(\lambda_1)h(\lambda_2)R_X(\lambda_1+\tau-\lambda_2)\mathrm{d}\lambda_1\mathrm{d}\lambda_2=R_Y(\tau)$,

$\therefore$ 输出$\{Y(t),t\in R\}$为平稳过程.

3）见教材.

注： 由定理1的2）、3）知$R_Y(\tau)$有两种计算办法.

例15.对例14的线性时不变系统，若输入的平稳过程$X(t)$满足：$\mu_X=0$，$R_X(\tau)=\sigma^2 e^{-\beta|\tau|},\beta>0$,求$\mu_Y(t)$及$R_Y(\tau)$.

解：$\because \mu_X=0,\therefore \mu_Y(t)=\mu_X\int_0^{+\infty}h(\lambda)\mathrm{d}\lambda=0$,

又$\because H(\omega)=\dfrac{\alpha}{i\omega+\alpha},\therefore |H(\omega)|^2=\dfrac{\alpha^2}{\omega^2+\alpha^2}$,

$S_X(\omega)=F[R_X(\tau)]=\sigma^2 F[e^{-\beta|\tau|}]=\dfrac{2\beta\sigma^2}{\omega^2+\beta^2}$,

$$\therefore S_Y(\omega)=\left|H(\omega)\right|^2 S_X(\omega)=\frac{\alpha^2}{\omega^2+\alpha^2}\times\frac{2\beta\sigma^2}{\omega^2+\beta^2}$$

$$=\frac{2\beta\sigma^2\alpha^2}{\alpha^2-\beta^2}\left[\frac{1}{\omega^2+\beta^2}-\frac{1}{\omega^2+\alpha^2}\right].$$

$$\therefore R_Y(\tau)=F^{-1}[S_Y(\omega)]$$

$$=\frac{\alpha\sigma^2}{\alpha^2-\beta^2}\left[F^{-1}\left[\frac{2\beta\alpha}{\omega^2+\beta^2}\right]-F^{-1}\left[\frac{2\beta\alpha}{\omega^2+\alpha^2}\right]\right]$$

$$=\frac{\alpha\sigma^2}{\alpha^2-\beta^2}\left[\alpha e^{-\beta|\tau|}-\beta e^{-\alpha|\tau|}\right].$$

$$或R_Y(\tau)=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}h(\lambda_1)\ h(\lambda_2)R_X(\lambda_1+\tau-\lambda_2)\mathrm{d}\lambda_1\mathrm{d}\lambda_2$$

$$=\alpha^2\sigma^2\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-\alpha\lambda_1}e^{-\alpha\lambda_2}e^{-\beta|\lambda_1+\tau-\lambda_2|}\mathrm{d}\lambda_1\mathrm{d}\lambda_2$$

$$=\alpha^2\sigma^2\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-\beta|\lambda_1+\tau-\lambda_2|-\alpha(\lambda_1+\lambda_2)}\mathrm{d}\lambda_1\mathrm{d}\lambda_2$$

$$=\alpha^2\sigma^2(\iint\limits_{D_1}e^{-\beta|\lambda_1+\tau-\lambda_2|-\alpha(\lambda_1+\lambda_2)}\mathrm{d}\lambda_1\mathrm{d}\lambda_2+\iint\limits_{D_2}e^{-\beta|\lambda_1+\tau-\lambda_2|-\alpha(\lambda_1+\lambda_2)}\mathrm{d}\lambda_1\mathrm{d}\lambda_2)$$

$$=\alpha^2\sigma^2(\int_0^{+\infty}\mathrm{d}\lambda_1\int_0^{\lambda_1+\tau}e^{-(\alpha-\beta)\lambda_2-(\alpha+\beta)\lambda_1-\beta\tau}\mathrm{d}\lambda_2+$$

$$\lambda_1+\tau-\lambda_2=0$$

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{d}\lambda_1\int_{\lambda_1+\tau}^{+\infty}e^{-(\alpha+\beta)\lambda_2-(\alpha-\beta)\lambda_1+\beta\tau}\mathrm{d}\lambda_2)$$

$$=\alpha^2\sigma^2(\int_0^{+\infty}e^{-\beta\tau}e^{-(\alpha+\beta)\lambda_1}[\frac{-e^{-(\alpha-\beta)\lambda_2}}{\alpha-\beta}]_0^{\lambda_1+\tau}\mathrm{d}\lambda_1$$

$$+\int_0^{+\infty}e^{\beta\tau}e^{-(\alpha-\beta)\lambda_1}[\frac{-e^{-(\alpha+\beta)\lambda_2}}{\alpha+\beta}]_{\lambda_1+\tau}^{+\infty}\mathrm{d}\lambda_1)$$

$$=\alpha^2\sigma^2\left(\int_0^{+\infty} e^{-\beta\tau}e^{-(\alpha+\beta)\lambda_1}\left(\frac{1-e^{-(\alpha-\beta)(\lambda_1+\tau)}}{\alpha-\beta}\right)\mathrm{d}\lambda_1\right.$$

$$\left.+\int_0^{+\infty} e^{\beta\tau}e^{-(\alpha-\beta)\lambda_1}\frac{e^{-(\alpha+\beta)(\lambda_1+\tau)}}{\alpha+\beta}\mathrm{d}\lambda_1\right)$$

$$=\frac{\alpha\sigma^2}{2(\alpha+\beta)}e^{-\alpha\tau}+\frac{\alpha^2\sigma^2}{\alpha-\beta}\left[\frac{e^{-\beta\tau}}{\alpha+\beta}-\frac{e^{-\alpha\tau}}{2\alpha}\right]$$

$$=\frac{\alpha\sigma^2}{\alpha^2\text{-}\beta^2}[\alpha e^{-\beta|\tau|}-\beta e^{-\alpha|\tau|}].$$ (比利用定理1的3）复杂)

3、线性时不变系统对平稳输入与输出的互相关函数及互谱密度.

定理2.设平稳过程$\{X(t),t\in R\}$为时不变线性系统L的输入，$Y(t)$为输出, 则$X(t)$与$Y(t)$为联合平稳过程, 即$R_{XY}(t,t+\tau)=R_{XY}(\tau)$.且1）$R_{XY}(\tau)=\int_0^{+\infty}h(\lambda)R_X(\tau-\lambda)\,\mathrm{d}\lambda=F^{-1}[S_{XY}(\omega)]$.

2)$S_{XY}(\omega)=F[R_{XY}(\tau)]=H(\omega)S_X(\omega)$.

证:1）$\because R_{XY}(t,t+\tau)=E[X(t)Y(t+\tau)]$

$$=E\left[X(t)\int_0^{+\infty}X(t+\tau-\lambda)h(\lambda)\mathrm{d}\lambda\right]\left(\because Y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}X(t-\lambda)h(\lambda)\mathrm{d}\lambda\right)$$

$$=\int_0^{+\infty}h(\lambda)E[X(t)X(t+\tau-\lambda)]\,\mathrm{d}\lambda$$

$$=\int_0^{+\infty}h(\lambda)R_X(\tau-\lambda)\mathrm{d}\lambda=R_{XY}(\tau)=h(\tau)*R_X(\tau).$$

$$2)S_{XY}(\omega)=F[R_{XY}(\tau)]=F[\int_0^{+\infty}h(\lambda)\ R_X(\tau-\lambda)\mathrm{d}\lambda]$$

$$=F[h(\tau)*R_X(\tau)]=F[h(\tau)]\times F[R_X(\tau)]=H(\omega)S_X(\omega).$$

例16.求例15中的输入与输出的互相关函数及互谱密度.

解：$\because S_{XY}(\omega)=H(\omega)S_X(\omega)=\dfrac{\alpha}{i\omega+\alpha}\times\dfrac{2\beta\sigma^2}{\omega^2+\beta^2}.$

$$\therefore \text{当}\tau>0,R_{XY}(\tau)=\alpha\sigma^2\int_0^{+\infty}e^{-\alpha\lambda}e^{-\beta|\tau-\lambda|}\mathrm{d}\lambda$$

$$=\alpha\sigma^2[\int_0^{\tau}e^{-\alpha\lambda-\beta(\tau-\lambda)}\mathrm{d}\lambda+\int_\tau^{+\infty}e^{-\alpha\lambda-\beta(\lambda-\tau)}\mathrm{d}\lambda]$$

$$=\alpha\sigma^2[\int_0^{\tau}e^{-\beta\tau}e^{-(\alpha-\beta)\lambda}\mathrm{d}\lambda+\int_\tau^{+\infty}e^{\beta\tau}e^{-(\alpha+\beta)\lambda}\mathrm{d}\lambda]$$

$$=\alpha\sigma^2([e^{-\beta\tau}\bullet\frac{-e^{-(\alpha-\beta)\lambda}}{\alpha-\beta}]_0^{\tau}+e^{\beta\tau}\bullet[\frac{-e^{-(\alpha+\beta)\lambda}}{\alpha+\beta}]_\tau^{+\infty})$$

$$=\alpha\sigma^2(\frac{e^{-\beta\tau}(1-e^{-(\alpha-\beta)\tau})}{\alpha-\beta}+\frac{e^{-\alpha\tau}}{\alpha+\beta})$$

$$=\alpha\sigma^2\left[\frac{e^{-\beta\tau}-e^{-\alpha\tau}}{\alpha-\beta}+\frac{e^{-\alpha\tau}}{\alpha+\beta}\right]$$

$$=\alpha\sigma^2\left[\frac{(e^{-\beta\tau}-e^{-\alpha\tau})(\alpha+\beta)+e^{-\alpha\tau}(\alpha-\beta)}{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)}\right]$$

$$=\alpha\sigma^2\bullet\frac{\alpha e^{-\beta\tau}+\beta e^{-\beta\tau}-\alpha e^{-\alpha\tau}-\beta e^{-\alpha\tau}+\alpha e^{-\alpha\tau}-\beta e^{-\alpha\tau}}{\alpha^2-\beta^2}$$

$$=\frac{\alpha\sigma^2(\alpha e^{-\beta\tau}+\beta e^{-\beta\tau}-2\beta e^{-\alpha\tau})}{\alpha^2-\beta^2}.$$

当$\tau \le 0, R_{XY}(\tau) = \alpha\sigma^2\int_0^{+\infty} e^{-\alpha\lambda}e^{-\beta|\tau-\lambda|}\mathrm{d}\lambda(\lambda > 0)$

$$= \alpha\sigma^2\int_0^{+\infty} e^{-\alpha\lambda}e^{-\beta(\lambda-\tau)}\mathrm{d}\lambda$$

$$= \alpha\sigma^2 e^{\beta\tau}\int_0^{+\infty} e^{-(\alpha+\beta)\lambda}\mathrm{d}\lambda = \frac{\alpha\sigma^2 e^{\beta\tau}}{\alpha+\beta}.$$

$$\therefore R_{XY}(\tau) = \begin{cases} \dfrac{\alpha\sigma^2(\alpha e^{-\beta\tau} + \beta e^{-\beta\tau} - 2\beta e^{-\alpha\tau})}{\alpha^2 - \beta^2} & \tau > 0, \\ \dfrac{\alpha\sigma^2 e^{\beta\tau}}{\alpha+\beta} & \tau \le 0. \end{cases}$$

注：利用$R_{XY}(\tau) = F^{-1}[S_{XY}(\omega)]$计算运算量大.