2018研究生试题答案

一、按题意$r=3, n=15$，经计算可得下列一元方差分析表

来源	离差平方和	自由度	均方离差	F值
组间	$Q_A=615.6$	$r-1=2$	$S_A^2=307.8$	$F=\frac{S_A^2}{S_E^2}=17.07$
组内	$Q_E=216.4$	$n-r=12$	$S_E^2=18.03$	
总和	$Q_T=832$	$n-1=24$		

查表得$F_{0.05}(2,12)=3.89$，显然$F=17.07>F_{0.05}(2,12)=3.89$，故可认为三个工厂的产品寿命有显著差异。

二、按题意$r=s=3, k=2$。F_A, F_B, F_I的计算可按下列二元方差分析表进行

来源	离差平方和	自由度	均方离差	F 值
燃料A	256.86	2	128.43	$F_A=128.43/10.96=11.72$
推进器B	855.60	2	427.80	$F_B=427.8/10.96=39.03$
交互作用I	538.73	4	134.68	$F_I=538.73/10.96=49.15$
误差	98.65	9	10.96	
总和	1749.84	17		

查表得 $F_{0.05}(2,9)=4.26, F_{0.05}(4,9)=3.63$，显然$F_A>F_{0.05}(2,9)$，$F_B>F_{0.05}(2,9)$，$F_I>F_{0.05}(4,9)$，故可认为燃料、推进器及其交互作用对火箭射程有显著影响。

三、(1) 根据实验数据的散点图，直观上可以认为y与x的相关关系是一元线性回归模型。

(2)经计算得 $\bar{x}=0.54$，$\bar{y}=20.74$，$\overline{xy}=12.21$，$\bar{x}^2=0.29$，$\overline{x^2}=0.37$。于是

$$\hat{\beta}=\frac{\overline{xy}-\bar{x}\bar{y}}{\overline{x^2}-\bar{x}^2}=12.63,$$

$$\hat{\alpha}=\bar{y}-\hat{\beta}\bar{x}=13.92.$$

故经验回归方程为

$$y=13.92+12.63x.$$

σ^2的估计值为

$$\hat{\sigma}^2 = \overline{y^2} - \bar{y}^2 - \hat{\beta}^2(\overline{x^2} - \bar{x}^2) = 0.071$$

(3) 当$x = 0.6$时，y的预测值为

$$\hat{y} = 13.92 + 12.63 \times 0.6 = 21.5.$$

置信度为95%的预测区间为21.5± δ（0.6），其中

$$\delta(0.6) = t_{0.025}(5)\sqrt{1 + \frac{1}{7} + \frac{(0.6 - \bar{x})^2}{7(\overline{x^2} - \bar{x}^2)}}\hat{\sigma}^*$$

$$= 2.57 \times \sqrt{1 + \frac{1}{7} + \frac{(0.6 - 0.54)^2}{7(0.37 - 0.29)}} \times 0.27 = 0.74.$$

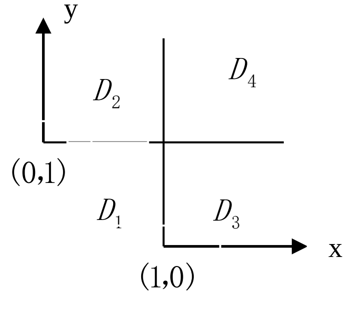
即所求预测区间为（20.76，22.24）。

四、（1）$X(\frac{\pi}{3})$取$\frac{1}{2}$，$\frac{\sqrt{3}}{2}$的概率均为$\frac{1}{2}$，其分布函数

$$F(x; \frac{\pi}{3}) = \begin{cases} 0, & x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} \le x < \frac{\sqrt{3}}{2}. \\ 1, & \frac{\sqrt{3}}{2} \le x \end{cases}$$

$\left(X(0),\ X(\frac{\pi}{2})\right)$ 取（0，1），（1，0）的概率均为$\frac{1}{2}$，其分布函数

$$F(x, y; 0, \frac{\pi}{2}) = \begin{cases} 0, (x, y) \in D_1 \\ 1/2, (x, y) \in D_2 \\ 1/2, (x, y) \in D_3 \\ 1, (x, y) \in D_4 \end{cases}$$



（2）均值函数为

$$m_X(t) = (EA)\cos t + (1 - EA)\sin t = \frac{1}{2}(\cos t + \sin t).$$

相关函数为

$$R_X(t_1,t_2)=E[A\cos t_1+(1-A)\sin t_1][A\cos t_2+(1-A)\sin t_2]$$

$$=\frac{1}{2}(\cos t_1\cos t_2+\sin t_1\sin t_2)=\frac{1}{2}\cos(t_2-t_1).$$

五、$X(t)$的均值函数

$$m_X(t)=E[\frac{1}{2}+\cos(2t+\Phi)]=\frac{1}{2}+\int_0^{2\pi}\cos(2t+x)\cdot\frac{1}{2\pi}dx$$
$$=\frac{1}{2}+0=\frac{1}{2}=m_X.$$

$X(t)$的相关函数

$$R_X(t,t+\tau)=E[\frac{1}{2}+\cos(2t+\Phi)][\frac{1}{2}+\cos(2t+2\tau+\Phi)]$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}E[\cos(2t+2\tau+\Phi)]+\frac{1}{2}E[os(2t+\Phi)]$$

$$+E[\cos(2t+2\tau+\Phi)\cos(2t+\Phi)]$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos(2t+2\tau+x)\cdot\frac{1}{2\pi}dx+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos(2t+x)\cdot\frac{1}{2\pi}dx$$
$$+\int_0^{2\pi}\cos(2t+2\tau+x)\cos(2t+x)\cdot\frac{1}{2\pi}dx$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{2}[\int_0^{2\pi}\cos 2\tau dx+\int_0^{2\pi}\cos(4t+2\tau+2x)dx]$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos 2\tau=R_X(\tau).$$

显然$X(t)$为平稳过程。因为

$$\langle X(t)\rangle=\underset{T\to+\infty}{l\cdot i\cdot m}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}[\frac{1}{2}+\cos(2t+\Phi)]dt=\frac{1}{2}=m_X.$$

所以$X(t)$具有数学期望的各态历经性。又因为

$$\langle X(t)X(t+\tau)\rangle=\underset{T\to+\infty}{l\cdot i\cdot m}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}[\frac{1}{2}+\cos(2t+\Phi)][\frac{1}{2}+\cos(2t+2\tau+\Phi)]dt$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos 2\tau=R_X(\tau).$$

所以$X(t)$又具有相国函数的各态历经性。

六、$X(t)$的谱密度为

$$S_X(\omega)=\mathscr{F}[R_X(\tau)]=\mathscr{F}[\frac{\sigma^2}{2}\cos\omega_0\tau]$$

$$=\frac{\pi\sigma^2}{2}[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)].$$

此电路的功率增益因子为

$$\left|H(i\omega)\right|^2=\left|\frac{\alpha}{i\omega+\alpha}\right|^2=\frac{\alpha^2}{\omega^2+\alpha^2},$$

于是，输出$Y(t)$的谱密度为

$$S_Y(\omega)=\left|H(i\omega)\right|^2 S_X(\omega)=\frac{\pi\sigma^2\alpha^2}{2(\omega^2+\alpha^2)}[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)],$$

输出$Y(t)$的谱密度为

$$R_Y(\tau)=\mathscr{F}^{-1}[S_Y(\omega)]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\pi\sigma^2\alpha^2}{2(\omega^2+\alpha^2)}[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]e^{i\omega\tau}d\omega$$

$$=\frac{\sigma^2\alpha^2}{4}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\omega\tau}}{\omega^2+\alpha^2}\delta(\omega-\omega_0)d\omega+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\omega\tau}}{\omega^2+\alpha^2}\delta(\omega+\omega_0)d\omega\right]$$

$$=\frac{\sigma^2\alpha^2}{4}\left[\frac{e^{i\omega\tau}}{\omega^2+\alpha^2}\bigg|_{\omega=\omega_0}+\frac{e^{i\omega\tau}}{\omega^2+\alpha^2}\bigg|_{\omega=-\omega_0}\right]$$

$$=\frac{\sigma^2\alpha^2}{2(\omega_0{}^2+\alpha^2)}\cos\omega_0\tau.$$

七、一步转移概率矩阵、二步转移概率矩阵分别为

$$P=\begin{pmatrix}0&1/3&1/3&1/3\\1/2&0&1/2&0\\1/3&1/3&0&1/3\\1/2&0&1/2&0\end{pmatrix},\quad P(2)=P^2=\begin{pmatrix}4/9&1/9&1/3&1/9\\1/6&1/3&1/6&1/3\\1/3&1/9&4/9&1/9\\1/6&1/3&1/6&1/3\end{pmatrix}$$

（2）由于二步转移概率矩阵$P(2)$的元素全大于零，所以此马氏链是遍历的。又因为该马氏链是有限马氏链，所以存在极限分布p_1,p_2,p_3,p_4。求方程组

$$\begin{pmatrix} 4/9-1 & 1/6 & 1/3 & 1/6 \\ 1/9 & 1/3-1 & 1/9 & 1/3 \\ 1/3 & 1/6 & 4/9-1 & 1/6 \\ 1/9 & 1/3 & 1/9 & 1/3-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

满足 $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$，$p_j > 0$（$j = 1,2,3,4$）的解得

$$p_1 = 3/10\,,\quad p_2 = 1/5\,,\quad p_3 = 3/10\,,\quad p_4 = 1/5\text{。}$$

即得极限分布。

（3）绝对概率

$$P\{X_2 = 1\} = p_1^{(2)} = \sum_{i=1}^{4} p_i^{(0)} p_{i1}(2) = \sum_{i=1}^{4} P\{X_0 = i\} p_{i1}(2) = \frac{1}{4}(\frac{4}{9} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}) = \frac{5}{18}\,,$$

多维概率

$$\begin{aligned} P\{X_1 = 2,\ X_3 = 3,\ X_5 = 4\} &= \sum_{i=1}^{4} p_i^{(0)} p_{i2}(1) p_{23}(3-1) p_{34}(5-3) \\ &= p_{23}(2) p_{34}(2) \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{4}\, p_{i2}(1) \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{1}{9} \times \frac{1}{4} \times (\frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{3} + 0) \\ &= \frac{1}{324}\,. \end{aligned}$$