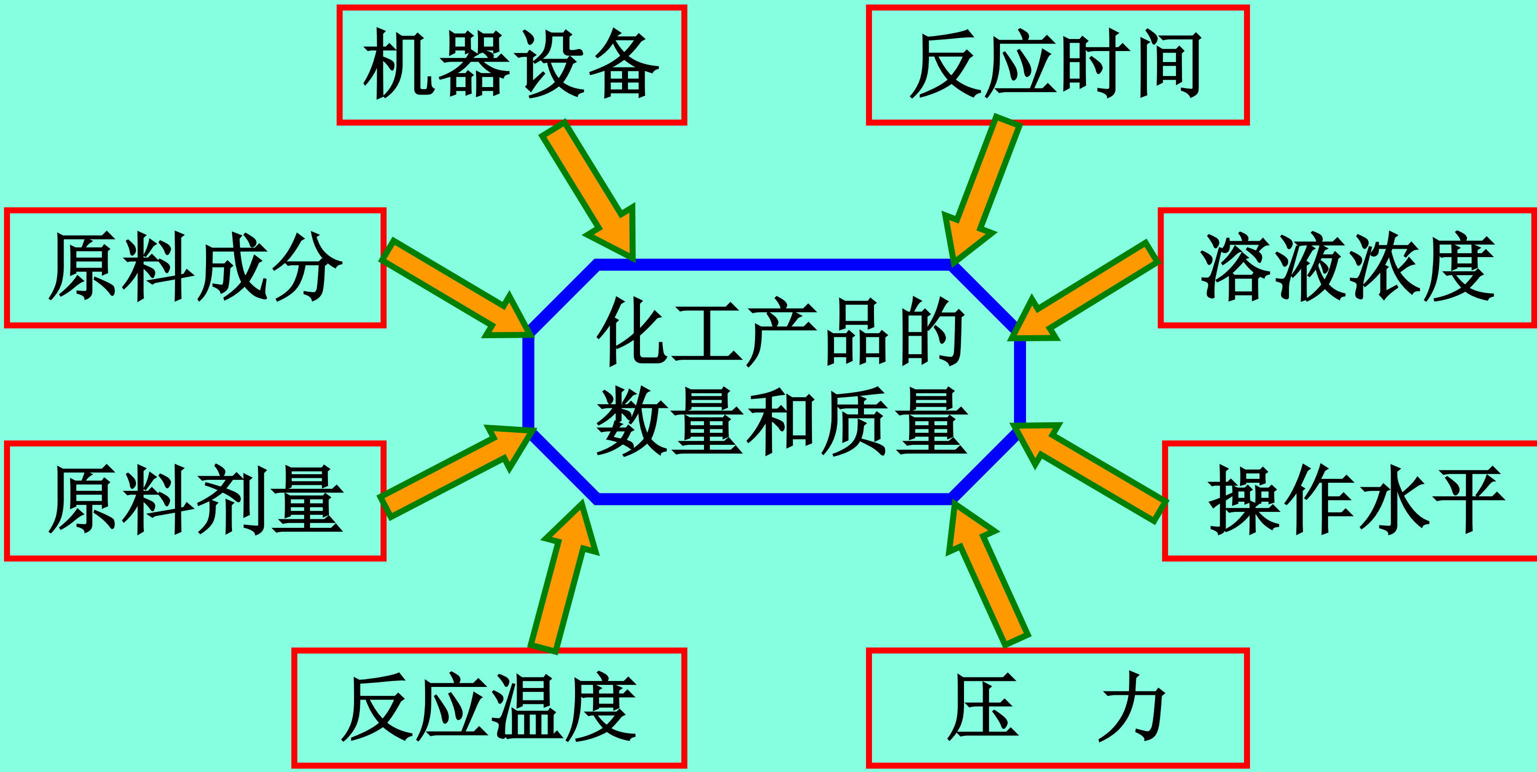
第四讲　方差分析



方差分析——根据试验的结果进行分析,鉴别各个有关因素对试验结果影响的有效方法.

试验指标——试验中要考察的指标.

因素——影响试验指标的条件.

因素　　不可控因素　　可控因素

水平——因素所处的状态.

单因素试验 ——在一项试验中只有一个因素改变.

多因素试验 ——在一项试验中有多个因素在改变.

——因素间无交互或具有交互作用.

一、单因素试验的方差分析

二、双因素无重复试验的方差分析—无交互

三、双因素有重复试验的方差分析—有交互

一、单因素试验的方差分析

引例 设有三台机器, 用来生产规格相同的铝合金薄板. 取样, 测量薄板的厚度精确至千分之一厘米. 得结果如下表所示.

表1.1　铝合金板的厚度

机器I	机器II	机器III
0.236	0.257	0.258
0.238	0.253	0.264
0.248	0.255	0.259
0.245	0.254	0.267
0.243	0.261	0.262

试验指标: 薄板的厚度　　**因素:** 机器

水平: 不同的三台机器是因素的三个不同的水平.

假定除机器这一因素外, 其他条件相同,

属于单因素试验.

试验目的: 考察各台机器所生产的薄板的厚度有无显著的差异. 即考察机器这一因素对厚度有无显著的影响.

结论: 如果厚度有显著差异,

表明机器这一因素对厚度的影响是显著的.

关于引例的讨论

设总体均值分别为μ_1, μ_2, μ_3.

检验假设 H_0： $\mu_1=\mu_2=\mu_3$,

H_1： μ_1, μ_2, μ_3不全相等.

进一步假设各总体均为正态变量, 且各总体的方差相等, 但参数均未知.

问题 检验同方差的多个正态总体均值是否相等.

解决方法 方差分析法(一种统计方法)

1、数学模型

设因素A有s个水平$A_1, A_2, \cdots, A_s$，相当于有s个总体X_j，

$j = 1, 2, \cdots, s$)下，

在水平$A_j (j = 1,2,\cdots,s)$下，进行$n_j (n_j \geq 2)$次独立试验，得到如下表的结果.

表1.2

观察结果 \ 水平	A_1	A_2	$\cdots$	A_s
	X_{11} X_{21} $\vdots$ $X_{n_1 1}$	X_{12} X_{22} $\vdots$ $X_{n_2 2}$	$\cdots$ $\cdots$ $\cdots$	X_{1s} X_{2s} $\vdots$ $X_{n_s s}$
样本总和	$T_{\bullet 1}$	$T_{\bullet 2}$	$\cdots$	$T_{\bullet s}$
样本均值	$\overline{X}_{\bullet 1}$	$\overline{X}_{\bullet 2}$	$\cdots$	$\overline{X}_{\bullet s}$
总体均值	μ_1	μ_2	$\cdots$	μ_s

假设

1.各个水平$A_j(j=1,2,\cdots,s)$下的样本

$$X_{1j}, X_{2j}, \cdots, X_{n_j j}$$

来自具有相同方差σ^2,均值分别为$\mu_j(j=1,2,\cdots,s)$

的正态总体$N(\mu_j,\sigma^2)$，μ_j与σ^2均未知;

2.不同水平A_j下的样本之间相互独立.

因为$X_{ij} \sim N(\mu_j,\sigma^2)$, 所以$X_{ij}-\mu_j \sim N(0,\sigma^2)$.

记$X_{ij}-\mu_j=\varepsilon_{ij}$表示随机误差,

那么X_{ij}可写成

$$\left.\begin{aligned}&X_{ij}=\mu_j+\varepsilon_{ij},\\&\varepsilon_{ij}\sim N(0,\sigma^2),\text{ 各 }\varepsilon_{ij}\text{ 独立},\\&i=1,2,\cdots,n_j,\ j=1,2,\cdots,s,\\&\mu_j\text{ 与 }\sigma^2\text{ 均未知.}\end{aligned}\right\}$$

单因素试验方差分析的数学模型

需要解决的问题

1.检验假设 $H_0:\quad \mu_1=\mu_2=\cdots=\mu_s,$

两两检验，运算量大。 $H_1:\quad \mu_1,\ \mu_2,\ \cdots,\ \mu_s$不全相等.

2.估计未知参数$\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_s,\ \sigma^2$. --择优

数学模型的等价形式

记$n=\sum_{j=1}^{s} n_j$, $\boxed{\mu=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{s} n_j \mu_j.}$

总均值

$\boxed{\delta_j=\mu_j-\mu,}\ j=1,2,\cdots,s.$

水平A_j的效应,表示水平A_j下的总体平均值与总平均的差异.

$$\sum_{j=1}^{s} n_j \delta_j=\sum_{j=1}^{s} n_j(\mu_j-\mu)=n\mu-n\mu=0.$$

原数学模型

$$\left.\begin{array}{l} X_{ij}=\mu_j+\varepsilon_{ij}, \\ \varepsilon_{ij}\sim N(0,\sigma^2),\ \text{各}\ \varepsilon_{ij}\ \text{独立}, \\ i=1,2,\cdots,n_j,\ j=1,2,\cdots,s, \\ \mu_j\ \text{与}\ \sigma^2\ \text{均未知}. \end{array}\right\}$$

改写为

$$\left.\begin{array}{l} X_{ij}=\mu+\delta_j+\varepsilon_{ij}, \\ \varepsilon_{ij}\sim N(0,\sigma^2),\ \text{各}\ \varepsilon_{ij}\ \text{独立}, \\ i=1,2,\cdots,n_j,\ j=1,2,\cdots,s, \\ \sum_{j=1}^{s} n_j\delta_j=0. \end{array}\right\}$$

原检验假设 $H_0: \quad \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_s,$

$H_1: \quad \mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_s$不全相等.

等价于检验假设

$H_0: \ \delta_1 = \delta_2 = \cdots = \delta_s = 0,$

$H_1: \ \delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_s$不全为零.

2、平方和的分解

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{n_j}X_{ij}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{s}n_j\overline{X}_{\cdot j}$$

数据的总平均

$$\overline{X}_{\bullet j}=\frac{1}{n_j}\sum_{i=1}^{n_j}X_{ij}$$

水平A_j下的样本平均值

$$S_T=\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{n_j}(X_{ij}-\overline{X})^2$$

总偏差平方和（总变差）

$$S_T=\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{n_j}(X_{ij}-\overline{X})^2$$

$$=\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{n_j}[(X_{ij}-\overline{X}_{\bullet j})+(\overline{X}_{\bullet j}-\overline{X})]^2$$

$$=\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{n_j}(X_{ij}-\overline{X}_{\bullet j})^2+\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{n_j}(\overline{X}_{\bullet j}-\overline{X})^2+$$

$$+2\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{n_j}(X_{ij}-\overline{X}_{\bullet j})(\overline{X}_{\bullet j}-\overline{X})$$

其中 $2\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{n_j}(X_{ij}-\overline{X}_{\bullet j})(\overline{X}_{\bullet j}-\overline{X})$ $\quad \overline{X}_{\bullet j}=\frac{1}{n_j}\sum_{i=1}^{n_j}X_{ij}$

$$=2\sum_{j=1}^{s}(\overline{X}_{\bullet j}-\overline{X})[\sum_{i=1}^{n_j}(X_{ij}-\overline{X}_{\bullet j})]$$

$$=2\sum_{j=1}^{s}(\overline{X}_{\bullet j}-\overline{X})[\sum_{i=1}^{n_j}X_{ij}-n_j\overline{X}_{\bullet j}]$$

$$=0$$

于是S_T可分解为 $S_T=S_E+S_A$,

其中 $S_E=\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{n_j}(X_{ij}-\bar{X}_{\bullet j})^2$ $\quad\quad$ $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{s}n_j\bar{X}_{\bullet j}$

$$S_A=\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{n_j}(\bar{X}_{\bullet j}-\bar{X})^2=\sum_{j=1}^{s}n_j(\bar{X}_{\bullet j}-\bar{X})^2$$

$$=\sum_{j=1}^{s}n_j\bar{X}_{\bullet j}^{\,2}-2\bar{X}\sum_{j=1}^{s}n_j\bar{X}_{\bullet j}+n\bar{X}^2=\sum_{j=1}^{s}n_j\bar{X}_{\bullet j}^{\,2}-n\bar{X}^2$$

$S_T=S_E+S_A$称为平方和分解式.

误差平方和

组内离差平方和

效应平方和

组间离差平方和

3、S_E，S_A 的统计特性

$$S_E=\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{n_j}(X_{ij}-\bar{X}_{\bullet j})^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n_1}(X_{i1}-\bar{X}_{\bullet 1})^2+\cdots+\sum_{i=1}^{n_s}(X_{is}-\bar{X}_{\bullet s})^2,$$

$\sum_{i=1}^{n_j}(X_{ij}-\bar{X}_{\bullet j})^2$是$N(\mu_j,\sigma^2)$的样本方差的$n_j-1$倍,

$$\because S_j^2=\frac{1}{n_j-1}\sum_{i=1}^{n_j}(X_{ij}-\bar{X}_{\bullet j})^2,\ \frac{(n_j-1)S_j^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n_j-1).$$

$$\therefore \frac{\sum_{i=1}^{n_j}(X_{ij}-\bar{X}_{\bullet j})^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n_j-1).$$

又由于各 X_{ij} 独立，所以由 χ^2 分布的可加性知

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{n_j}(X_{ij}-\bar{X}_{\bullet j})^2=\frac{S_E}{\sigma^2}\sim\chi^2\left(\sum_{j=1}^{s}(n_j-1)\right),$$

即 $$\frac{S_E}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-s),$$ 其中$n=\sum_{j=1}^{s}n_j$.

根据 χ^2 分布的性质可以得到，

S_E 的自由度为$n-s$；　　$E(S_E)=(n-s)\sigma^2$.

因为 $S_A=\sum_{j=1}^{s} n_j \bar{X}_{\bullet j}{}^2 - n\bar{X}^2$

$$E(S_A)=E[\sum_{j=1}^{s} n_j \bar{X}_{\bullet j}^2 - n\bar{X}^2]=\sum_{j=1}^{s} n_j E(\bar{X}_{\bullet j}^2)-nE(\bar{X}^2)$$

$$=\sum_{j=1}^{s} n_j (D\bar{X}_{\bullet j}+E^2\bar{X}_{\bullet j})-n(D\bar{X}+E^2\bar{X})$$

$$E\bar{X}_{\bullet j}=E(\frac{1}{n_j}\sum_{i=1}^{n_j}X_{ij})=\mu_j=\mu+\delta_j, D\bar{X}_{\bullet j}=D(\frac{1}{n_j}\sum_{i=1}^{n_j}X_{ij})=\frac{\sigma^2}{n_j},$$

$$E\bar{X}=E(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{n_j}X_{ij})=\mu,\quad D\bar{X}=D(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{n_j}X_{ij})=\frac{\sigma^2}{n},$$

$$E(S_A) = E[\sum_{j=1}^{s} n_j \overline{X}_{\bullet j}^2 - n\overline{X}^2] = \sum_{j=1}^{s} n_j E(\overline{X}_{\bullet j}^2) - nE(\overline{X}^2)$$

$$= \sum_{j=1}^{s} n_j \left[\frac{\sigma^2}{n_j} + (\mu + \delta_j)^2 \right] - n\left[\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2 \right]$$

$$= (s-1)\sigma^2 + 2\mu \sum_{j=1}^{s} n_j \delta_j + n\mu^2 + \sum_{j=1}^{s} n_j \delta_j^2 - n\mu^2$$

$$= (s-1)\sigma^2 + \sum_{j=1}^{s} n_j \delta_j^2$$

4、假设检验问题的拒绝域

检验假设 H_0： $\delta_1 = \delta_2 = \cdots = \delta_s = 0$,

H_1： $\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_s$不全为零.

H_0为真时, $$E\left(\frac{S_A}{s-1}\right) = \sigma^2,$$

H_1为真时, $$\sum_{j=1}^{s} n_j \delta_j^2 > 0,$$

$$E\left(\frac{S_A}{s-1}\right) = \sigma^2 + \frac{1}{s-1}\sum_{j=1}^{s} n_j \delta_j^2 > \sigma^2.$$

S_A与S_E独立，H_0为真时，$\dfrac{S_A}{\sigma^2} \sim \chi^2(s-1)$.

证明 $\because H_0$成立，即$\delta_1 = \delta_2 = \cdots = \delta_s = 0$,

$$\therefore X_{ij} \sim N(\mu, \sigma^2) \Leftrightarrow \frac{X_{ij}-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{n_j}(X_{ij}-\mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n).$$

又$\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \Leftrightarrow \dfrac{n(\bar{X}-\mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(1)$.

而$\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{n_j}(X_{ij}-\mu)^2=\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{n_j}((X_{ij}-\bar{X})+(\bar{X}-\mu)^2)$

$$=\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{n_j}(X_{ij}-\bar{X})^2+2\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{n_j}(X_{ij}-\bar{X})(\bar{X}-\mu)+n(\bar{X}-\mu)^2$$

$$=S_T+n(\bar{X}-\mu)^2=S_E+S_A+n(\bar{X}-\mu)^2.$$

$$\therefore \frac{\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{n_j}(X_{ij}-\mu)^2}{\sigma^2}=\frac{S_T}{\sigma^2}+\frac{n(\bar{X}-\mu)^2}{\sigma^2}\Rightarrow\frac{S_T}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1).$$

又$\because \frac{S_E}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-s),\therefore \frac{S_A}{\sigma^2}\sim\chi^2(s-1).$

不管 H_0 是否为真，$S_E/(n-s)$ 都是 σ^2 的无偏估计.

$$F=\frac{S_A/(s-1)}{S_E/(n-s)}.$$

1. 分子和分母相互独立；

2. 分母 $S_E/(N-S)$ 的数学期望始终是 σ^2；

3. H_0 为真时，分子的期望为 σ^2，H_0 不真时，分子取值有偏大的趋势.

拒绝域的形式为 $F=\dfrac{S_A/(s-1)}{S_E/(n-s)}\geq k.$

其中 k 由预先给定的显著水平 α 确定.

因为H_0为真时,

$$\frac{S_E}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-s), \qquad \frac{S_A}{\sigma^2} \sim \chi^2(s-1),$$

$$\frac{S_A/\sigma^2}{(s-1)} \Bigg/ \frac{S_E/\sigma^2}{(n-s)} = \frac{S_A/(s-1)}{S_E/(n-s)} = \frac{\bar{S}_A}{\bar{S}_E} \sim F_\alpha(s-1, n-s).$$

检验假设 $H_0: \delta_1 = \delta_2 = \cdots = \delta_s = 0,$

$H_1: \delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_s$不全为零.

拒绝域为 $F = \dfrac{S_A/(s-1)}{S_E/(n-s)} \geq F_\alpha(s-1, n-s).$

表1.3 单因素试验方差分析表

方差来源	平方和	自由度	均方	F 比
因素A	S_A	$s-1$	$\bar{S}_A=\dfrac{S_A}{s-1}$	$F=\bar{S}_A/\bar{S}_E$
误差	S_E	$n-s$	$\bar{S}_E=\dfrac{S_E}{n-s}$	
总和	S_T	$n-1$		

表中$\bar{S}_A=\dfrac{S_A}{s-1}$和$\bar{S}_E=\dfrac{S_E}{n-s}$称为$S_A$和$S_E$的均方.

S_T、S_A和S_E的简便计算公式：

记$T_{\bullet j}=\sum_{i=1}^{n_j}X_{ij},\ j=1,\cdots,s,\quad T_{\bullet\bullet}=\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{n_j}X_{ij},$

$$S_T=\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{n_j}(X_{ij}-\bar{X})^2=\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{n_j}X_{ij}^2-2\bar{X}\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{n_j}X_{ij}+n\bar{X}^2$$

$$=\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{n_j}X_{ij}^2-n\overline{X}^2=\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{n_j}X_{ij}^2-\frac{T_{\bullet\bullet}^2}{n},$$

$$S_A=\sum_{j=1}^{s}n_j\overline{X}_{\bullet j}^2-n\overline{X}^2=\sum_{j=1}^{s}\frac{T_{\bullet j}^2}{n_j}-\frac{T_{\bullet\bullet}^2}{n},$$

$S_E=S_T-S_A$或$S_E=\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{n_j}X_{ij}^2-\sum_{j=1}^{s}\frac{T_{\bullet j}^2}{n_j},S_A=S_T-S_E.$

引例 设有三台机器,用来生产规格相同的铝合金薄板. 取样, 测量薄板的厚度精确至千分之一厘米. 得结果如下表所示.取（$\alpha = 0.05$）：

表1.4　铝合金板的厚度

机器I	机器II	机器III
0.236	0.257	0.258
0.238	0.253	0.264
0.248	0.255	0.259
0.245	0.254	0.267
0.243	0.261	0.262

检验假设 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$，$H_1: \mu_1, \mu_2, \mu_3$ 不全相等

解 $s=3,\ n_1=n_2=n_3=5,\ n=15$

机器	机器I	机器II	机器III	
铝合金板的厚度	0.236	0.257	0.258	$\sum_{j=1}^{3}$
	0.238	0.253	0.264	
	0.248	0.255	0.259	
	0.245	0.254	0.267	
	0.243	0.261	0.262	
$T_{\cdot j}=\sum_{i=1}^{5}x_{ij}$	1.21	1.28	1.31	3.8
$T_{\cdot j}^2=(\sum_{i=1}^{5}x_{ij})^2$	1.21^2	1.28^2	1.31^2	4.8186
$\sum_{i=1}^{5}x_{ij}^2$	0.292918	0.32772	0.343274	0.963912

$$S_T = \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{5} X_{ij}^2 - \frac{T_{\bullet\bullet}^2}{15}$$

$$= 0.963912 - \frac{3.8^2}{15} = 0.00124533,$$

$$S_A = \sum_{j=1}^{3} \frac{T_{\bullet j}^2}{n_j} - \frac{T_{\bullet\bullet}^2}{n}$$

$$= \frac{1}{5}(1.21^2 + 1.28^2 + 1.31^2) - \frac{3.8^2}{15} = 0.00105333,$$

$$S_E = S_T - S_A = 0.000192.$$

表1.5引例的方差分析表

方差来源	平方和	自由度	均方	*F* 比
因素	0.00105333	2	0.00052667	32.92
误差	0.000192	12	0.000016	
总和	0.00124533	14		

$F=32.92>F_{0.05}(2,12)=3.89$. 在水平0.05下拒绝 H_0
各机器生产的薄板厚度有显著差异.

5、未知参数的估计

若拒绝 H_0，意味着效应δ_1，$\delta_2, \cdots$，δ_s不全为零，

(1)未知参数的点估计

$$E(\overline{X})=\mu,\quad E(\overline{X}_{\bullet j})=\mu_j,\ j=1,2,\cdots,s$$

故$\hat{\mu}=\overline{X}$，$\hat{\mu}_j=\overline{X}_{\bullet j}$分别是$\mu$和$\mu_j$的无偏估计.

$$\delta_j=\mu_j-\mu,\quad j=1,2,\cdots,s$$

于是$\hat{\delta}_j=\overline{X}_{\bullet j}-\overline{X}$是$\delta_j$的无偏估计.

不论H_0是否为真,$\hat{\sigma}^2=\dfrac{S_E}{n-s}$是$\sigma^2$的无偏估计.

(2)未知参数的区间估计

(a) μ_j的估计

$$\because X_{ij} \sim N(\mu_j, \sigma^2), \therefore \bar{X}_{.j} \sim N(\mu_j, \sigma^2 / n_j)$$

$$\therefore \frac{\bar{X}_{.j} - \mu_j}{\sigma / \sqrt{n_j}} \sim N(0,1), \text{而} \frac{S_E}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-s)$$

$$\therefore \frac{\bar{X}_{.j} - \mu_j}{\sigma / \sqrt{n_j}} / \sqrt{\frac{S_E}{\sigma^2(n-s)}} = \frac{\bar{X}_{.j} - \mu_j}{\sqrt{\bar{S}_E} / \sqrt{n_j}} \sim t(n-s)$$

$$\therefore \text{给定}\alpha, \ \text{令} P\left\{ -t_{\alpha/2}(n-s) < \frac{\bar{X}_{.j} - \mu_j}{\sqrt{\bar{S}_E} / \sqrt{n_j}} < t_{\alpha/2}(n-s) \right\} = 1-\alpha.$$

则

$$P\left\{\bar{X}_{.j}-\frac{\sqrt{\bar{S}_E}}{\sqrt{n_j}}t_{\alpha/2}(n-s)<\mu_j<\bar{X}_{.j}+\frac{\sqrt{\bar{S}_E}}{\sqrt{n_j}}t_{\alpha/2}(n-s)\right\}=1-\alpha.$$

查表得$t_{\alpha/2}(n-s)$,

于是得μ_j的置信度为 $1-\alpha$的置信区间

$$\left(\bar{X}_{.j}\pm\frac{\sqrt{\bar{S}_E}}{\sqrt{n_j}}t_{\alpha/2}(n-s)\right).$$

(b) σ^2的估计

$\because \dfrac{S_E}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-s), \therefore$ 给定α,

令$P\left\{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-s) < \dfrac{S_E}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha/2}(n-s)\right\}=1-\alpha.$

即$P\left\{\dfrac{S_E}{\chi^2_{\alpha/2}(n-s)} < \sigma^2 < \dfrac{S_E}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-s)}\right\}=1-\alpha.$

于是得方差σ^2的置信度为 $1-\alpha$的置信区间

$$\left(\frac{S_E}{\chi^2_{\alpha/2}(n-s)}, \frac{S_E}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-s)}\right).$$

(c) $\mu_j-\mu_k$的估计

$$\because \bar{X}_{.j}-\bar{X}_{.k}\sim N\left(\mu_j-\mu_k,\frac{\sigma^2}{n_j}+\frac{\sigma^2}{n_k}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\bar{X}_{.j}-\bar{X}_{.k}\right)-\left(\mu_j-\mu_k\right)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_j}+\frac{1}{n_k}}}\sim N\left(0,1\right),$$

而$\frac{S_E}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-s)$,

$$\therefore \frac{\left(\bar{X}_{.j}-\bar{X}_{.k}\right)-\left(\mu_j-\mu_k\right)}{\sqrt{\bar{S}_E}\sqrt{\frac{1}{n_j}+\frac{1}{n_k}}}\sim t(n-s),$$

给定α，令$P\left\{-t_{\alpha/2}(n-s)<\dfrac{\left(\bar{X}_{.j}-\bar{X}_{.k}\right)-\left(\mu_j-\mu_k\right)}{\sqrt{\bar{S}_E}\sqrt{\dfrac{1}{n_j}+\dfrac{1}{n_k}}}<t_{\alpha/2}(n-s)\right\}$=1-$\alpha$.

均值差$\mu_j-\mu_k=\delta_j-\delta_k$的置信水平为$1-\alpha$的

置信区间为

$$\left(\bar{X}_{\bullet j}-\bar{X}_{\bullet k}\pm t_{\alpha/2}(n-s)\sqrt{\bar{S}_E\left(\frac{1}{n_j}+\frac{1}{n_k}\right)}\right).$$

练习： 若三种化肥对某农作物的亩产（单位：kg）有下列数据：

化肥	农作物产量
A	48 49 50 49
B	47 49 48 48
C	49 51 50 50

设每种化肥使农作物的亩产服从正态分布，试问化肥品种对亩产有无显著差异 $(\alpha = 0.05)$？请给出理由.

解:本题属于单因素方差分析问题，水平数$r=3$，重复试验数$n_1=n_2=n_3=4$，即样本数$n=12$，由数据表得：

化肥	农作物产量	$T_{i.}=\sum_{j=1}^{4}x_{ij}$	$T_{i.}^2=(\sum_{j=1}^{4}x_{ij})^2$	$\sum_{j=1}^{4}x_{ij}^2$
A	48 49 50 49	196	38416	9606
B	47 49 48 48	192	36864	9218
C	49 51 50 50	200	40000	10002
$\sum_{i=1}^{3}$		588	115280	28826

$$S_T=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}x_{ij}^2-\frac{(\sum_{i=1}^{3}T_{i.})^2}{3\times4}=28826-\frac{588^2}{12}=14,$$

$$S_A=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{3}T_{i.}^2-\frac{(\sum_{i=1}^{3}T_{i.})^2}{3\times4}=\frac{115280}{4}-\frac{588^2}{12}=8,$$

$$S_E=S_T-S_A=14-8=6.\text{或}S_E=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}x_{ij}^2-\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{3}T_{i.}^2=28826-\frac{115280}{4}=6,$$

$S_A=S_T-S_E=14-6=8$，当$\alpha=0.05$时，列方差分析如下：

方差来源	离差平方和	自由度	均方离差平方和	F比值 $\frac{\bar{S}_A}{\bar{S}_E}$	$F_{0.05}(2,9)$	显著性
组间	$S_A=8$	$r-1=2$	$\bar{S}_A=S_A/2=4$	6	4.26	显著
组内	$S_E=6$	$n-r=9$	$\bar{S}_E=S_E/9=2/3$			
总和	$S_T=14$	$n-1=11$				

由$F=\frac{S_A/2}{S_E/9}=\frac{\bar{S}_A}{\bar{S}_E}=6>F_{0.05}(2,9)=4.26$，故化肥对产量有显著影响。

二、双因素无重复试验的方差分析—无交互

如果已知不存在交互作用,或已知交互作用对

试验的指标影响很小,则可以不考虑交互作用.

对两个因素的每一组合只做一次试验,也可以

对各因素的效应进行分析—双因素无重复（无交互作用）

试验的方差分析.

1、数学模型

表 2.1

因素B / 因素A	B_1	B_2	$\cdots$	B_s
A_1	X_{11}	X_{12}	$\cdots$	X_{1s}
A_2	X_{21}	X_{22}	$\cdots$	X_{2s}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
A_r	X_{r1}	X_{r2}	$\cdots$	X_{rs}

假设因素A与因素B无交互作用，

$$X_{ij} \sim N(\mu_{ij}, \sigma^2),\ i = 1, \cdots, r;\ j = 1, \cdots, s.$$

各 X_{ij} 独立，μ_{ij}, σ^2 均为未知参数.

$X_{ij} = \mu_{ij} + \varepsilon_{ij}$,

$i = 1,2,\cdots,r$; $j = 1,2,\cdots,s$,

$\varepsilon_{ij} \sim N(0,\sigma^2)$, 各 ε_{ij} 独立,

引入记号

$$\mu = \frac{1}{rs}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\mu_{ij}$$

μ 为总平均,

$$\mu_{i\bullet} = \frac{1}{s}\sum_{j=1}^{s}\mu_{ij}, \qquad i = 1,\cdots,r$$

因素A水平A_i的均值μ_i

$$\mu = \frac{1}{rs}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\mu_{ij} \qquad \mu_{i\bullet} = \frac{1}{s}\sum_{j=1}^{s}\mu_{ij}, \qquad i = 1,\cdots,r$$

$$\mu_{\bullet j} = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\mu_{ij}, \qquad j = 1,\cdots,s$$

因素B水平B_j的均值μ_j

$$\alpha_i = \mu_{i\bullet} - \mu, \ i = 1,\cdots,r$$

α_i为水平A_i的效应,

$$\beta_j = \mu_{\bullet j} - \mu, \ j = 1,\cdots,s$$

β_j为水平B_j的效应,

显然 $\sum_{i=1}^{r}\alpha_i = \sum_{i=1}^{r}(\mu_{i.} - \mu) = \sum_{i=1}^{r}\frac{1}{s}\sum_{j=1}^{s}\mu_{ij} - r\mu = r\mu - r\mu = 0,$

同理 $\sum_{j=1}^{s}\beta_j = 0.$

由于不存在交互作用, $\mu_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j.$

上式可改写为下式

$$\left.\begin{array}{l} X_{ij}=\mu+\alpha_i+\beta_j+\varepsilon_{ij}, \\ \varepsilon_{ij}\sim N(0,\sigma^2), \text{各}\varepsilon_{ij}\text{独立}, \\ i=1,2,\cdots,r;\quad j=1,2,\cdots,s, \\ \sum_{i=1}^{r}\alpha_i=0,\ \sum_{j=1}^{s}\beta_j=0. \end{array}\right\}$$

双因素无重复试验方差分析的数学模型

检验假设
$$\begin{cases} H_{01}: \ \alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_r=0, \\ H_{11}: \ \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\text{不全为零}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_{02}: \ \beta_1=\beta_2=\cdots=\beta_s=0, \\ H_{12}: \ \beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s\text{不全为零}. \end{cases}$$

2、平方和的分解

$$\bar{X}_{i\bullet} = \frac{1}{s}\sum_{j=1}^{s} X_{ij}$$ 水平A_i下的样本平均值

$$\bar{X}_{\bullet j} = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} X_{ij}$$ 水平B_j下的样本平均值

$$\bar{X} = \frac{1}{rs}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} X_{ij} = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\bar{X}_{i\bullet} = \frac{1}{s}\sum_{j=1}^{s}\bar{X}_{\bullet j}$$

数据的总平均

$$S_T = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}(X_{ij} - \bar{X})^2$$

总偏差平方和（总变差）

$$S_T=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}(X_{ij}-\bar{X})^2$$

$$=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}[(X_{ij}-\bar{X}_{i\bullet}-\bar{X}_{\bullet j}+\bar{X})+(\bar{X}_{i\bullet}-\bar{X})+(\bar{X}_{\bullet j}-\bar{X})]^2$$

$$=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}(X_{ij}-\bar{X}_{i\bullet}-\bar{X}_{\bullet j}+\bar{X})^2+\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}(\bar{X}_{i\bullet}-\bar{X})^2+\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}(\bar{X}_{\bullet j}-\bar{X})^2$$

$$=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}(X_{ij}-\bar{X}_{i\bullet}-\bar{X}_{\bullet j}+\bar{X})^2+\sum_{i=1}^{r}s(\bar{X}_{i\bullet}-\bar{X})^2+\sum_{j=1}^{s}r(\bar{X}_{\bullet j}-\bar{X})^2$$

记$S_A=s\sum_{i=1}^{r}(\bar{X}_{i\bullet}-\bar{X})^2, S_B=r\sum_{j=1}^{s}(\bar{X}_{\bullet j}-\bar{X})^2,$

$S_E=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}(X_{ij}-\bar{X}_{i\bullet}-\bar{X}_{\bullet j}+\bar{X})^2,$即$S_T=S_E+S_A+S_B.$

$$\because \sum_{j=1}^{s}(X_{ij}-\bar{X}_{i\bullet}-\bar{X}_{\bullet j}+\bar{X})=s\bar{X}_{i\bullet}-s\bar{X}_{i\bullet}-s\bar{X}+s\bar{X}=0,$$

$$\sum_{i=1}^{r}(X_{ij}-\bar{X}_{i\bullet}-\bar{X}_{\bullet j}+\bar{X})=r\bar{X}_{\bullet j}-r\bar{X}-r\bar{X}_{\bullet j}+r\bar{X}=0,$$

$$\sum_{i=1}^{r}(\bar{X}_{i\bullet}-\bar{X})=r\bar{X}-r\bar{X}=0,\sum_{j=1}^{s}(\bar{X}_{\bullet j}-\bar{X})=s\bar{X}-s\bar{X}=0,$$

$$\therefore 2\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}(X_{ij}-\bar{X}_{i\bullet}-\bar{X}_{\bullet j}+\bar{X})(\bar{X}_{i\bullet}-\bar{X})=0,$$

$$2\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}(X_{ij}-\bar{X}_{i\bullet}-\bar{X}_{\bullet j}+\bar{X})(\bar{X}_{\bullet j}-\bar{X})=0,$$

$$2\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}(\bar{X}_{i\bullet}-\bar{X})(\bar{X}_{\bullet j}-\bar{X})=0,$$

3、统计特性---推导

$$\because E(S_A)=E[s\sum_{i=1}^{r}(\bar{X}_{i\bullet}-\bar{X})^2=sE(\sum_{i=1}^{r}\bar{X}_{i\bullet}^2-2r\bar{X}^2+r\bar{X}^2)$$

$$=s\sum_{i=1}^{r}E\bar{X}_{i\bullet}^2-rsE\bar{X}^2=s\sum_{i=1}^{r}(D\bar{X}_{i\bullet}+E^2\bar{X}_{i\bullet})-rs(D\bar{X}+E^2\bar{X})$$

$$E\bar{X}_{i\bullet}=E(\frac{1}{s}\sum_{j=1}^{s}X_{ij})=\frac{1}{s}\sum_{j=1}^{s}EX_{ij}=\frac{1}{s}\sum_{j=1}^{s}\mu_{ij}=\mu_{i\bullet}=\mu+\alpha_i,$$

$$D\bar{X}_{i\bullet}=D(\frac{1}{s}\sum_{j=1}^{s}X_{ij})=\frac{1}{s^2}\sum_{j=1}^{s}DX_{ij}=\frac{s\sigma^2}{s^2}=\frac{\sigma^2}{s},$$

$$E\bar{X}=E(\frac{1}{rs}\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{r}X_{ij})=\frac{1}{rs}\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{r}EX_{ij}=\frac{1}{rs}\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{r}\mu_{ij}=\mu,$$

$$D\bar{X}=D(\frac{1}{rs}\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{r}X_{ij})=\frac{1}{(rs)^2}\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{r}DX_{ij}=\frac{\sigma^2}{rs},$$

$$\therefore E(S_A)=s[\sum_{i=1}^{r}(\frac{\sigma^2}{s}+(\mu+\alpha_i)^2)]-rs(\frac{\sigma^2}{rs}+\mu^2)$$

$$=r\sigma^2+rs\mu^2+2\mu s\sum_{i=1}^{r}\alpha_i+s\sum_{i=1}^{r}\alpha_i^2-\sigma^2-rs\mu^2$$

$$=(r-1)\sigma^2+s\sum_{i=1}^{r}\alpha_i^2 \Leftrightarrow E(\frac{S_A}{r-1})=\sigma^2+\frac{s}{r-1}\sum_{i=1}^{r}\alpha_i^2>\sigma^2.$$

同理$E(S_B)=rE[\sum_{j=1}^{s}(\bar{X}_{\bullet j}-\bar{X})^2]=(s-1)\sigma^2+r\sum_{j=1}^{s}\beta_j^2$

$$\Leftrightarrow E(\frac{S_B}{s-1})=\sigma^2+\frac{r}{s-1}\sum_{j=1}^{s}\beta_j^2>\sigma^2.$$

若H_{01}成立，即$\alpha_i=0$, 则$\dfrac{S_A}{\sigma^2}\sim\chi^2(r-1)$；

若H_{02}成立，即$\beta_j=0$, 则$\dfrac{S_B}{\sigma^2}\sim\chi^2(s-1)$；

若H_{01}, H_{02}均成立，则$\dfrac{S_T}{\sigma^2}\sim\chi^2(rs-1)$；

从而$\dfrac{S_E}{\sigma^2}=\dfrac{S_T-S_A-S_B}{\sigma^2}\sim\chi^2(rs-1-r+1-s+1)$

$=\chi^2(rs-r-s+1)=\chi^2(r-1)(s-1).$

	自由度	数学期望
S_T	$rs-1$	
S_E	$(r-1)(s-1)$	$(r-1)(s-1)\sigma^2$
S_A	$r-1$	$(r-1)\sigma^2+s\sum_{i=1}^{r}\alpha_i^2$
S_B	$s-1$	$(s-1)\sigma^2+r\sum_{i=1}^{r}\beta_j^2$

且有

$$E\left(\frac{S_E}{(r-1)(s-1)}\right)=\sigma^2,$$

$$E\left(\frac{S_A}{r-1}\right)=\sigma^2+\frac{s\sum_{i=1}^{r}\alpha_i^2}{r-1},$$

$$E\left(\frac{S_B}{s-1}\right)=\sigma^2+\frac{r\sum_{j=1}^{s}\beta_j^2}{s-1},$$

4、假设检验问题的拒绝域

如果H_{01}成立，则$\dfrac{S_A}{\sigma^2} \sim \chi^2(r-1)$;

如果H_{02}成立，则$\dfrac{S_B}{\sigma^2} \sim \chi^2(s-1)$;

如果H_{01}、H_{02}成立，则$\dfrac{S_E}{\sigma^2} \sim \chi^2(r-1)(s-1)$.

H_{01}检验量：$F_A = \dfrac{S_A/(r-1)}{S_E/(r-1)(s-1)} = \dfrac{\bar{S}_A}{\bar{S}_E} \sim F(r-1,(r-1)(s-1))$；

H_{02}检验量：$F_B = \dfrac{S_B/(s-1)}{S_E/(r-1)(s-1)} = \dfrac{\bar{S}_B}{\bar{S}_E} \sim F(s-1,(r-1)(s-1))$．

表2.2　双因素无重复试验的方差分析表

方差来源	平方和	自由度	均方	F 比
因素A	S_A	$r-1$	$\bar{S}_A = \dfrac{S_A}{r-1}$	$F_A = \dfrac{\bar{S}_A}{\bar{S}_E}$
因素B	S_B	$s-1$	$\bar{S}_B = \dfrac{S_B}{s-1}$	$F_B = \dfrac{\bar{S}_B}{\bar{S}_E}$
误差	S_E	$(r-1)\times(s-1)$	$\bar{S}_E = \dfrac{S_E}{(r-1)(s-1)}$	
总和	S_T	$rs-1$		

取显著性水平为α,得假设 H_{01} 的拒绝域为

$$F_A = \frac{\overline{S}_A}{\overline{S}_E} \geq F_\alpha(r-1,(r-1)(s-1)).$$

取显著性水平为α,得假设 H_{02} 的拒绝域为

$$F_B = \frac{\overline{S}_B}{\overline{S}_E} \geq F_\alpha(s-1,(r-1)(s-1)).$$

求解步骤： 设因素 A 有 r 个水平 $A_1, A_2, \ldots, A_r$，因素 B 有 s 个水平 $B_1, B_2, \ldots, B_s$，A 与 B 无交互作用，在显著水平 α 下，检验 A 与 B 对某项指标的影响是否显著？

$$S_T=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}(x_{ij}-\bar{x})^2=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}x_{ij}^2-2\bar{x}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}x_{ij}+rs\bar{x}^2=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}x_{ij}^2-rs\bar{x}^2=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}x_{ij}^2-\frac{(\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}x_{ij})^2}{rs}$$

$$S_A=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}(\bar{x}_{i.}-\bar{x})^2=\sum_{i=1}^{r}s(\bar{x}_{i.}-\bar{x})^2=\sum_{i=1}^{r}s(\bar{x}_{i.}^2-2\bar{x}\times\bar{x}_{i.}+\bar{x}^2)$$

$$=\sum_{i=1}^{r}s\bar{x}_{i.}^2-2\bar{x}s\sum_{i=1}^{r}\frac{\sum_{j=1}^{s}x_{ij}}{s}+rs\bar{x}^2=\frac{1}{s}\sum_{i=1}^{r}(\sum_{j=1}^{s}x_{ij})^2-rs\bar{x}^2=\frac{1}{s}\sum_{i=1}^{r}(\sum_{j=1}^{s}x_{ij})^2-\frac{(\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}x_{ij})^2}{rs}$$

$$S_B=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}(\bar{x}_{.j}-\bar{x})^2=\sum_{j=1}^{s}r(\bar{x}_{.j}-\bar{x})^2=\sum_{j=1}^{s}r(\bar{x}_{.j}^2-2\bar{x}\times\bar{x}_{.j}+\bar{x}^2)$$

$$=\sum_{j=1}^{s}r\bar{x}_{.j}^2-2\bar{x}r\sum_{j=1}^{s}\frac{\sum_{i=1}^{r}x_{ij}}{r}+rs\bar{x}^2=\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{s}(\sum_{i=1}^{r}x_{ij})^2-rs\bar{x}^2=\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{s}(\sum_{i=1}^{r}x_{ij})^2-\frac{(\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}x_{ij})^2}{rs}$$

$$S_E=S_T-S_A-S_B.$$

表2.1中的平方和可按下式计算:

$$S_T=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}X_{ij}^2-\frac{(T_{\bullet\bullet})^2}{rs},\qquad S_A=\frac{1}{s}\sum_{i=1}^{r}(T_{i\bullet})^2-\frac{(T_{\bullet\bullet})^2}{rs},$$

$$S_B=\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{s}(T_{\bullet j})^2-\frac{(T_{\bullet\bullet})^2}{rs},\qquad S_E=S_T-S_A-S_B.$$

其中 $T_{\bullet\bullet}=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}X_{ij},\qquad T_{i\bullet}=\sum_{j=1}^{s}X_{ij},\quad i=1,2,\cdots r;$

$$T_{\bullet j}=\sum_{i=1}^{r}X_{ij},\qquad j=1,2,\cdots,s,$$

B / A	B_1	B_2	$\cdots$	B_s	$T_{i.}=\sum_{j=1}^{s}x_{ij}$	$T_{i.}^2=(\sum_{j=1}^{4}x_{ij})^2$	$\sum_{j=1}^{s}x_{ij}^2$
A_1	X_{11}	X_{12}	$\cdots$	X_{1r}	$T_{1.}=\sum_{j=1}^{s}x_{1j}$	$T_{1.}^2=(\sum_{j=1}^{4}x_{1j})^2$	$\sum_{j=1}^{s}x_{1j}^2$
A_2	X_{21}	X_{22}	$\cdots$	X_{21}	$T_{2.}=\sum_{j=1}^{s}x_{2j}$	$T_{2.}^2=(\sum_{j=1}^{4}x_{2j})^2$	$\sum_{j=1}^{s}x_{2j}^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_r	X_{r1}	X_{r2}	$\cdots$	X_{rs}	$T_{r.}=\sum_{j=1}^{s}x_{rj}$	$T_{r.}^2=(\sum_{j=1}^{4}x_{rj})^2$	$\sum_{j=1}^{s}x_{rj}^2$
$T_{.j}=\sum_{i=1}^{r}x_{ij}$	$T_{.1}=\sum_{i=1}^{r}x_{i1}$	$T_{.2}=\sum_{i=1}^{r}x_{i2}$	$\cdots$	$T_{.s}=\sum_{i=1}^{r}x_{is}$	$T=\sum_{i=1}^{r}T_{i.}=\sum_{j=1}^{s}T_{.j}=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}x_{ij}$	$\sum_{i=1}^{r}T_{i.}^2=\sum_{i=1}^{r}(\sum_{j=1}^{s}x_{ij})^2$	$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}x_{ij}^2$
$T_{.j}^2=(\sum_{i=1}^{r}x_{ij})^2$	$T_{.1}^2=(\sum_{i=1}^{r}x_{i1})^2$	$T_{.2}^2=(\sum_{i=1}^{r}x_{i2})^2$	$\cdots$	$T_{.s}^2=(\sum_{i=1}^{r}x_{is})^2$	$\sum_{j=1}^{s}T_{.j}^2=\sum_{j=1}^{s}(\sum_{i=1}^{r}x_{ij})^2$		

故方差分析表如下：

方差来源	离差平方和	自由度	均方离差平方和	F比值	临界值	显著性
因素A	$S_A=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}(\bar{x}_{i.}-\bar{x})^2$	$r-1$	$\bar{S}_A=\dfrac{S_A}{r-1}$	$\dfrac{\bar{S}_A}{\bar{S}_E}$	$F_\alpha(r-1,(r-1)(s-1))$	
因素B	$S_B=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}(\bar{x}_{.j}-\bar{x})^2$	$s-1$	$\bar{S}_B=\dfrac{S_B}{s-1}$	$\dfrac{\bar{S}_B}{\bar{S}_E}$	$F_\alpha(s-1,(r-1)(s-1))$	
误差E	$S_E=S_T-S_A-S_B$	$(r-1)(s-1)$	$\bar{S}_E=S_E/(r-1)(s-1)$			
总和	$S_T=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}(x_{ij}-\bar{x})^2$	$rs-1$				

给定显著水平α时，查表得$F_\alpha(r-1,(r-1)(s-1)),F_\alpha(s-1,(r-1)(s-1))$．与$F$比值比较，做出判断.

例1 下面给出了在某 5 个不同地点、不同时间空气中的颗粒状物 (以 mg/m^3 计) 的含量的数据:

		因素B(地点)					
		1	2	3	4	5	$T_{i\bullet}$
因素A(时间)	1975年10月	76	67	81	56	51	331
	1976年 1 月	82	69	96	59	70	376
	1976年 5 月	68	59	67	54	42	290
	1996年 8 月	63	56	64	58	37	278
$T_{\bullet j}$		289	251	308	227	200	1275

设本题符合模型中的条件，试在显著性水平为 0.05下检验：在不同时间下颗粒状物含量的均值有无显著差异，在不同地点下颗粒状物含量的均值有无显著差异.

解 按题意检验假设, $T_{i\bullet}$,$T_{\bullet j}$的值已算出载于上表,

现在$r=4, s=5$. 由平方和表达式得到,

$$S_T=76^2+67^2+\cdots+37^2-\frac{1275^2}{20}=3571.75$$

$$S_A=\frac{1}{5}(331^2+376^2+290^2+278^2)-\frac{1275^2}{20}=1182.95$$

$$S_B=\frac{1}{4}(289^2+251^2+\cdots+200^2)-\frac{1275^2}{20}=1947.50$$

$$S_E=3571.75-(1182.95+1947.50)=441.30$$

表2.3　例1的方差分析表

方差来源	平方和	自由度	均方	F 比
因素A	$S_A = 1182.95$	3	394.32	$F_A = 10.72$
因素B	$S_B = 1947.50$	4	486.88	$F_B = 13.24$
误　差	$S_E = 441.30$	12	36.78	
总　和	$S_T = 3571.75$	19		

由于$F_{0.05}(3,12) = 3.49 < 10.72$，

$F_{0.05}(4,12) = 3.26 < 13.24$，故拒绝域$H_{01}$及$H_{02}$，即认为不同时间下颗粒物含量的均值有显著差异，也认为不同地点下颗粒状物含量的均值有显著差异.

三、双因素有重复试验的方差分析—有交互

因素$A: A_1, A_2, \cdots, A_r$. 因素$B: B_1, B_2, \cdots, B_s$.

表 3.1

因素B / 因素A	B_1	B_2	$\cdots$	B_s
A_1	$X_{111}, X_{112}, \cdots, X_{11t}$	$X_{121}, X_{122}, \cdots, X_{12t}$	$\cdots$	$X_{1s1}, X_{1s2}, \cdots, X_{1st}$
A_2	$X_{211}, X_{212}, \cdots, X_{21t}$	$X_{221}, X_{222}, \cdots, X_{22t}$	$\cdots$	$X_{2s1}, X_{2s2}, \cdots, X_{2st}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
A_r	$X_{r11}, X_{r12}, \cdots, X_{r1t}$	$X_{r21}, X_{r22}, \cdots, X_{r2t}$	$\cdots$	$X_{rs1}, X_{rs2}, \cdots, X_{rst}$

1、数学模型

假设因素A与因素B有交互作用，即$\mu_{ij} \neq \mu + \alpha_i + \beta_j$,

假设$X_{ijk} \sim N(\mu_{ij}, \sigma^2)$，$i = 1, \cdots, r$，$j = 1, \cdots, s$,

$k = 1, \cdots, t$. 各X_{ijk}独立，μ_{ij}, σ^2均为未知参数.

$$\left.\begin{aligned} & X_{ijk} = \mu_{ij} + \varepsilon_{ijk}, \\ & \varepsilon_{ijk} \sim N(0, \sigma^2),\ \text{各}\varepsilon_{ijk}\text{独立}, \end{aligned}\right\}$$

$i = 1, 2, \cdots, r$; $j = 1, 2, \cdots, s$; $k = 1, 2, \cdots, t$.

引入记号

$$\mu = \frac{1}{rs}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\mu_{ij} = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\mu_{i\cdot} = \frac{1}{s}\sum_{j=1}^{s}\mu_{\cdot j}$$

μ为总平均,

$$\mu_{i\bullet} = \frac{1}{s}\sum_{j=1}^{s}\mu_{ij}, \qquad i = 1, \cdots, r$$

$$\mu_{\bullet j} = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\mu_{ij}, \qquad j = 1, \cdots, s$$

$\alpha_i = \mu_{i\bullet} - \mu, \ i = 1, \cdots, r$ α_i为水平A_i的效应,

$\beta_j = \mu_{\bullet j} - \mu, \ j = 1, \cdots, s$ β_j为水平B_j的效应，

显然 $\sum_{i=1}^{r}\alpha_i = 0, \quad \sum_{j=1}^{s}\beta_j = 0.$

$$\gamma_{ij}=\mu_{ij}-(\mu+\alpha_i+\beta_j)=\mu_{ij}-\mu-\alpha_i-\beta_j \Rightarrow \begin{cases} =0,\text{无交互} \\ \neq 0,\text{有交互} \end{cases},$$

则γ_{ij}称为水平A_i和水平B_j的交互效应,

$$\sum_{i=1}^{r}\gamma_{ij}=\sum_{i=1}^{r}[\mu_{ij}-\mu-\alpha_i-\beta_j] \qquad \beta_j=\mu_{\bullet j}-\mu,$$

$$=r\mu_{.j}-r\mu-\sum_{i=1}^{r}\alpha_i-r\mu_{.j}+r\mu=0,$$

同理 $\sum_{j=1}^{s}\gamma_{ij}=0,\ i=1,\cdots,r \qquad \alpha_i=\mu_{i\bullet}-\mu,$

$$\sum_{j=1}^{s}\gamma_{ij}=\sum_{j=1}^{s}(\mu_{ij}-\mu-\alpha_i-\beta_j)=s\mu_{i.}-s\mu-s\mu_{i.}+s\mu-\sum_{j=1}^{s}\beta_j=0$$

上式可改写如下：

$$X_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + \varepsilon_{ijk},$$

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon_{ijk} \sim N(0,\sigma^2), \quad \text{各}\varepsilon_{ijk}\text{独立}, \\ i = 1,2,\cdots,r; j = 1,2,\cdots,s; \quad k = 1,2,\cdots,t, \end{array}\right\}$$

$$\sum_{i=1}^{r}\alpha_i = 0,\ \sum_{j=1}^{s}\beta_j = 0,\ \sum_{i=1}^{r}\gamma_{ij} = 0,\ \sum_{j=1}^{s}\gamma_{ij} = 0,$$

其中$\mu,\alpha_i,\beta_j,\gamma_{ij}$及$\sigma^2$均为未知参数.

为双因素需重复试验方差分析的数学模型

以上模型需检验以下三个假设:

$$\begin{cases} H_{01}: \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_r = 0, \\ H_{11}: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r \text{不全为零}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_{02}: \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_s = 0, \\ H_{12}: \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s \text{不全为零}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_{03}: \gamma_{11} = \gamma_{12} = \cdots = \gamma_{rs} = 0, \\ H_{13}: \gamma_{11}, \gamma_{12}, \cdots, \gamma_{rs} \text{不全为零}. \end{cases}$$

与单因素情况类似,

检验方法建立在平方和的分解上.

2、平方和的分解

引入记号

$$\bar{X}_{ij\bullet}=\frac{1}{t}\sum_{k=1}^{t}X_{ijk}, \qquad i=1,2,\cdots r;\quad j=1,2,\cdots,s,$$

$$\bar{X}_{i\bullet\bullet}=\frac{1}{st}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{t}X_{ijk}, \qquad i=1,2,\cdots r;$$

$$\bar{X}_{\bullet j\bullet}=\frac{1}{rt}\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{t}X_{ijk} \qquad j=1,2,\cdots,s,$$

$$\bar{X}=\frac{1}{rst}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{t}X_{ijk}=\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\bar{X}_{i\bullet\bullet}=\frac{1}{s}\sum_{j=1}^{s}\bar{X}_{\bullet j\bullet}=\frac{1}{rs}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\bar{X}_{ij\bullet}$$

引入总偏差平方和(称为总变差)

$$S_T=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{t}(X_{ijk}-\overline{X})^2$$

$$=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{t}[(X_{ijk}-\overline{X}_{ij\bullet})+(\overline{X}_{i\bullet\bullet}-\overline{X})+$$

$$(\overline{X}_{\bullet j\bullet}-\overline{X})+(\overline{X}_{ij\bullet}-\overline{X}_{i\bullet\bullet}-\overline{X}_{\bullet j\bullet}+\overline{X})]^2$$

$$=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{t}(X_{ijk}-\overline{X}_{ij\bullet})^2+st\sum_{i=1}^{r}(\overline{X}_{i\bullet\bullet}-\overline{X})^2+$$

$$+rt\sum_{j=1}^{s}(\overline{X}_{\bullet j\bullet}-\overline{X})^2+t\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}(\overline{X}_{ij\bullet}-\overline{X}_{i\bullet\bullet}-\overline{X}_{\bullet j\bullet}+\overline{X})^2$$

可得平方和的分解式

$$S_T = \boxed{S_E} + \boxed{S_A} + \boxed{S_B} + \boxed{S_{A\times B}}$$

误差平方和

因素A的效应平方和

因素B的效应平方和

因素A,B的交互效应平方和

其中 $$S_E=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{t}\left(X_{ijk}-\overline{X}_{ij\bullet}\right)^2,\quad S_A=st\sum_{i=1}^{r}\left(\overline{X}_{i\bullet\bullet}-\overline{X}\right)^2,$$

$$S_B=rt\sum_{j=1}^{s}\left(\overline{X}_{\bullet j\bullet}-\overline{X}\right)^2,$$

$$S_{A\times B}=t\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\left(\overline{X}_{ij\bullet}-\overline{X}_{i\bullet\bullet}-\overline{X}_{\bullet j\bullet}+\overline{X}\right)^2.$$

$$\bar{X} = \frac{1}{rst}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{t} X_{ijk} = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\bar{X}_{i\bullet\bullet} = \frac{1}{s}\sum_{j=1}^{s}\bar{X}_{\bullet j\cdot} = \frac{1}{rs}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\bar{X}_{ij\bullet}$$

$$S_T = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{t}(X_{ijk}-\bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{t}x_{ijk}^2 - 2\bar{x}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{t}X_{ijk} + rst\bar{x}^2$$

$$= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{t}x_{ijk}^2 - rst\bar{x}^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{t}x_{ijk}^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{t}x_{ijk})^2}{rst}$$

$$S_A = st\sum_{i=1}^{r}(\bar{x}_{i..}-\bar{x})^2 = st\sum_{i=1}^{r}(\bar{x}_{i..}^2 - 2\bar{x}\times\bar{x}_{i..} + \bar{x}^2) = st\sum_{i=1}^{r}\bar{x}_{i..}^2 - 2\bar{x}st\sum_{i=1}^{r}\bar{x}_{i..} + rst\bar{x}^2$$

$$= \frac{1}{st}\sum_{i=1}^{r}(\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{t}x_{ijk})^2 - rst\bar{x}^2 = \frac{1}{st}\sum_{i=1}^{r}(\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{t}x_{ijk})^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{t}x_{ijk})^2}{rst}$$

$$\bar{X}=\frac{1}{rst}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{t}X_{ijk}=\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\bar{X}_{i\bullet\bullet}=\frac{1}{s}\sum_{j=1}^{s}\bar{X}_{\bullet j\cdot}=\frac{1}{rs}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\bar{X}_{ij\bullet}$$

$$S_B=rt\sum_{j=1}^{s}(\bar{x}_{.j.}-\bar{x})^2=rt\sum_{j=1}^{s}(\bar{x}_{.j.}^2-2\bar{x}\times\bar{x}_{.j.}+\bar{x}^2)=rt\sum_{j=1}^{s}\bar{x}_{.j.}^2-2\bar{x}rt\sum_{j=1}^{s}\bar{x}_{.j.}+rst\bar{x}^2$$

$$=\frac{1}{rt}\sum_{j=1}^{s}(\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{t}x_{ijk})^2-rst\bar{x}^2=\frac{1}{rt}\sum_{j=1}^{s}(\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{t}x_{ijk})^2-\frac{(\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{t}x_{ijk})^2}{rst}$$

$$S_E=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{t}(X_{ijk}-\bar{x}_{ij.})^2=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{t}x_{ijk}^2-2\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\bar{x}_{ij.}\sum_{k=1}^{t}X_{ijk}+t\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\bar{x}_{ij.}^2$$

$$=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{t}x_{ijk}^2-t\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\bar{x}_{ij.}^2=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{t}x_{ijk}^2-\frac{\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}(\sum_{k=1}^{t}x_{ijk})^2}{t}\ .$$

$$S_{A\times B}=S_T-S_A-S_B-S_E$$

3.统计特性

	自由度	数学期望
S_T	$rst-1$	
S_E	$rs(t-1)$	$rs(t-1)\sigma^2$
S_A	$r-1$	$(r-1)\sigma^2+st\sum\limits_{i=1}^{r}\alpha_i^2$
S_B	$s-1$	$(s-1)\sigma^2+rt\sum\limits_{i=1}^{r}\beta_j^2$
$S_{A\times B}$	$(r-1)(s-1)$	$(r-1)(s-1)\sigma^2+t\sum\limits_{i=1}^{r}\sum\limits_{j=1}^{s}\gamma_{ij}^2$

且有

$$E\left(\frac{S_E}{rs(t-1)}\right)=\sigma^2,\qquad E\left(\frac{S_A}{r-1}\right)=\sigma^2+\frac{st\sum_{i=1}^{r}\alpha_i^2}{r-1},$$

$$E\left(\frac{S_B}{s-1}\right)=\sigma^2+\frac{rt\sum_{j=1}^{s}\beta_j^2}{s-1},$$

$$E\left(\frac{S_{A\times B}}{(r-1)(s-1)}\right)=\sigma^2+\frac{t\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\gamma_{ij}^2}{(r-1)(s-1)},$$

4.假设检验问题的拒绝域

当$H_{01}: \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_r = 0$为真时,

$$F_A = \frac{S_A/(r-1)}{S_E/(rs(t-1))} \sim F(r-1, rs(t-1)).$$

取显著性水平为α, 得假设 H_{01} 的拒绝域为

$$F_A = \frac{S_A/(r-1)}{S_E/(rs(t-1))} \geq F_\alpha(r-1, rs(t-1)).$$

类似地，取显著性水平为α，

得假设 H_{02} 的拒绝域为

$$F_B = \frac{S_B / (s-1)}{S_E / (rs(t-1))} \geq F_\alpha(s-1, rs(t-1)).$$

取显著性水平为α，得假设 H_{03} 的拒绝域为

$$F_{A\times B} = \frac{S_{A\times B} / ((r-1)(s-1))}{S_E / (rs(t-1))}$$

$$\geq F_\alpha((r-1)(s-1), rs(t-1)).$$

上述结果可汇总为方差分析表.

双因素试验的方差分析表

方差来源	平方和	自由度	均方	F 比
因素A	S_A	$r-1$	$\bar{S}_A=\dfrac{S_A}{r-1}$	$F_A=\dfrac{\bar{S}_A}{\bar{S}_E}$
因素B	S_B	$s-1$	$\bar{S}_B=\dfrac{S_B}{s-1}$	$F_B=\dfrac{\bar{S}_B}{\bar{S}_E}$
交互作用	$S_{A\times B}$	$(r-1)(s-1)$	$\bar{S}_{A\times B}=\dfrac{S_{A\times B}}{(r-1)(s-1)}$	$F_{A\times B}=\dfrac{\bar{S}_{A\times B}}{\bar{S}_E}$
误差	S_E	$rs(t-1)$	$\bar{S}_E=\dfrac{S_E}{rs(t-1)}$	
总和	S_T	$rst-1$		

记 $$T_{\bullet\bullet\bullet}=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{t}X_{ijk},$$

$$T_{ij\bullet}=\sum_{k=1}^{t}X_{ijk},\quad i=1,2,\cdots,r;\quad j=1,2,\cdots,s,$$

$$T_{i\bullet\bullet}=\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{t}X_{ijk},\quad i=1,2,\cdots,r;$$

$$T_{\bullet j\bullet}=\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{t}X_{ijk},\quad j=1,2,\cdots,s,$$

则各平方和S_T、S_E、S_A、S_B和$S_{A\times B}$的公式可改写为:

平方和S_T、S_E、S_A、S_B和$S_{A\times B}$的公式：

$$\left.\begin{aligned}
S_T &= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{t} X_{ijk}^2 - \frac{(T_{\bullet\bullet\bullet})^2}{rst},\\
S_A &= \frac{1}{st}\sum_{i=1}^{r}(T_{i\bullet\bullet})^2 - \frac{(T_{\bullet\bullet\bullet})^2}{rst},\\
S_B &= \frac{1}{rt}\sum_{j=1}^{s}(T_{\bullet j\bullet})^2 - \frac{(T_{\bullet\bullet\bullet})^2}{rst},\\
S_E &= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{t} X_{ijk}^2 - \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}(T_{ij\bullet})^2\\
S_{A\times B} &= S_T - S_A - S_B - S_E.
\end{aligned}\right\}$$

例2 一火箭用四种燃料， 三种推进器作射程试验. 每种燃料与每种推进器的组合各发射火箭两次, 射程如下.

表3.2　火箭的射程

推进器(B)		B_1	B_2	B_3
燃料(A)	A_1	58.2 52.6	56.2 41.2	65.3 60.8
	A_2	49.1 42.8	54.1 50.5	51.6 48.4
	A_3	60.1 58.3	70.9 73.2	39.2 40.7
	A_4	75.8 71.5	58.2 51.0	48.7 41.4

假设符合双因素方差分析模型所需的条件,在水平0.05下,检验不同燃料(因素A)、不同推进器(因素B)下的射程是否有显著差异? 交互作用是否显著?

解 $T_{\bullet\bullet\bullet}$、$T_{ij\bullet}$、$T_{i\bullet\bullet}$、$T_{\bullet j\bullet}$的计算见下表3.3,

表中括弧内的数字是$T_{ij\bullet}$,

现在$r=4$, $s=3$, $t=2$.

表3.3

$A \backslash B$	B_1	B_2	B_3	$T_{i\bullet\bullet}$
A_1	58.2 52.6 (110.8)	56.2 41.2 (97.4)	65.3 60.8 (126.1)	334.3
A_2	49.1 42.8 (91.9)	54.1 50.5 (104.6)	51.6 48.4 (100)	296.5
A_3	60.1 58.3 (118.4)	70.9 73.2 (144.1)	39.2 40.7 (79.9)	342.4
A_4	75.8 71.5 (147.3)	58.2 51.0 (109.2)	48.7 41.4 (90.1)	346.6
$T_{\bullet j\bullet}$	468.4	455.3	396.1	1319.8

根据平方公式有

$$S_T = (58.2^2 + 52.6^2 + \cdots + 41.4^2) - \frac{1319.8^2}{24}$$

$$= 2638.29833,$$

$$S_A = \frac{1}{6}(334.3^2 + 296.5^2 + 342.4^2 + 346.6^2) - \frac{1319.8^2}{24}$$

$$= 261.67500,$$

$$S_B = \frac{1}{8}(468.4^2 + 455.3^2 + 396.1^2) - \frac{1319.8^2}{24}$$

$$= 370.98083,$$

$$S_{A\times B}=\frac{1}{2}(110.8^2+91.9^2+\cdots+90.1^2)-\frac{1319.8^2}{24}-S_A-S_B$$

$$=1768.69250,$$

$$S_E=S_T-S_A-S_B-S_{A\times B}=236.95000\,.$$

或$S_E=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{t}X_{ijk}^2-\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}(T_{ij\bullet})^2$

$$S_{A\times B}=S_T-S_A-S_B-S_E$$

方差分析表见下页.

表3.4　例2的方差分析表

方差来源	平方和	自由度	均方	F 比
因素A (燃料)	261.67500	3	87.2250	F_A=4.42
因素B (推进器)	370.98083	2	185.490	F_B=9.39
交互作用 ($A\times B$)	1768.69250	6	294.7821	$F_{A\times B}$=14.9
误差	236.95000	12	19.7458	
总和	2638.29833	23		

需检验假设 H_{01}、H_{02}、H_{03}，

因为 $F_{0.05}(3,12) = 3.49 < F_A$，

$$F_{0.05}(2,12) = 3.89 < F_B,$$

所以在显著水平0.05下，拒绝假设 H_{01}、H_{02}，

即燃料和推进器对射程的影响是显著的.

又因为 $F_{0.05}(6,12) = 3.00 < F_{A\times B}$，故拒绝假设 H_{03}，

故交互作用效应是高度显著的.

练习：

设由三种同型号的造纸机 A_1, A_2, A_3 使用四种不同涂料 B_1, B_2, B_3, B_4 制造同版纸，对每种不同搭配进行两次重复测量光洁度，数据如下：

机器 \ 涂料	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	42.5，42.6	42.0，42.2	43.9，43.6	42.2，42.5
A_2	42.1，42.3	41.7，41.5	43.1，43.0	42.5，41.6
A_3	43.6，43.8	43.6，43.2	44.1，44.2	42.9，43.0

在显著水平 $\alpha = 0.05$ 下，检验不同机器、不同涂料及他们的交互作用的对光洁度的影响是否显著？