Analisi I

Scannagatti Gabriele

February 28, 2022

1 Insiemi Numerici

- $\mathbb{N}$ Insieme dei numeri naturali
- Z Insieme dei numeri interi positivi e negativi
- Q Insieme dei numeri razionali "frazioni"
- $\mathbb{R}$ Insieme dei numeri reali

2 Intervalli

Definizione 2.0.1
$I \subset \mathbb{R}$ si dice intervallo se $\forall x, y \in I. (x < y \Rightarrow \exists z \in \mathbb{R}.(x < z < y \Rightarrow z \in I))$
In un intervallo "non ci sono buchi".

Esempio 2.0.1
$A = \{x \in \mathbb{R} : 2 < x < 3\}$ è un intervallo
$B = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x < 2 \vee 5 < x \leq 6\}$ non è un intervallo

2.1 Notazione

dati $a, b \in \mathbb{R}$. $a < b$ allora:

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : \quad a \leq x \leq b\}$ intervallo chiuso.
- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : \quad a < x < b\}$ intervallo aperto.
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : \quad a < x \leq b\}$ intervallo aperto a sx e chiuso a dx (si può avere anche il viceversa).
- $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : \quad x \geq a\}$ semiretta chiusa.
- $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : \quad x > a\}$ semiretta aperta.
- $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

3 Funzioni

Definizione 3.0.1
Una funzione f è una terna di oggetti: A, B, f di cui A, B insiemi per cui:
A si dice dominio, B si dice codominio ed f è una relazione che lega gli elementi di A a quelli di B.

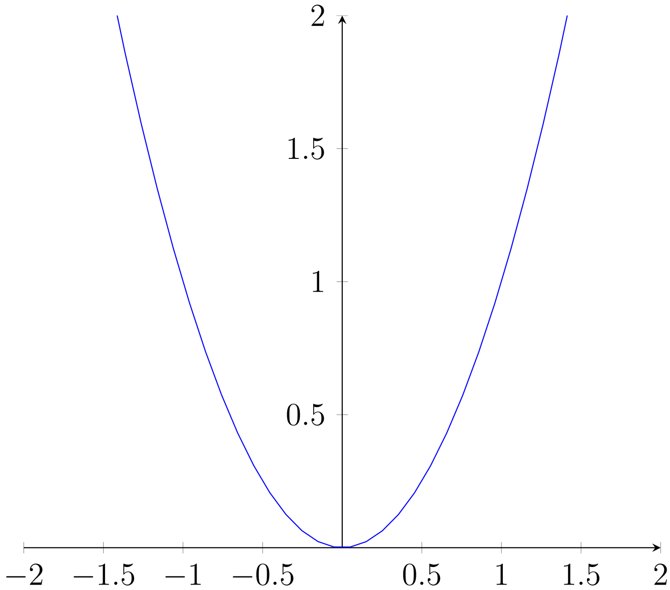
$$f : A \to B$$

In particolare: f è una relazione totale ed univalente ***(vedi definizioni di fondamenti dell'informatica)***

3.1 Grafico di f

il grafico di una funzione f è definito dall'insieme:

$$f : A \to B \quad Graph(f) = \{(a, b) \in A \times B : \quad b = f(a)\}$$



Esempio 3.1.1

3.2 Immagine di f

$f : A \to B$ funzione, $D \subset A \quad f(D) = \{f(x) : \ x \in D\}$ si dice immagine di D attraverso f e $f(D) \subset B$.
$Imm(f) = f(A)$ immagine di f ovvero l'immagine di tutto il dominio attraverso f.

Esempio 3.2.1

$$A, B = \mathbb{R} \quad f(x) = x^2 \quad D = [1, 3] \quad f(D) = [1, 9]$$
$$Imm(f) = f(A) = f(\mathbb{R}) = [0, +\infty)$$

3.3 Funzioni iniettive, surgettive e bigettive

Definizione 3.3.1
Una funzione $f : A \to B$ si dice surgettiva se: $\forall y \in B.\ \exists x \in A.\ y = f(x)$,

quindi ad esempio $f(x) = x^2 \quad g(x) = x^3$ entrambe definite in $\mathbb{R}^2$ abbiamo che: f non è surgettiva (per $y = -4$ non esiste alcun x tale che $f(x) = -4$), mentre g è surgettiva.

Osservazione 3.3.1
$f : A \to B$ *è surgettiva* $\Leftrightarrow Imm(f) = B$

Definizione 3.3.2
Una funzione $f : A \to B$ si dice iniettiva se: $\forall x_1, x_2 \in A.\ f(x_1) \neq f(x_2)$,

quindi ad esempio $f(x) = x^2 \quad g(x) = x^3$ entrambe definite in $\mathbb{R}^2$ abbiamo che: f non è iniettiva in quanto $x_1 = 2$, $x_2 = -2$ $f(x_1) = f(x_2) = 4$, mentre g è iniettiva.

Definizione 3.3.3
Una funzione $f : A \to B$ si dice bigettiva (biunivoca, biiezione, invertibile) se:

f è sia **iniettiva**, sia **surgettiva**. Se una funzione f è bigettiva posso costruire la funzione inversa indicata come $f^{-1} : B \to A$. Dato $b \in B$ esiste almeno un elemento $a \in A$ tale che $f(a) = b$ (f è surgettiva), inoltre l'elemento a è unico perché f è iniettiva.
Quindi $f^{-1}(b) = a \Leftrightarrow f(a) = b$.

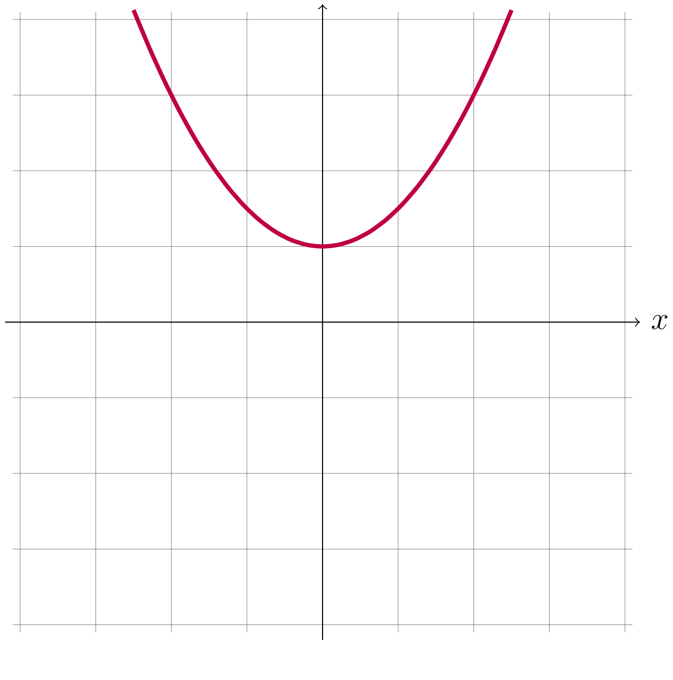
Esempio 3.3.1
$f : [0, +\infty] \to [0, +\infty] \quad f(x) = x^2$ *è bigettiva e la sua inversa è la radice quadrata:*
$f^{-1} : [0, +\infty] \to [0, +\infty] \quad f^{-1}(y) = \sqrt{y}$.
La radice quadrata è la funzione inversa di $f(x) = x^2$ quando dominio e codominio sono $[0, +\infty]$,
$\sqrt{y}$ *è sempre un numero* ≥ 0.
Osservazione: $\sqrt{x^2} = |x| \quad x = -2 \ \to \sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2 \quad x \neq 2 \ |x| = 2$

3.4 Traslazioni di f

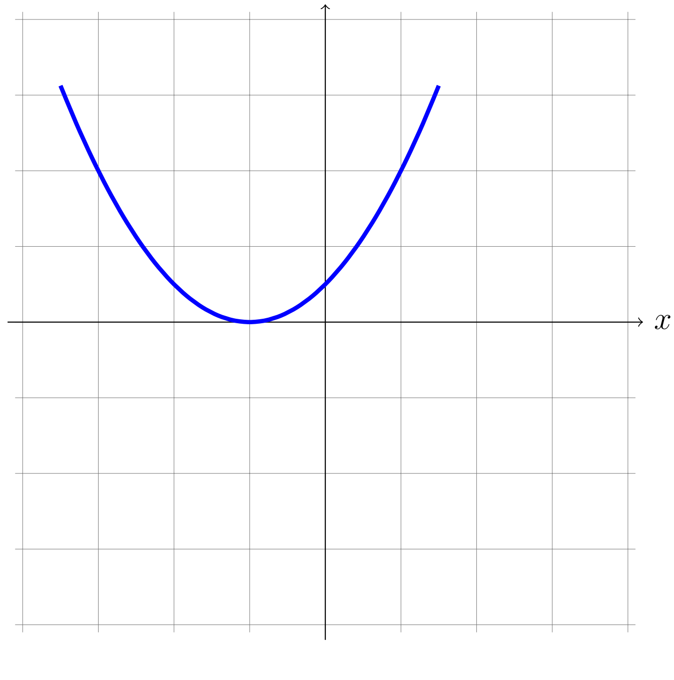
Se $g(x) = f(x) + \alpha \quad \alpha \in \mathbb{R}$ abbiamo una traslazione in verticale $\begin{cases} \text{Verso l'alto} \Rightarrow \alpha > 0 \\ \text{Verso il basso} \Rightarrow \alpha < 0 \end{cases}$

Se $g(x) = f(x + \alpha) \quad \alpha \in \mathbb{R}$ abbiamo una traslazione orizzontale $\begin{cases} \text{Verso Sx} \Rightarrow \alpha > 0 \\ \text{Verso Dx} \Rightarrow \alpha < 0 \end{cases}$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad g(x) = x^2 + 1$



$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad g(x) = (x + 1)^2$



3.5 Funzioni monotone

3.5.1 Definizione

Data una funzione $f : A \to B \quad x_1, x_2 \in A \wedge x_1 < x_2$ abbiamo:

1. Se $f(x_1) < f(x_2), \forall x_1, x_2$ f é strettamente crescente.
2. Se $f(x_1) \leq f(x_2), \forall x_1, x_2$ f é debolmente crescente.
3. Se $f(x_1) > f(x_2), \forall x_1, x_2$ f é strettamente decrescente.
4. Se $f(x_1) \geq f(x_2), \forall x_1, x_2$ f é debolmente decrescente.
5. Se si verificano 1 o 3 f é strettamente monotona.
6. Se si verificano 2 o 4 f é debolmente monotona.

Se f è crescente mantiene l'ordinamento, se f è decrescente inverte l'ordinamento.

3.5.2 Rapporto incrementale e monotonia

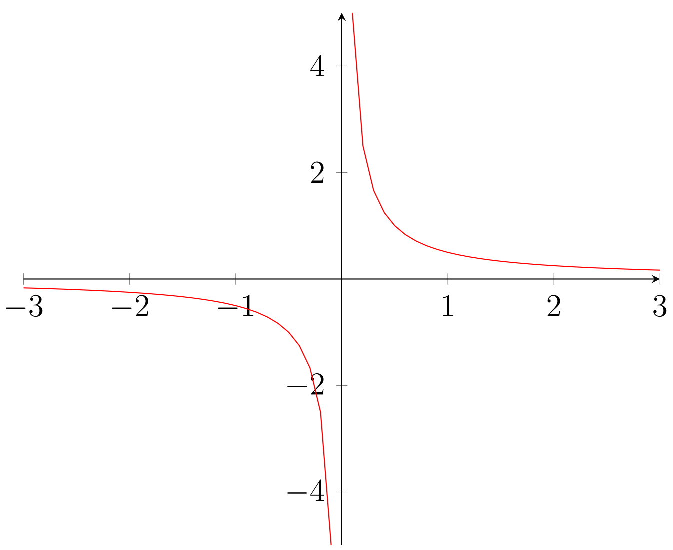
Definizione 3.5.1
f è strettamente crescente $\Leftrightarrow$ il suo rapporto incrementale $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$ *è* $> 0 \quad \forall x_1, x_2 . x_1 \neq x_2$.

Definizione 3.5.2
f è strettamente decrescente $\Leftrightarrow$ il suo rapporto incrementale $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$ *è* $< 0 \quad \forall x_1, x_2 . x_1 \neq x_2$.

Analogamente se:

- $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} \leq 0 \Leftrightarrow f$ è debolmente decrescente.
- $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} \geq 0 \Leftrightarrow f$ è debolmente crescente.

Esempio 3.5.1
$f(x) = \frac{1}{x},\ f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - \{0\}$ *la funzione non è globalmente decrescente, ma lo è sui due Intervalli* $\begin{cases} (-\infty, 0) \\ (0, +\infty) \end{cases}$



3.6 Composizione di funzioni monotone

presi gli insiemi $A, B, C \subset \mathbb{R}$ e le funzioni $f : A \to B,\ g : B \to C$ risulta che:

- Se f è crescente e g è crescente $\Rightarrow\ g \circ f$ è crescente.
- Se f è crescente e g è decrescente $\Rightarrow\ g \circ f$ è decrescente.
- Se f è decrescente e g è crescente $\Rightarrow\ g \circ f$ è decrescente.
- Se f è decrescente e g è decrescente $\Rightarrow\ g \circ f$ è crescente.

Osservazione 3.6.1
*Se f è strettamente monotona $\Rightarrow$ f è iniettiva. Il viceversa **non** vale.*

3.7 Altre definizioni per funzioni ($f : A \to B$)

Definizione 3.7.1
L'insieme di definizione (o dominio naturale) di una funzione è il più grande sottoinsieme di $\mathbb{R}$ dove ha senso scrivere la funzione.

Definizione 3.7.2
$f(x)$ *è pari* $\Leftrightarrow \forall x \in A.\ f(x) = f(-x)$

Definizione 3.7.3
$f(x)$ *è dispari* $\Leftrightarrow \forall x \in A.\ f(x) = -f(x)$

Osservazione 3.7.1
Per essere pari o dispari, una funzione ha bisogno di un dominio tale che $x \in A \wedge -x \in A$, ossia simmetrico rispetto all'origine.

- *f è pari $\Rightarrow$ $Graph(f)$ è simmetrico rispetto all'asse y.*
- *f è dispari $\Rightarrow$ $Graph(f)$ è simmetrico rispetto all'asse x.*
- *f è periodica di periodo $\rho \Leftrightarrow \forall x \in A.\,(\forall c \in Z.\,(f(x) = f(x + c\rho)))$*

Osservazione 3.7.2
Se f è periodica o f è pari allora f non è monotona e f non è iniettiva.

- $x^\alpha = e^{\alpha log(x)} \quad \forall x > 0$

4 Massimi e Minimi

Definizione 4.0.1
$A \subset \mathbb{R},\ A \neq \emptyset,\ m \in \mathbb{R}$ *si dice massimo di A se $m \geq a$, $\forall a \in A \wedge m \in A$.*

Definizione 4.0.2
$A \subset \mathbb{R},\ A \neq \emptyset,\ m \in \mathbb{R}$ *si dice minimo di A se $m \leq a$, $\forall a \in A \wedge m \in A$.*

Osservazione 4.0.1
Se $A = [x, y)$ è un intervallo aperto a dx allora non ha massimo.

Proof. Supponendo per assurdo che $m \in \mathbb{R}$ sia il $max(A)$, allora $m \in A \wedge m < y$ perché y è escluso.
Ponendo $\varepsilon = y - m > 0$, definiamo $m' = m + \frac{\varepsilon}{2}$.
Risulta quindi che $m' \in A$, ma $m' > m$ contraddicendo la definizione. $\square$

Osservazione 4.0.2
Analogamente se $A = (x, y]$ allora non ha minimo

5 Maggioranti e Minoranti

Definizione 5.0.1
$A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, $k \in \mathbb{R}$ si dice maggiorante di A se $k \geq a$ $\forall a \in A$. L'insieme dei maggioranti di A si indica con M_A.

Osservazione 5.0.1
Se esiste un maggiorante di A, allora ne esistono infiniti.
non tutti gli insiemi hanno maggioranti, ad esempio $B = [0, +\infty)$ non ha maggiorante

Definizione 5.0.2
Se l'insieme $M_A \neq \emptyset \Rightarrow A$ si dice superiormente limitato e $Sup(A) = min(M_A)$.

Osservazione 5.0.2
Le defenizioni per i Minoranti sono analoghe alle precedenti.

Definizione 5.0.3
Se A è sia superiormente limitato, sia inferiormente limitato, allora A si dice limitato.

Teorema 5.0.1
$A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, A è superiormente limitato $\Rightarrow \exists\, min(M_A)$ tale minimo si dice estremo superiore di A $Sup(A)$.

6 Retta reale estesa

6.0.1 Definizione

La retta reale estesa $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ in modo che valga:

$$-\infty \leq x \leq +\infty \quad \forall x \in \overline{\mathbb{R}}$$

Osservazione 6.0.1
Se $x \in \mathbb{R}$ allora $-\infty < x < +\infty$

6.0.2 Operazioni in $\overline{\mathbb{R}}$

1. Se $x \neq +\infty \Rightarrow x + (-\infty) = -\infty$
2. Se $x \neq -\infty \Rightarrow x + (+\infty) = +\infty$
3. Se $x > 0 \Rightarrow x * (+\infty) = +\infty \wedge x * (-\infty) = -\infty$
4. Se $x < 0 \Rightarrow x * (+\infty) = -\infty \wedge x * (-\infty) = +\infty$

6.0.3 Operazioni Vietate

1. $(+\infty) + (-\infty)$ e viceversa
2. $0 * (+\infty)$
3. $0 * (-\infty)$

6.0.4 Operazioni valide

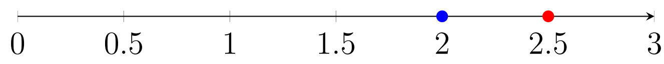
1. $(+\infty) * (+\infty) = +\infty$
2. $(+\infty) * (-\infty) = -\infty$ e viceversa
3. $(-\infty) * (-\infty) = +\infty$

Osservazione 6.0.2
Dato $A \subset Z$ se A è superiormente limitato allora A ha massimo e se A è inferiormente limitato allora A ha minimo.

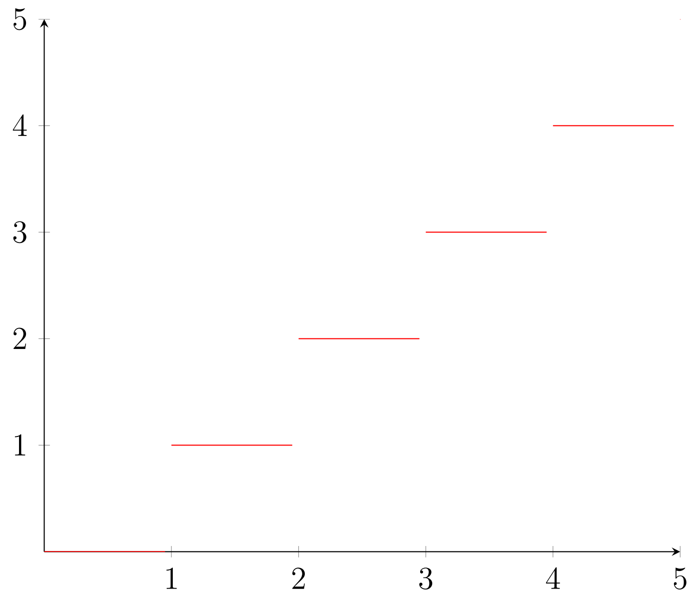
Definizione 6.0.1
Dato $x \in \mathbb{R}$ si dice parte intera di x e si indica con $[x]$ il numero $[x] = max(m \in Z : \ m \leq x)$

Esempio 6.0.1
$\left[\frac{25}{10}\right] = 2$

Graficamente:



Esempio 6.0.2
Grafico di $f(x) = [x]$



7 Massimi e Minimi di f

Definizione 7.0.1
Dati $A \subset \mathbb{R}$, $\quad f : A \to \mathbb{R}$ f si dice limitata superiormente se $f(A)$ è limitato superiormente. Analogamente f è inferiormente limitata se $f(A)$ è limitato inferiormente.

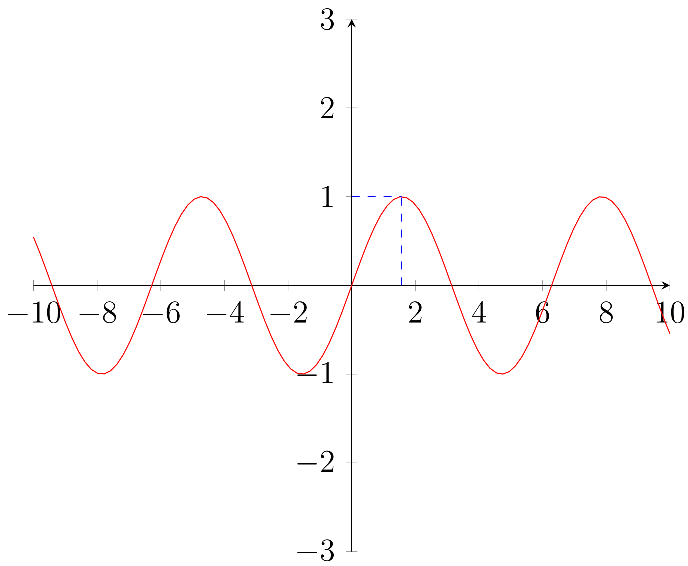
Definizione 7.0.2
f ha massimo se $f(A)$ ha massimo, si dice che M è il massimo di f e si indica con $M = max(f)$. Analogamente per il minimo indicato con $min(f)$.

Definizione 7.0.3
L'estremo superiore di una funzione è uguale a $sup(f) = sup(f(A))$, se f non è limitata superiormente si indica $sup(f) = +\infty$, nel caso non sia inferiormente limitata si indica con $inf(f) = -\infty$.

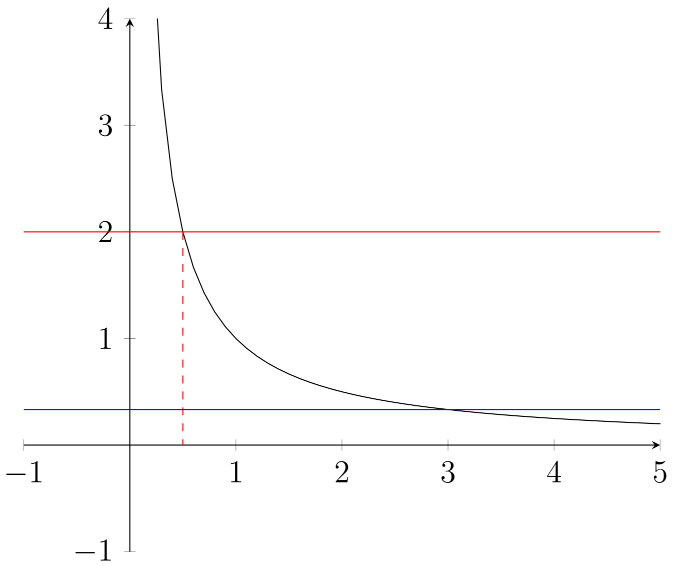
Definizione 7.0.4
Se f ha massimo allora $\forall x_0 \in A$. $f(x_0) = max(f)) \Rightarrow x_0$ si dice punto di massimo, stessa cosa per i punti di minimo.

Osservazione 7.0.1
Il massimo di f è unico, i punti di massimo potrebbero essere molti

Esempio 7.0.1
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = \sin(x)$ $\quad$ *$max(f) = 1$ $x_0 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in Z$ sono punti di massimo.*

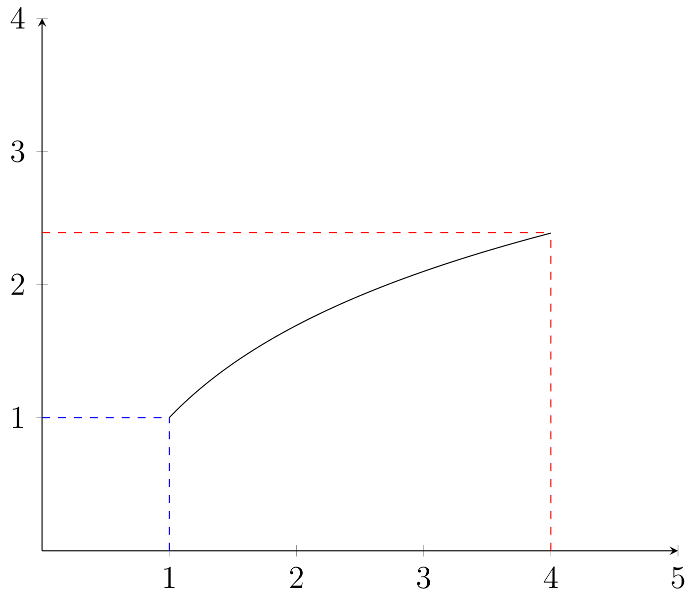


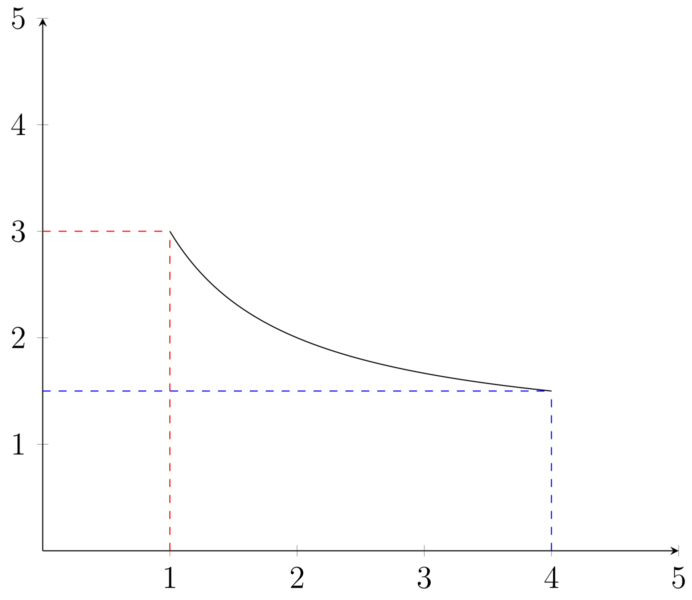
Esempio 7.0.2
$f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ $f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad$ *f non ha nè massimo nè minimo.*



Osservazione 7.0.2
Presi $A \subset \mathbb{R}$, $\mathrm{f} : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ *si ha che:*

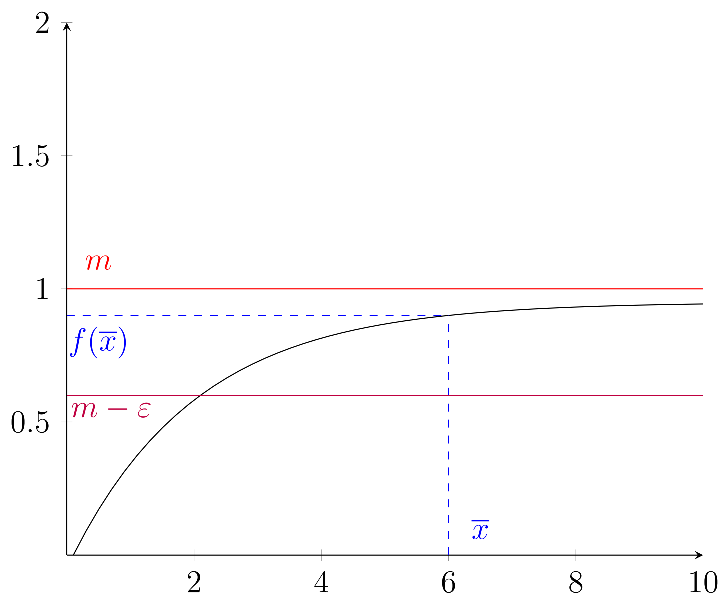
- *Se A ha massimo e f è debolmente crescente, allora f ha max e* $max(f) = f(max(A))$.
- *Se A ha minimo e f è debolmente crescente, allora f ha min e* $min(f) = f(min(A))$.
- *Se A ha massimo e f è debolmente decrescente, allora f ha min e* $min(f) = f(max(A))$.
- *Se A ha minimo e f è debolmente decrescente, allora f ha max e* $max(f) = f(min(A))$.





Osservazione 7.0.3
$f : A \to \mathbb{R}$ *allora* $m = sup(f) \Leftrightarrow$ *valgono le seguenti condizioni:*

1. $f(x) \leq m\ \forall x \in A$
2. $\forall \varepsilon > 0.\ \exists \overline{x}.\ f(\overline{x}) > m - \varepsilon$

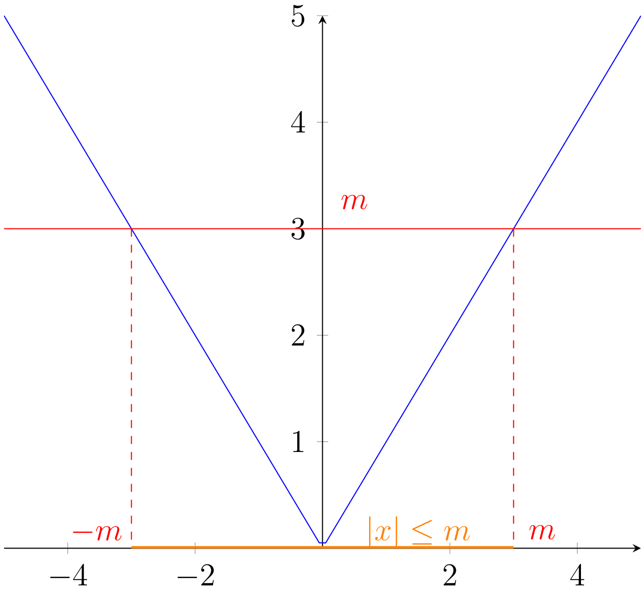


8 Valore assoluto

Definizione 8.0.1
Dato $x \in \mathbb{R}$ si dice valore assoluto di x e si indica con $|x|$ il numero $|x| = max(-x, x)$

8.0.1 Propietà del valore assoluto:

1. $x \leq |x| \; \forall x \in \mathbb{R}$
2. $|x| = x \Rightarrow x \geq 0, \quad |x| = -x \Rightarrow x \leq 0$
3. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
4. $|-x| = |x|$
5. $-|x| \leq x \leq |x|$
6. $|x| \leq m \Leftrightarrow -m \leq x \leq m \quad (m \geq 0)$



8.0.2 Disuguaglianza triangolare

Dati $a, b \in \mathbb{R}$ risulta che:

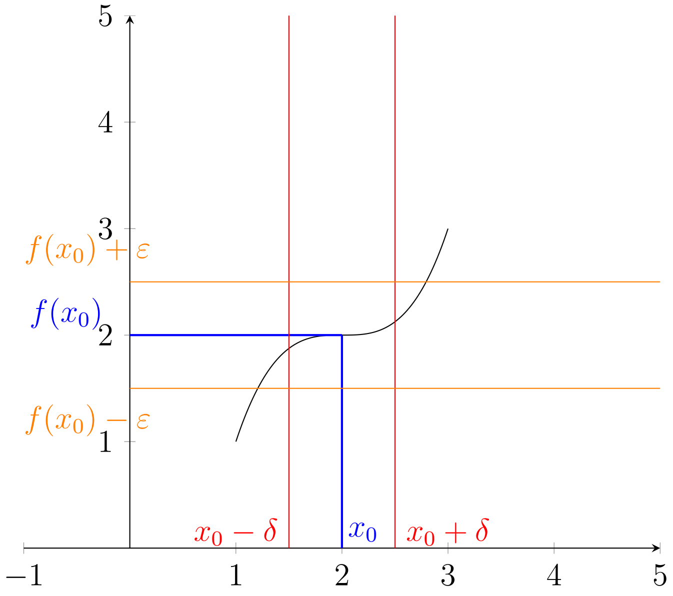
1. $|a + b| \leq |a| + |b|$
2. $||a| - |b|| \leq |a - b|$

9 Continuità

Definizione 9.0.1
$A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ la funzione f si dice continua in x_0 se:

$$\forall \varepsilon > 0.\ \exists \delta > 0.\ x \in A,\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

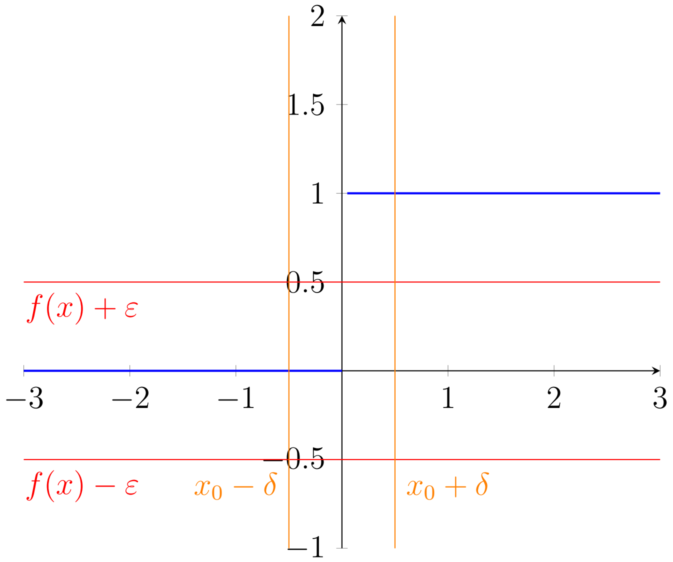
$$|x - x_0| < \delta \Leftrightarrow x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$$
$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \Leftrightarrow f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0)\varepsilon$$



Esempio 9.0.1
Funzione non continua in un punto:

$$f(x) = \begin{cases} 0 \Rightarrow x \leq 0 \\ 1 \Rightarrow x > 0 \end{cases}$$

Non è continua in $x_0 = 0$, scelgo $\varepsilon = \frac{1}{2}$ $\quad f(0) - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ $f(0) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.
Qualunque sia $\delta > 0$ se $x \in (0, \delta) \Rightarrow f(x) = 1$ quindi la disuguaglianza $f(0) - \varepsilon < f(x) < f(0) + \varepsilon$ è falsa.



Definizione 9.0.2
$A \subset \mathbb{R},\ f : A \to \mathbb{R},\ B \subset A$ si dice che f è continua in B se f è continua in ogni punto $x_0 \in B$.
Si dice semplicemente che f è continua (senza specificare il sottoinsieme B) se $B = A$.

Esempio 9.0.2

$$f(x) = \begin{cases} 0 \Rightarrow x \leq 0 \\ 1 \Rightarrow x > 0 \end{cases} \quad \text{è continua in } (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

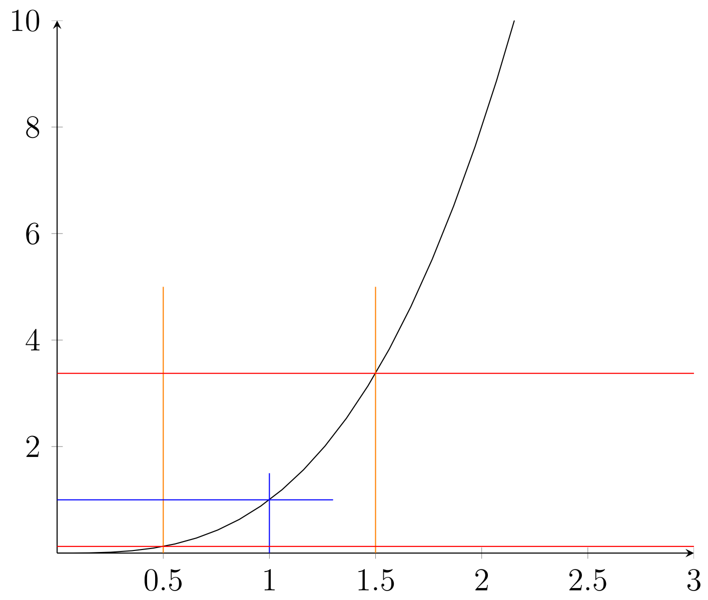
9.1 Permanenza del segno

Teorema 9.1.1
$A \subset \mathbb{R},\ f : A \to \mathbb{R},\ x_0 \in A$ Se f è continua in $x_0 \land f(x_0) > 0 \Rightarrow \exists\, \delta > 0 . x \in A \land |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > 0$

Proof. Sappiamo che $f(x_0) > 0$. Scelgo $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}$ e lo uso nella definizione di continuità.
Allora $\exists\, \delta > 0 . x \in A \land |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Cioè:

$$f(x) > f(x_0) - \varepsilon = f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} = \frac{f(x_0)}{2} > 0$$

□



Corollario 9.1.1.1
Se f è continua in $x_0,\ f : A \to \mathbb{R}\ x_0 \in A \land f(x_0) > M \in \mathbb{R}$ allora $\exists\, \delta > 0 . x \in A, |x - x_0| < delta \Rightarrow f(x) > M$.
(vale anche con $f(x_0) < M \Rightarrow f(x) < M$)

Proof. Applico il Teorema precedente alla funzione:

$$g(x) = f(x) - M$$

□

Teorema 9.1.2
Se f e g sono continue in x_0 allora lo sono anche le funzioni:

- $f + g$
- $f \circ g$
- $|f|$
- $f(x_0) \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{f}$

Corollario 9.1.2.1
$\frac{f}{g}$ *è continua (se* $g(x_0) \neq 0$*)* $\frac{f}{g} = f * \frac{1}{g}$

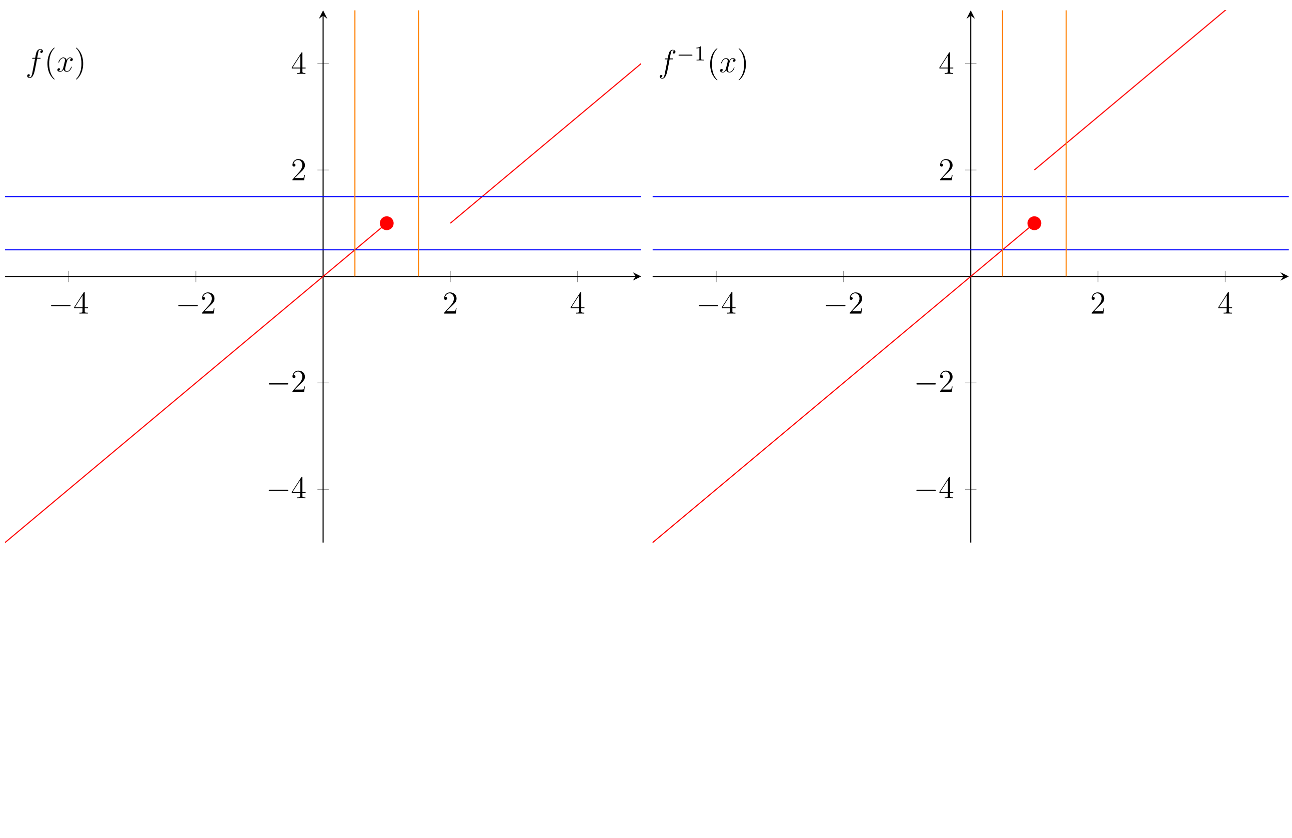
Proposizione 9.1.1
$I \subset \mathbb{R}$ *intervallo,* $f : I \to B \subset \mathbb{R}$.
Se f è continua in I ed è biunivoca allora f^{-1} è continua in B.

Osservazione 9.1.1
L'ipotesi che il dominio sia un intervallo ***non*** *può essere omessa.*

Esempio 9.1.1

$$f : (-\infty, 1] \cup (2, +infty) \to \mathbb{R} \; f(x) = \begin{cases} x \Rightarrow x \leq 1 \\ x - 1 \Rightarrow x > 2 \end{cases}$$

Se f non è definita in un intervallo potrebbe succedere che f^{-1} non è continua anche se f lo è.



9.2 Continuità delle funzioni elementari

Proposizione 9.2.1
Le seguenti funzioni sono continue:

- $f(x) = k \in \mathbb{R}$ *è continua (funzione costante).*
- $f(x) = x$ *è continua, da questo segue che tutti i polinomi sono continui.*
- *Le funzioni razionali (quoziente di polinomi) sono continue nel loro insieme di definizione* ($f(x) = \frac{p(x)}{y(x)}$).
- $e^x, \ \log(x)$.
- $\sin(x), \ \cos(x), \ \tan(x), \ \arcsin(x), \ \arccos(x), \ \arctan(x)$.

Teorema 9.2.1
$f : A \to B, \ g : B \to \mathbb{R}, \quad x_0 \in A, \ y_0 = f(x_0) \in B$
Se f *è continua in* x_0 *e* g *è continua in* y_0 *allora* $g \circ f$ *è continua in* x_0.

Esempio 9.2.1
$h(x) = e^{\cos(x)}$ *è una funzione continua perché è la composizione di* $f(x) = \cos(x) \wedge g(y) = e^y$.

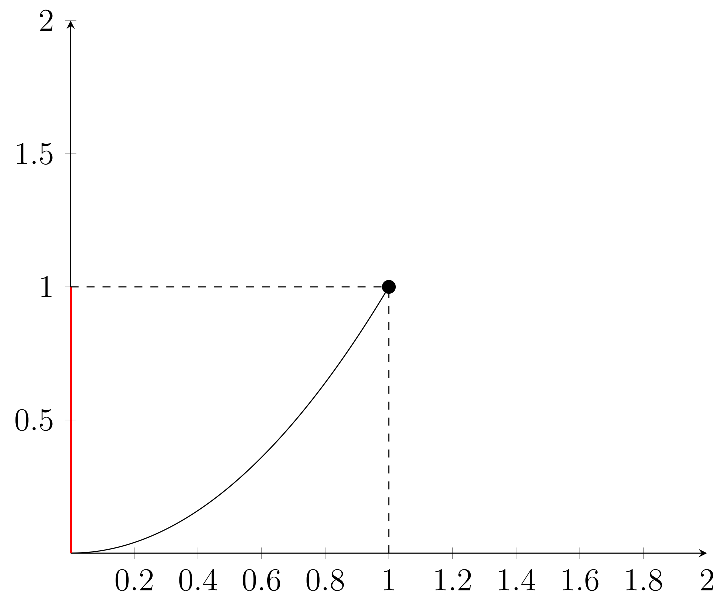
Osservazione 9.2.1
$f(x) : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continua in* $[a, b]$. *Allora:*

$$Sup(f(x))_{x \in (a,b)} = Sup(f(x))_{x \in [a,b]}$$

$$Inf(f(x))_{x \in (a,b)} = Inf(f(x))_{x \in [a,b]}$$

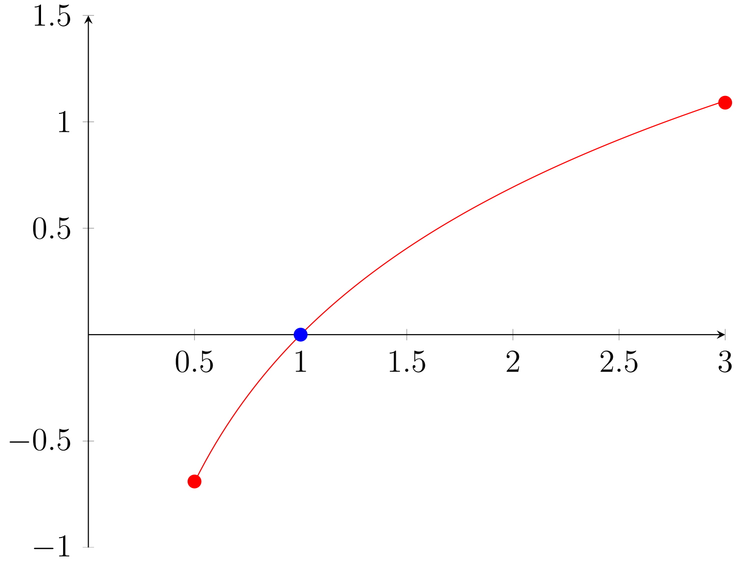
Esempio 9.2.2
$f(x) = x^2 \quad f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *allora:*

$$Sup(f(x))_{x \in [0,1]} = f(1) = 1 \quad \text{(è anche max)}$$
$$Sup(f(x))_{x \in (0,1)} = f(1) = 1$$



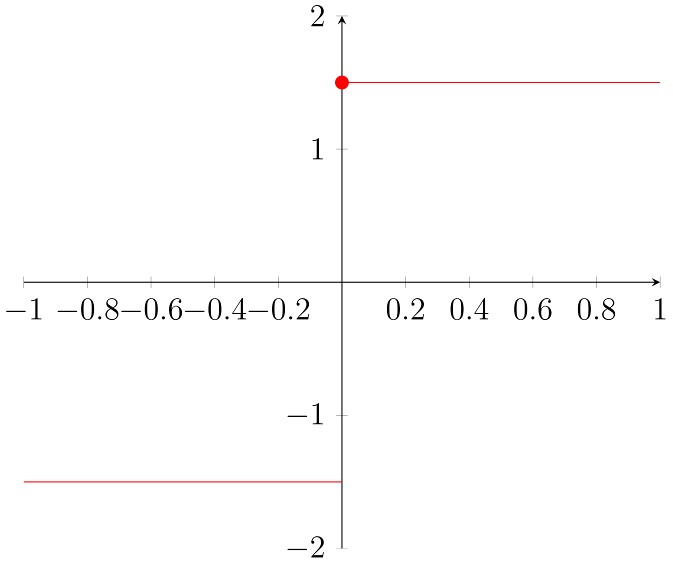
9.3 Teorema degli zeri

Teorema 9.3.1
Ipotesi: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *Continua*.
Se $f(a) * f(b) < 0 \Rightarrow \exists \varsigma \in (a, b).\ f(\varsigma) = 0$



L'ipotesi di continuità è necessaria. Infatti:

$$f(x) = [x] + \frac{1}{2},\ f : [-1, 1] \to \mathbb{R} \Rightarrow \nexists\, \varsigma \in [-1, 1].f(\varsigma) = 0$$



9.4 Teorema dei valori intermedi

Teorema 9.4.1
Ipotesi: *$I \subset \mathbb{R}$ intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ continua.*
Allora $f(I)$ (l'immagine di I) è un intervallo.

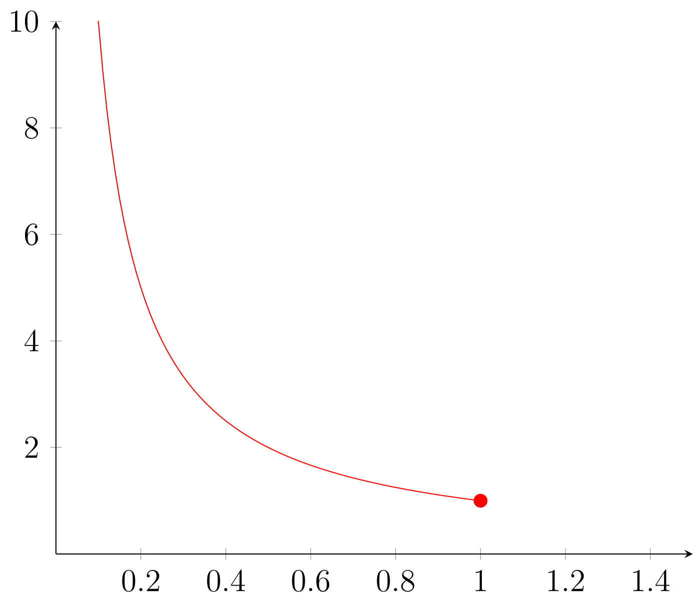
Corollario 9.4.1.1
$I \subset \mathbb{R}$ intervallo, f continua.
Se f assume i valori y_1 e y_2 allora assume anche tutti i valori compresi fra y_1, y_2.

9.5 Teorema di Weiestrass

Teorema 9.5.1
Ipotesi: *$a, b \in \mathbb{R}$ $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua.*
Allora f ha massimo e minimo.

Esempio 9.5.1
Perché $[a, b]$ deve essere limitato e chiuso?

$$f : (0, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x} \text{ è continua, ma non ha max.}$$



10 Intorni

Definizione 10.0.1
Dato $x_0 \in \mathbb{R}$ si dice intorno di x_0 un insieme del tipo: $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ dove $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ e ε si dice raggio dell'intorno.
Un insieme del tipo: $[x_0, x_0 + \varepsilon)$ si dice intorno dx di x_0,
mentre un insieme: $(x_0 - \varepsilon, x_0]$ si dice intorno sx di x_0.

Esempio 10.0.1

$$x_0 = 2,\ \varepsilon = 1$$

Definizione 10.0.2
Se $x_0 = +\infty$ un intorno di x_0 è un insieme del tipo $(a, +\infty),\ a \in \mathbb{R}$.
Un intorno di $x_0 = -\infty$ è un insieme del tipo $(-\infty, a),\ a \in \mathbb{R}$.

Definizione 10.0.3
Data $A \subset \mathbb{R} \wedge x_0\overline{\mathbb{R}}$, x_0 si dice punto di accumulazione per A se $\forall, U\, intorno\, di\, x_0.\ U \cup A - \{x_0\} \neq \emptyset$.
Vuol dire che "vicino" a x_0 ci sono altri punti di A oltre a x_0 (x_0 potrebbe anche non appartenere ad A)

Esempio 10.0.2
$A = (2, 3),\ Acc(A) = \{punti\ di\ accumulazione\ di\ A\} = ?\quad x_0 \in (2, 3)$ ongi intorno di x_0 interseca A in infiniti punti.

Definizione 10.0.4
Un punto $x_0 \in A$ si dice <u>punto isolato</u> di A se esiste un intorno U di x_0 tale che $U \cup A = \{x_0\}$.

Esempio 10.0.3
$A = [2, 3] \cap \{5\} \Rightarrow 5$ è punto isolato di A.

Osservazione 10.0.1
Tutti gli elementi di N sono punti isolati, quindi non ci sono punti di accumulazione.
$+\infty$ è l'unico punto di accumulazione per N.

Definizione 10.0.5
$A \subset \mathbb{R},\ x_0 \in A$ si dice punto interno ad A se esiste U intorno di X_0 tale che $U \subset A$. I punti interni si indicano con $int(A)$

Definizione 10.0.6
$A \subset \mathbb{R},\ f : A \to \mathbb{R}$. Un punto $x_0 \in A$ si dice punto di minimo locale (o relativo) se esiste un intorno U di x_0 tale che $f(x) \geq f(x_0) \forall x \in U \cap A$

Definizione 10.0.7
$A \subset \mathbb{R},\ f : A \to \mathbb{R}$. Un punto $x_0 \in A$ si dice punto di massimo locale (o relativo) se esiste un intorno U di x_0 tale che $f(x) \leq f(x_0) \forall x \in U \cap A$

Analogamente si definisco minimo locale stretto e massimo locale stretto.

Osservazione 10.0.2
Se x_0 è punto di minimo allora è anche punto di minimo locale.

10.1 Limite

Definizione 10.1.1
$A \subset \mathbb{R},\ f : A \to \mathbb{R},\ x_0$ punto di accumulazione per A. Si dice che $l \in \overline{\mathbb{R}}$ è il limite per x che tende ad x_0 di $f(x)$ se $\forall V$ intorno di $l\ \exists U$ intorno di x_0. $x \in U \cap A - \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in V$.

$$\lim_{x\to\ x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\delta > 0.\ x \in A, |x - x_0| < \delta \wedge x \neq x_0 \Rightarrow |f(x) - l < \varepsilon$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l,\ l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall\,\varepsilon > 0.\ \exists\,a \in \mathbb{R}.\ x > a \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall\,a \in \mathbb{R}.\ \exists\,b \in \mathbb{R}.\ x > b \Rightarrow f(x) > a$$

(Analoghi i casi $l = -\infty \vee x_0 = -\infty$)

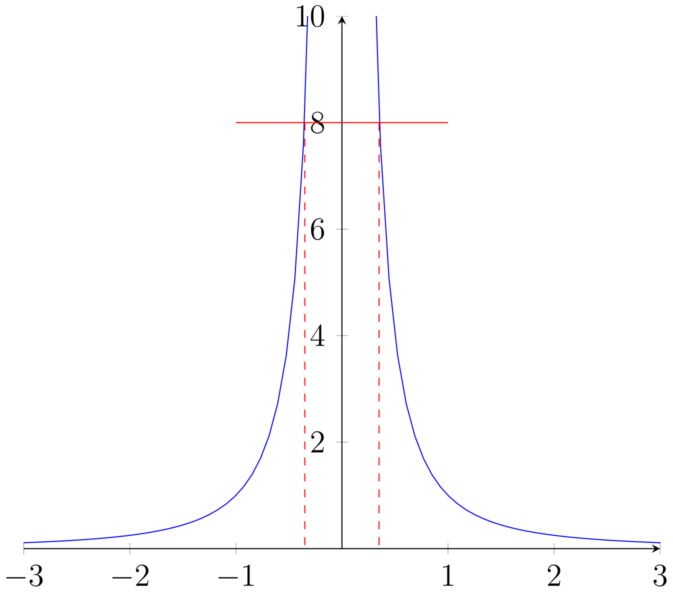
Osservazione 10.1.1
$f : A \to \mathbb{R},\ A \subset \mathbb{R},\ X_0 \in A, x_0 \in Acc(A)$. Allora f è continua in $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x\to X_0} f(x) = f(x_0)$

Osservazione 10.1.2
Una funzione è sempre continua nei punti isolati.

Osservazione 10.1.3
Nella definizione di limite non serve che x_0 sia nel dominio della funzione, basta che sia un punto di accumulazione per il dominio.

Esempio 10.1.1

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \qquad \lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$$



Teorema 10.1.1 (Unicità del limite)
Se il limite esistw allora è unico.

Definizione 10.1.2
$A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in Acc(A \cap [x_0, +\infty))$ $\quad f : A \to \mathbb{R}$ *si dice che* $l \in \overline{\mathbb{R}}$ *è il limite di* $f(x)$ *per* x *che tende a* x_0 *da destra. E si scrive:*

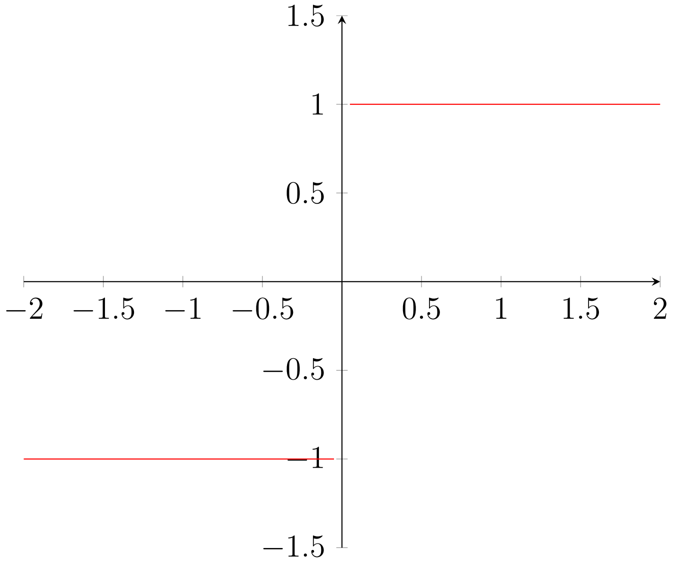
$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$$

Se $\forall V$ *intorno di* $l\ \exists \delta > 0 . x_0 < x < x_0 + \delta, x \in A \Rightarrow f(x) \in V$.
Da sinisrtra se Se $\forall V$ *intorno di* $l\ \exists \delta > 0 . x_0 - \delta < x < x_0\ , x \in A \Rightarrow f(x) \in V$ *e sis scrive:*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$$

Esempio 10.1.2

$$f(x) = \begin{cases} -1 \Rightarrow x < 0 \\ 1 \Rightarrow x > 0 \end{cases} \qquad f : (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \to \mathbb{R} \quad \begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} f(x) &= 1 \\ \lim_{x \to 0^-} f(x) &= -1 \end{aligned}$$

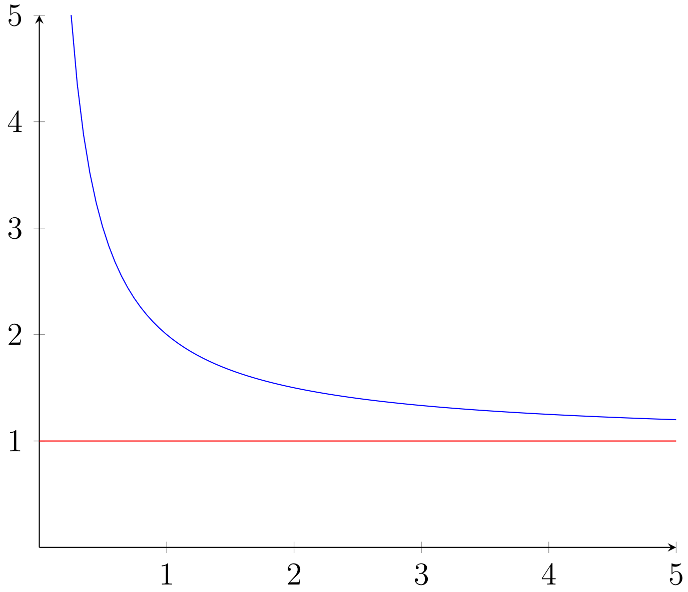


Osservazione 10.1.4
$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$.
Nell'esempio precedente non esiste limite in $x_0 = 0$ *perché* $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 \neq \lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$

Definizione 10.1.3

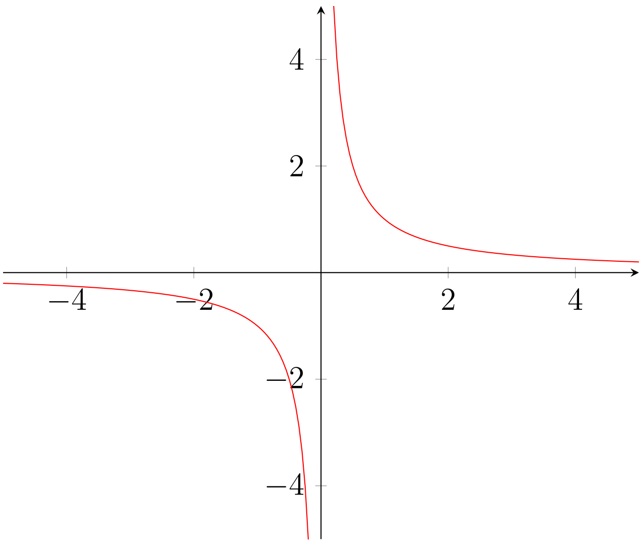
$A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in Acc(A)$ Si dice che $\lim_{x\to x_0} f(x) = l^+$ $(l \in \mathbb{R})$ se esiste un intorno U di x_0 tale che $x \in U \cap A - \{x_0\} \Rightarrow f(x) > l$

Si ha analogamente la definizione per $\lim_{x\to x_0} f(x) = l^-$



Esempio 10.1.3

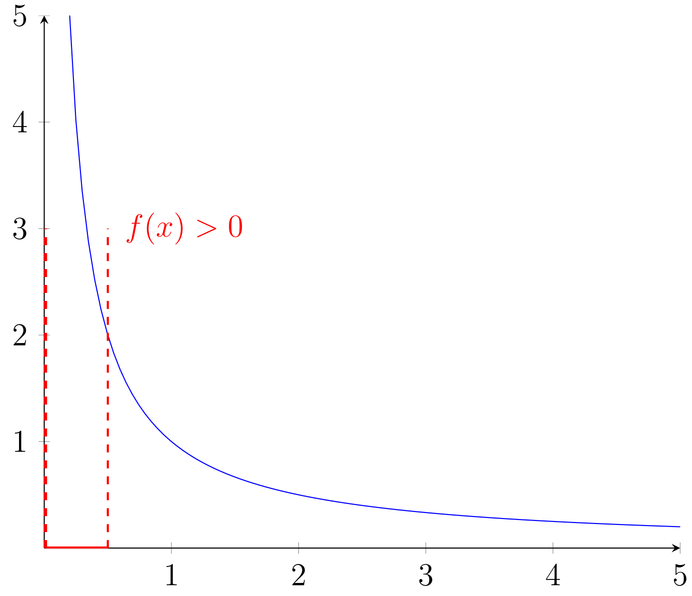
$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0^+$$



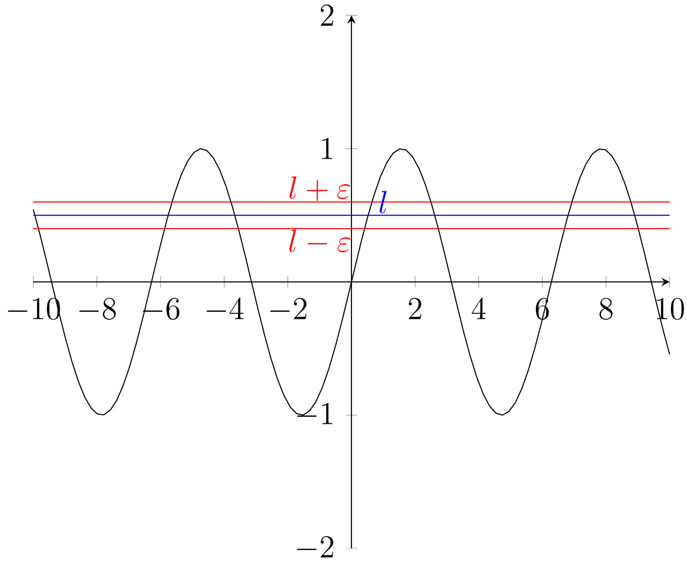
Teorema 10.1.2 (**Permanenza del segno**)
$A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in Acc(A)$. *Se esiste il* $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}} \wedge l \neq 0$ *allora esiste un intorno* U *di* x_0 *tale che se* $x \in A \cap U - \{x_0\}$ *allora* f *ha lo stesso segno di* l.

Esempio 10.1.4

$$f : (0, +\infty) \to \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{1}{x} \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty > 0 \Rightarrow f(x) > 0 \text{ \textit{in un intorno destro di 0}}$$

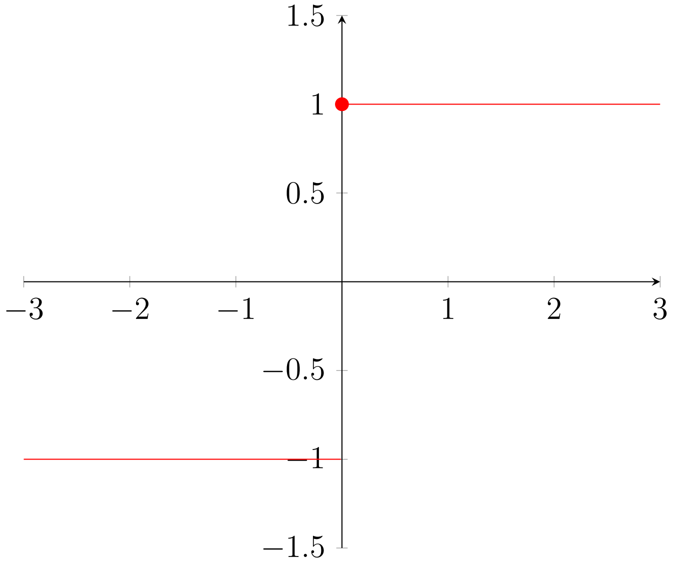


Esempio 10.1.5
Non *esiste* $\lim_{x\to+\infty} \sin(x)$.
Se esistesse il limite $l \in \mathbb{R}$ *allora scelgo* $\varepsilon < \frac{1}{2}$ *nella definizione di limite. Quindi dovrebbe esistere* $a \geq 0$ *t.c.* $x > a \Rightarrow l - \varepsilon < \sin(x) < l + \varepsilon$. *MA questo vorrebbe dire che* $\sin(x)$ *oscilla con un ampiezza minore di* $2\varepsilon < 1$, *mentre* $\sin(x)$ *oscilla con ampiezza 2.*



Esempio 10.1.6

$$f(x) = \begin{cases} 1 \Rightarrow x \geq 0 \\ -1 \Rightarrow x < 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{lcl} \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 & = & f(0) \\ \lim_{x \to 0^-} f(x) = -1 & \neq & f(0) \end{array}$$

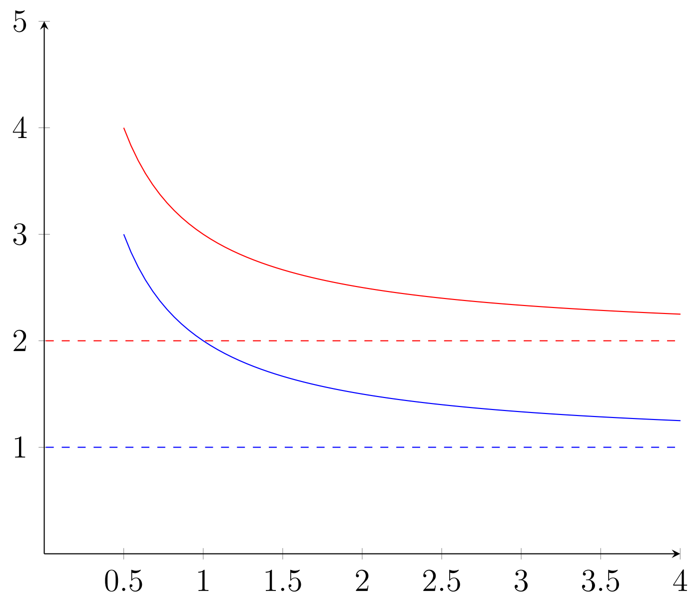


Definizione 10.1.4
$A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in A$, $x_0 \in Acc(A)$

- *Se* $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ *allora si dice che* f *è continua a dx in* x_0.
- *Se* $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$ *allora si dice che* f *è continua a sx in* x_0.

Osservazione 10.1.5
f *è continua in* $x_0 \Leftrightarrow$ *è continua in sia a destra che a sinistra in* x_0.

Teorema 10.1.3 (**Teorema del confronto**)
$A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in Acc(A)$, $f \circ g : A \to \mathbb{R}$. *Se esistono* $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1 \wedge \lim_{x_t o x_0} g(x) = l_2$ *e se esiste* U *intorno di* x_0 *tale che* $x \in U \cap A - \{x_0\} \Rightarrow f(x) \leq g(x)$ *allora* $l_1 \leq l_2$.



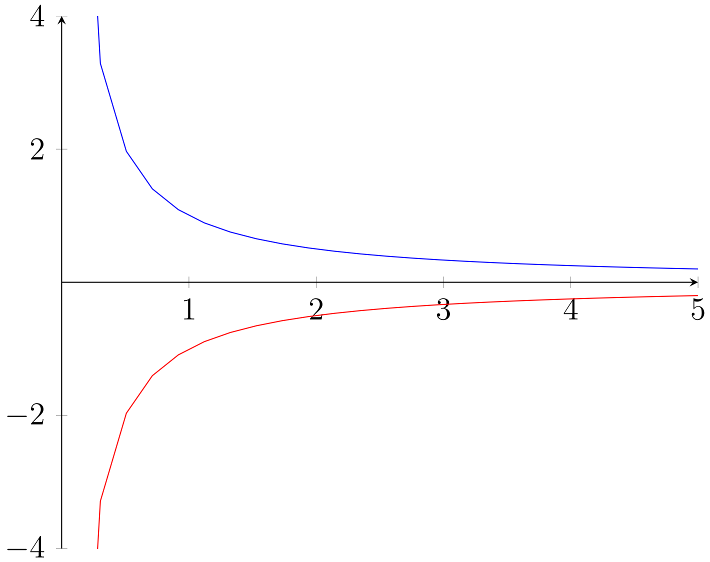
Sinteticamente si potrebbe dire che la disuguaglianza passa al al limite (nelle ipotesi corrette):

$$f(x) \leq g(x) \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} g(x)$$

Osservazione 10.1.6
Se fosse $f(x) < g(x)$ *potrei concludere* $\lim_{x\to x_0} f(x) < \lim_{x\to x_0} g(x)$*?* ***NO!***

Esempio 10.1.7

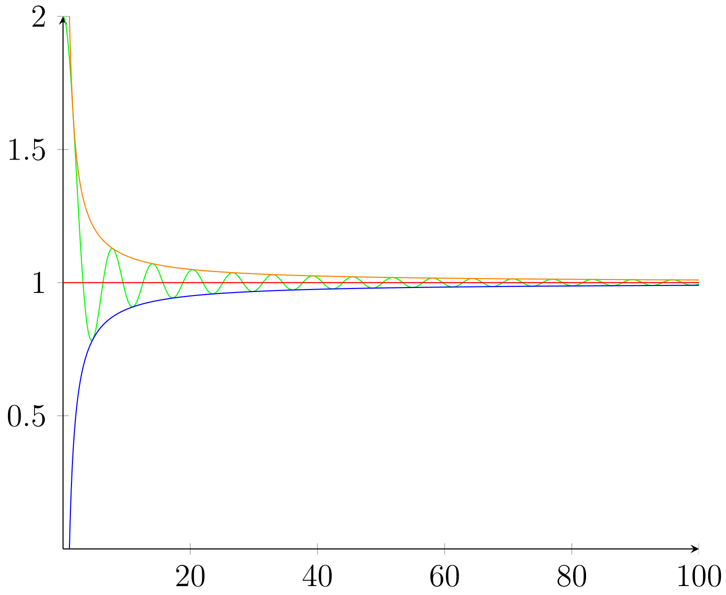
$$f(x) = -\frac{1}{x} \quad g(x) = \frac{1}{x} \quad f(x) < g(x) \text{ ma } \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$$



Le disuguaglianze passano al limite, ma diventano deboli:

$$f(x) < g(x) \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) \leq \lim_{x\to x_0} g(x)$$

Teorema 10.1.4 (**Teorema dei Carabinieri**)
$A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in Acc(A)$, $f, g, h : A \to \mathbb{R}$ *Se esistono* $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \wedge \lim_{x\to x_0} h(x) = l$ *e se esiste un intorno* U *di* x_0 *t.c.* $x \in A \cap U - \{x_0\} \Rightarrow f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ *allora esiste* $\lim_{x\to x_0} g(x) = l$



Dall'esistenza dei limiti di f, h (uguali fra loro) deduco l'esistenza del limite di g.

Teorema 10.1.5 (Somma e Prodotto)
$A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in Acc(A)$, $f \circ g : A \to \mathbb{R}$ Supponiamo che esistono i limiti $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1 \land \lim_{x \to x_0} g(x) = l_2$, con $l_1, l_2 \in \overline{\mathbb{R}}$:

1. *Se ha senso $l_1 + l_2 \Rightarrow \lim_{x \to x_0}(f+g)(x) = l_1 + l_2$*
2. *Se ha senso $l_1 * l_2 \Rightarrow \lim_{x \to x_0}(f*g)(x) = l_1 * l_2$*

Sono esclusi i casi:

1. *$l_1 = +\infty \land l_2 = -\infty$ (e viceversa) per la Somma.*
2. *$(l_1 = +\infty \land l_2 = 0) \lor (l_1 = -\infty \land l_2 = 0)$ (e viceversa) per il Prodotto.*

E si dicono Forme di indeterminazione.

Esempio 10.1.8
Perché non ha senso $(+\infty) + (-\infty)$?

$$f(x) = 2x,\ g(x) = -x \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty,\ \lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} 2x - x = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty$$

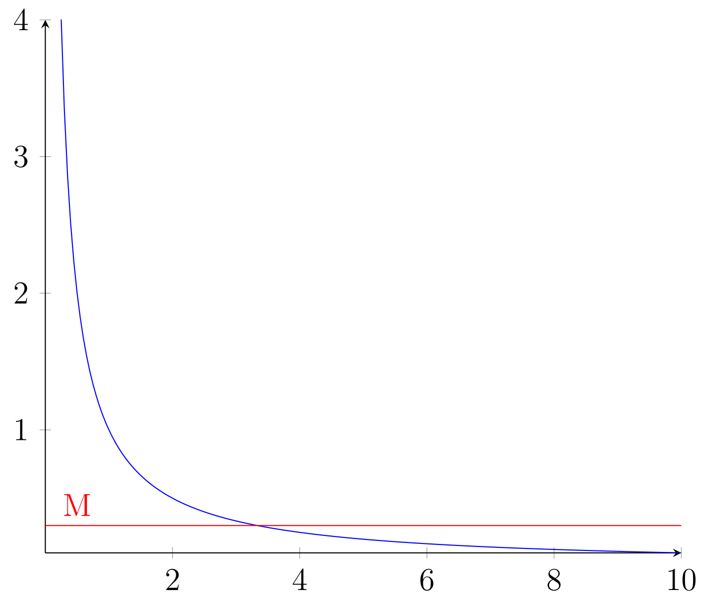
Allora in questo caso avrei che $(+\infty) + (-\infty) = +\infty$
Invece se prendo:

$$f(x) = \frac{x}{2},\ g(x) = -x \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty,\ \lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{2} - x = \lim_{x \to +\infty} -\frac{x}{2} = -\infty$$

E in questo caso avei $(+\infty) + (-\infty) = -\infty$. Quale delle due scelgo?
Per questo motivo dico che $(+\infty) + (-\infty)$ non ha senso. Analogamente per il prodotto $0 * (+\infty)$

Teorema 10.1.6
$A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in Acc(A)$, $f : A \to \mathbb{R}$ Se esiste $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \land l \in \mathbb{R}$ $(l \neq \pm\infty)$. Allora l è limitata in un intorno di x_0 cioè $\exists U$ di $x_0 \land M \in \mathbb{R}$, $M > 0$ t.c $x \in U \cap A \Rightarrow |f(x)| \leq M$

Esempio 10.1.9
$f(x) = \frac{1}{x}$ è limitata in un intorno di $+\infty$ perché $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$



Definizione 10.1.5
Notazioni per limiti:

- *Se* $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ *allora si dice che* f *è infinitesima per* x *che tende ad* x_0.
- *Se* $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ *allora si dice che* f *diverge positivamente per* x *che tende ad* x_0.
- *Se* $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ *allora si dice che* f *diverge negativamente per* x *che tende ad* x_0.
- *Se* $\lim_{x\to x_0} f(x) = l,\ l \in \mathbb{R}\,(finito)$ *allora si dice che* f *converge a* l *per* x *che tende ad* x_0.

Proposizione 10.1.1
Se f *è limitata inferiormente in un intorno di* x_0 *e* $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to x_0}(f+g)(x) = +\infty$.
Se f *è limitata superiormente in un intorno di* x_0 *e* $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x\to x_0}(f+g)(x) = -\infty$.
Se f *è limitata in un intorno di* x_0 *e* $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to x_0}(f*g)(x) = 0$.
Sono tutte conseguenze del Teorema dei Carabinieri.

Proposizione 10.1.2
Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0^+ \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.
Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0^- \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$.
Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0^+$.
Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0^-$.
Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = l,\ l \neq 0, \pm\infty \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{l}$.

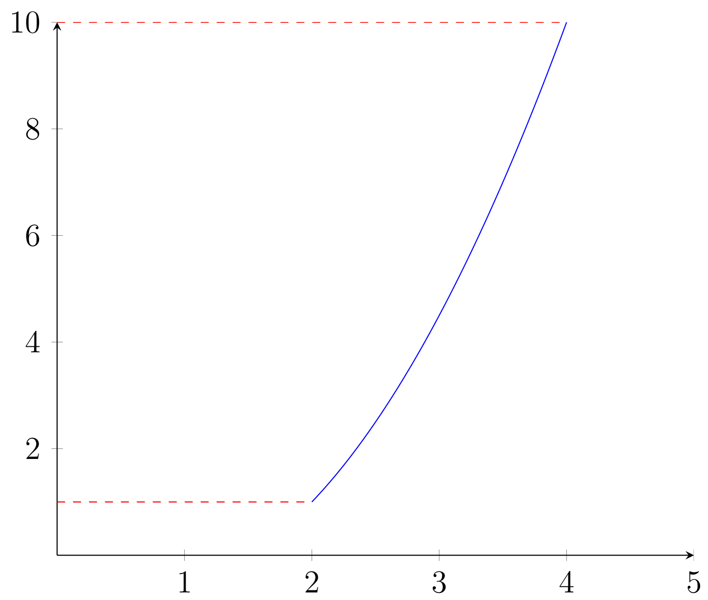
Proposizione 10.1.3
$a, b \in \overline{\mathbb{R}},\ f:(a,b) \to \mathbb{R}$ *con* f *debolmente crescente. Allora esistono:*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = inf_{x\in(a,b)}(f(x)) \wedge \lim_{x\to b^-} f(x) = sup_{x\in(a,b)}(f(x))$$

Analogo risultato se f *è debolmente decrescente.*

Esempio 10.1.10

$$f:(2,3) \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - \frac{3}{2}x$$



10.2 Limiti Fondamentali

- $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty \quad \forall n \in N$
- $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad \forall n \in N$
- $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$
- $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0^+$
- $\lim_{x\to0^+} \log(x) = -\infty$
- $\lim_{x\to+\infty} \log(x) = +\infty$

10.3 Limiti di polinomi

$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$
$\lim_{x\to+\infty} a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \lim_{x\to+\infty} a_n x^n$

Esempio 10.3.1

$$\lim_{x\to-\infty} -2x^5 + 3x^2 = \lim_{x\to-\infty} -2x^5 = \lim_{x\to-\infty} -2(-\infty)^5 = -2(-\infty) = +\infty$$

10.4 Limiti di funzioni razionali

$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$
$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{p(x))}{q(x)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$

Esempio 10.4.1

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{7x^4 + 5x^2}{-2x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{7x^4}{-2x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{7x}{-2} = -\infty$$

10.5 Limiti Notevoli

Limiti notevoli per $x \to 0$:

- $\lim_{x\to0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$
- $\lim_{x\to0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$
- $\lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{x} = 1$
- $\lim_{x\to0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$

10.6 Limiti della composizione di funzioni

Teorema 10.6.1
$A, B, C \in \mathbb{R}$, $f : A \to B$ $g : B \to C, x_0 \in Acc(A)$, $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0 \wedge$ $y_0 \in Acc(B) \wedge \exists \lim_{y\to y_0} g(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$ e se vale almeno una delle ipotesi:

- *$y_0 \in B \wedge g$ è continua in y_0*
- *$\exists U$ intorno di x_0 tale che se $x \in U \cap A - \{x_0\} \Rightarrow f(x) \neq y_0$*

Allora $\lim_{x\to x_0}(g \circ f)(x) = l$