Analisi I

Scannagatti Gabriele

February 10, 2022

1 Insiemi Numerici

- $\mathbb{N}$ Insieme dei numeri naturali
- Z Insieme dei numeri interi positivi e negativi
- Q Insieme dei numeri razionali ”frazioni”
- $\mathbb{R}$ Insieme dei numeri reali

2 Intervalli

Definizione 2.0.1
$I \subset \mathbb{R}$ si dice intervallo se $\forall x, y \in I. (x < y \Rightarrow \exists z \in \mathbb{R}.(x < z < y \Rightarrow z \in I))$
In un intervallo ”non ci sono buchi”.

Esempio 2.0.1
$A = \{x \in \mathbb{R} : 2 < x < 3\}$ è un intervallo
$B = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x < 2 \vee 5 < x \leq 6\}$ non è un intervallo

2.1 Notazione

dati $a, b \in \mathbb{R}$. $a < b$ allora:

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : \quad a \leq x \leq b\}$ intervallo chiuso.
- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : \quad a < x < b\}$ intervallo aperto.
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : \quad a < x \leq b\}$ intervallo aperto a sx e chiuso a dx (si può avere anche il viceversa).
- $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : \quad x \geq a\}$ semiretta chiusa.
- $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : \quad x > a\}$ semiretta aperta.
- $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

3 Funzioni

Definizione 3.0.1
Una funzione f è una terna di oggetti: A, B, f di cui A, B insiemi per cui:
A si dice dominio, B si dice codominio ed f è una relazione che lega gli elementi di A a quelli di B.

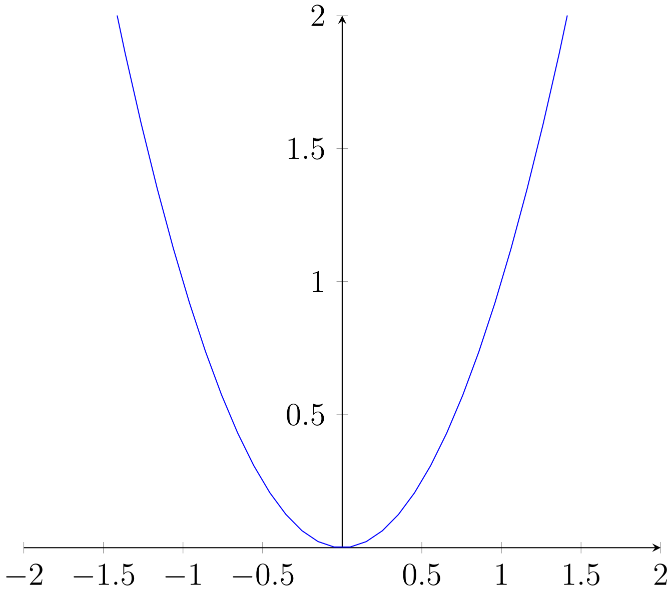
$$f : A \to B$$

In particolare: f è una relazione totale ed univalente ***(vedi definizioni di fondamenti dell'informatica)***

3.1 Grafico di f

il grafico di una funzione f è definito dall'insieme:

$$f : A \to B \quad Graph(f) = \{(a, b) \in A \times B : \quad b = f(a)\}$$



Esempio 3.1.1

3.2 Immagine di f

$f : A \to B$ funzione, $D \subset A \quad f(D) = \{f(x) : \ x \in D\}$ si dice immagine di D attraverso f e $f(D) \subset B$.
$Imm(f) = f(A)$ immagine di f ovvero l'immagine di tutto il dominio attraverso f.

Esempio 3.2.1

$$A,\, B = \mathbb{R} \quad f(x) = x^2 \quad D = [1, 3] \quad f(D) = [1, 9]$$
$$Imm(f) = f(A) = f(\mathbb{R}) = [0, +\infty)$$

3.3 Funzioni iniettive, surgettive e bigettive

Definizione 3.3.1
Una funzione $f : A \to B$ si dice surgettiva se: $\forall y \in B.\ \exists x \in A.\ y = f(x)$,

quindi ad esempio $f(x) = x^2 \quad g(x) = x^3$ entrambe definite in $\mathbb{R}^2$ abbiamo che: f non è surgettiva (per $y = -4$ non esiste alcun x tale che $f(x) = -4$), mentre g è surgettiva.

Osservazione 3.3.1
$f : A \to B$ è surgettiva $\Leftrightarrow Imm(f) = B$

Definizione 3.3.2
Una funzione $f : A \to B$ si dice iniettiva se: $\forall x_1, x_2 \in A.\ f(x_1) \neq f(x_2)$,

quindi ad esempio $f(x) = x^2 \quad g(x) = x^3$ entrambe definite in $\mathbb{R}^2$ abbiamo che: f non è iniettiva in quanto $x_1 = 2$, $x_2 = -2$ $f(x_1) = f(x_2) = 4$, mentre g è iniettiva.

Definizione 3.3.3
Una funzione $f : A \to B$ si dice bigettiva (biunivoca, biiezione, invertibile) se:

f è sia **iniettiva**, sia **surgettiva**. Se una funzione f è bigettiva posso costruire la funzione inversa indicata come $f^{-1} : B \to A$. Dato $b \in B$ esiste almeno un elemento $a \in A$ tale che $f(a) = b$ (f è surgettiva), inoltre l'elemento a è unico perché f è iniettiva.
Quindi $f^{-1}(b) = a \Leftrightarrow f(a) = b$.

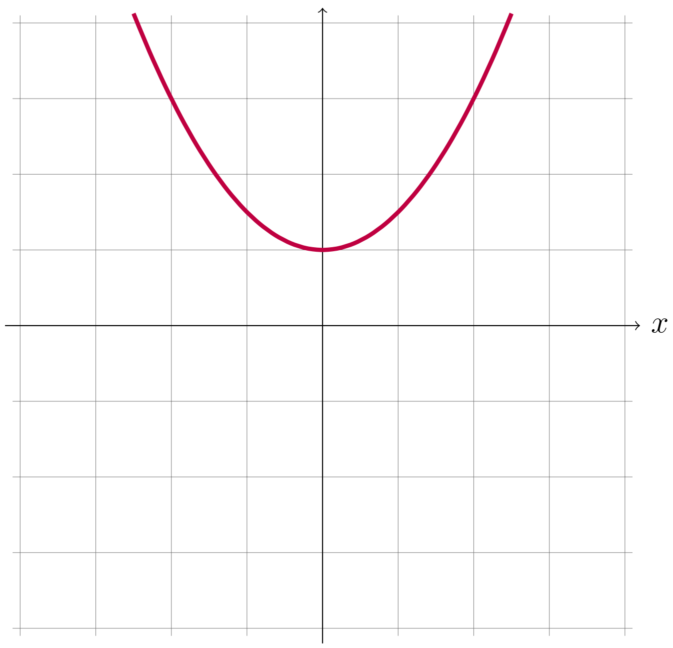
Esempio 3.3.1
$f : [0, +\infty] \to [0, +\infty] \quad f(x) = x^2$ è bigettiva e la sua inversa è la radice quadrata:
$f^{-1} : [0, +\infty] \to [0, +\infty] \quad f^{-1}(y) = \sqrt{y}$.
La radice quadrata è la funzione inversa di $f(x) = x^2$ quando dominio e codominio sono $[0, +\infty]$,
$\sqrt{y}$ è sempre un numero ≥ 0.
Osservazione: $\sqrt{x^2} = |x| \quad x = -2 \ \to \sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2 \quad x \neq 2\ |x| = 2$

3.4 Traslazioni di f

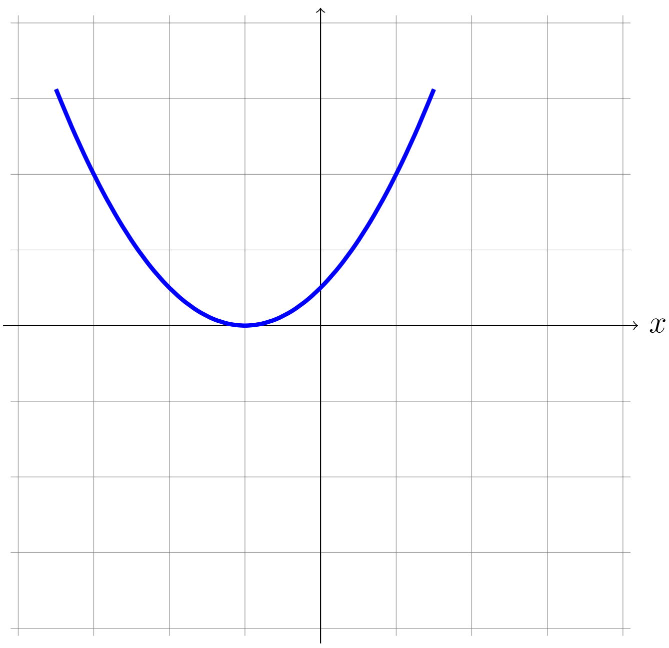
Se $g(x) = f(x) + \alpha \quad \alpha \in \mathbb{R}$ abbiamo una traslazione in verticale $\begin{cases} \text{Verso l'alto} \Rightarrow \alpha > 0 \\ \text{Verso il basso} \Rightarrow \alpha < 0 \end{cases}$

Se $g(x) = f(x + \alpha) \quad \alpha \in \mathbb{R}$ abbiamo una traslazione orizzontale $\begin{cases} \text{Verso Sx} \Rightarrow \alpha > 0 \\ \text{Verso Dx} \Rightarrow \alpha < 0 \end{cases}$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad g(x) = x^2 + 1$



$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad g(x) = (x + 1)^2$



3.5 Funzioni monotone

3.5.1 Definizione

Data una funzione $f : A \to B \quad x_1, x_2 \in A \wedge x_1 < x_2$ abbiamo:

1. Se $f(x_1) < f(x_2)$, $\forall x_1, x_2$ f é strettamente crescente.
2. Se $f(x_1) \leq f(x_2)$, $\forall x_1, x_2$ f é debolmente crescente.
3. Se $f(x_1) > f(x_2)$, $\forall x_1, x_2$ f é strettamente decrescente.
4. Se $f(x_1) \geq f(x_2)$, $\forall x_1, x_2$ f é debolmente decrescente.
5. Se si verificano 1 o 3 f é strettamente monotona.
6. Se si verificano 2 o 4 f é debolmente monotona.

Se f è crescente mantiene l'ordinamento, se f è decrescente inverte l'ordinamento.

3.5.2 Rapporto incrementale e monotonia

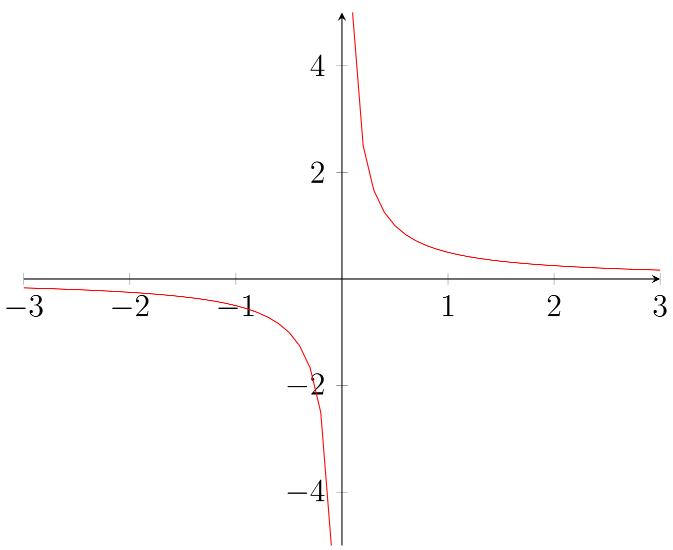
Definizione 3.5.1
f è strettamente crescente $\Leftrightarrow$ il suo rapporto incrementale $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$ *è* $> 0 \quad \forall x_1, x_2 . x_1 \neq x_2$.

Definizione 3.5.2
f è strettamente decrescente $\Leftrightarrow$ il suo rapporto incrementale $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$ *è* $< 0 \quad \forall x_1, x_2 . x_1 \neq x_2$.

Analogamente se:

- $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} \leq 0 \Leftrightarrow f$ è debolmente decrescente.
- $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} \geq 0 \Leftrightarrow f$ è debolmente crescente.

Esempio 3.5.1
$f(x) = \frac{1}{x}$, $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - \{0\}$ *la funzione non è globalmente decrescente, ma lo è sui due Intervalli* $\begin{cases} (-\infty, 0) \\ (0, +\infty) \end{cases}$



3.6 Composizione di funzioni monotone

presi gli insiemi $A, B, C \subset \mathbb{R}$ e le funzioni $f : A \to B,\ g : B \to C$ risulta che:

- Se f è crescente e g è crescente $\Rightarrow\ g \circ f$ è crescente.
- Se f è crescente e g è decrescente $\Rightarrow\ g \circ f$ è decrescente.
- Se f è decrescente e g è crescente $\Rightarrow\ g \circ f$ è decrescente.
- Se f è decrescente e g è decrescente $\Rightarrow\ g \circ f$ è crescente.

Osservazione 3.6.1
*Se f è strettamente monotona $\Rightarrow\ f$ è iniettiva. Il viceversa **non** vale.*

3.7 Altre definizioni per funzioni ($f : A \to B$)

Definizione 3.7.1
L'insieme di definizione (o dominio naturale) di una funzione è il più grande sottoinsieme di $\mathbb{R}$ dove ha senso scrivere la funzione.

Definizione 3.7.2
$f(x)$ è pari $\Leftrightarrow \forall x \in A.\ f(x) = f(-x)$

Definizione 3.7.3
$f(x)$ è dispari $\Leftrightarrow \forall x \in A.\ f(x) = -f(x)$

Osservazione 3.7.1
Per essere pari o dispari, una funzione ha bisogno di un dominio tale che $x \in A \wedge -x \in A$, ossia simmetrico rispetto all'origine.

- *f è pari $\Rightarrow Graph(f)$ è simmetrico rispetto all'asse y.*
- *f è dispari $\Rightarrow Graph(f)$ è simmetrico rispetto all'asse x.*
- *f è periodica di periodo $\rho \Leftrightarrow \forall x \in A. (\forall c \in Z. (f(x) = f(x + c\rho)))$*

Osservazione 3.7.2
Se f è periodica o f è pari allora f non è monotona e f non è iniettiva.

- $x^\alpha = e^{\alpha log(x)} \quad \forall x > 0$

4 Massimi e Minimi

Definizione 4.0.1
$A \subset \mathbb{R},\ A \neq \emptyset,\ m \in \mathbb{R}$ si dice massimo di A se $m \geq a,\ \forall a \in A \wedge m \in A$.

Definizione 4.0.2
$A \subset \mathbb{R},\ A \neq \emptyset,\ m \in \mathbb{R}$ si dice minimo di A se $m \leq a,\ \forall a \in A \wedge m \in A$.

Osservazione 4.0.1
Se $A = [x, y)$ è un intervallo aperto a dx allora non ha massimo.

Proof. Supponendo per assurdo che $m \in \mathbb{R}$ sia il $max(A)$, allora $m \in A \wedge m < y$ perché y è escluso.
Ponendo $\varepsilon = y - m > 0$, definiamo $m' = m + \frac{\varepsilon}{2}$.
Risulta quindi che $m' \in A$, ma $m' > m$ contraddicendo la definizione. □

Osservazione 4.0.2
Analogamente se $A = (x, y]$ allora non ha minimo

5 Maggioranti e Minoranti

Definizione 5.0.1
$A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, $k \in \mathbb{R}$ si dice maggiorante di A se $k \geq a$ $\forall a \in A$. L'insieme dei maggioranti di A si indica con M_A.

Osservazione 5.0.1
Se esiste un maggiorante di A, allora ne esistono infiniti.
non tutti gli insiemi hanno maggioranti, ad esempio $B = [0, +\infty)$ non ha maggiorante

Definizione 5.0.2
Se l'insieme $M_A \neq \emptyset \Rightarrow A$ si dice superiormente limitato e $Sup(A) = min(M_A)$.

Osservazione 5.0.2
Le defenizioni per i Minoranti sono analoghe alle precedenti.

Definizione 5.0.3
Se A è sia superiormente limitato, sia inferiormente limitato, allora A si dice limitato.

Teorema 5.0.1
$A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, A è superiormente limitato $\Rightarrow \exists\, min(M_A)$ tale minimo si dice estremo superiore di A $Sup(A)$.

6 Retta reale estesa

6.0.1 Definizione

La retta reale estesa $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ in modo che valga:

$$-\infty \leq x \leq +\infty \quad \forall x \in \overline{\mathbb{R}}$$

Osservazione 6.0.1
Se $x \in \mathbb{R}$ allora $-\infty < x < +\infty$

6.0.2 Operazioni in $\overline{\mathbb{R}}$

1. Se $x \neq +\infty \Rightarrow x + (-\infty) = -\infty$
2. Se $x \neq -\infty \Rightarrow x + (+\infty) = +\infty$
3. Se $x > 0 \Rightarrow x * (+\infty) = +\infty \wedge x * (-\infty) = -\infty$
4. Se $x < 0 \Rightarrow x * (+\infty) = -\infty \wedge x * (-\infty) = +\infty$

6.0.3 Operazioni Vietate

1. $(+\infty) + (-\infty)$ e viceversa
2. $0 * (+\infty)$
3. $0 * (-\infty)$

6.0.4 Operazioni valide

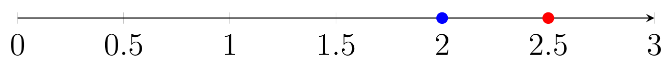
1. $(+\infty) * (+\infty) = +\infty$
2. $(+\infty) * (-\infty) = -\infty$ e viceversa
3. $(-\infty) * (-\infty) = +\infty$

Osservazione 6.0.2
Dato $A \subset Z$ se A è superiormente limitato allora A ha massimo e se A è inferiormente limitato allora A ha minimo.

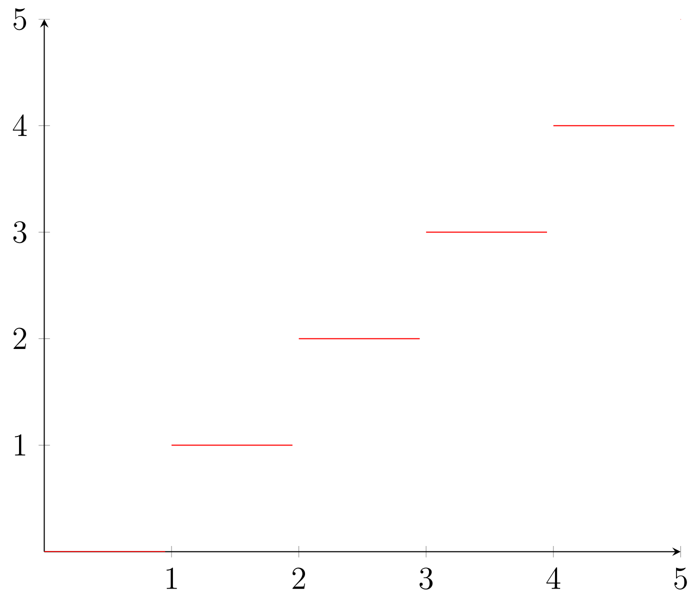
Definizione 6.0.1
Dato $x \in \mathbb{R}$ si dice parte intera di x e si indica con $[x]$ il numero $[x] = max(m \in Z : \ m \leq x)$

Esempio 6.0.1
$\left[\frac{25}{10}\right] = 2$

Graficamente:



Esempio 6.0.2
Grafico di $f(x) = [x]$



7 Massimi e Minimi di f

Definizione 7.0.1
Dati $A \subset \mathbb{R}, \quad f : A \to \mathbb{R}$ f si dice limitata superiormente se $f(A)$ è limitato superiormente.
Analogamente f è inferiormente limitata se $f(A)$ è limitato inferiormente.

Definizione 7.0.2
f ha massimo se $f(A)$ ha massimo, si dice che M è il massimo di f e si indica con $M = max(f)$.
Analogamente per il minimo indicato con $min(f)$.

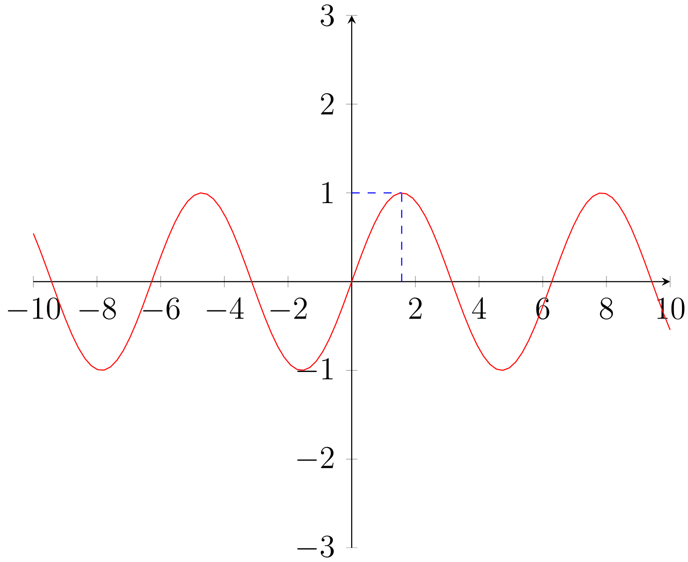
Definizione 7.0.3
L'estremo superiore di una funzione è uguale a $sup(f) = sup(f(A))$, se f non è limitata superiormente si indica $sup(f) = +\infty$, nel caso non sia inferiormente limitata si indica con $inf(f) = -\infty$.

Definizione 7.0.4
Se f ha massimo allora $\forall x_0 \in A.\ f(x_0) = max(f)) \Rightarrow x_0$ si dice punto di massimo, stessa cosa per i punti di minimo.

Osservazione 7.0.1
Il massimo di f è unico, i punti di massimo potrebbero essere molti

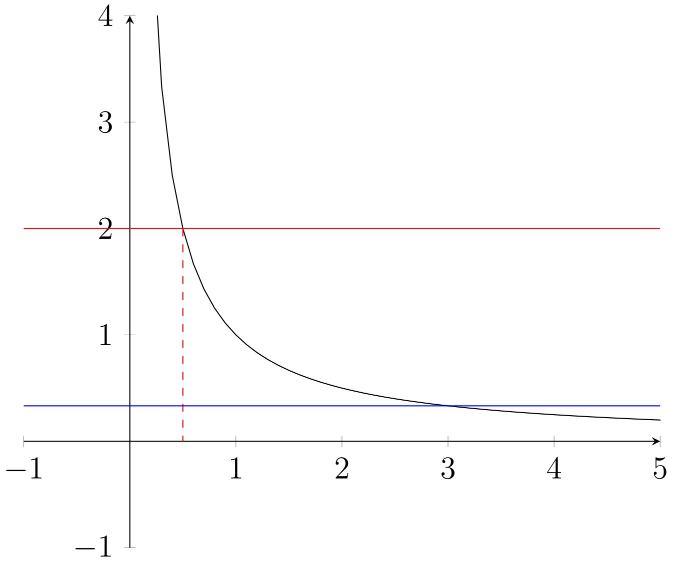
Esempio 7.0.1

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \sin(x)$ $\quad$ *$max(f) = 1$ $x_0 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in Z$ sono punti di massimo.*



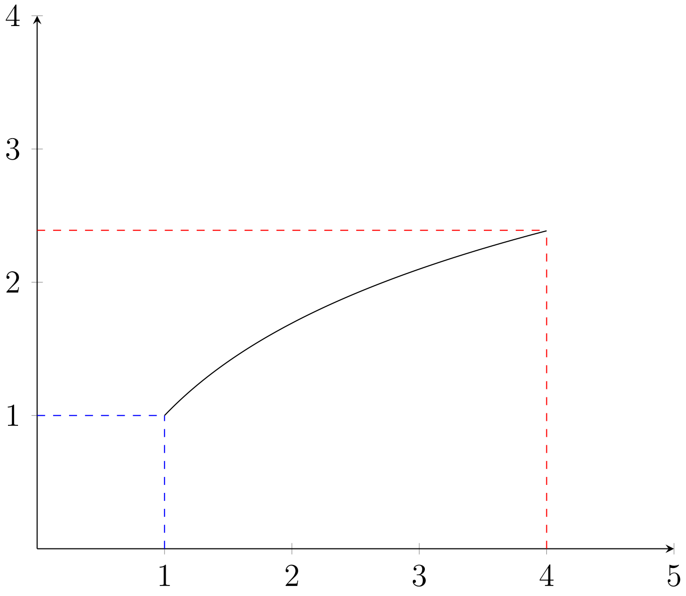
Esempio 7.0.2

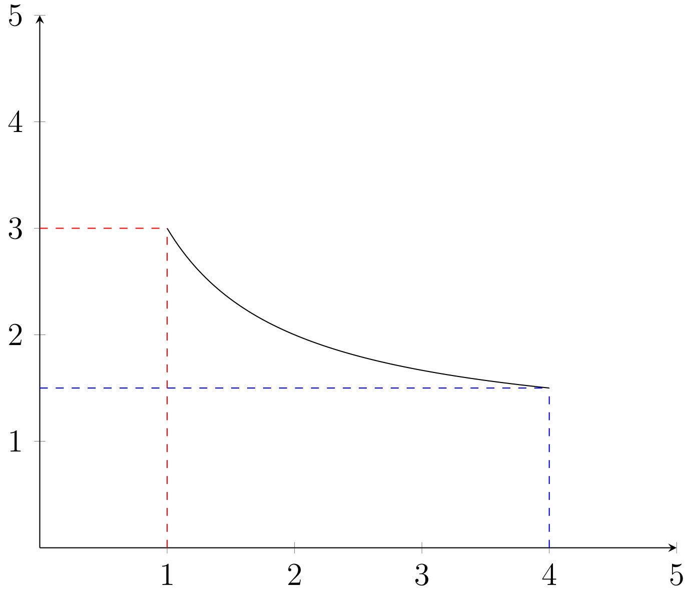
$f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad$ *f non ha nè massimo nè minimo.*



Osservazione 7.0.2
Presi $A \subset \mathbb{R}$, $\mathrm{f : A \to \mathbb{R}}$ *si ha che:*

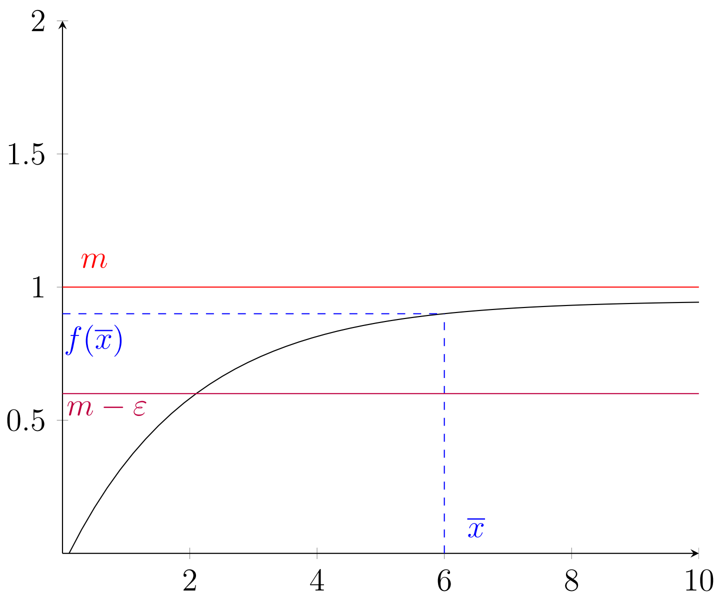
- *Se A ha massimo e f è debolmente crescente, allora f ha max e* $max(f) = f(max(A))$.
- *Se A ha minimo e f è debolmente crescente, allora f ha min e* $min(f) = f(min(A))$.
- *Se A ha massimo e f è debolmente decrescente, allora f ha min e* $min(f) = f(max(A))$.
- *Se A ha minimo e f è debolmente decrescente, allora f ha max e* $max(f) = f(min(A))$.





Osservazione 7.0.3
$f : A \to \mathbb{R}$ *allora* $m = sup(f) \Leftrightarrow$ *valgono le seguenti condizioni:*

1. $f(x) \leq m \ \forall x \in A$
2. $\forall \varepsilon > 0. \ \exists \overline{x}. \ f(\overline{x}) > m - \varepsilon$

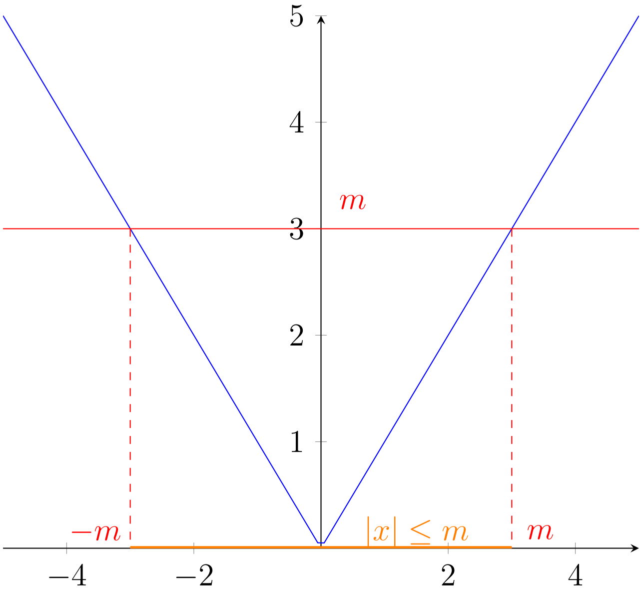


8 Valore assoluto

Definizione 8.0.1
Dato $x \in \mathbb{R}$ si dice valore assoluto di x e si indica con $|x|$ il numero $|x| = max(-x, x)$

8.0.1 Propietà del valore assoluto:

1. $x \leq |x| \; \forall x \in \mathbb{R}$
2. $|x| = x \Rightarrow x \geq 0, \quad |x| = -x \Rightarrow x \leq 0$
3. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
4. $|-x| = |x|$
5. $-|x| \leq x \leq |x|$
6. $|x| \leq m \Leftrightarrow -m \leq x \leq m \quad (m \geq 0)$



8.0.2 Disuguaglianza triangolare

Dati $a, b \in \mathbb{R}$ risulta che:

1. $|a + b| \leq |a| + |b|$
2. $||a| - |b|| \leq |a - b|$

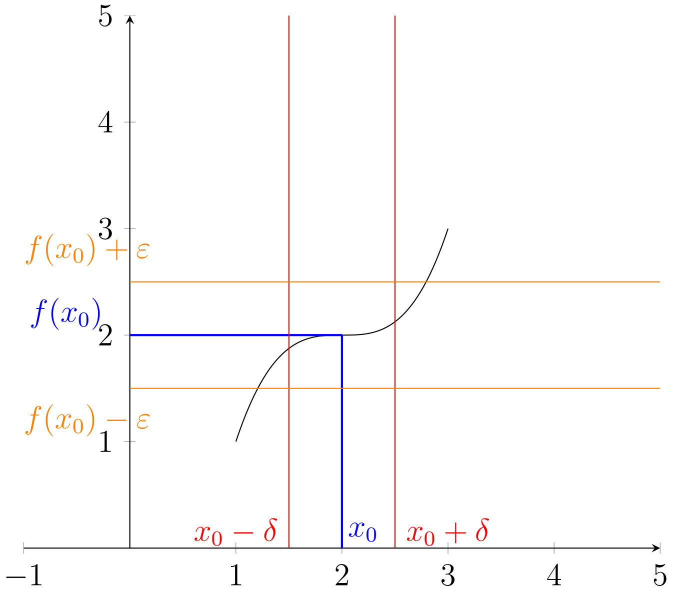
9 Continuità

Definizione 9.0.1
$A \subset \mathbb{R},\ f : A \to \mathbb{R},\ x_0 \in A$ la funzione f si dice continua in x_0 se:

$$\forall \varepsilon > 0.\ \exists \delta > 0.\ x \in A,\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$$|x - x_0| < \delta \Leftrightarrow x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$$

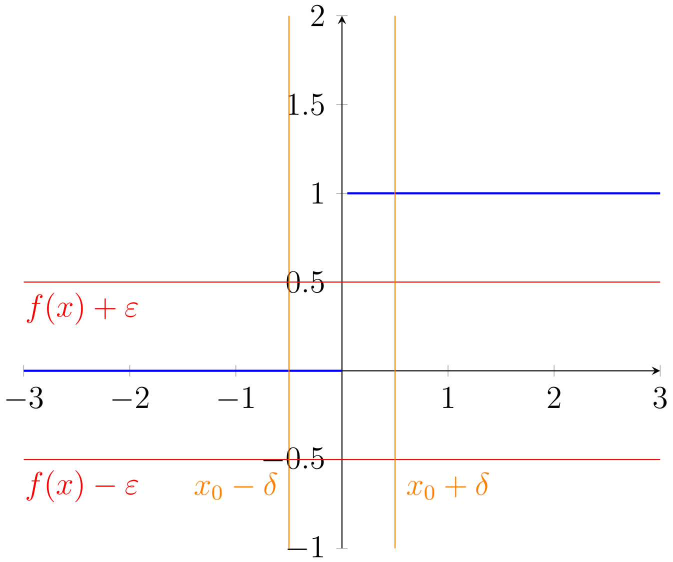
$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \Leftrightarrow f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0)\varepsilon$$



Esempio 9.0.1
Funzione non continua in un punto:

$$f(x) = \begin{cases} 0 \Rightarrow x \leq 0 \\ 1 \Rightarrow x > 0 \end{cases}$$

Non è continua in $x_0 = 0$, scelgo $\varepsilon = \frac{1}{2}$ $\quad f(0) - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ $f(0) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.
Qualunque sia $\delta > 0$ se $x \in (0, \delta) \Rightarrow f(x) = 1$ quindi la disuguaglianza $f(0) - \varepsilon < f(x) < f(0) + \varepsilon$ è falsa.



Definizione 9.0.2
$A \subset \mathbb{R},\ f: A \to \mathbb{R},\ B \subset A$ si dice che f è continua in B se f è continua in ogni punto $x_0 \in B$.
Si dice semplicemente che f è continua (senza specificare il sottoinsieme B) se $B = A$.

Esempio 9.0.2

$$f(x) = \begin{cases} 0 \Rightarrow x \leq 0 \\ 1 \Rightarrow x > 0 \end{cases} \quad \textit{è continua in } (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

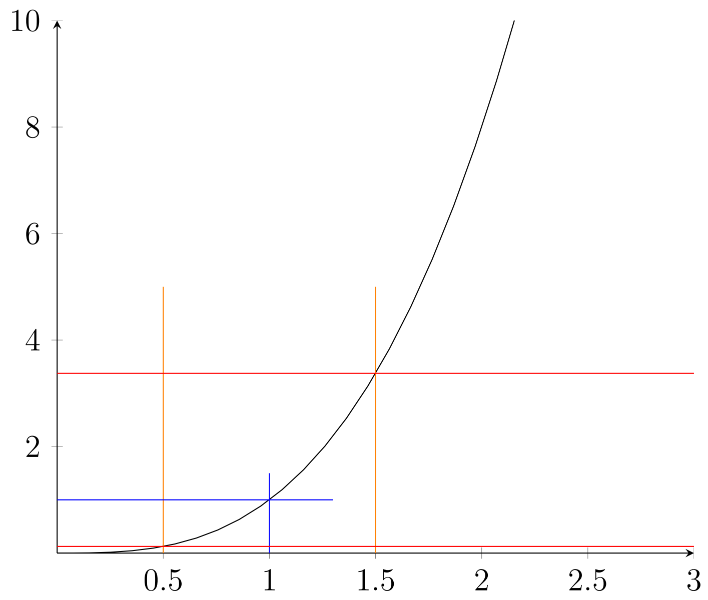
9.1 Permanenza del segno

Teorema 9.1.1
$A \subset \mathbb{R},\ f: A \to \mathbb{R},\ x_0 \in A$ Se f è continua in $x_0 \wedge f(x_0) > 0 \Rightarrow \exists\, \delta > 0 . x \in A \wedge |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > 0$

Proof. Sappiamo che $f(x_0) > 0$. Scelgo $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}$ e lo uso nella definizione di continuità.
Allora $\exists\, \delta > 0 . x \in A \wedge |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Cioè:

$$f(x) > f(x_0) - \varepsilon = f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} = \frac{f(x_0)}{2} > 0$$

□



Corollario 9.1.1.1
Se f è continua in $x_0,\ f: A \to \mathbb{R}\ x_0 \in A \wedge f(x_0) > M \in \mathbb{R}$ allora $\exists\, \delta > 0 . x \in A, |x - x_0| < delta \Rightarrow f(x) > M$.
(vale anche con $f(x_0) < M \Rightarrow f(x) < M$)

Proof. Applico il Teorema precedente alla funzione:

$$g(x) = f(x) - M$$

□

Teorema 9.1.2
Se f e g sono continue in x_0 allora lo sono anche le funzioni:

- $f+g$
- $f \circ g$
- $|f|$
- $f(x_0) \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{f}$

Corollario 9.1.2.1
$\frac{f}{g}$ *è continua (se $g(x_0) \neq 0$)* $\frac{f}{g} = f * \frac{1}{g}$

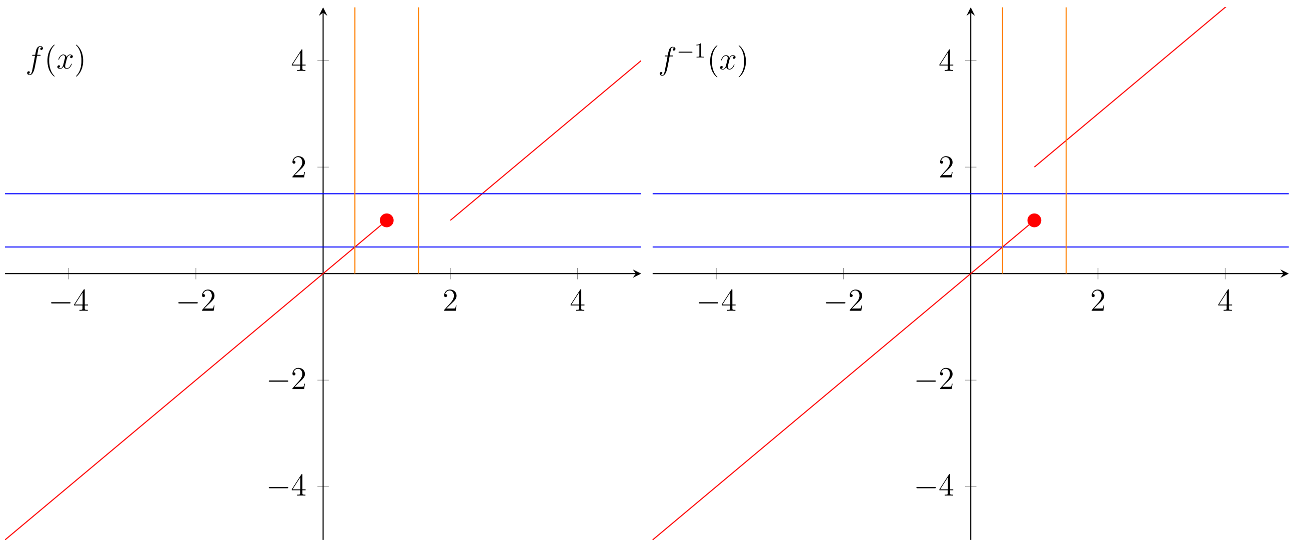
Proposizione 9.1.1
$I \subset \mathbb{R}$ intervallo, $f : I \to B \subset \mathbb{R}$.
Se f è continua in I ed è biunivoca allora f^{-1} è continua in B.

Osservazione 9.1.1
L'ipotesi che il dominio sia un intervallo ***non*** *può essere omessa.*

Esempio 9.1.1

$$f : (-\infty, 1] \cup (2, +infty) \to \mathbb{R} \; f(x) = \begin{cases} x \Rightarrow x \leq 1 \\ x - 1 \Rightarrow x > 2 \end{cases}$$

Se f non è definita in un intervallo potrebbe succedere che f^{-1} non è continua anche se f lo è.



9.2 Continuità delle funzioni elementari

Proposizione 9.2.1
Le seguenti funzioni sono continue:

- $f(x) = k \in \mathbb{R}$ *è continua (funzione costante).*
- $f(x) = x$ *è continua, da questo segue che tutti i polinomi sono continui.*
- *Le funzioni razionali (quoziente di polinomi) sono continue nel loro insieme di definizione* $(f(x) = \frac{p(x)}{y(x)})$.
- $e^x, \ \log(x)$.
- $\sin(x), \ \cos(x), \ \tan(x), \ \arcsin(x), \ \arccos(x), \ \arctan(x)$.

Teorema 9.2.1
$f : A \to B, \ g : B \to \mathbb{R}, \quad x_0 \in A, \ y_0 = f(x_0) \in B$
Se f *è continua in* x_0 *e* g *è continua in* y_0 *allora* $g \circ f$ *è continua in* x_0.

Esempio 9.2.1
$h(x) = e^{\cos(x)}$ *è una funzione continua perché è la composizione di* $f(x) = \cos(x) \wedge g(y) = e^y$.

Osservazione 9.2.1
$f(x) : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continua in* $[a, b]$. *Allora:*

$$Sup(f(x))_{x \in (a,b)} = Sup(f(x))_{x \in [a,b]}$$

$$Inf(f(x))_{x \in (a,b)} = Inf(f(x))_{x \in [a,b]}$$

Esempio 9.2.2
$f(x) = x^2 \quad f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *allora* $Sup(f(x))_{x \in [0,1]} = f(1) = 1$ *(è anche max)*