Algebra Lineare

Scannagatti Gabriele

February 24, 2022

1 Definizioni Formali

- **Equazione lineare:** un equazione lineare ϵ è una coppia $((\alpha \times x)^n, \beta)$ dove la coppia $(\alpha_n \times x_n)^n$ è una tupla di lunghezza n formata da $\alpha \in \mathbb{R}$ coefficenti e da $x \in \mathbb{R}$ incognite, mentre $\beta \in \mathbb{R}$ è il termine noto.
- L'insieme di tutte le equazioni lineari ϵ di n incognite è detto E^n.
- Un sistema di equazioni lineare $(S) \subset E^n$ è un sottoinsieme di E^n. Graficamente è rappresentato come:

$$(S)\begin{cases} \alpha_{1,1}x_{1,1} + \alpha_{1,2}x_{1,2} + ... + \alpha_{1,n}x_{1,n} & = & \beta_1 \\ \alpha_{2,1}x_{2,1} + \alpha_{2,2}x_{2,2} + ... + \alpha_{2,n}x_{2,n} & = & \beta_2 \\ ... \\ ... \\ ... \\ \alpha_{k,1}x_{k,1} + \alpha_{k,2}x_{k,2} + ... + \alpha_{k,n}x_{k,n} & = & \beta_k \end{cases}$$

  dove $|(S)| = k$ ed è il numero di equazioni che compongono il sistema.
- Un equazione $\epsilon \in E^n$ si dice omogenea quando:

$$\beta = 0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$$

  .
- Se $\forall \epsilon \in (S).\beta_\epsilon = 0 \Rightarrow (S)$ è un sistema omogeneo.
- L'insieme delle soluzioni W di un sistema (S) è definito come:

$$W = \{\langle x_1, x_2, ...x_n\rangle \in \mathbb{R}^n | \forall \epsilon \in (S).Soddisfatta(\epsilon)\}$$

  In un sistema omogeneo $|W| = 1$ e $W = \{\langle 0_1, 0_2, ..., 0_n\rangle\}$.

2 Algoritmo di Gauss

Operazioni:

1. $Swap : E^n \times E^n \to E^n \times E^n$ $Swap(\epsilon, \epsilon') = (\epsilon', \epsilon)$.
2. $Multiply : \mathbb{R} - \{0\} \times E^n \to E^n$ $Multiply(\varsigma, \epsilon) = \varsigma\epsilon$.
3. $Sum : E^n \times E^n \to E^n$ $Sum(\epsilon, \epsilon') = \epsilon + \epsilon'$ Nota $\epsilon \neq \epsilon'$.

Procedimento:
l'obiettivo è quello di ridurre nella forma di "Echelon Ridotta" utilizzando le operazioni definite in precedenza.

Esempio 2.0.1

$$(S)\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 & = & 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 & = & 0 \\ 3x_1 - x_2 - 4x_3 & = & 0 \end{cases}$$

$$(S)\left[\frac{Sum(\epsilon_2, -2\epsilon_1)}{Sum(\epsilon_3, -3\epsilon_1)}\right]\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 & = & 0 \\ 0 + x_2 + 8x_3 & = & 0 \\ 0 - 7x_2 - 5x_3 & = & 0 \end{cases}$$

$$(S)\left[\frac{Sum(\epsilon_1, -2\epsilon_2)}{Sum(\epsilon_3, 7\epsilon_2)}\right]\begin{cases} x_1 + 0 - 19x_3 & = & 0 \\ 0 + x_2 + 8x_3 & = & 0 \\ 0 + 0 - 61x_3 & = & 0 \end{cases}$$

$$(S)\left[Multiply(-\frac{1}{61}, \epsilon_3)\right]\begin{cases} x_1 + 0 - 19x_3 & = & 0 \\ 0 + x_2 + 8x_3 & = & 0 \\ 0 + 0 + x_3 & = & 0 \end{cases}$$

$$(S)\left[\frac{Sum(\epsilon_1, -19\epsilon_3)}{Sum(\epsilon_2, -8\epsilon_3)}\right]\begin{cases} x_1 + 0 + 0 & = & 0 \\ 0 + x_2 + 0 & = & 0 \\ 0 + 0 + x_3 & = & 0 \end{cases}$$

$$W = \{\langle 0, 0, 0\rangle\}$$

Esempio 2.0.2

$$(S)'\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 0 - 3x_4 & = & 1 \\ 0 + 0 + x_3 + 11x_4 & = & 3 \\ 0 + 0 + 0 + 0 & = & 0 \end{cases}$$

$$W = \{\langle -2x_2 + 3x_4 + 1, x_2, -11x_4 + 3, x_4\rangle\}$$

Raccolgo le variabili libere (le variabili non pivot)

$$W = \{x_2\langle -2, 1, 0, 0\rangle + x_4\langle 3, 0, -11, 1\rangle + \langle 1, 0, 3, 0\rangle\}$$

3 Matrici

3.1 Matrice Associata

Dato un sistema di k equazioni $(S) \subset E^n$ la matrice associataM(S) è:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \dots & \alpha_{1,n} & -\beta_1 \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \dots & \alpha_{2,n} & -\beta_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{k,1} & \alpha_{k,2} & \dots & \alpha_{k,n} & -\beta_k \end{bmatrix}$$

composta da k righe e n + 1 colonne. Anche per le matrici associate valgono le operazioni dell'Algoritmo di Gauss.

Esempio 3.1.1

$$(S) \begin{cases} x_1 & + & 2x_2 & - & 5x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 4 \\ 4x_1 & + & x_2 & - & 6x_3 & = & 8 \end{cases}$$

$$\mathrm{M}(S) \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & -2 \\ 2 & -3 & 4 & -4 \\ 4 & 1 & -6 & -8 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{M}(S) \left[\frac{Sum(\epsilon_2, -2\epsilon_1)}{Sum(\epsilon_3, -4\epsilon_1)} \right] \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & -2 \\ 0 & -7 & 14 & 0 \\ 0 & -7 & 14 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{M}(S) \left[Sum(\epsilon_3, -\epsilon_2) \right] \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & -2 \\ 0 & -7 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{M}(S) \left[Multiply(-\frac{1}{7}, \epsilon_2) \right] \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{M}(S) \left[Sum(\epsilon_1, -2\epsilon_2) \right] \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$W = \{\langle x_3(1, 2, 1) + (2, 0, 0) \rangle \mid x_3 \in \mathbb{R}\}$$

3.2 Prodotto tra matrici e vettori

Il prodotto di una matrice $m_{k,n}$ ed un vettore $v \in \mathbb{R}^n$ è uguale a:

$$m_{k,n} \begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{k,1} & \dots & \alpha_{k,n} \end{bmatrix} \times v_{n,1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = v'_{k,1} \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1,j} * x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2,j} * x_j \\ \dots \\ \dots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{k,j} * x_j \end{bmatrix}$$

3.3 Matrice di α, vettore delle x e vettore dei β

un sistema (S) può anche essere rappresentato tramite il seguente prodotto:

$$(S)\, \alpha_{k,n} \times x_{n,1} = \beta_{k,1}$$

dove $\alpha_{k,n}$ è una matrice di coefficenti di k righe e n colonne, $x_{n,1}$ è un vettore di n incognite e $\beta_{n,1}$ è un vettore di n termini noti.

3.4 Trasformazione lineare

Data una matrice $m[m_{i,j}] \in M_{k\times n}$, la trasformazione lineare associata ad m è una funzione: $A_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ definita come: $A_m(v) = a * v \quad \forall v \in \mathbb{R}^{\text{n}}$.

Esempio 3.4.1

$$m = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}) \quad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

$$A_m(v) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} (Id^3_{\mathbb{R}})$$

Esempio 3.4.2

$$m' = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \quad v' = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

Geometricamente:

1. *Se* $\lambda = \mu > 0$ *si dice omotetia.*
2. *Se* $\lambda = 1\, \mu = -1$ *si dice riflessione rispetto all'asse x.*
3. *Se* $\lambda = -1\, \mu = 1$ *si dice riflessione rispetto all'asse y.*
4. *Se* $\lambda = \mu = -1$ *si dice riflessione rispetto all'origine.*
5. *Se* $\lambda = 1\, \mu = 0$ *si dice proiezione ortogonale sull'asse x.*
6. *Se* $\lambda = 0\, \mu = 1$ *si dice proiezione ortogonale sull'asse y.*
7. *Rotazione rispetto all'origine:*

$$m'' = \begin{bmatrix} \cos\Theta & -\sin\Theta \\ \sin\Theta & \cos\Theta \end{bmatrix} \quad v'' = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

3.5 Interpretazione geometrica di W

Dato un sistema $(S)_{k,n} = \alpha \times x = \beta$ e la funzione di trasformazione lineare $A_\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$; l'insieme delle soluzioni W del sistema è definito come:

$$W = \{v \in \mathbb{R}^k | A_\alpha(v) = \beta\}$$

3.6 Propietà delle Trasformazioni lineari

Dati $a = [a_{ij}] \in M_{s\times t}(\mathbb{R}) \quad A_a : \mathbb{R}^t \to \mathbb{R}^s$ e $v, w \in \mathbb{R}^t$

1. $A_a(v + w) = a * (v + w) = \left[\sum_{j=1}^t a_{ij*(v_j+w_j)}\right] = \left[\sum_{j=1}^t a_{ij*(v_j)}\right] + \left[\sum_{j=1}^t a_{ij} * (w_j)\right] = A_a(v) + A_a(w)$

2. $\lambda \in \mathbb{R} \quad A_a(\lambda v) = \left[\sum_{j=1}^t a_{ij} * (\lambda v_j)\right] = \lambda \left[\sum_{j=1}^t a_{ij} * (v_j)\right] = \lambda A_a(v)$

3.7 Sistema Omogeneo associato

Il sistema omogeneo associato a (S) è (S') dove $\forall \alpha \in (S) \wedge \alpha' \in (S').\ \alpha' = \alpha$ e $\forall \beta' \in (S').\ \beta' = 0$

Teorema 3.1
Siano $x, y \in \mathbb{R}^t$ due soluzioni del sistema (S') e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, allora $\lambda x + \mu y \in W(S')$

Proof.

$$A(x) = \langle 0 \rangle_s \wedge A(y) = \langle 0 \rangle_s \quad (\langle 0 \rangle_s \text{ Vettore vuoto})$$

$$\begin{aligned} A(\lambda x + \mu y) &= A(\lambda x) + A(\mu y) && \text{(per propritä 1)} \\ &= \lambda A(x) + \mu A(y) && \text{(per propritä 2)} \\ &= \lambda \langle 0 \rangle_s + \mu \langle 0 \rangle_s && \text{(per ipotesi)} \\ &= \langle 0 \rangle_s \end{aligned}$$

□

Lemma 3.2
Siano $x, y \in \mathbb{R}^t$ due soluzioni di (S), allora $x - y$ è una soluzione di (S')

Proof.

$$A(x) = \beta \quad A(y) = \beta$$

$$\begin{aligned} A(x - y) &= A(x + (-1)y) && \text{(per calcolo)} \\ &= A(x) + A(-1y) && \text{(per proprietà 1)} \\ &= \beta - A(y) && \text{(per ipotesi e propritä 2)} \\ &= \beta - \beta && \text{(per ipotesi)} \\ &= \langle 0 \rangle_s \end{aligned}$$

□

Corollario 3.2.1
Sia $\tilde{x} \in \mathbb{R}^t$ una soluzione finita di (S), allora tutte le soluzioni di (S) sono della forma $\tilde{x} + y$ $y \in W(S')$

Proof.

$$A(\tilde{x}) = \beta \quad A(y) = \langle 0 \rangle$$

$$\begin{aligned} A(\tilde{x} + y) &= A(\tilde{x}) + A(y) && \text{(per propritä 1)} \\ &= \beta + \langle 0 \rangle && \text{(per ipotesi)} \\ &= \beta \end{aligned}$$

□

4 Spazio Vettoriale

Definizione 4.0.1
Uno Spazio vettoriale reale (su $\mathbb{R}$) è un insieme di vettori avente 2 operazioni:

- *Addizione* $\quad + : V \times V \to V \quad +(v, w) \mapsto v + w$
- *Prodotto Scalare* $\quad * : \mathbb{R} \times V \to V \quad *(\lambda, v) \mapsto \lambda v$

Tali che $\forall u, v, w \in V \wedge \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *valgono le seguenti proprietà:*

1. $u + (v + w) = (u + v) + w$
2. $\exists \langle 0 \rangle \in V.\ \langle 0 \rangle + v = v$
3. $\forall v \in V.\ \exists w \in V.\ v + w = \langle 0 \rangle \quad (w = -v)$
4. $\forall v, w \in V.\ v + w = w + v$
5. $\lambda(\mu v) = \lambda \mu v \quad ((\lambda\mu)$ *prodotto nei reali,* $(\lambda\mu)v$ *prodotto scalare*$)$
6. $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$
7. $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$
8. $1 * v = v$

Proposizione 4.0.1
Sia V uno spazio vettoriale reale, $\forall v \in V \wedge \lambda \in \mathbb{R}$ *valgono:*

1. $\lambda * \langle 0 \rangle = \langle 0 \rangle$
2. $0 * v = \langle 0 \rangle$
3. $\lambda * v = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \vee v = \langle 0 \rangle$
4. $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v = v \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \right)$
5. $\sum_{i=1}^{k} \lambda v_i = \lambda \left(\sum_{i=0}^{k} v_i \right)$
6. $-\lambda v = \lambda * (-v) = -\lambda v$

Definizione 4.0.2
Dati due spazi vettoriali reali V e W
Una trasformazione lineare $A : V \to W$ *tale che:*

1. $A(x + y) = A(x) + A(y) \quad \forall x, y \in V$
2. $A(\lambda x) = \lambda A(x) \quad \forall x \in V \wedge \lambda \in \mathbb{R}$

Definizione 4.0.3
Sia V uno spazio vettoriale reale e $W \subseteq V$*, W è un sottospazio di V*

Proposizione 4.0.2
Sia V uno spazio vettoriale reale.

$$W \subseteq V \text{ è un sottospazio} \Leftrightarrow \forall w_1, w_2 \in W \wedge \lambda \in \mathbb{R}.\ w_1 + w_2 \in W \wedge \lambda w_1 \in W \wedge \langle 0 \rangle \in W$$

Proposizione 4.0.3
$V \cap W \quad A : V \to W$ *Se:*

- $Z \subseteq V \quad A(Z) \subseteq W$ *è un sottospazio.*
- $Y \subseteq V \quad A^{-1}(Y) \subseteq V$ *è un sottospazio.*

Osservazione: L'intersezione di sottospazi è un sottospazio.

Definizione 4.0.4
Se $W_1 \wedge W_2$ *sono sottospazi di V, allora* $W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 |\ w_1 \in W_1 \wedge w_2 \in W_2\}$
Osservazione: $w_1, w_2 \in W_1 + W_2$

Definizione 4.0.5
Sia V uno spazio vettoriale reale e $v_1, v_2, \dots, v_k \in V \wedge \lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_k \in \mathbb{R}$

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k \text{ è detta combinazione lineare di } v_1, \dots, v_k$$

Definizione 4.0.6
Dato $X \subseteq V$ *l'insieme:*

$$\langle X \rangle = \{\text{Combinazioni lineari di vettori in } x\} \subseteq V$$

$\langle X \rangle$ *è un sottospazio di V detto generato da X.*

Proposizione 4.0.4
Sia V uno spazio vettoriale reale. Sia $X \subseteq V$ *un sottoinsieme, allora*

$$\langle x \rangle \text{ è un sottospazio generato da X.}$$

Proof. Siano:

$$v, w \in \langle X \rangle . \exists v_1, v_2, \dots, v_k, w_1, w_2, \dots, w_k \in X \wedge \lambda_1, \lambda_2 \dots, \lambda_k, \mu_1, \mu_2 \dots, \mu_k \in \mathbb{R}.\ v = \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i\right) \wedge w = \left(\sum_{i=1}^{k} \mu_i w_i\right)$$

$$1.) \quad v + w = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k + \mu_1 w_1 + \mu_2 w_2 + \dots + \mu_k w_k \in \langle X \rangle$$

$$2.) \quad \lambda' \in \mathbb{R}.\lambda' v = \lambda'(\lambda_1 v_1 + \dots + lambda_k v_k)$$

□

Osservazione: $X \subseteq \langle X \rangle \quad v \in X,\ 1 * v \in \langle X \rangle$

Definizione 4.0.7
Sia V uno spazio vettoriale reale e $X \subseteq V$*, X Genera V* $\Rightarrow \langle X \rangle = V$.

Esempio 4.0.1
$V = \mathbb{R}^t, \quad x = \langle e_1, e_2, \dots, e_t \rangle$ (*Base canonica*)

$$e_i = \langle 0_1, 0_2, \dots, 1_i, \dots, 0_t \rangle$$

$$\begin{aligned} \langle X \rangle &= \{\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_t, e_t \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \quad (Definizione) \\ &= \{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \quad (per\ calcolo) \\ &= \mathbb{R}^t \end{aligned}$$

Esempio 4.0.2

$$(S') : \alpha x = \langle 0 \rangle \quad \begin{cases} x_1 & 0 & 0 & -3x_4 & = & 0 \\ 0 & x_2 & x_3 & -x_4 & = & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & = & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & = & 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} A^{-1}(0) &= \{(3x_4, -x_3 + x_4, x_3, -x_4) \mid x_3, x_4 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x_3(0, -1, 1, 0), x_4(3, 1, 0, 1)\} \end{aligned}$$

Proposizione 4.0.5
Sia V uno spazio vettoriale reale, siano $X, Y \subseteq V$ *allora:*

1. $X \subseteq \langle X \rangle$
2. $X \subseteq Y \Rightarrow \langle X \rangle \subseteq \langle Y \rangle$
3. $\langle \langle X \rangle \rangle = \langle X \rangle$
4. $X \subseteq W \subseteq V \Rightarrow \langle X \rangle \subseteq W$
5. *X Genera V* $\wedge X \subseteq Y \Rightarrow$ *Y Genera V*
6. *X Genera V* $\wedge x \in X \wedge x \in \langle X - \{x\} \rangle \Rightarrow X - \{x\}$ *Genera V*

Definizione 4.0.8
Sia V uno spazio vettoriale e $X \subseteq V$ *un sottoinsieme.*
Diciamo che X è (linearmente) indipendente se:

$$\forall v_1, v_2, \dots, v_k \in X \wedge \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}.\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$$

Esempio 4.0.3

$$V = \mathbb{R}^t, \quad x = (e_1, \dots, e_t)$$

$$\begin{array}{rcl} \textit{Siano } \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}. \sum_{i=1}^{t} \lambda_i e_i & = & \langle 0 \rangle \\ (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t) & = & \langle 0 \rangle \quad (\textit{per calcolo}) \\ \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_t = 0 & & \\ X \textit{è indipendente.} & & \end{array}$$

Esempio 4.0.4

$$V = \mathbb{R}^2 \quad x = \{(1,1),(1,-1)\} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$\begin{array}{rcl} \lambda(1,1) + \mu(1,-1) & = & (0,0) \\ (\lambda + \mu, \lambda - \mu) & = & (0,0) \\ \lambda = \mu = 0 & & \\ X \textit{ è indipendente.} & & \end{array}$$

Esempio 4.0.5

$$\tilde{X} = \{(1,1),(1,-1),(3,1)\} \subseteq V = \mathbb{R}^2$$

$$2(1,1) + (1,-1) + (-1)(3,1) = (0,0)$$

Quindi X non è indipendente.

Esempio 4.0.6

$$\alpha = (\alpha_{ij}) \in M_{s \times t}(\mathbb{R}) \quad A : \mathbb{R}^t \to \mathbb{R}^s, \quad A(v) = \alpha * v$$

$$\textit{Gauss} \to \; v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^t \textit{ tali che:}$$

$$A^{-1}(0) = \{(v_1, \dots, v_k)\}$$

$$(S') \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{cases} x_2 & = & -2x_4 - 3x_6 \\ x_3 & = & 2x_4 - 3x_6 \\ x_5 & = & -3x_6 \end{cases}$$

$$\begin{array}{rcl} A^{-1}(0) & = & \{(x_1, -2x_4 - 3x_6, 2x_4 - 3x_6, x_4, -3x_6, x_6)\} \mid x_1, x_4, x_6 \in \mathbb{R} \\ & = & \{x_1(1,0,0,0,0,0) + x_4(0,-2,2,1,0,0) + x_6(0,-3,3,0,-3,1) \mid x_1, x_4, x_6 \in \mathbb{R}\} \end{array}$$

Proposizione 4.0.6
Sia V uno spazio vettoriale reale. Sia $X \subseteq V$ un sottoinsieme indipendente Se:

1. *$Y \subseteq X \Rightarrow Y$ è indipendente.*
   Osservazione: *$\emptyset$ è indipendente.*

2. *$v \in V - \langle X \rangle \Rightarrow X \cup \{v\}$ è indipendente.*

Proof Punto 2.

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t \in \mathbb{R} \wedge v_1, v_2, \dots, v_t \in X \wedge \sum_{i=1}^{t} \lambda_i v_i = 0$$

$$Se\ \lambda = 0, \sum_{i=1}^{t} \lambda_i v_i = 0, \text{ ma x è indipendente quindi } \lambda_1 = \cdots = \lambda_t = 0.$$

$$Se\ \lambda \neq 0\ v = -\frac{\lambda_1}{\lambda} v_1 - \cdots - \frac{\lambda_t}{\lambda} v_t \in \langle X \rangle \perp$$

Quindi $X \cup \{v\}$ è indipendente.

□

Proposizione 4.0.7
Sia V uno spazio vettoriale reale. Sia $X \subseteq V$, allora P_1 e P_2 sono equivalenti:

P_1 *X è un insieme minimale di generatori di V, ossia X genera V e* $\forall v \in X.\ X - \{v\}$ *non genera V*

P_2 *X è indipendente e massimale, ossia X è indipendente e* $\forall v \in V - X.\ X \cup \{v\}$ *non è indipendente.*

P_3 *X genera V ed è indipendente.*

Definizione 4.0.9
Se $X \subseteq V \wedge (P_1(X) \vee P_2(X))$ *diciamo che X è una Base di V.*

Teorema 4.1

Sia V uno spazio vettoriale e sia $X \subseteq V$ indipendente.
Sia $Y \subseteq V$ sottoinsieme tale che $X \subseteq Y$ allora $\exists$ Base di $\langle Y \rangle$ tale che $X \subseteq B \subseteq Y$

Corollario 4.1.1
Ogni spazio vettoriale reale ha almeno una base.

Proof.

$$X = \emptyset,\ Y = V \quad \text{(Si applica il teorema precedente)}$$

□

Teorema 4.2

Tutte le basi di V hanno la stessa cardinalità o meglio tutte le basi di V sono in biiezione.

Definizione 4.0.10
La dimensione di V è data da $|B|$ ovvero la cardinalità della base.

Esempio 4.0.7

$$\mathbb{R}^t,\ B_e = (e_1, e_2, \dots, e_t)\ (base\ canonica)$$
$$Dim_R^t = |B_e| = t$$

Proposizione 4.0.8
$v_1, \dots, v_t$ *sono linearmente indipendenti* $\Leftrightarrow \alpha * x = 0$ *ha la sola soluzione 0 e questo succede* $\Leftrightarrow$

$$\alpha \rightsquigarrow Gauss \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Esempio 4.0.8

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, v_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \left(\frac{Sum(\epsilon_1, -\epsilon_2)}{Sum(\epsilon_3, -3\epsilon_1)} \right) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \left(Multiply(-\frac{1}{2}, \epsilon_2) \right) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \left(\frac{Sum(\epsilon_1, -\epsilon_2)}{Sum(\epsilon_3, 2\epsilon_2)} \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

v_1, v_2 *sono indipendenti mentre* $v_3 = v_1 - v_2,\ v_4 = v_1 + v_2$

Proposizione 4.0.9
Sia V uno spazio vettoriale reale e sia $W \subseteq V$ un sottospazio $\Rightarrow Dim_{\mathbb{R}}(W) \leq Dim_{\mathbb{R}}(V)$

Proof. Sia $B \subseteq W$ una base di $W \Rightarrow \exists\, \tilde{B} \subseteq V$ base di $V.B \subseteq \tilde{B}$ quindi $Dim_{\mathbb{R}}(W) = |B| \leq Dim_{\mathbb{R}}(V) = |\tilde{B}|$ □

Proposizione 4.0.10
Sia V uno spazio vettoriale tale che $Dim_{\mathbb{R}}(V) = d \in N$:

1. *Se $X \subseteq V$ è indipendente $\Rightarrow |X| \leq d$. E se $|X| = d \Rightarrow X$ è base di V.*

2. *Se $X \subseteq V$ genera $V \Rightarrow |X| \geq d$. E se $|X| = d \Rightarrow X$ è una base.*

Proof Punto 1. Per il Teorema $\exists\, B \subseteq V$ base di V tale che $X \subseteq B \Rightarrow |X| \leq |B| = Dim_{\mathbb{R}}(V) = d$
Se $d = |X| \leq |B| = d \Rightarrow |X| = |B|$ □

Esercizio 4.0.1
Se $W \subseteq V$ è un sottospazio e $Dim_{\mathbb{R}}(W) = Dim_{\mathbb{R}}(V) = d \in N \Rightarrow W = V$?

Proposizione 4.0.11
Sia V uno spazio vettoriale reale e sia $E = \{e_1, \ldots, e_i \,|i \in I\}$ una base di V. Allora ogni $v \neq 0 \in V$ si scrive in modo unico con una combinazione lineare di elementi distinti di E.

Proof. $v \in V = < E >,\ v = \lambda_1 * e_1 + \lambda_2 * e_2 + \cdots + \lambda_t * e_t,\ e_i \in E$. Supponiamo che:

$$v = \lambda_1 * e_1 + \cdots + \lambda_t * e_t = \mu_1 * e_1 + \cdots + \mu_t * e_t$$

$$0 = v - v = (\lambda - \mu)_1 * e_1 + \cdots + (\lambda - \mu)_t * e_t$$

Siccome E è indipendente allora $\lambda_1 - \mu_1 = 0, \ldots, \lambda_t - \mu_t = 0 \perp$

□

Definizione 4.0.11
Se fissiamo un ordinamento totale agli elementi in E ottengo delle coordinate:

$$V \ni v = \sum_{i \in I} \lambda_i * e_i \rightsquigarrow (\lambda_i)_{i \in I}$$

Teorema 4.3 (Formula di Grassman)
Siano W_1, W_2 due sotto spazi di uno spazio vettoriale reale V. Allora:

- $Dim_{\mathbb{R}}(W_1 + W_2) \neq Dim_{\mathbb{R}}(W_1) + Dim_{\mathbb{R}}(W_2)$

- $Dim_{\mathbb{R}}(W_1 + W_2) = Dim_{\mathbb{R}}(W_1) + Dim_{\mathbb{R}}(W_2) - Dim_{\mathbb{R}}(W_1 \cap W_2)$

Proof. Considero che le dimensioni siano finite e considero $B = \{e_1, \ldots, e_r\}$ base di $W_1 \cap W_2$
Siccome B è indipendente $B \subseteq W_1$, $\exists\, B_1 = \{e_1, \ldots, e_r, x_1, \ldots, x_s\}$ base di W_1 e analagomente
$\exists\, B_2 = \{e_1, \ldots, e_r, y_1, \ldots, y_t\}$ base di W_2 allora $B_1 \cup B_2$ è base di $W_1 + W_2$

$$|B_1 \cup B_2| = |\{e_1, \ldots, e_r, x_1, \ldots, x_s, y_1, \ldots, t_t\}| = r + s + t = (r + s) + (r + t) - r$$

Chiaramente $B_1 \cup B_2$ genera $< W_1 \cup W_2 >= W_1 + W_2$ mostriamo che $B_1 \cup B_2$ è indipendente:

$$\begin{array}{rcl} \sum_{i=1}^r \lambda_i e_i + \sum_{i=1}^s \alpha_i x_i + \sum_{i=i}^t \beta_i y_i & = & 0 \\ \sum_{i=1}^r \lambda_i e_i + \sum_{i=1}^s \alpha_i x_i & = & -\sum_{i=i}^t \beta_i y_i \quad \in W_1 \cap W_2 \end{array}$$

Cioè:

$$\begin{array}{rcll} -\sum_{i=1}^t \beta_i y_i & = & \sum_{i=1}^r \mu_i e_i & \text{per qulche}\mu, \ldots, \mu_r \in \mathbb{R} \\ \sum_{i=1}^r \mu_i e_i + \sum_{i=1}^t \beta_i y_i & = & 0 & \text{Ma } \beta \text{ è indipendente} \end{array}$$

quindi $\beta_1, \ldots, \beta_t = 0$ □

Esempio 4.0.9

In $\mathbb{R}^4$ *considero* $V = \left\{ Soluzioni\ di\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 + 3x_4 = 0 \end{cases} \right\}$ *e* $W = \left\langle \left\{ w_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle$

$Dim_{\mathbb{R}}(V \cap W) \wedge Dim_{\mathbb{R}}(V + W)$?

Per $Dim_{\mathbb{R}}(W) = 2$ *perché* $\forall \lambda \in \mathbb{R}.\, w_1 \neq \lambda w_2$ *(*w_2 *non è multiplo di* w_1*)*

Per $Dim_{\mathbb{R}}(V) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} Dim_{\mathbb{R}}(V) = 2$

$$V = \{x_3(1, -1, 1, 0) + x_4(6, -3, 0, 1)\} = \left\langle \left\{ v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle$$

Per $V + W = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle \to \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to^* \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & x \\ 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} Dim_{\mathbb{R}}(V + W) = 3$

Per Grassmant $Dim_{\mathbb{R}}(W \cap V) = -Dim_{\mathbb{R}}(V + W) + Dim_{\mathbb{R}}(V) + Dim_{\mathbb{R}}(W) = -3 + 2 + 2 = 1$

Lemma 4.4

Siano V, W 2 spazi vettoriali reali. Sia V finito ($Dim_{\mathbb{R}}(V) = d \in N$*).*
Sia $A : V \to W$ *una Trasformazione lineare.*

- $Imm(A) := A(V) \subseteq W$ *(Immagine)*
- $Kern(A) := A^{-1}(0) \subseteq V$ *(Kernel)*

Osservazione 4.0.1

$Imm(A)$ *è un sottospazio di W e* $Kern(A)$ *è un sottospazio di V.*

Teorema 4.5

$$Dim_{\mathbb{R}}(V) = Dim_{\mathbb{R}}(Imm(A)) + Dim_{\mathbb{R}}(Kern(A))$$

Proof. Sia $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ base di V. Allora $X = \{A(e_1), \ldots, A(e_n)\}$ genera $Imm(A)$.
$(w \in Imm(A), v \in V. A(v) = w)$
$v = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n \Rightarrow w = A(v) = A(\sum_{i=1}^n)\lambda_i e_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i A(e_i) \in < X >$
In particolare $Dim_{\mathbb{R}}(Imm(A)) \leq Dim_{\mathbb{R}}(V) < +\infty$.
Sia $\{w_1, \ldots, w_r\}$ base di $Imm(A)$ e siano $v_1, \ldots v_r \in V. A(v_i) = w_i$.
Sia $E = \{u_1, \ldots, u_s\} \leq V$ una base di $Kern(A)$ (Se $\{u_1, \ldots, u_s, v_1, \ldots, v_r\}$ è una base di V ho finito)
$v \in V$, $A(V) = \sum_{i=1}^r \lambda_i w_i = \sum_{i=1}^r \lambda_i A(v_i) = A(\sum_{i=1}^r \lambda_i v_i)$

$$\begin{array}{rcll} A(v) - A(\sum_{i=1}^r \lambda_i v_i) & = & 0 & \\ & = & A(v - \sum \lambda_i v_i) & \in Kern(A) \\ & = & \sum_{i=1}^s \mu_i u_i & \\ v & = & \sum_{i=1}^r \lambda_i v_i + \sum_{i=1}^s \mu_i u_i & \end{array}$$

quindi $V =< E >$
Siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_r, \mu_1, \ldots, \mu_s$ t.c. $\sum_{i=1}^r \lambda_i v_i + \sum_{i=1}^s \mu_i u_i = 0$

$$\begin{array}{rcll} 0 = A(0) & = & A(\sum_{i=1}^r \lambda_i v_i + \sum_{i=1}^s \mu_i u_i) & \\ & = & \sum_{i=1}^r \lambda_i A(v_i) + \sum_{i=1}^s \mu_i A(u_i) & \text{A}(u_i) \text{ è sempre } 0 \\ & = & \sum_{i=1}^r \lambda_i w_i & \end{array}$$

Ma $\{w_1, \ldots, w_r\}$ è indipendente quindi $\lambda_I = 0$ ◻

Esempio 4.0.10

$\alpha = [\alpha_{ij}] \in M_{s\times t}(\mathbb{R}),\ A : \mathbb{R}^t \to \mathbb{R}^s,\ A(v) = \alpha * v\ \forall\, v \in \mathbb{R}^t$

$Kern(A) = A^{-1} = \{Soluzioni\ di\ \alpha * x = 0\} \rightsquigarrow^{Gauss} \{v_1, \ldots, v_k\}$

$$\begin{aligned} k &= Dim_{\mathbb{R}}(Kern(A)) \qquad (\#\ variabili\ libere) \\ &= Dim_{\mathbb{R}}(R^t) - Dim_{\mathbb{R}}(Imm(A)) \\ &= t - Dim_{\mathbb{R}}((Imm(A))) \\ &= t - \#\ variabili\ libere \\ &= \#\ pivot \end{aligned}$$

$Imm(A) = \langle\{A(e_1), \ldots, A(e_t)\}\rangle$

$$A(e_i) = \alpha * e_i = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1t} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{s1} & \ldots & a_{st} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 \\ \ldots \\ 1 \\ \ldots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{1i} \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ \alpha_{si} \end{bmatrix} (colonna\ i)$$

Osservazione 4.0.2

Se V, W sono spazi vettoriali reali, $A : V \to W$ è lineare ed E è base di V, allora $A(E)$ determina A:

$$v \in V\ v = \sum \lambda_i e_i \Rightarrow A(v) = A(\sum \lambda_i e_i) = \sum \lambda_i A(e_i)$$

Osservazione 4.0.3

Siano V, W sono spazi vettoriali reali e sia E base di V, sia $f : E \to W$ una funzione.
Definisco $A_f : V \to W$ dato $v \in V$ $v = \sum \lambda_i e_i \quad A_f(v) = \sum \lambda_i f(e_i)$
Siccome E è una base, A_f è una funzione:

$$v_1, v_2 \in V\ v_1 = \sum \lambda_i e_i\ v_2 = \sum \mu_i e_i$$

$$\begin{aligned} A_f(v_1 + v_2) &= A_f(\textstyle\sum(\lambda_i \mu_i) e_i) \\ &= \textstyle\sum(\lambda_i \mu_i) f(e_i) \\ &= \textstyle\sum \lambda_i f(e_i) + \mu_i f(e_i) \\ &= A_f(v_1) + A_f(v_2) \qquad \square \end{aligned}$$

Osservazione 4.0.4

Siano V, W spazi vettoriali reali e $A : V \to W$ una trasformazione lineare e biiunivoca, allora $A^{-1} : W \to V$ è una trasformazione lineare.

$$w_1,\ w_2 \in W \quad A^{-1}(w_1 + w_2) = A^{-1}(w_1) + A^{-1}(w_2)$$

$$\begin{aligned} A(A^{-1}(w_1 + w_2)) &= w_1 + w_2 \\ &= A(A^{-1}(w_1) + A^{-1}(w_2)) \\ &= A(A^{-1}(w_1)) + A(A^{-1}(w_2)) \\ &= A^{-1}(w_1) + A^{-1}(w_2) \qquad (A\ \text{è iniettiva}) \ \square \end{aligned}$$

Osservazione 4.0.5

Siano V, W spazi vettoriali reali e $A : V \to W$ lineare, E base canonica di V e E^1 base canonica di W.

$$A \vdash E \to E^1 \wedge A^{-1} \vdash E^1 \to E \Rightarrow\ A\ \text{è biiunivoca}$$

5 Isomorfismo lineare

Definizione 5.0.1
Una trasformazione lineare $A : V \to W$ *biiunivoca (o bigettiva) è detto isomorfismo lineare.*

Osservazione 5.0.1
Un isomorfismo $A : V \to W$ *manda basi di* V *in basi di* W.

Proposizione 5.0.1
Sia V *uno spazio vettoriale reale con dimensione* $d \in N$, *allora* V *è isomorfo a* $\mathbb{R}^d$

Proof. Sia $E = \{e_1, \ldots, e_d\}$ base di V e $B(v)$ una funzione che mappa i vettori in V alle coordinate in $\mathbb{R}^d$

$$v \in V,\ v = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i e_i \quad B(v) := (\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_d) \in \mathbb{R}^d\ B : V \to \mathbb{R}^d$$

□

Osservazione 5.0.2
Sia $A : V \to W$ *una trasformazione lineare.*

$$A \text{ è iniettiva } \Leftrightarrow Kern(A) = \{0\}$$

- *Se A è iniettiva* $\Rightarrow v \neq 0\ A(v) \neq A(0)$ *quindi* $v \notin Kern(A)$, *quindi* $Kern(A) = \{0\}$.
- *Se A non è iniettiva* $\Rightarrow \exists\, v, w \in V.\, v \neq w \wedge A(v) = A(w)\ 0 = A(v) - A(w) = A(v - w) \Rightarrow 0 \neq v - w \in Kern(A)$.

Osservazione 5.0.3
Sia $A : V \to W$ *una trasformazione linearee sia* $Dim_{\mathbb{R}}(W) \in N$.

$$A \text{ è iniettiva} \Leftrightarrow Dim_{\mathbb{R}}(Imm(A)) = Dim_{\mathbb{R}}(W)$$

- *Se A è surgettiva* $\Rightarrow Imm(A) = W$
- *Se A non è surgettiva* $\Rightarrow Dim_{\mathbb{R}}(Imm(A)) < Dim_{\mathbb{R}}(W)$

Corollario 5.0.1
Siano V, W spazi vettoriali reali con $Dim_{\mathbb{R}}(V) = Dim_{\mathbb{R}}(W) = d \in N)$ *allora:*

1. *A è iniettiva* $\Leftrightarrow Dim_{\mathbb{R}}(Kern(A) = 0)$
2. *A è surgettiva* $\Leftrightarrow Dim_{\mathbb{R}}(Imm(A) = d)$
3. *A è biiunivoca* $\Leftrightarrow$ *è sia iniettiva sia surgettiva*

Proof 3.

$$\begin{array}{rcc} Dim_{\mathbb{R}}(V) & = & Dim_{\mathbb{R}}(Imm(A)) + Dim_{\mathbb{R}}(Kern(A)) \\ & = & 0 + d \\ & = & d \end{array}$$

□

Proposizione 5.0.2
Siano V, W spazi vettoriali reali. Sia E una base di V, F una base di W e sia $A : V \to W$

$$A(e_j) = \sum_{i=1}^{s} A_i f_i \text{ per } j = \{1, \ldots, t\}$$

$$m_{F,E}(A) = [A_{ij}] \in M_{s \times t}(\mathbb{R}) \text{ "matrice di A nelle basi ordinate E, F"}$$