**ROBOTICS**

Σχεδιασμός επιθυμητών τροχιών και Σχεδιασμός κίνησης ρομπότ ματιού - Σχεδιασμός κίνησης ρομπότ σε περιβάλλον προσομοίωσης.

**Team**

Γκόβαρης Χρήστος-Γρηγόριος, ΑΜ: 5203
Σπανού Μαρία, ΑΜ: 5351

# Χρονοδιάγραμμα Εργαστηριακής Άσκησης

| Έκδοση | Ημερομηνία | Progress |
|---|---|---|
| 1.0 | 23/4/2024 | Ανακοίνωση εργαστηριακής άσκησης |
| 2.0 | 24/5 - 31/5 | Υλοποίηση του move_jackal.py |
| 2.1 | 15/5 – 21/5 | Υλοποίηση τριών διαφορετικών τροχιών |
| 2.2 | 24/5 - 31/5 | Υλοποίηση του trajectories_jackal.py |
| 3.0 | 24/5 - 31/5 | Υλοποίηση του move_rrbot_joint.py |
| 3.1 | 15/5 – 21/5 | Υλοποίηση τροχιών για τις αρθρώσεις |
| 3.2 | 24/5 - 31/5 | Υλοποίηση του trajectories_rrbot.py |
| 4.0 | 15/5 – 1/6 | Υλοποίηση Report εργαστηριακής άσκησης |

## 2.0 Υλοποίηση του move_jackal.py

Η ανάπτυξη του προγράμματος 'move_jackal.py', μας βοηθάει στην κίνηση του τροχοφόρου robot, με αυθαίρετη επιθυμητή γραμμική ταχύτητα ($u_d$) και περιστροφική ταχύτητα ($\omega_d$). Οι παραπάνω ταχύτητες, είναι εκφρασμένες ως προς το σωματόδετο ΣΣ.

Το πρόγραμμα ξεκινά με την εισαγωγή των απαραίτητων βιβλιοθηκών, συμπεριλαμβανομένων των rospy (για τον έλεγχο του ROS), argparse (για την επεξεργασία των παραμέτρων εντολών), και matplotlib.pyplot (για την εμφάνιση γραφημάτων). Ακολουθεί ο ορισμός της συνάρτησης move_jackal, η οποία δέχεται ως παραμέτρους τη συχνότητα μετάδοσης (rate_hz), τις γραμμικές και γωνιακές ταχύτητες (linear_velocity και angular_velocity_deg αντίστοιχα), και τη διάρκεια της κίνησης (duration). Οι γωνιακές ταχύτητες μετατρέπονται από μοίρες σε ακτίνια (rad).

Η εντολή που πρέπει να εκτελέσουμε στο terminal, για την σωστή λειτουργία του robot, είναι:

```
python3 move_jackal.py <rate_hz> <linear_velocity> <angular_velocity_deg> <duration>
```

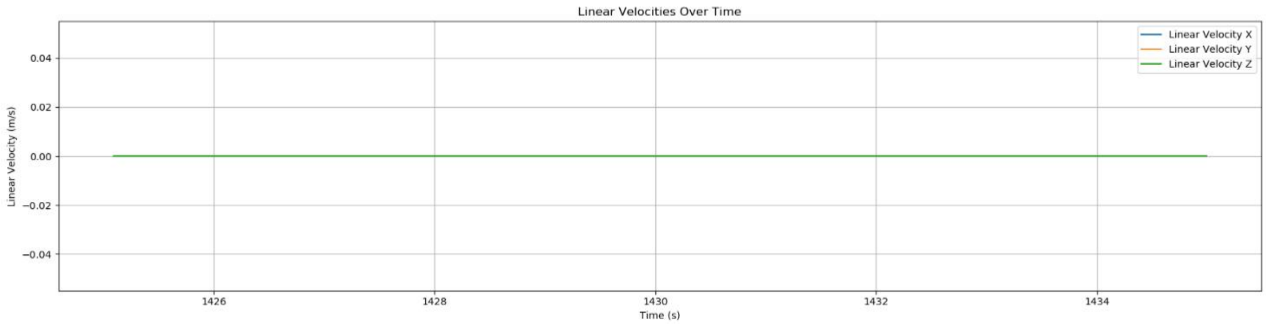
**Εκτέλεση της παραπάνω εντολής για:**

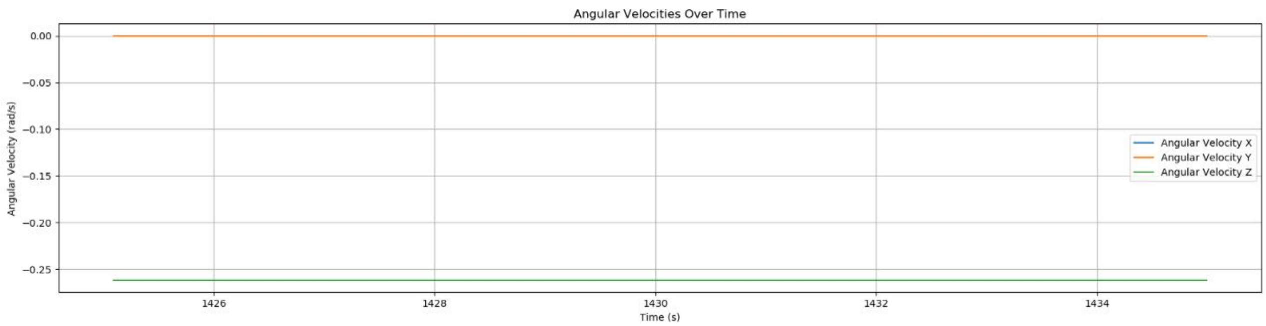
rate_hz = 10 Hz

linear_velocity = 0 m/sec

angular_velocity_deg = -15°/sec

duration = 10 sec




Τα αποτελέσματα του screenshot δείχνουν τις γραμμικές και γωνιακές ταχύτητες του robot Jackal κατά την εκτέλεση του προγράμματος με τις παραμέτρους που αναφέρθηκαν.

Οι γραμμικές ταχύτητες για τους άξονες X, Y και Z είναι όλες μηδενικές (0 m/s). Αυτό είναι αναμενόμενο, καθώς ορίσαμε τη γραμμική ταχύτητα σε [0.0,0.0,0.0], πράγμα που σημαίνει ότι το robot δεν κινείται γραμμικά σε καμία κατεύθυνση.

Οι γωνιακές ταχύτητες στον άξονα Z δείχνουν σταθερή τιμή περίπου -0.25 rad/s. Η τιμή αυτή είναι σωστή γιατί αντιστοιχεί στην μετατροπή των -15°/sec σε ακτίνια. Η μετατροπή είναι:

$$-15^\circ \cdot \frac{\pi}{180} = -0.2618 \text{ rad/sec}$$

Οι γωνιακές ταχύτητες στους άξονες X και Y είναι μηδενικές, όπως αναμενόταν, καθώς δεν ορίστηκε καμία γωνιακή ταχύτητα για αυτούς τους άξονες.

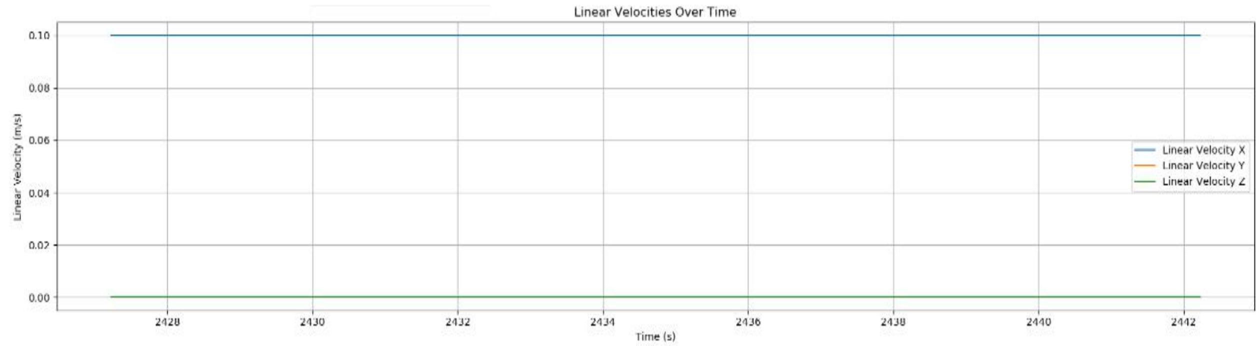
**<u>Εκτέλεση της παραπάνω εντολής για:</u>**

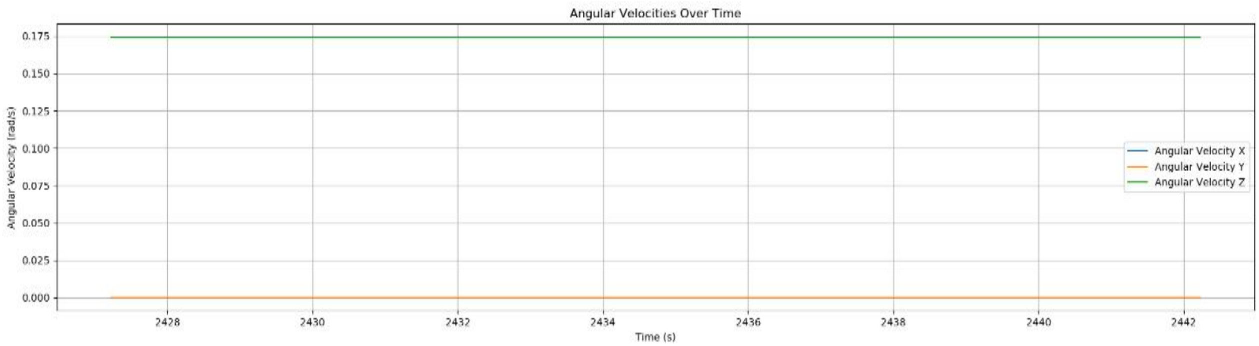
rate_hz = 10 Hz

linear_velocity = 0.1 m/sec

angular_velocity_deg = 10°/sec

duration = 15 sec




## 2.1 Υλοποίηση τριών διαφορετικών τροχιών

Για την ανάπτυξη της λύσης θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο των γραμμικών συναρτήσεων με παραβολικά τμήματα, λαμβάνοντας υπόψη τις παραμέτρους που δίνονται από τον Πίνακα 2 και τον αριθμό μητρώου (AM=5351) για τον καθορισμό των χρονικών παραμέτρων. Οι αρχικές συνθήκες, λοιπόν, θα είναι οι εξής:

Αρχική Θέση : $(x_0,y_0)$,

Τελική Θέση : $(x_f,y_f)$,

Αρχικός Προσανατολισμός : $\theta_0$,

Τελικός Προσανατολισμός : $\theta_f$,

Μέγιστη Γραμμική Ταχύτητα : 0.2m/sec

Μέγιστη Γωνιακή Ταχύτητα : 30°/sec

Οι χρονικές παράμετροι, και για τις 3 τροχιές που καλούμαστε να υπολογίσουμε, ορίζονται ως εξής:

Συνολικός χρόνος κάθε διαδρομής : $t_f$

Χρόνος επιτάχυνσης/επιβράδυνσης : $t_b = 0.1 \cdot t_f$

**Περιστροφή του Robot:**

Η πρώτη τροχιά θα περιγράφει την περιστροφή του robot, έτσι ώστε να «κοιτάξει» μία δοσμένη τελική θέση ($x_f$,$y_f$). Θα ισχύουν τα κάτωθι:

Για την τελική γωνιακή θέση ($\theta_f$), οι τιμές προκύπτουν από τον πίνακα 2, άρα ισχύει:

$$\theta_f = \tan^{-1}\left(\frac{y_f}{x_f}\right) = \tan^{-1}(3/5) = 0.54 \text{ rad}$$

Για την μέγιστη γωνιακή ταχύτητα ($\dot{\theta}_{max}$), η οποία δίνεται στην εκφώνηση, ισχύει:

$$\dot{\theta}_{max} = 30°/\text{sec} = 30 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{6} \text{ rad/sec}$$

Η μαθηματική διατύπωση της τροχιάς, θα είναι η εξής:

$$\theta_{(t)} = \left\{\begin{matrix} \theta_0 + \frac{\ddot{\theta}}{2}t^2 \quad ,0 \le t \le t_b \\ \theta_0 + \frac{\ddot{\theta}}{2}t_b^2 + \ddot{\theta}t_b(t - t_b) \quad , t_b < t \le t_f - t_b \\ \theta_f - \frac{\ddot{\theta}}{2}\left(t_f - t\right)^2, \ t_f - t_b < t \le t_f \end{matrix}\right\}$$

Για την χρονική στιγμή $t = t_b$, ισχύει:

$$\dot{\theta}_{coast} = \frac{\theta_h - \theta_b}{t_h - t_b} = \ddot{\theta} \cdot t_b,$$

$$\theta_h = \frac{\theta_f + \theta_0}{2},$$

$$t_h = \frac{t_f}{2},$$

$$\boldsymbol{\theta_b = \theta_0 + \frac{1}{2} \cdot \ddot{\theta}} \cdot t_b^2$$

Λύνοντας για $t_b$, προκύπτει το εξής:

$$t_b = \frac{t_f}{2} - \frac{\sqrt{(\ddot{\theta}2 \cdot t_f^2 - 4 \cdot \ddot{\theta} \cdot (\theta_f - \theta_0))}}{2\ddot{\theta}}$$

άρα ισχύει ότι:

$$\theta_{\left(\frac{t_f}{2}\right)} = \frac{\theta_f + \theta_0}{2} = \theta_0 + \frac{\ddot{\theta}}{2} t_b^2 + \ddot{\theta} t_b \left(\frac{t_f}{2} - t_b\right) \quad =>$$

$$\theta_0 + \theta_f = 2\theta_0 + \ddot{\theta} t_b^2 + \ddot{\theta} t_b t_f - 2\ddot{\theta} t_b^2 =>$$

$$\ddot{\theta} = \frac{\theta_f - \theta_0}{t_b(t_f - t_b)} \ (1)$$

Επιλέγω $t_b = 0.1 \cdot t_f$ και $\theta_f = 0.54$ rad. Από (1), ισχύει ότι:

$$\ddot{\theta} = \frac{\theta_f - \theta_0}{t_b(t_f - t_b)} = \frac{0.54}{0.09 t_f^2} = \frac{6}{t_f^2} \ (2)$$

Έχοντας την μέγιστη γωνιακή ταχύτητα $\dot{\theta}_{max} = \frac{\pi}{6}$ rad/sec, ισχύει ότι:

$$\dot{\theta}_{max} = \ddot{\theta}_{max} \cdot t_b \leftrightarrow \ddot{\theta}_{max} = \frac{\dot{\theta}_{max}}{0.1 \cdot t_f} \leftrightarrow \ddot{\theta}_{max} = \frac{\frac{\pi}{6}}{0.1 \cdot t_f} \leftrightarrow \ddot{\theta}_{max} = \frac{\pi}{0.6 \cdot t_f} \text{ rad}/sec^2 \ (3)$$

Όμως, πρέπει ταυτόχρονα να ισχύει το εξής:

$$|\ddot{\theta}| \leq |\ddot{\theta}_{\max.}| \xRightarrow{(2),(3)} \frac{6}{t_f^2} \leq \frac{\pi}{0.6t_f} \leftrightarrow \frac{t_f^2}{6} \geq \frac{0.6t_f}{\pi} \leftrightarrow t_f \cdot \pi \geq 3.6 \leftrightarrow t_f \geq 1.2\ sec$$

Για $t_f$ = 1.2 sec και $t_b$ = 0.12 sec, από την σχέση (1), ισχύει ότι:

$$\ddot{\theta} \cong \frac{0.54}{0.1296} = 4.16 \text{ rad/sec}^2$$

Για το $\dot{\theta}_{coast}$, ισχύουν τα κάτωθι:

$$\dot{\theta}_{coast} = \frac{6}{1.2^2} \cdot 0.12 = 0.5 \leq 0.52 \text{ rad/sec, ΙΣΧΎΕΙ}$$

Επομένως, η τροχιά γίνεται:

$$\theta_{(t)} = \left\{ \begin{array}{cc} \theta_0 + \frac{\ddot{\theta}}{2} t^2 & ,0 \leq t \leq t_b \\ \theta_0 + \frac{\ddot{\theta}}{2} t_b^2 + \ddot{\theta} t_b (t - t_b) & ,t_b < t \leq t_f - t_b \\ \theta_f - \frac{\ddot{\theta}}{2}\left(t_f - t\right)^2 & ,\ t_f - t_b < t \leq t_f \end{array} \right\}$$

$$\theta_{(t)} = \left\{ \begin{array}{cc} \frac{4.16}{2} t^2 & ,0 \leq t \leq 0.12 \\ \frac{4.16}{2} 0.12^2 + 4.16 \cdot 0.12(t - 0.12) & ,0.12 < t \leq 1.08 \\ 0.54 - \frac{4.16}{2}(1.2 - t)^2 & ,1.08 < t \leq 1.2 \end{array} \right\}$$

$$\theta_{(t)} = \left\{ \begin{array}{cc} 2.08 t^2 & ,0 \leq t \leq 0.12 \\ 2.08 \cdot 0.12^2 + 4.16 \cdot 0.12(t - 0.12) & ,0.12 < t \leq 1.08 \\ 0.54 - 2.08(1.2 - t)^2 & ,\ 1.08 < t \leq 1.2 \end{array} \right\}$$

$$\theta_{(t)} = \begin{cases} 2.08t^2 & ,0 \leq t \leq 0.12 \\ 0.029 + 0.49(t - 0.12) & ,0.12 < t \leq 1.08 \\ 0.54 - 0.81(1.2 - t)^2 & ,\ 1.08 < t \leq 1.2 \end{cases}$$

$$\dot{\theta}_{(t)} = \begin{cases} 4.16t & ,0 \leq t \leq 0.12 \\ 0.49 & ,0.12 < t \leq 1.08 \\ 1.62t + 1.94 & ,\ 1.08 < t \leq 1.2 \end{cases}$$

$$\ddot{\theta}_{(t)} = \begin{cases} 4.16 & ,0 \leq t \leq 0.12 \\ 0 & ,0.12 < t \leq 1.08 \\ 1.62 & ,\ 1.08 < t \leq 1.2 \end{cases}$$

**Γραμμική Κίνηση του Robot:**

Η δεύτερη τροχιά θα περιγράφει την γραμμική κίνηση του robot, έτσι ώστε να φτάσει στην δοσμένη τελική θέση ($x_f$,$y_f$). Θα ισχύουν τα κάτωθι:

Για την αρχική και την τελική θέση, οι τιμές προκύπτουν από τον πίνακα 2, άρα ισχύει:

Αρχική Θέση : (0,0) Τελική Θέση : (5,3)

Για την μέγιστη γραμμική ταχύτητα, η οποία δίνεται στην εκφώνηση, ισχύει:

$V_{max}$ = 0.2 m/sec

Η ταχύτητα, μπορεί να αναλυθεί σε δύο συνιστώσες, την $\dot{x}$ και $\dot{y}$, οι οποίες είναι:

$\dot{x}$ = cos(θ)·V = $\frac{5}{\sqrt{34}} \cdot$ V $\dot{y}$ = sin(θ)·V = $\frac{3}{\sqrt{34}} \cdot$ V

Οι μέγιστες τιμές των παραπάνω συνιστωσών, με την χρήση της $V_{max}$, θα είναι οι εξής:

$\dot{x}_{max}$ = cos(θ) · $V_{max}$ = 0.171 m/sec   $\dot{y}_{max}$ = sin(θ) · $V_{max}$ = 0.103 m/sec

Η μαθηματική διατύπωση της τροχιάς, θα είναι η εξής:

$$x_{(t)} = \begin{Bmatrix} x_0 + \frac{\ddot{x}}{2}t^2 \quad ,0 \le t \le t_b \\ x_0 + \frac{\ddot{x}}{2}t_b^2 + \ddot{x}t_b(t - t_b) \quad ,t_b < t \le t_f - t_b \\ x_f - \frac{\ddot{x}}{2}\left(t_f - t\right)^2 ,\ t_f < t \le t_f \end{Bmatrix}$$

$$y_{(t)} = \begin{Bmatrix} y_0 + \frac{\ddot{y}}{2}t^2 \quad ,0 \le t \le t_b \\ y_0 + \frac{\ddot{y}}{2}t_b^2 + \ddot{y}t_b(t - t_b) \quad ,t_b < t \le t_f - t_b \\ y_f - \frac{\ddot{y}}{2}\left(t_f - t\right)^2 ,\ t_f - t_b < t \le t_f \end{Bmatrix}$$

Για την χρονική στιγμή t = $\frac{t_f}{2}$, ισχύει:

$$x_{\left(\frac{t_f}{2}\right)} = \frac{x_f + x_0}{2} = x_0 + \frac{\ddot{x}}{2}t_b^2 + \ddot{x}t_b\left(\frac{t_f}{2} - t_b\right) \quad =>$$

$$x_0 + x_f = 2x_0 + \ddot{x}t_b^2 + \ddot{x}t_bt_f - 2\ddot{x}t_b^2 =>$$

$$\ddot{x} = \frac{x_f - x_0}{t_b(t_f - t_b)} \ (1)$$

Επιλέγω $t_b$ = 0.1 · $t_f$ και $x_f$ = 5 m. Από (1), ισχύει ότι:

$$\ddot{x} = \frac{x_f - x_0}{t_b(t_f - t_b)} = \frac{5}{0.09t_f^2} = \frac{55.5}{t_f^2} \ (2)$$

Ομοίως, επιλέγω $t_b = 0.1 \cdot t_f$ και $y_f$ = 0.54 rad. Από (1), ισχύει ότι:

$$\ddot{y} = \frac{y_f - y_0}{t_b(t_f - t_b)} = \frac{3}{0.09t_f^2} = \frac{33.3}{t_f^2} \ (3)$$

Έχοντας την μέγιστη ταχύτητα $\dot{x}_{max}$= 0.171 m/sec, ισχύει ότι:

$$\dot{x}_{max} = \ddot{x}_{\max.} t_b \leftrightarrow \ddot{x}_{\max.} = \frac{0.171}{0.1t_f} \leftrightarrow \ddot{x}_{\max.} = \frac{1.71}{t_f} \ (4)$$

Όμως, πρέπει ταυτόχρονα να ισχύει το εξής:

$$|\ddot{x}| \le |\ddot{x}_{\max.}| \xRightarrow{(2),(4)} \frac{55.5}{t_f^2} \le \frac{1.71}{t_f} \leftrightarrow \frac{t_f^2}{55.5} \ge \frac{t_f}{1.71} \leftrightarrow t_f \ge \frac{55.5}{1.71} = 32.45 \ (5)$$

Έχοντας την μέγιστη ταχύτητα $\dot{y}_{max}$= 0.103 m/sec, ισχύει ότι:

$$\dot{y}_{max} = \ddot{y}_{\max.} t_b \leftrightarrow \ddot{y}_{\max.} = \frac{0.103}{0.1t_f} \leftrightarrow \ddot{y}_{\max.} = \frac{1.03}{t_f} \ (6)$$

Όμως, πρέπει ταυτόχρονα να ισχύει το εξής:

$$|\ddot{y}| \le |\ddot{y}_{\max.}| \xRightarrow{(3),(6)} \frac{33.3}{t_f^2} \le \frac{1.03}{t_f} \leftrightarrow \frac{t_f^2}{33.3} \ge \frac{t_f}{1.03} \leftrightarrow t_f \ge \frac{33.3}{1.03} = 32.33 \ (7)$$

Για να ικανοποιήσουμε ταυτόχρονα τις σχέσεις (5) και (7), επιλέγουμε $t_f$ = 32 sec, δηλαδή $t_b$ = 3.2 sec. Επομένως, από τις σχέσεις (2) και (3), θα ισχύουν τα κάτωθι:

$$\ddot{x} = \frac{x_f - x_0}{t_b(t_f - t_b)} = \frac{5}{0.09t_f^2} = \frac{55.5}{1024} = 0.05 \text{ m/sec}^2$$

$$\dot{x}_{coast} = \ddot{x}t_b = 0.05 \cdot 3.2 = 0.16\, m/sec \le 0.171 \text{ m/sec, ΙΣΧ'ΥΕΙ}$$

$$\ddot{x}_{\min} = \frac{4|x_f - x_0|}{t_f^2} = 4 \cdot \frac{5}{32^2} = 0.02 \text{ m/sec}^2$$

$$(4):\ \ddot{x}_{\max.} = \frac{1.71}{32} = 0.05\ \mathrm{m/sec^2}$$

$$\ddot{y} = \frac{y_f - x_0}{t_b(t_f - t_b)} = \frac{3}{0.09t_f^2} = \frac{3.33}{1024} = 0.03\ \mathrm{m/sec^2}$$

$$\dot{y}_{coast} = \ddot{y}t_b = 0.03 \cdot 3.2 = 0.096\ m/sec \leq \text{0.103 m/sec, ΙΣΧΎΕΙ}$$

$$\ddot{y}_{\min} = \frac{4|y_f - x_0|}{t_f^2} = 4 \cdot \frac{3}{1024} = 0.012\ \mathrm{m/sec^2}$$

$$(4):\ \ddot{y}_{\max.} = \frac{1.03}{32} = 0.032\ \mathrm{m/sec^2}$$

Πράγματι, έπειτα από τις παραπάνω πράξεις, προκύπτουν τα εξής:

$$\ddot{x}_{\min} \leq \ddot{x} \leq \ \ddot{x}_{max}$$

$$\ddot{y}_{\min} \leq \ddot{y} \leq \ \ddot{y}_{max}$$

**και**

$$\dot{x}_{coast} = 0.16 \leq \dot{x}_{max} = 0.171\ \text{m/sec}$$

$$\dot{y}_{coast} = 0.096 \leq \dot{y}_{max} = 0.103\ \text{m/sec}$$

Επομένως, οι τροχιές γίνονται:

$$x_{(t)} = \left\{\begin{matrix} \frac{0.05}{2}t^2 \quad ,0 \leq t \leq 3.2 \\ \frac{0.05}{2}(3.2)^2 + 0.05 \cdot 3.2(t - 3.2) \ \ ,3.2 < t \leq 28.8 \\ 5 - \frac{0.05}{2}(32 - t)^2,\ 28.8 < t \leq 32 \end{matrix}\right\}$$

$$x_{(t)} = \begin{Bmatrix} 0.025t^2 \quad ,0 \le t \le 3.2 \\ 0.16t - 0.256 \quad , 3.2 < t \le 28.8 \\ 5 - 0.025(1024 - 64t \ + \ t^2) \ , \ 28.8 < t \le 32 \end{Bmatrix}$$

$$x_{(t)} = \begin{Bmatrix} 0.025t^2 \quad ,0 \le t \le 3.2 \\ 0.16t - 0.256 \quad , 3.2 < t \le 28.8 \\ -0.025t^2 + 1.6t - 20.6 \ , \ 28.8 < t \le 32 \end{Bmatrix}$$

$$\dot{x}_{(t)} = \begin{Bmatrix} 0.05t \quad ,0 \le t \le 3.2 \\ 0.16 \quad , 3.2 < t \le 28.8 \\ -0.05t + 1.6 \ , \ 28.8 < t \le 32 \end{Bmatrix}$$

$$\ddot{x}_{(t)} = \begin{Bmatrix} 0.05 \quad ,0 \le t \le 3.2 \\ 0 \quad , 3.2 < t \le 28.8 \\ -0.05 \ , \ 28.8 < t \le 32 \end{Bmatrix}$$

$$y_{(t)} = \begin{Bmatrix} \frac{0.03}{2}t^2 \quad ,0 \le t \le 3.2 \\ \frac{0.03}{2}(3.2)^2 + 0.03 \cdot 3.2(t - 3.2) \quad , 3.2 < t \le 28.8 \\ 3 - \frac{0.03}{2}(32 - t)^2 \ , \ 28.8 < t \le 32 \end{Bmatrix}$$

$$y_{(t)} = \begin{Bmatrix} 0.015t^2 \quad ,0 \le t \le 3.2 \\ 0.096t - 0.1248 \quad , 3.2 < t \le 28.8 \\ 3 - 0.015(1024 - 64t \ + \ t^2) \ , \ 28.8 < t \le 32 \end{Bmatrix}$$

$$y_{(t)} = \begin{Bmatrix} 0.015t^2 \quad ,0 \le t \le 3.2 \\ 0.096t - 0.1248 \quad , 3.2 < t \le 28.8 \\ -0.015t^2 + 0.96t - 12.36 \ , \ 28.8 < t \le 32 \end{Bmatrix}$$

$$\dot{y}_{(t)} = \begin{Bmatrix} 0.03t \quad ,0 \leq t \leq 3.2 \\ 0.096 \quad ,3.2 < t \leq 28.8 \\ -0.03t + 0.96\, ,\ 28.8 < t \leq 32 \end{Bmatrix}$$

$$\ddot{y}_{(t)} = \begin{Bmatrix} 0.03 \quad ,0 \leq t \leq 3.2 \\ 0 \quad ,3.2 < t \leq 28.8 \\ -0.03\, ,\ 28.8 < t \leq 32 \end{Bmatrix}$$

**<u>Τελική Περιστροφή του Robot:</u>**

Η τρίτη τροχιά, θα περιγράφει την τελική περιστροφή του robot, αφού δηλαδή έχει ήδη φτάσει στην τελική θέση ($x_f$,$y_f$). Θα ισχύουν τα κάτωθι:

Για την αρχική και τελική γωνιακή θέση, οι τιμές προκύπτουν από τον πίνακα 2, άρα ισχύει:

$$\theta_0 = 0.54 \text{ rad} \qquad \theta_f = \text{round}(\frac{5351}{3500}) = 1.5 \text{ rad}$$

Για την μέγιστη γωνιακή ταχύτητα ($\dot{\theta}_{max}$), η οποία δίνεται στην εκφώνηση, ισχύει:

$$\dot{\theta}_{max} = 30°/\text{sec} = 30 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{6} \text{ rad/sec}$$

Η μαθηματική διατύπωση της τροχιάς, θα είναι η εξής:

$$\theta_{(t)} = \begin{Bmatrix} \theta_0 + \frac{\ddot{\theta}}{2}t^2 \quad ,0 \le t \le t_b \\ \theta_0 + \frac{\ddot{\theta}}{2}t_b^2 + \ddot{\theta}t_b(t - t_b) \quad ,t_b < t \le t_f - t_b \\ \theta_f - \frac{\ddot{\theta}}{2}\left(t_f - t\right)^2 ,\ t_f - t_b < t \le t_f \end{Bmatrix}$$

Για την χρονική στιγμή $t = t_b$, ισχύει:

$$\dot{\theta}_{coast} = \frac{\theta_h - \theta_b}{t_h - t_b} = \ddot{\theta} \cdot t_b,$$

$$\theta_h = \frac{\theta_f + \theta_0}{2},$$

$$t_h = \frac{t_f}{2},$$

$$\boldsymbol{\theta_b = \theta_0 + \frac{1}{2} \cdot \ddot{\theta}} \cdot t_b^2$$

Λύνοντας για $t_b$, προκύπτει το εξής:

$$t_b = \frac{t_f}{2} - \frac{\sqrt{(\ddot{\theta}2 \cdot t_f^2 - 4 \cdot \ddot{\theta} \cdot (\theta_f - \theta_0))}}{2\ddot{\theta}}$$

άρα ισχύει ότι:

$$\theta_{\left(\frac{t_f}{2}\right)} = \frac{\theta_f + \theta_0}{2} = \theta_0 + \frac{\ddot{\theta}}{2} t_b^2 + \ddot{\theta} t_b \left(\frac{t_f}{2} - t_b\right) \quad =>$$

$$\theta_0 + \theta_f = 2\theta_0 + \ddot{\theta} t_b^2 + \ddot{\theta} t_b t_f - 2\ddot{\theta} t_b^2 =>$$

$$\ddot{\theta} = \frac{\theta_f - \theta_0}{t_b(t_f - t_b)} \ (1)$$

Επιλέγω $t_b$ = 0.1 · $t_f$ και $\theta_f$ = 0.54 rad. Από (1), ισχύει ότι:

$$\ddot{\theta} = \frac{\theta_f - \theta_0}{t_b(t_f - t_b)} = \frac{0.96}{0.09 t_f^2} = \frac{10.6}{t_f^2} \quad (2)$$

Έχοντας την μέγιστη γωνιακή ταχύτητα $\dot{\theta}_{max} = \frac{\pi}{6}$ rad/sec, ισχύει ότι:

$$\dot{\theta}_{max} = \ddot{\theta}_{max} \cdot t_b \leftrightarrow \ddot{\theta}_{max} = \frac{\dot{\theta}_{max}}{0.1 \cdot t_f} \leftrightarrow \ddot{\theta}_{max} = \frac{\frac{\pi}{6}}{0.1 \cdot t_f} \leftrightarrow \ddot{\theta}_{max} = \frac{\pi}{0.6 \cdot t_f} \text{ rad}/sec^2 \ (3)$$

Όμως, πρέπει ταυτόχρονα να ισχύει το εξής:

$$\left|\ddot{\theta}\right| \leq \left|\ddot{\theta}_{max.}\right| \xRightarrow{(2),(3)} \frac{10.6}{t_f^2} \leq \frac{\pi}{0.6 t_f} \leftrightarrow \frac{t_f^2}{10.6} \geq \frac{0.6 t_f}{\pi} \leftrightarrow t_f \cdot \pi \geq 6.36 \leftrightarrow t_f \geq 2.02\ sec$$

Για $t_f$ = 2.02 sec και $t_b$ = 0.202 sec, από την σχέση (1), ισχύει ότι:

$$\ddot{\theta} \cong \frac{10.6}{4.1} = 2.58 \text{ rad/sec}^2$$

Επομένως, η τροχιά γίνεται:

$$\theta_{(t)} = \begin{Bmatrix} \theta_0 + \frac{\ddot{\theta}}{2}t^2 & ,0 \le t \le t_b \\ \theta_0 + \frac{\ddot{\theta}}{2}t_b^2 + \ddot{\theta}t_b(t - t_b) & ,t_b < t \le t_f - t_b \\ \theta_f - \frac{\ddot{\theta}}{2}\left(t_f - t\right)^2 & ,\ t_f - t_b < t \le t_f \end{Bmatrix}$$

$$\theta_{(t)} = \begin{Bmatrix} 0.54 + \frac{2.58}{2}t^2 & ,0 \le t \le 0.202 \\ 0.54 + \frac{2.58}{2}0.202^2 + 2.58 \cdot 0.202(t - 0.202) & ,0.202 < t \le 1.818 \\ 1.5 - \frac{2.58}{2}(2.02 - t)^2 & ,1.818 < t \le 2.02 \end{Bmatrix}$$

$$\theta_{(t)} = \begin{Bmatrix} 0.54 + 1.29t^2 & ,0 \le t \le 0.202 \\ 0.54 + 0.052 + 0.52t - 0.1 & ,0.202 < t \le 1.818 \\ 1.5 - 1.29(4.08 - 4.04t + t^2) & ,\ 1.818 < t \le 2.02 \end{Bmatrix}$$

$$\theta_{(t)} = \begin{Bmatrix} 1.29t^2 + 0.54 & ,0 \le t \le 0.202 \\ 0.52t + 0.49 & ,0.12 < t \le 1.08 \\ -1.29t^2 + 5.2t - 3.76 & ,\ 1.818 < t \le 2.02 \end{Bmatrix}$$

$$\dot{\theta}_{(t)} = \begin{Bmatrix} 2.58t & ,0 \le t \le 0.202 \\ 0.52 & ,0.12 < t \le 1.08 \\ -2.58t + 5.2 & ,\ 1.818 < t \le 2.02 \end{Bmatrix}$$

$$\ddot{\theta}_{(t)} = \begin{Bmatrix} 2.58 & ,0 \le t \le 0.202 \\ 0 & ,\ 0.12 < t \le 1.08 \\ -2.58 & ,\ 1.818 < t \le 2.02 \end{Bmatrix}$$

## 2.2 Υλοποίηση του trajectories_jackal.py

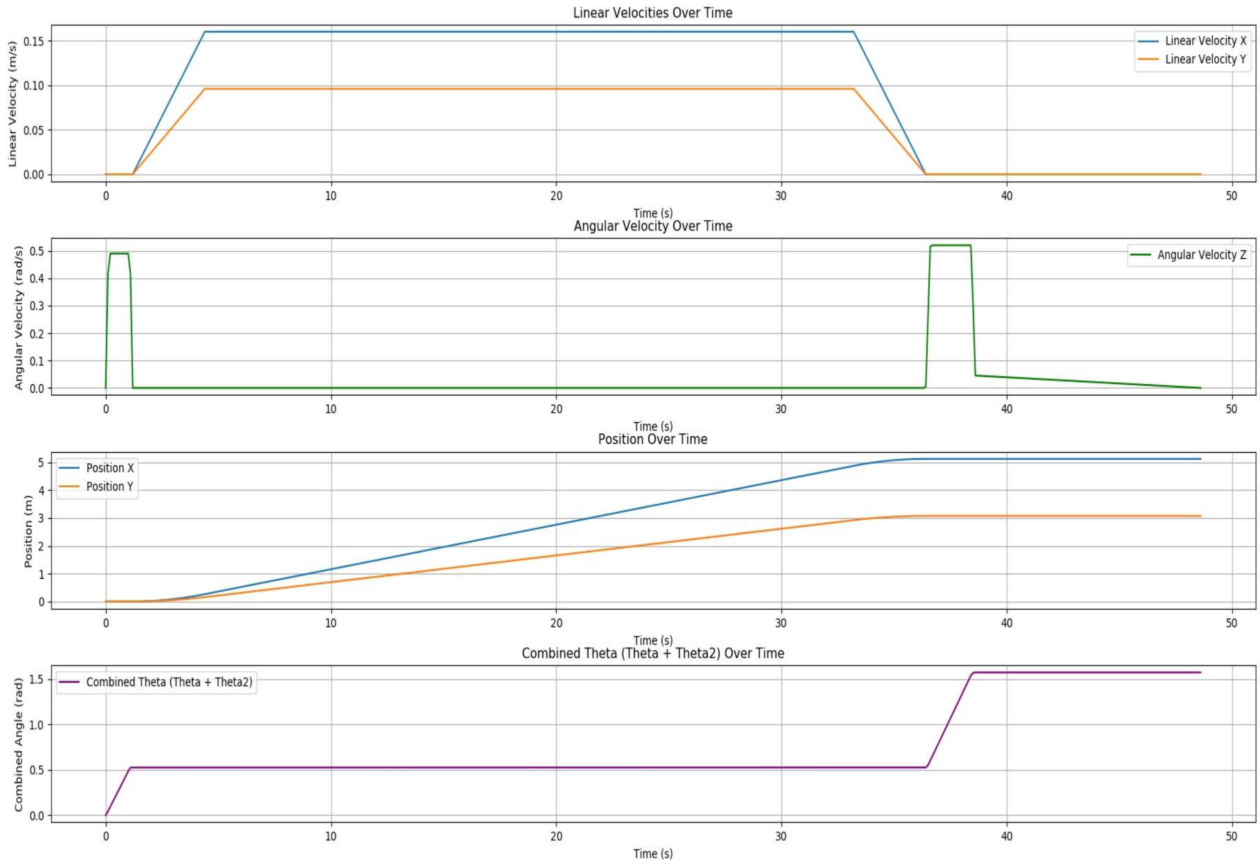
Η ανάπτυξη του προγράμματος 'trajectories_jackal.py', μας βοηθάει στην κίνηση του τροχοφόρου robot και την καταγραφή δεδομένων ταχύτητας και θέσης.

Το πρόγραμμα αυτό χρησιμοποιεί βιβλιοθήκες όπως rospy (για τον έλεγχο του ROS), std_srvs.srv (για κλήσεις κενών υπηρεσιών), matplotlib.pyplot (για την εμφάνιση γραφημάτων) και geometry_msgs.msg (για μηνύματα ταχύτητας).

Το πρόγραμμα ξεκινά με την εισαγωγή των απαραίτητων βιβλιοθηκών και στη συνέχεια αποθηκεύει δεδομένα ταχύτητας και θέσης σε λίστες. Επίσης, αρχικοποιεί τις γωνίες και τις θέσεις x, y για την αποθήκευση των τροχιών. Ακολουθεί ο ορισμός της συνάρτησης reset_gazebo_simulation_time, η οποία περιμένει την υπηρεσία επαναφοράς προσομοίωσης του Gazebo να γίνει διαθέσιμη και στη συνέχεια την καλεί για επαναφορά της προσομοίωσης. Υπάρχουν διάφορες άλλες συναρτήσεις που χειρίζονται την κίνηση και την καταγραφή δεδομένων του robot.

Η εντολή που πρέπει να εκτελέσουμε στο terminal, για την σωστή λειτουργία του robot, είναι:

```
python3 trajectories_jackal.py
```




Το πρώτο διάγραμμα απεικονίζει τη γραμμική ταχύτητα στους άξονες X και Y με την πάροδο του χρόνου. Η ταχύτητα στον άξονα X (με μπλε γραμμή) αυξάνεται απότομα στην αρχή, φθάνοντας την τιμή 0,15 m/s περίπου στο 5ο δευτερόλεπτο και διατηρείται σταθερή μέχρι το 40ο δευτερόλεπτο, όπου μειώνεται απότομα και μηδενίζεται. Αντίστοιχα, η ταχύτητα στον άξονα Y (με πορτοκαλί γραμμή) αυξάνεται επίσης στην αρχή, αλλά φθάνει την τιμή 0,1 m/s, διατηρώντας σταθερή τιμή μέχρι και αυτή το 40ο δευτερόλεπτο όπου και αυτή μηδενίζεται.

Στο δεύτερο διάγραμμα απεικονίζεται η γωνιακή ταχύτητα στον άξονα Z (με πράσινη γραμμή). Η γωνιακή ταχύτητα παρουσιάζει απότομη αύξηση στην αρχή, φθάνοντας την τιμή 0,5 rad/s περίπου στο 2ο δευτερόλεπτο και ακολούθως μειώνεται ξαφνικά στο μηδέν. Παραμένει μηδενική μέχρι το 35ο δευτερόλεπτο, οπότε σημειώνεται ακόμα μία αιχμή στην ίδια τιμή, και τελικά επανέρχεται πάλι στο μηδέν.

Το τρίτο διάγραμμα δείχνει τη θέση στους άξονες X και Y με την πάροδο του χρόνου. Η θέση στον άξονα X (με μπλε γραμμή) αυξάνεται σταθερά από το μηδέν έως περίπου 5 μέτρα στο 40ο δευτερόλεπτο, και παραμένει σταθερή μέχρι το τέλος της μέτρησης. Η θέση στον άξονα Y (με πορτοκαλί γραμμή) αυξάνεται επίσης σταθερά αλλά σε χαμηλότερη κλίμακα, φθάνοντας περίπου τα 3 μέτρα στο ίδιο χρονικό διάστημα, και παραμένει σταθερή μέχρι το τέλος.

Το τέταρτο διάγραμμα παρουσιάζει τη συνδυασμένη γωνία Θήτα (άθροισμα δύο γωνιών) με την πάροδο του χρόνου. Η γωνία αυτή αυξάνεται απότομα από το μηδέν στην τιμή 0,5 rad στην αρχή και διατηρείται σταθερή μέχρι το 35ο δευτερόλεπτο, όπου αυξάνεται απότομα στην τιμή 1,0 rad, και τελικά σταθεροποιείται στην τιμή 1,5 rad μέχρι το τέλος της μέτρησης.

# 3.0 Υλοποίηση του move_rrbot_joint.py

Το πρόγραμμα ξεκινά με την εισαγωγή των απαραίτητων βιβλιοθηκών, όπως η sys (χρησιμοποιείται για την πρόσβαση σε επιχειρήματα γραμμής εντολών και την έξοδο από το πρόγραμμα), η rospy (Python βιβλιοθήκη για το ROS που επιτρέπει την επικοινωνία με άλλους κόμβους στο ROS δίκτυο),η numpy (χρησιμοποιείται για αριθμητικές πράξεις, συγκεκριμένα για τη δημιουργία πινάκων γωνιών αρθρώσεων), η matplotlib.pyplot (χρησιμοποιείται για τη δημιουργία γραφικών παραστάσεων των θέσεων των αρθρώσεων σε συνάρτηση με τον χρόνο) και η std_msgs.msg (περιέχει τον τύπο μηνυμάτων Float64, που χρησιμοποιείται για τη δημοσίευση των θέσεων των αρθρώσεων).

Έπειτα, το πρόγραμμα προχωρά στην αρχικοποίηση τριών λιστών για την αποθήκευση δεδομένων, time_data, q1_data και q2_data. Χρησιμοποιούνται για την καταγραφή του χρόνου και των θέσεων των δύο αρθρώσεων κατά τη διάρκεια της εκτέλεσης του προγράμματος. Στη συνέχεια, αρχικοποιείται ένας κόμβος ROS με το όνομα "robot_move2", ο οποίος είναι ανώνυμος για να επιτρέψει την πολλαπλή εκτέλεση κόμβων με το ίδιο όνομα χωρίς σύγκρουση.

Η εντολή που πρέπει να εκτελέσουμε στο terminal, για την σωστή λειτουργία του βραχίονα, είναι:

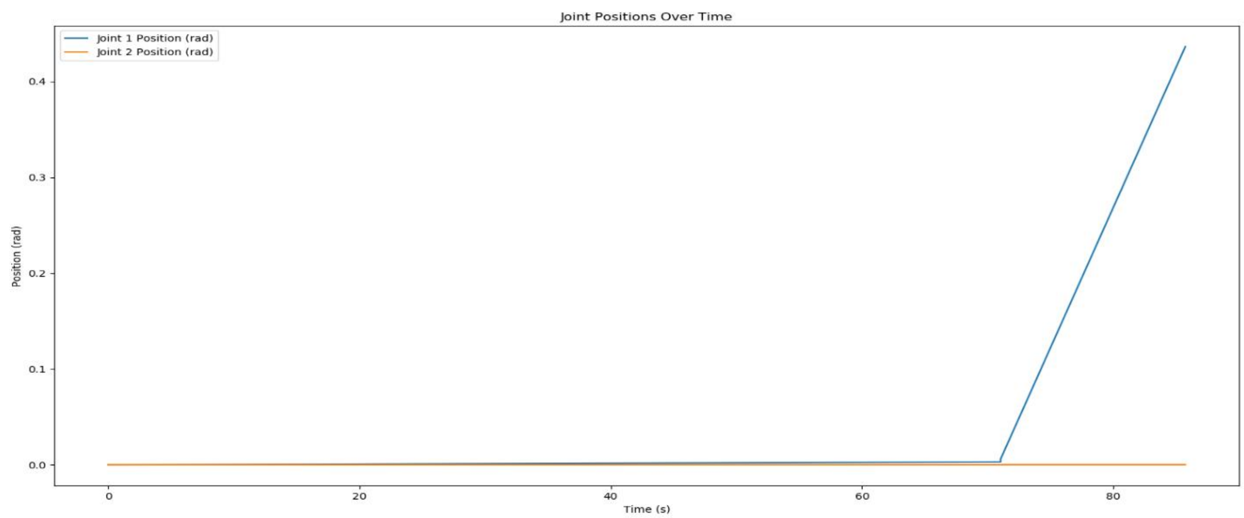
```
python3 move_rrbot_joint.py <joint_type> <start_angle_degrees> <end_angle_degrees>
```

**<u>Εκτέλεση της παραπάνω εντολής για:</u>**

joint_type = q1

start_angle_degrees = 0°

end_angle_degrees = 25°




Το γράφημα δείχνει τις θέσεις των δύο αρθρώσεων του ρομποτικού βραχίονα σε συνάρτηση με τον χρόνο. Στον οριζόντιο άξονα (X) αναπαρίσταται ο χρόνος σε δευτερόλεπτα, ενώ στον κατακόρυφο άξονα (Y) αναπαρίσταται η θέση των αρθρώσεων σε ακτίνια (rad).

Η μπλε καμπύλη αναπαριστά τη θέση της άρθρωσης 1 (Joint 1 Position) σε ακτίνια. Παρατηρούμε ότι η θέση της άρθρωσης 1 παραμένει σταθερή στο 0 για μεγάλο χρονικό διάστημα και στη συνέχεια αυξάνεται απότομα μετά από περίπου 80 δευτερόλεπτα, φτάνοντας περίπου στα 0.45 rad. Αυτή η απότομη αύξηση δείχνει ότι η άρθρωση 1 ξεκίνησε να κινείται μετά από ένα μεγάλο χρονικό διάστημα αδράνειας.

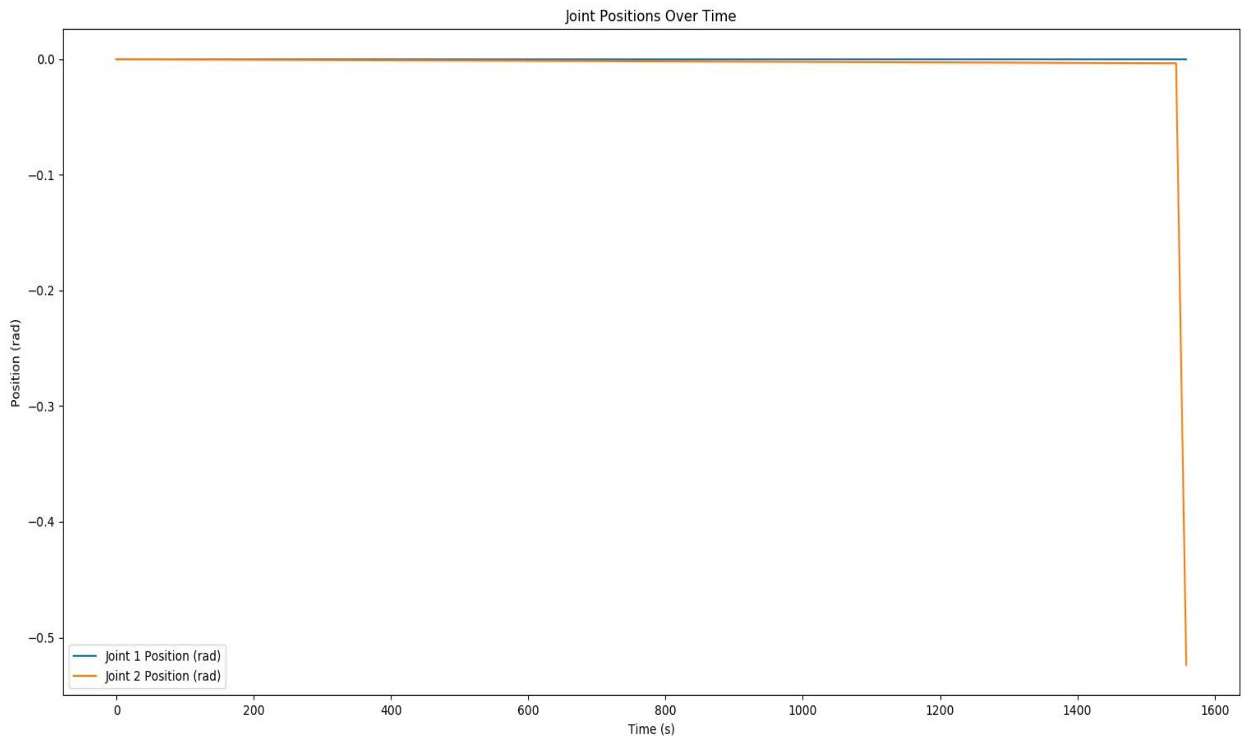
Η πορτοκαλί καμπύλη αναπαριστά τη θέση της άρθρωσης 2 (Joint 2 Position) σε ακτίνια. Παρατηρούμε ότι η θέση της άρθρωσης 2 παραμένει σταθερή στο 0 καθ' όλη τη διάρκεια του χρόνου που απεικονίζεται στο γράφημα. Αυτό υποδεικνύει ότι η άρθρωση 2 δεν κινήθηκε κατά τη διάρκεια της εκτέλεσης του προγράμματος και παρέμεινε σε σταθερή θέση.

**<u>Εκτέλεση της παραπάνω εντολής για:</u>**

joint_type = q2

start_angle_degrees = 0°

end_angle_degrees = -30°




Το γράφημα δείχνει τις θέσεις των δύο αρθρώσεων του ρομποτικού βραχίονα σε συνάρτηση με τον χρόνο. Στον οριζόντιο άξονα (X) αναπαρίσταται ο χρόνος σε δευτερόλεπτα, ενώ στον κατακόρυφο άξονα (Y) αναπαρίσταται η θέση των αρθρώσεων σε ακτίνια (rad).

Η μπλε καμπύλη αναπαριστά τη θέση της άρθρωσης 1 (Joint 1 Position) σε ακτίνια. Παρατηρούμε ότι η θέση της άρθρωσης 1 παραμένει σταθερή στο 0 για όλο το χρονικό διάστημα.

Η πορτοκαλί καμπύλη αναπαριστά τη θέση της άρθρωσης 2 (Joint 2 Position) σε ακτίνια. Παρατηρούμε ότι η θέση της άρθρωσης 2 παραμένει επίσης σταθερή στο 0 για μεγάλη διάρκεια. Στο τέλος της γραφικής παράστασης, η θέση της άρθρωσης 2 μειώνεται επίσης απότομα, φτάνοντας περίπου στις -0.5 rad. Αυτή η απότομη αλλαγή δείχνει ότι η άρθρωση 2 επίσης ξεκίνησε να κινείται μετά από ένα μεγάλο χρονικό διάστημα αδράνειας.

Το γράφημα συνολικά υποδεικνύει ότι οι αρθρώσεις παρέμειναν αδρανείς για την πλειονότητα του χρόνου και κινήθηκαν απότομα στο τέλος της παρατήρησης.

## 3.1 Υλοποίηση τροχιών για τις αρθρώσεις

Για την ανάπτυξη της λύσης θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο των κυβικών πολυωνύμων, λαμβάνοντας υπόψη τις παραμέτρους που δίνονται από τον Πίνακα 4 και τον αριθμό μητρώου (AM=5351) για τον καθορισμό των χρονικών παραμέτρων. Οι αρχικές συνθήκες, λοιπόν, θα είναι οι εξής:

Αρχικές Γωνίες Αρθρώσεων : ($q_{1,0}$ , $q_{2,0}$),

Αρχικές Γωνίες Αρθρώσεων : ($q_{1,f}$ , $q_{2,f}$),

Μέγιστη Γωνιακή Ταχύτητα Άρθρωσης 1 : 9°/sec

Μέγιστη Γωνιακή Ταχύτητα Άρθρωσης 2 : 11°/sec

Οι χρονικές παράμετροι, και για τις 2 τροχιές που καλούμαστε να υπολογίσουμε, ορίζονται ως εξής:

Συνολικός χρόνος κάθε διαδρομής : $t_f$

**Πρώτη Άρθρωση:**

Η πρώτη τροχιά, θα περιγράφει την κίνηση της πρώτης άρθρωσης του robot, θα ισχύουν τα κάτωθι:

Για την αρχική και την τελική ταχύτητα ισχύει:

$$\dot{q}_1(0) = 0 \text{ rad/sec} \qquad \dot{q}_1(t_f) = 0 \text{ rad/sec}$$

Για την αρχική και τελική γωνιακή θέση, οι τιμές προκύπτουν από τον πίνακα 4, άρα ισχύει:

$$q_{1,0} = 0 \text{ rad} \qquad q_{1,f} = \text{round}(\frac{5351}{80}) \cdot \frac{\pi}{180} = 0.37\pi \text{ rad}$$

Για την μέγιστη γωνιακή ταχύτητα ($\dot{q}_{1max}$), η οποία δίνεται στην εκφώνηση, ισχύει:

$$\dot{q}_{1max} = 9 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{20} \text{ rad/sec}$$

Υποθέτουμε ότι το $q_{1(t)}$ είναι πολυώνυμο τρίτου βαθμού:

$$q_{1\ (t)} = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$$

$$\dot{q}_{1(t)} = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2$$

$$\ddot{q}_{1(t)} = 2a_2 + 6a_3 t$$

Βρίσκουμε τους συντελεστές $a_i$ χρησιμοποιώντας τις αρχικές και τελικές συνθήκες (ταχύτητες και γωνίες):

$$a_0 = q_{1,0} = 0 \quad , \qquad a_1 = 0 \qquad (1)$$

$$\alpha_2 = \frac{3(q_{1,f} - q_{1,0})}{t_f^2} \leftrightarrow a_2 = 3\frac{0.37 \cdot \pi}{t_f^2} \leftrightarrow a_2 = \frac{1.11 \cdot \pi}{t_f^2} \quad (2)$$

$$\alpha_3 = -\frac{2(q_{1,f} - q_{1,0})}{t_f^3} \leftrightarrow a_3 = -2\frac{0.37 \cdot \pi}{t_f^3} \leftrightarrow a_3 = \frac{-0.74 \cdot \pi}{t_f^3} \quad (3)$$

Για να μπορέσει να ακολουθηθεί η τροχιά πρέπει στο μέσο της ,(δηλαδή για t=$\frac{t_F}{2}$ ) να ισχύει $\dot{q}_{1(t)} \leq \dot{q}_{1,max}$:

$$|\dot{q}_{1\left(\frac{t_f}{2}\right)}| \leq |\frac{\pi}{20}| \leftrightarrow |\frac{2a_2 t_f}{2} + 3a_3\left(\frac{t_f}{2}\right)^2| \leq |\frac{\pi}{20}|$$

$$\leftrightarrow |\frac{1.11 \cdot \pi}{t_f} + \frac{3}{4}\left(-\frac{0.74 \cdot \pi}{t_f}\right)| \leq |\frac{\pi}{20}| \leftrightarrow |\frac{1.11 \cdot \pi}{t_f} - \frac{0.555 \cdot \pi}{t_f}| \leq |\frac{\pi}{20}| \leftrightarrow$$

$$t_f \geq 11.1 \quad (4)$$

**Δεύτερη Άρθρωση:**

Η δεύτερη τροχιά, θα περιγράφει την κίνηση της δεύτερης άρθρωσης του robot, θα ισχύουν τα κάτωθι:

Για την αρχική και την τελική ταχύτητα ισχύει:

$\dot{q}_2(0) = 0$ rad/sec $\quad \dot{q}_2(t_f) = 0$ rad/sec

Για την αρχική και τελική γωνιακή θέση, οι τιμές προκύπτουν από τον πίνακα 4, άρα ισχύει:

$q_{2,0}$ = 0 rad $\quad$ $q_{2,f}$ = round($\frac{5351}{120}$) · $\frac{\pi}{180}$ = -$\frac{\pi}{4}$ rad

Για την μέγιστη γωνιακή ταχύτητα ($\dot{q}_{2max}$), η οποία δίνεται στην εκφώνηση, ισχύει:

$$\dot{q}_{2max} = 11 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{16.3} \text{ rad/sec}$$

Υποθέτουμε ότι το $q_{1(t)}$ είναι πολυώνυμο τρίτου βαθμού:

$$q_{2\ (t)} = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$$

$$\dot{q}_{2(t)} = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2$$

$$\ddot{q}_{2(t)} = 2a_2 + 6a_3 t$$

Βρίσκουμε τους συντελεστές $a_i$ χρησιμοποιώντας τις αρχικές και τελικές συνθήκες (ταχύτητες και γωνίες):

$$a_0 = q_{2,0} = 0 \quad , \qquad a_1 = 0 \qquad (5)$$

$$\alpha_2 = \frac{3(q_{2,f} - q_{2,0})}{t_f^2} \leftrightarrow a_2 = 3\frac{-\frac{\pi}{4}}{t_f^2} \leftrightarrow a_2 = -\frac{3\pi}{4t_f^2} \quad (6)$$

$$\alpha_3 = -\frac{2(q_{2,f} - q_{2,0})}{t_f^3} \leftrightarrow a_3 = -2\frac{-\frac{\pi}{4}}{t_f^3} \leftrightarrow a_3 = \frac{\pi}{2t_f^3} \quad (7)$$

Για να μπορέσει να ακολουθηθεί η τροχιά πρέπει στο μέσο της ,(δηλαδή για t=$\frac{t_f}{2}$ ) να ισχύει $\dot{q}_{2(t)} \leq \dot{q}_{2,max}$:

$$|\dot{q}_{2\left(\frac{t_f}{2}\right)}| \leq |\frac{\pi}{16.3}| \leftrightarrow |\frac{2a_2 t_f}{2} + 3a_3\left(\frac{t_f}{2}\right)^2| \leq |\frac{\pi}{16.3}|$$

$$\leftrightarrow |\frac{-2\cdot 3\pi}{8t_f} + \frac{3\pi}{8t_f}| \leq |\frac{\pi}{16.3}| \leftrightarrow |\frac{-3\pi}{8t_f}| \leq |\frac{\pi}{16.3}| \leftrightarrow$$

$$t_f \geq \frac{48.9\pi}{8\pi} \leftrightarrow t_f \geq 6.11 \text{ sec } (8)$$

Επομένως, για να ισχύουν οι σχέσεις (4) και (8), θα πρέπει να ισχύει το εξής:

$$t_f = 11 \text{ sec}$$

Τελικά, από τις παραπάνω σχέσεις, θα προκύψουν τα εξής:

$$(2): a_2 = -\frac{1.11\cdot\pi}{121} = 0.03$$

$$(6): a_2 = -\frac{3\cdot\pi}{484} = 0.02$$

$$(3): a_3 = \frac{-0.74\cdot\pi}{1331} = -0.002$$

$$(7): a_3 = \frac{\pi}{2662} = 0.001$$

Επομένως οι τροχιές των αρθρώσεων διατυπώνονται ως εξής:

$$q_{1(t)} = 0.03t^2 - 0.002t^3$$

$$\dot{q}_{1(t)} = 0.06t - 0.006t^2$$

$$\ddot{q}_{1(t)} = 0.06 - 0.012t$$

$$q_{2(t)} = -0.02t^2 + 0.001t^3$$

$$\dot{q}_{2(t)} = -0.04t + 0.003t^2$$

$$\ddot{q}_{2(t)} = -0.04 + 0.006t$$

Ακόμα με την επιλογή του $t_f$ = 6 sec , μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι οι τιμές των γωνιακών ταχυτήτων των αρθρώσεων είναι μικρότερες των αντίστοιχων μέγιστων τιμών τους :

$$\dot{q}_{1(t_f)} = 0.06\cdot 11 - 0.006\cdot 121 = 0.66 - 0.726 \leftrightarrow$$

$$\dot{q}_{1(t_f)} = -0.066\frac{rad}{sec} \cong 0 \leq \dot{q}_{1,\max.} = \frac{\pi}{20} \text{ rad/sec}$$

$$\dot{q}_{2(t_f)} = -0.04\cdot 11 - 0.003\cdot 121 = -0.44 + 0.363 \leftrightarrow$$

$$\dot{q}_{2(t_f)} = 0.077\ \frac{rad}{sec} \cong 0 \leq \dot{q}_{2,\max.} = \ \frac{\pi}{16.3}\ rad/sec$$

## 3.2 Υλοποίηση του trajectories_rrbot.py

Η ανάπτυξη του προγράμματος 'trajectories_rrbot.py' βοηθάει στην κίνηση των αρθρώσεων του ρομποτικού βραχίονα και την καταγραφή δεδομένων θέσης και ταχύτητας. Το πρόγραμμα αυτό χρησιμοποιεί βιβλιοθήκες όπως rospy (για τον έλεγχο του ROS), std_srvs.srv (για κλήσεις κενών υπηρεσιών), matplotlib.pyplot (για την εμφάνιση γραφημάτων) και std_msgs.msg (για μηνύματα θέσης).

Το πρόγραμμα ξεκινά με την εισαγωγή των απαραίτητων βιβλιοθηκών και στη συνέχεια αποθηκεύει δεδομένα χρόνου, θέσεων και ταχυτήτων σε λίστες. Οι λίστες αυτές είναι time_data, joint1_positions, joint2_positions, joint1_velocities και joint2_velocities.

Ακολουθεί ο ορισμός της συνάρτησης reset_gazebo_simulation_time, η οποία περιμένει την υπηρεσία επαναφοράς προσομοίωσης του Gazebo να γίνει διαθέσιμη και στη συνέχεια την καλεί για επαναφορά της προσομοίωσης. Αυτή η συνάρτηση διασφαλίζει ότι η προσομοίωση αρχίζει από την αρχή κάθε φορά που εκτελείται το πρόγραμμα.

Η συνάρτηση calculate_velocities υπολογίζει τις ταχύτητες των αρθρώσεων από τις θέσεις και τα δεδομένα χρόνου. Χρησιμοποιεί τη διαφορά θέσης δια τη διαφορά χρόνου για να υπολογίσει την ταχύτητα κάθε άρθρωσης.

Η συνάρτηση plot_data χρησιμοποιείται για την απεικόνιση των δεδομένων. Αρχικά, υπολογίζονται οι ταχύτητες των αρθρώσεων χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση calculate_velocities. Στη συνέχεια, δημιουργείται ένα γράφημα με δύο υποπλοκές: η πρώτη δείχνει τις θέσεις των αρθρώσεων σε συνάρτηση με τον χρόνο, και η δεύτερη δείχνει τις ταχύτητες των αρθρώσεων σε συνάρτηση με τον χρόνο. Αυτό το γράφημα βοηθά στην οπτική ανάλυση της κίνησης των αρθρώσεων.

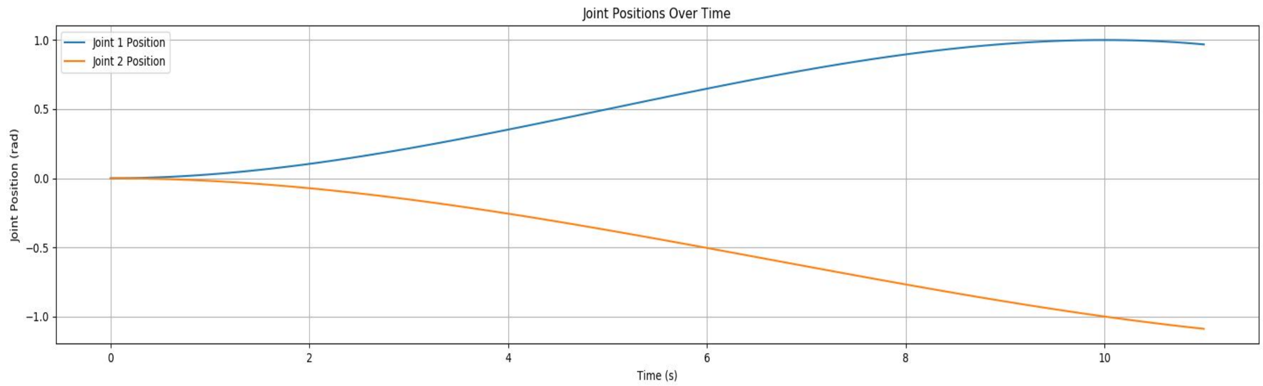
Στη συνάρτηση main, αρχικοποιείται ένας νέος κόμβος ROS με το όνομα "robot_trajectory2". Κατόπιν, η συνάρτηση reset_gazebo_simulation_time καλείται για να επαναφέρει την προσομοίωση του Gazebo.

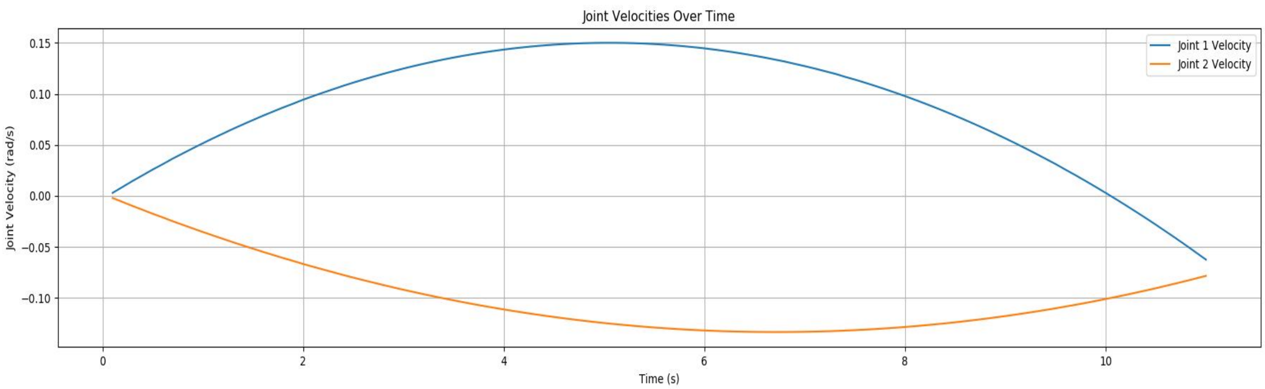
Η κίνηση των αρθρώσεων διαρκεί 6 δευτερόλεπτα. Η συνάρτηση υπολογίζει τις επιθυμητές τροχιές για τις αρθρώσεις χρησιμοποιώντας πολυωνυμικές εξισώσεις και δημοσιεύει τις θέσεις στις αντίστοιχες αρθρώσεις. Τα δεδομένα χρόνου και θέσεων αποθηκεύονται στις λίστες time_data, joint1_positions και joint2_positions.

Τέλος, όταν η κίνηση ολοκληρωθεί, η συνάρτηση plot_data καλείται για την απεικόνιση των δεδομένων. Αυτή η διαδικασία επιτρέπει την ανάλυση της κίνησης των αρθρώσεων του ρομποτικού βραχίονα με την πάροδο του χρόνου.

Η εντολή που πρέπει να εκτελέσουμε στο terminal, για την σωστή λειτουργία του βραχίονα, είναι:

```
python3 trajectories_rrbot.py
```




Το πρώτο διάγραμμα απεικονίζει τις θέσεις των δύο αρθρώσεων του ρομποτικού βραχίονα σε συνάρτηση με τον χρόνο. Στον οριζόντιο άξονα (X) αναπαρίσταται ο χρόνος σε δευτερόλεπτα, ενώ στον κατακόρυφο άξονα (Y) αναπαρίσταται η θέση των αρθρώσεων σε ακτίνια (rad).

Η μπλε καμπύλη αναπαριστά τη θέση της άρθρωσης 1 (Joint 1 Position). Παρατηρούμε ότι η θέση της άρθρωσης 1 αυξάνεται σταδιακά από το 0 έως περίπου τα 1 rad κατά τη διάρκεια των 11 δευτερολέπτων, υποδεικνύοντας μια συνεχή κίνηση της άρθρωσης προς την επιθυμητή θέση.

Η πορτοκαλί καμπύλη αναπαριστά τη θέση της άρθρωσης 2 (Joint 2 Position). Παρατηρούμε ότι η θέση της άρθρωσης 2 μειώνεται σταδιακά από το 0 έως περίπου τα -1 rad κατά τη διάρκεια των 11 δευτερολέπτων, δείχνοντας ότι η άρθρωση κινείται σταθερά προς την επιθυμητή αρνητική θέση.

Το δεύτερο διάγραμμα απεικονίζει τις ταχύτητες των δύο αρθρώσεων του ρομποτικού βραχίονα σε συνάρτηση με τον χρόνο. Στον οριζόντιο άξονα (X) αναπαρίσταται ο χρόνος σε δευτερόλεπτα, ενώ στον κατακόρυφο άξονα (Y) αναπαρίσταται η ταχύτητα των αρθρώσεων σε ακτίνια ανά δευτερόλεπτο (rad/s).

Η μπλε καμπύλη αναπαριστά την ταχύτητα της άρθρωσης 1 (Joint 1 Velocity). Παρατηρούμε ότι η ταχύτητα της άρθρωσης 1 αυξάνεται στην αρχή, φτάνοντας την μέγιστη τιμή της περίπου στο 0.15 rad/s, και στη συνέχεια μειώνεται αργά καθώς πλησιάζει το τέλος της κίνησης.

Η πορτοκαλί καμπύλη αναπαριστά την ταχύτητα της άρθρωσης 2 (Joint 2 Velocity). Παρατηρούμε ότι η ταχύτητα της άρθρωσης 2 μειώνεται στην αρχή, φτάνοντας την μέγιστη αρνητική τιμή της περίπου στο -0.13 rad/s, και στη συνέχεια αυξάνεται αργά καθώς πλησιάζει το τέλος της κίνησης.

Συνολικά, τα γραφήματα δείχνουν τη συνεχή κίνηση και τις αλλαγές ταχύτητας των αρθρώσεων του ρομποτικού βραχίονα κατά τη διάρκεια της εκτέλεσης του προγράμματος, επιτρέποντας την οπτική ανάλυση της απόδοσης του συστήματος ελέγχου.