

Fisica Computazionale: Esercitazione 1

1 Errori Numerici e Differenze Finite

1. trova l'errore macchina ϵ usando un for loop e la seguente comparazione ($1.0 + x == 1.0$). Utilizza sia singola (float) che doppia (double) precisione (usa $1.f$ e $1.$ rispettivamente). Puoi anche provare con quadrupla precisione (long double) usando la costante $1.l$.
2. calcola numericamente la derivate di $f(x) = e^x$ in $x = 1$ usando le formule alle differenze finite

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \mathcal{O}(h) . \quad (1)$$

- (a) Fai un grafico dell'errore commesso con questa approssimazione in funzione del passo h . Puoi usare sia singola che doppia precisione.
- (b) Assumi che l'errore numerico nel fare l'operazione $*$ (puó essere $+$, $-$, \times , $/$) possa essere descritto come

$$(\widetilde{a * b}) = (a * b) \left(1 \pm \frac{\epsilon}{2}\right) ,$$

Usa la stessa stime dell'errore per funzioni generiche di una variabile

$$\widetilde{f(x)} = f(x) \left(1 \pm \frac{\epsilon}{2}\right) . \quad (2)$$

Trova una stima dell'errore per la derivata e usa questa stima per spiegare il risultato ottenuto al punto precedente.

3. la soluzione standard per un'equazione quadratica $ax^2 + bx + c = 0$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

puó diventare instabile quando $b^2 \gg 4ac$.

- (a) Cerca di prevedere quale delle due soluzioni e' instabile, scegli parametri appropriati e fai vedere il problema usando variabili in singola precisione (float)
 - suggerimento: confronta con il risultato ottenuto in doppia precisione per ottenere una stima dell'errore relativo

Un'alternativa piu' stabile può essere ottenuta moltiplicando il numeratore e denominatore di x_1 per $-b - \sqrt{b^2 - 4ac}$, mentre per la seconda soluzione x_2 usiamo $-b + \sqrt{b^2 - 4ac}$, ottenendo

$$x_1 = \frac{2c}{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}} \quad x_2 = \frac{2c}{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}.$$

- (b) Implementa la versione stabile della soluzione dell'equazione quadratica in due casi: $b > 0$ e $b < 0$. Confronta la stabilità numerica con il metodo precedente
4. [BONUS] il calcolo di $\log(x)$ quando $x \rightarrow 1$ diventa numericamente instabile. La libreria `math.h` implementa delle versioni accurate con i nomi: `log1pf` (per float) e `log1p` (per double).
- (a) Usa la versione in double precision come riferimento e guarda all'errore relativo nel calcolo con variabili float in funzione di x facendo un loop in cui $x \rightarrow x/2$ partendo da due punti diversi: $x = 1.f$ e $x = 0.1f$. Commenta le differenze.

Una versione accurata può essere costruita usando

$$\log(1+x) \rightarrow \begin{cases} x & \text{se } x + 1.f == 1.f \\ x \left(\frac{\log(1.f+x)}{(1.f+x)-1.f} \right) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Questa espressione può essere ottenuta notando che $\log(1+x) \approx x$ quando $x \rightarrow 0$ e che l'espressione in parentesi varia poco in quel limite. Quest'ultima osservazione vuol dire che possiamo approssimare la parentesi in modo stabile usando un valore appropriato $y \approx x$.

- (b) Prova a usare questa implementazione e confronta l'errore relativo.
- (c) Cerca di giustificare la versione più accurata usando la differenza nel condition number tra $\log(y)/(y-1)$ per $y \rightarrow 1$ e quello di $\log(1+x)/x$ per $x \rightarrow 0$, il fatto che $\log(1+x) \approx x$ quando $x \rightarrow 0$ e che l'espressione in parentesi varia poco in quel limite
- quest'ultima osservazione vuol dire che possiamo approssimare la parentesi in modo stabile usando un valore appropriato $y \approx x$ che ci permette di calcolare $(1+y)$ in modo esatto