ТЕМА 8. ФУНКЦИИ СЛУЧАЙНЫХ АРГУМЕНТОВ.

8 .1. Числовые характеристики функций многих переменных

Пусть $Y = \varphi(x_1, x_2, \ldots x_n)$, где $X_1, X_2, \ldots X_n$ - случайные величины с известной совместной n-мерной плотностью вероятностей $f(x_1, x_2 \ldots . x_n)$.

Начальные моменты:

$$\alpha_k(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^k(x_1, \ldots, x_n) f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n$$

Центральные моменты:

$$\mu_k(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} (\varphi(x_1, \ldots, x_n) - m_y)^k f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n$$

Основные числовые характеристики:

- Математическое ожидание функции от произвольного числа случайных аргументов. Для непрерывных величин:

$$m_y = M[\varphi(X_1, X_2 \ldots . X_n)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x_1, x_2 \ldots . x_n) f(x_1, x_2 \ldots . x_n) dx_1 dx_2 \ldots dx_n,$$

где
$f(x_1, x_2 \ldots . x_n)$ - плотность распределения системы $(X_1, X_2 \ldots . X_n)$.

- Дисперсия функции от произвольного числа аргументов для непрерывных случайных величин

$$D_y = D[\varphi(X_1, X_2 \ldots . X_n)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} [\varphi(x_1, x_2 \ldots . x_n) - m_\varphi]^2 f(x_1, x_2 \ldots . x_n) dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

или аналогичная форма

$$D[\varphi(X_1, X_2 \ldots . X_n)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} [\varphi(x_1, x_2 \ldots . x_n)]^2 f(x_1, x_2 \ldots . x_n) dx_1 dx_2 \ldots dx_n - m^2_\varphi$$

На практике редко известна совместная плотность вероятности; известны лишь числовые характеристики. Определение числовых характеристик функций по заданным числовым характеристикам аргументам значительно упрощает решение задач теории вероятностей. Чаще всего такие упрощенные функции относятся к линейным функциям, однако некоторые элементарные нелинейные функции также подразумевают подобный подход.

Пусть известны векторы $M[x_i] = m_i$ $D[x_i] = D_i$ системы случайных величин $(X_1, X_2, \ldots X_n)$ - с известной совместной n-мерной плотностью вероятностей $f(x_1, x_2 \ldots . x_n)$, ê ê K $_{ij}$ ê ê - корреляционная матрица

Задача определения числовых характеристик Y в таком случае разрешима только для определения классов функций φ.

8 .2 . Х арактеристические функции и моменты

8 .2.1. Характеристические функции

До сих пор мы задавали случайные величины законом распределения. Характеристическая функция - ещё один способ представления случайных величин.

Пусть X- случайная величина. Её характеристической функцией $w(t)$ назовём математическое ожидание случайной величины e^{itX}:

$$w(t) = Me^{itX},$$

где под комплексной случайной величиной e^{itX} мы понимаем комплексное число $e^{itX} = \cos(tX) + i\sin(tX)$, а

$$M\left[e^{itX}\right] = M\left[\cos(tX) + i\sin(tX)\right];$$

независимая переменная tимеет размерность X^{-1}.

Характеристическая функция - преобразование Фурье-Стилтьеса функции распределения:

$$w(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x).$$

В непрерывном случае $w(t)$ - преобразование Фурье плотности вероятности:

$$w(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) dx$$

Если $w(t)$ абсолютно интегрируема, то обратное преобразование Фурье позволяет восстановить плотность $f(x)$ по характеристической функции:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} w(t) e^{-itx} dt.$$

В дискретном случае:

$$w(t) = \sum_k e^{itx} P\{X = x_k\}.$$

Особо отметим дискретные случайные величины с целочисленными значениями, например, при $x_k = k$:

$$w(t) = \sum_k e^{itk} p_k$$

здесь $w(t)$ - ряд Фурье в комплексной форме, вероятности p_k играют роль коэффициентов Фурье и легко восстанавливаются по $f(t)$:

$$p_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-itx} w(t)dt$$

В общем случае восстановление закона распределения по характеристической функции тоже возможно, но более сложно.

8.2.2. Свойства характеристических функций

Важнейшим свойством характеристической функции, сделавшим её одним из главных инструментов современной теории вероятностей, оказалось то, что *при суммировании независимых случайных величин их характеристические функции перемножаются:* если X и Y независимы, то для случайной величины $Z = X + Y$: $w_Z(t) = w_X(t) \times w_Y(t)$.

Действительно,

$$w_Z(t) = M(e^{itZ}) = M(e^{it(X+Y)}) = M(e^{itX} \times e^{itY}) = M(e^{itX}) \times M(e^{itY}) = w_X(t) \times w_Y(t).$$

Законы распределения при суммировании независимых слагаемых ведут себя гораздо сложнее (см. Л12, закон распределения суммы случайных величин).

Если $Y = aX + b$, то

$$w_Y(t) = M(e^{it(aX+b)}) = e^{itb} \times M(e^{itaX}) = e^{itb} \times w_X(at).$$

Другим важным свойством характеристических функций является их простая связь с *моментами*.

Предполагая возможность дифференцирования под знаком математического ожидания в равенстве $w(t) = Me^{itX}$, получим:

$$w^{(k)}(t) = i^k M(X^k \times e^{itX}).$$

При $t = 0$:

$$w^{(k)}(0) = i^k M(X^k) = i^k \alpha_k[X] \Rightarrow \alpha_k[X] = \frac{1}{i^k} w^{(k)}(0).$$

Таким образом, *характеристическая функция позволяет заменить интегрирование при вычислении моментов дифференцированием.*

В частности,

$$M[X] = \alpha_1[X] = \frac{1}{i} w'(0); \quad D[X] = M[X^2] - (M[X])^2 = -w''(0) + (w'(0))^2.$$

Характеристическую функцию определяют также и для n-мерной случайной величины $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$:

$$w(t_1, t_2, \ldots, t_n) = M(\exp i(t_1 X_1 + t_2 X_2 + \ldots + t_n X_n)).$$

8.3. Примеры применения характеристических функций

8.3.1. *Биноминальное распределение.*

Пусть дискретная случайная величина имеет биноминальное распределение $X: B(n, p)$.

$$w(t) = \sum_{k=0}^{n} e^{ikt} C_n^k p^k q^{n-k} = (pe^{it} + q)^n$$

Дифференцирование даёт:

$$M[X] = \frac{1}{i} w'(0) = np; \quad D[X] = -w''(0) + (w'(0))^2 = npq$$

14.3.2. *Пуассоновское распределение.*

Пусть дискретная случайная величина имеет пуассоновское распределение X: P(l).

$$w(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{ikt} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} (\lambda e^{it})^k = \exp\{\lambda(e^{it} - 1)\}$$

Отсюда сразу найдём: $M[X]$ =l, D[X] =l.

8.3.3. *Экспоненциальный закон распределения.*

Пусть непрерывная случайная величина имеет экспоненциальное распределение X:Exp(m).

$$w(t) = \mu \int_0^{\infty} e^{itx - \mu x} dx = \frac{\mu}{\mu - it}$$

Из этого равенства следует:

$$M[X] = \frac{1}{\mu}; \quad D[X] = \frac{1}{\mu^2}.$$

8.3.4. *Нормальный закон распределения.*

Пусть непрерывная случайная величина имеет нормальное распределение X:N(0, 1).

$$w(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx - \frac{x^2}{2}} dx.$$

Примем во внимание, что $e^{itx} = \cos(tx) + i\sin(tx)$:

$$w(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-x^2}{2}} \cos(tx)dx + \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \sin(tx)dx.$$

Второй из этих интегралов равен нулю, так как его подынтегральная функция нечётна. Ввиду чётности подынтегральной функции первого интеграла:

$$w(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \cos(tx)dx$$

Обозначим:

$$J(t)=\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}\cos(tx)dx$$
.

Очевидно,

$$J'(t)=-\int_0^\infty xe^{-\frac{x^2}{2}}\sin(tx)dx=\int_0^\infty \sin(tx)d\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)$$
;

интегрируем по частям:

$$J'(t)=\sin(tx)\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\Big|_{x=0}^{x=+\infty}-t\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}\cos(tx)dx=-tJ(t).$$

Таким образом,

$$J'(t)=-tJ(t),\quad \text{и}\quad J(0)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Решение этого дифференциального уравнения дает:

$$J(t)=\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}\cos(tx)dx=\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Окончательно:□

$$w(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Тогда для нормально распределенной случайной величины X:N(a, s):

$$w(t)=\exp\left\{iat-\frac{\sigma^2t^2}{2}\right\}.$$

и сразу же находим: M[X] = a, D[X] =s ^{2} .

По поводу характеристической функции нормального закона можно заметить интересное его свойство:

*сумма независимых нормально распределённых случайных величин распределена по нормальному*закону.

Действительно. Пусть *X*и *Y*независимые случайные величины, причём,

$X : N(a_1, s_1)$, $Y:N(a_2, s_2)$, а $Z = X + Y$.

Характеристические функции *X*и *Y*:

$$w_X(t)=e^{ia_1t-\frac{\sigma_1^2t^2}{2}},\quad w_Y(t)=e^{ia_2t-\frac{\sigma_2^2t^2}{2}}.$$

Для характеристической функции *Z*имеем:

$$w_Z(t)=w_X(t)\times w_Y(t)=\exp\left[i(a_1+a_2)t-\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2}t^2\right],$$

но это означает, что $Z:N(a_1+a_2;\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2})$.

Аналогичным свойством обладают и *независимые пуассоновские*случайные величины: сумма независимых случайных величин, распределённых по закону Пуассона, распределена по закону Пуассона.

В самом деле, если *X:* P(l_1), *X:* P(l_2), то

$$w_X(t)=\exp[l_1(e^{it}-1)],\quad w_Y(t)=\exp[l_2(e^{it}-1)],$$

поэтому характеристическая функция случайной величины $Z = X + Y$:

$$w_Z(t)=w_X(t)\times w_Y(t)=\exp[(l_1+l_2)(e^{it}-1)],$$

но это значит, что *Z:* P(l_1+l_2).

*Законы, сохраняющиеся при сложении независимых случайных величин, называются безгранично делимыми.*Нормальный и пуассоновский - примеры таких законов.