ТЕМА 6. СИСТЕМЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН.

6 .1. Понятие системы случайных величин

Системоой случайнвх величин (случайным вектором, многомерной случайной величиной) называется любая упорядоченная совокупность случайных величин $\boldsymbol{X}=\{X_1, \dots, X_n\}$.

Случайные величины $\{X_1, \dots, Xn\}$, входящие в систему могут быть как непрерывными, так и дискретными. Для наглядности рассмотрения пользуются геометрической интерпретацией; так систему двух случайных величин $\{X, Y\}$ можно представить случайной точкой на плоскости с координатами Xи Y, или случайным вектором, направленным из начала координат в точку (X, Y).
Свойства случайных величин не исчерпываются свойствами отдельных величин, входящих в систему и необходимы средства для описания характеристик систем случайных величин. Рассмотрим эти свойства для n-мерного и двумерного случаев.

6 .2. Функция распределения системы случайных величин

Функцией распределения (или ***совместной функцией распределения***) системы случайных величин называется вероятность совместного выполнения неравенств $X_1 < x_1, \dots, X_n < x_n$:

$$F(x_1,\dots,x_n) = P\{(X_1 < x_1) \cap \dots \cap (X_n < x_n)\} \quad (10.1)$$

Для случая ***двумерной случайной величины***:

$$F(x, y) = P\{(X < x) \cap (Y < y)\}. \quad (10.2)$$

Геометрически функция распределения $F(x, y)$ это вероятность попадания случайной точки $(X, У)$ в бесконечный квадрант с вершиной в точке (x,y), лежащей левее и ниже ее (рис. 10.1).

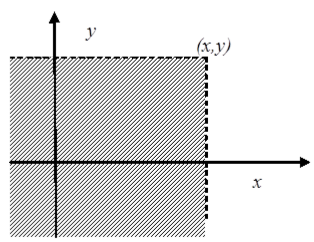


Рис. 10.1

Свойства функции распределения.

1. Значения функции распределения удовлетворяют двойному неравенству:

$$0 \le F(x_1, x_2, \dots, x_n) \le 1$$

$$0 \le F(x, y) \le 1.$$

Доказательство этого свойствавытекает из определения функции распределения как вероятности: вероятность есть неотрицательное число, не превышающее 1.

2. Функция распределения $F(x_1, \dots, x_n)$ есть ***неубывающая функция*** по каждому из аргументов т .е

$$x_i' < x_i'' \quad => \quad F(x_1, \dots, x_i', \dots, x_n) \le F(x_i, \dots, x_i'', \dots, x_n).$$
$$x_1 < x_2 \quad => \quad F(x_1, y) \le F(x_2, y).$$
$$y_1 < y_2 \quad => \quad F(x, y_1) \le F(x, y_2)$$

Доказательство рассмотрим для случая двумерной СВ. При увеличении какого-нибудь из аргументов(x, y) квадрант, заштрихованный на рис. 10.1, увеличивается; следовательно, вероятность попадания в него случайной точки (X, Y) уменьшаться не может.

3. Если хотя бы один из аргументов функции распределения обращается в -∞, то функция распределения равна 0:

$$F(x_1, \dots, -\infty, \dots x_n) = 0 \quad (10.3)$$

$$F(-\infty, y) = 0; \quad F(x, -\infty) = 0$$

Доказательство. По определению

$$F(x_1, \dots, -\infty, \dots x_n) = P\{(X_1 < x_1) \cap \dots \cap (X_i < -\infty) \cap \dots \cap (X_n < x_n)\}.$$

Событие $\{(X_1 < x_1) \cap \dots \cap (X_i < -\infty) \cap \dots \cap (X_n < x_n)\}$ невозможное событие, т.к. невозможным является событие $(X_i < -\infty)$ событие ; тогда

$$F(x_1, \dots, -\infty, \dots x_n) = 0$$

4.Если все аргументы функции распределения $F(x_1, \dots, x_n)$ равны + ¥ , то функция распределения равны 1.

*Доказательство*следует из определения функции распределения системы случайных величин:

$$\lim_{\substack{x_1 \to \infty \\ \dots \\ x_n \to \infty}} F(x_1, \dots, x_n) = P\{(X_1 < \infty) \cap \dots \cap (X_n < \infty)\} = 1 \quad (10.4)$$

5. Если один из аргументов обращается в $+\infty$, то функция распределения $F(x_1,\dots,x_n)$ становится равной функции распределения *n-1* случайной величины:

$$F(x_1,\dots,+\infty,\dots x_n) = F(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+2},\dots x_n)$$

$$F(x,+\infty) = F_1(x); \quad F(+\infty,y) = F_1(y) \qquad (10.5)$$

Доказательство. По определению функции распределения:

$$F(x_1,\dots,+\infty,\dots x_n) = P\{(X_1 < x_1) \cap \dots \cap (X_i < +\infty) \cap \dots \cap (X_n < x_n)\}$$

Событие ($X_i < +\infty$) является достоверным событием. Тогда

$$P\{(X_1 < x_1) \cap \dots \cap (X_i < +\infty) \cap \dots \cap (X_n < x_n)\} = P\{(X_1 < x_1) \cap \dots \cap (X_n < x_n)\} = F(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+2},\dots x_n)$$

6. Вероятность попадания в прямоугольную область

$$P(a £ X £ b; d £ U £ g) = F(b, g) - F(b, d) - F(a, g) + F(a, d). \qquad (10.6)$$

Вероятность попадания в прямоугольник Rравна вероятности попадания в квадрант с вершиной в точке (β,δ),минус вероятность попадания в квадрант с вершиной в точке (α,δ), минус вероятность попадания в квадрант с вершиной в точке (β,γ), плюс вероятность попадания в квадрант с вершиной в точке (α,γ), которую мы вычли дважды.

6.3. Система двух дискретных случайных величин. Матрица вероятности.

Двухмерная случайная величина (X ,У) является дискретной, если множества значений ее компонент $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ и $Y = \{y_1, \dots, y_m\}$ представляют собой счетные множества.

Для описания вероятностных характеристик таких величин используется двухмерная функция распределения и матрица вероятности, которая содержит значения компоненты $X = \{x_1, x_2, \dots x_n\}$, $Y = \{y_1, y_2, \dots y_m\}$ и вероятности всех возможных пар значений

$$p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j), \ i=1..n, \ j=1..m.$$

Матрица распределения системы двух случайных величин записывается в виде:

	y_1	y_2	...	y_j	...	y_m
x_1	p_{11}	p_{12}	...	p_{1j}	...	p_{1m}
x_2	p_{21}	p_{22}	...	p_{2j}	...	p_{2m}
...	...	...	...	...	...	...
x_i	p_{i1}	p_{i2}	...	p_{ij}	...	p_{im}
...	...	...	...	...	...	...
x_n	p_{n1}	p_{n2}	...	p_{nj}	...	p_{nm}

Сумма всех вероятностей p_{ij}, стоящих в матрице распределения вероятностей равна единице как сумма вероятностей полной группы событий:

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} p_{ij} = 1 \qquad (10.7)$$

Зная матрицу распределения системы двух дискретных случайных величин (X, Y), можно найти закон распределения отдельных случайных величин, входящих в систему:

$$p_{xi} = P\{X = x_i\}; \quad p_{yj} = P\{Y = y_j\}.$$

Представим событие ($X = x_i$) как сумму несовместных событий:

$$(X = x_i) = \{(X = x_i) \cap (Y = y_1)\} \cup \dots \cup \{(X = x_i) \cap (Y = y_m)\},$$

По правилу сложения вероятностей

$$p_{xi} = P\{X = x_i\} = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}, \qquad (10.8)$$

аналогично

$$p_{yj} = P\{Y = y_j\} = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}. \qquad (10.9)$$

Если известна матрица распределения системы двух случайных величин (X, Y), то ее функция распределения находится суммированием всех вероятностей p_{ij}, для которых $x_i < x$, $y_j < y$:

$$F(x,y) = \sum_{x_i<x}\sum_{y_j<y} p_{ij}. \qquad (10.10)$$

6.4. Система двух непрерывные случайные величины. Совместная плотность вероятности.

Двумерная величина (X, Y) является ***непрерывной***, если ее функция распределения $F(x, y)$ представляет собой непрерывную, дифференцируемою функцию по каждому из аргументов и существует вторая смешанная производная $\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$.

Рассмотрим на плоскости $x0y$ прямоугольник ΔR_{xy}, примыкающий к точке (x, y), с размерами Δx, Δy и найдем вероятность попадания в него случайной точки (X, Y). Согласно (10.6)

$$P\{(x \le X < x) + \Delta x \cap (y \le Y < y + \Delta y)\} = \\ = F(x+\Delta x, y+\Delta y) - F(x+\Delta x, y) - F(x+\Delta x, y) + F(x,y).$$

Будем неограниченно уменьшать оба размера прямоугольника $\Delta x \to \infty$, $\Delta y \to \infty$ и вычисляем предел:

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{F(x+\Delta x, y+\Delta y)-F(x, y+\Delta y)-F(x+\Delta x, y)+F(x,y)}{\Delta x\Delta y} = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}.$$

Совместной плотностью вероятности или ***плотностью совместного распределения*** называется функция

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}. \tag{11.1}$$

Плотность $f(x, y)$ обладает следующими свойствами:

1. f(x,y)≥0;
2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1.$

Геометрически совместная плотность $f(x, y)$ системы двух случайных величин представляет собой некоторую *поверхность распределения*.

Аналогично вводится *понятие элемента вероятности:* $f(x,y)dxdy$.

Элемент вероятности $f(x,y)dxdy$ с точностью до бесконечно малых величин равен вероятности попадания случайной точки (X, Y) в элементарный прямоугольник ΔR_{xy} , примыкающий к точке (x, y), с размерами Δx , Δy .

Аналогично тому, как было рассмотрено в случае одномерной случайной величины, определим вероятность попадания случайной точки (X, Y) в область D:

$$P\{(X,Y)\in D\} = \iint\limits_D f(x,y)dxdy. \tag{11. 2}$$

Функция распределения системы (X, Y) через совместную плотность определяется так:

$$F(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy \quad . \tag{11. 3}$$

Совместная плотность распределения системы случайных величин (X, Y) позволяет вычислить одномерные законы распределения случайных величин X и Y :

$$f_x(x) == \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy \;; \quad f_y(x) == \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx \quad . \tag{11. 4}$$

Одномерные плотности распределения составляющих системы случайных величин называют *маргинальными плотностями распределения.*

6. 5. Многомерные непрерывные случайные величины

Многомерная случайная величина $(X_1, ..., X_n)$ является ***непрерывной*** , если ее функция распределения $F(x_1,..., x_n)$ представляет собой непрерывную, дифференцируемую функцию по каждому из аргументов и существует вторая смешанная производная $\frac{\partial^n F(x_1,\dots,x_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n}$.

Плотностью распределения системы *n* непрерывных с.в. называется *n-я*смешанная частная производная функции $F(x_1, x_2 ... x_n)$, взятая один раз по каждому аргументу:

$$f(x_1,x_2\dots x_n) = \frac{\partial^n F(x_1,x_2\dots x_n)}{\partial x_1\partial x_2\dots\partial x_n} \quad .$$

Плотность распределения систем случайных величин обладает следующими свойствами:

1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dots\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x_1,\dots,x_n) = 1.$

2. $f(x_1,\dots,x_n) \ge 0.$

Зная закон распределения системы, можно определить законы распределения отдельных величин, входящих в систему. Функция распределения каждой из величин, входящих в систему можно получить, если положить все остальные аргументы равными ¥ : $F_1(x_1) = F(x_1, ¥ \dots\dots ¥)$или при выделении из системы случайных величин $(X_1, X_2, \dots X_n)$подсистемы случайных величин $(X_1, X_2, \dots X_к)$

$$F_{1\dots к}(x_1) = F(x_1\dots\dots x_к, ¥ \dots\dots ¥).$$

Плотность распределения каждой из величин, входящих в систему, можно получить, интегрируя плотность распределения системы в бесконечных пределах по всем остальным аргументам:

$$f_1(x_1) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dots\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x_1,x_2\dots\dots,x_n)dx_2\dots\dots dx_n$$

Плотность распределения частной системы случайных величин $(X_1, X_2, \dots X_n)$подсистемы с.в. $(X_1, X_2, \dots X_к)$ определяется так *:*

$$f_{1,2\ldots k}(x_1, x_2 \cdots x_k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} f\,(x_1, x_2 \ldots\ldots x_n) dx_{k+1} dx_{k+2} \ldots\ldots dx_n$$

6.6. Зависимые и независимые двумерные случайные величины.

Величина X не зависит от величины Y , если ее закон распределения не зависит от того, какое значение приняла величины Y .

Для независимых величин выполняется следующие соотношения:

1. $F(x, y) = p(X < x, Y < y) = p(X < x)\, p(Y < y) = F_X(x)\, F_Y(y)$;

2. для непрерывных случайных величин $f(x, y) = f_1(x)\, f_2(y)$;

3. для дискретных случайных величин $p_{ij} = p_i p_j$, для " i, j.

Для независимых величин двумерные формы закона распределения не содержат никакой дополнительной информации кроме той, которая содержится в двух одномерных законах.

В случае зависимости величин Xи Y , переход от двух одномерных законов к совместномуосуществить невозможно. Для этого необходимо знать условные законы распределения.

Условным законом распределения называется распределение одной случайной величины, найденное при условии, что другая случайная величина приняла определенное значение.

Условные ряды вероятностей для дискретных составляющих Xи Yопределяются по формулам

$$p_{i/j} = \mathrm{P}(X = x_i / Y = y_j) = p_{ij} / \mathrm{P}(Y = y_j) = \frac{P(Y = y_j \cap X = x_i)}{P(Y = y_j)} = \frac{p_{ij}}{\sum_{i=1}^{n} p_{ij}}, \quad i = 1, \ldots, N; \qquad (10.15)$$

$$p_{j/i} = \mathrm{P}(Y = y_j / X = x_i) = p_{ij} / \mathrm{P}(X = x_i) = \frac{P(Y = y_j \cap X = x_i)}{P(X = x_i)} = \frac{p_{ij}}{\sum_{j=1}^{m} p_{ij}}, \quad j = 1, \ldots, M. \qquad (10.16)$$

Условное распределение может быть представлено в виде таблицы:

Y	y_1	…	y_j	…	y_m
$p(y/x_i)$	$p(y_1/x_i)$	…	$p(y_j/x_i)$	…	$p(y_m/x_i)$

Заметим, что $\sum_{j=1}^{m} p(y_i / x_i) = (\sum_{j=1}^{m} p_{ij}) / P_{i*}) = P_{i*} / P_{i*} = 1$

*Условные плотности*для непрерывных составляющих Xи Yопределяются так

$$f(x/y) = f(x, y)/ f_y(y),\ f_y(y) \ne 0; \quad f(y/x) = f(x, y)/ f_x(x),\ f_x(x) \ne 0. \qquad (10.17)$$

$$f_X(x / y) = (F_X(x / y))'_x = \frac{f(x,y)}{f_y(y)};$$

$$f_Y(y / x) = (F_Y(y / x))'_y = \frac{f(x,y)}{f_x(x)}.$$

Условные плотности обладают всеми свойствами обычных плотностей:

1. Двумерная плотность вероятности неотрицательна $f(x,y) \ge 0$
2. Условие нормировки $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = 1 \quad \iint_{(D)} f(x,y)dxdy = 1$

6. 7. Системы зависимых случайных величин

<u>*Условным законом*</u> распределения системы случайных величин $(X_1, X_2, \ldots X_n)$называется ее закон распределения, вычисленный при условии, что остальные величины $(X_{k+1}, X_{k+2}, \ldots X_n)$приняли значение $(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots x_n)$.Условная плотность может быть вычислена по формуле:

$$f(x_1, x_2 \cdots x_k | x_{k+1}, x_{k+2} \cdots x_n) = \frac{f(x_1, x_2 \cdots x_n)}{f_{k+1,\ldots n}(x_{k+1}, x_{k+2} \cdots x_n)}$$

Случайные величины $(X_1, X_2, \ldots X_n)$называются *независимыми*, если закон распределения каждой частной системы, выделенной из системы $(X_1, X_2, \ldots X_n)$,не зависит от того, какие значения приняли остальные случайные величины.

Плотность распределения системы независимых случайных величин равна произведению плотностей распределения отдельных величин, входящих в систему:

$$f(x_1, x_2 \cdots x_n) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \cdots f_n(x_n).$$

Вероятность попадания случайной точки $(X_1, X_2, \ldots X_n)$в пределы n -мерной области D выражается n -кратным интегралом:

$$P((X_1, \ldots, X_n) \subset D) = \int \ldots \int_{(D)} f(x_1, \ldots, x_n) dx_1, \ldots, dx_n$$

Эта формула является основной формулой для вычисления вероятностей событий, не сводящихся к схеме случаев. Переходят от схемы событий к схеме случайных величин (чаще всего – непрерывных) и сводят событие Ак событию, состоящему в том, что система случайных величин $(X_1, X_2, \ldots X_n)$ окажется в пределах некоторой области D. Тогда вероятность события А может быть вычислена по этой формуле.

*Пример*12.1. Двумерная случайная величина (X, Y) распределена по закону, приведенному в таблице:

y_j	x_i	
	$x_1 = 0$	$x_2 = 0$
$y_1 = -1$	0,1	0,2
$y_2 = 0$	0,2	0,3
$y_3 = 1$	0	0,2

Определить одномерные ряды вероятностей величин Xи Y, условный ряд вероятностей величины Xпри условии, что Y= 0. Исследовать зависимость случайных величин Xи Y.

Решение. Определим ряды вероятностей Xи Yпо формулам (10.8) и (10.9), т.е. выполним суммирование по столбцам и по строкам:

x_i	0	1
p_{i*}	0,3	0,7

y_j	-1	0	1
p_{*j}	0,3	0,5	0,2

Условный ряд Xпри Y= 0 получаем по формуле (10.15):

x_i	0	1
$p_{i/Y=0}$	0,4	0,6

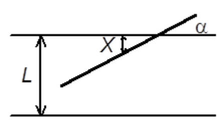
Величины Xи Yзависимы, так как

P(X = 0, Y = 0) P(X = 0) P (Y = 0),

0,2 0,3 0,5.

*Пример*12.2. Иглу длиной bбросают на плоскость, на которой на расстоянии Lдруг от друга проведены параллельные линии. Определить вероятность пересечения иглой одной из линий, если $b< L$(задача Бюффона).

Решение. Рассмотрим двумерную случайную величину (X,), где X-расстояние от середины иглы до ближайшей линии, - острый угол между иглой и линией.



Составляющая Xраспределена равномерно в интервале [0; L/2], а распределена равномерно в интервале [0; /2]. Тогда плотность распределения составляющей X:

$$f_1(x) = 2/L.$$

А составляющей :

$$f_2( ) = 2/ .$$

Согласно теореме умножения законов распределений двумерная плотность равна

$$f(x,) = (2/L)(2/).$$

Пересечение иглой одной из линий для заданного угла будет, когда

$$0 < X < (b/2)\sin( ).$$

Тогда

$$\mathrm{P}\{(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \in \mathrm{D}\} = \int_0^{\pi/2}\int_0^{(l\sin\alpha)/2} f(x, y)\,dx\,d\alpha = \frac{4}{\pi L}\int_0^{\pi/2} d\alpha \int_0^{(b\sin\alpha)/2} dx = \frac{2b}{\pi L}.$$