Электронный учебно-методический комплекс по учебной дисциплине "Теория вероятностей и математическая статистика" для специальности:

310304 «Информатика»

ТЕМА 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ.

Теория вероятностей – математическая наука, изучающая закономерности в случайных явлениях. Одним из основных понятий теории вероятностей является понятие ***случайного события*** (или просто ***события***).

Событием называется любой факт, который в результате опыта может произойти или не произойти. Примеры случайных событий: выпадение шестерки при подбрасывании игральной кости, отказ технического устройства, искажение сообщения при передаче его по каналу связи. С событиями связываются некоторые ***числа***, характеризующие степень объективной возможности появления этих событий, называемые ***вероятностями событий***.

К понятию «вероятность» существует несколько подходов.

Современное построение теории вероятностей основывается на *аксиоматическом подходе* и опирается на элементарные понятия теории множеств. Такой подход называется теоретико-множественным.

Пусть производится некоторый опыт со случайным исходом. Рассмотрим множество всех возможных исходов опыта; каждый его элемент $\varpi \in \Omega$ будем называть *элементарным событием,* а множество Ω – *пространством элементарных событий*. Любое событие A в теоретико-множественной трактовке есть некоторое подмножество множества Ω : $A \in \Omega$.

Достоверным называется событие , которое происходит в каждом опыте.

Невозможным называется событие , которое в результате опыта произойти не может.

Несовместными называются события, которые в одном опыте не могут произойти одновременно.

Суммой (объединением) двух событий A и B (обозначается $A+B$, $A\ B$) называется такое событие, которое заключается в том, что происходит хотя бы одно из событий, т.е. A или B , или оба одновременно.

Произведением (пересечением) двух событий A и B (обозначается $A\ B$, $A\ B$) называется такое событие, которое заключается в том, что происходят оба события A и B вместе.

Противоположным к событию A называется такое событие

$$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right)=1-\mathrm{P}(\overline{A})=1-\mathrm{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}\overline{B}_i\right)=1-\prod_{i=1}^{n}(1-\mathrm{P}(B_i))=$$

, которое заключается в том, что событие A не происходит.

События A_k (k =1, 2, …, n) образуют ***полную группу***, если они попарно несовместны и в сумме образуют достоверное событие.

При преобразовании выражений можно пользоваться следующими тождествами:

$$A+\overline{A}=\Omega; \qquad A\cdot\overline{A}=\varnothing; \qquad A+\Omega=\Omega; \qquad A\cdot\Omega=A; \qquad A\cdot\varnothing=\varnothing;$$

$$A+\varnothing=A; \qquad \overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}; \qquad \overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B}; \qquad A+\overline{A}\cdot B=A+B\ .$$

На основе вышеизложенного сформулированы ***аксиомы теории*** *вероятностей*. Пусть каждому событию ставится в соответствие *число*, называемое *вероятностью события*. Вероятность события A обозначается $P(A)$. Так как событие есть множество, то вероятность события есть функция множества. Вероятности событий удовлетворяют следующим аксиомам.

1. Вероятность любого события заключена между нулем и единицей:

$$0 \le P(A) \le 1. \tag{1.1}$$

2. Если А и В несовместные события, то

$$P(A+B)=P(A)+P(B). \tag{1.2}$$

Вторая аксиома обобщается на любое число событий: $P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i),$ если события A_i и A_j попарно несовместны для всех $i \neq j$

События A_1 , A_2, …, A_n называют *равновозможными* если

$$P(A_1)=P(A_2)=\ldots=P(A_n). \tag{1.3}$$

Если в каком-то опыте пространство элементарных событий Ω можно представить в виде полной группы несовместных и равновозможных событий ω_1, ω_2, …, ω_n , то такие события называются *случаями* , а сам опыт сводится к *схеме случаев* .

Случай ω_i называется благоприятным событием А , если он является элементом множества А : $\varpi_i \in A$.

Классическое определение вероятност*и* : вероятность события определяется по формуле

$$P(A)=\frac{m}{n}, \tag{1.4}$$

где n - число элементарных равновозможных исходов данного опыта;

m - число равновозможных исходов, приводящих к появлению события.

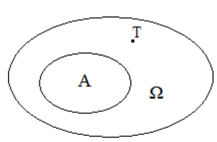

Рис. 1.1

Геометрическое определение вероятности . Пусть в некоторую область случайным образом бросается точка T , причем все точки области равноправны в отношении попадания точки T . Тогда за вероятность попадания точки T в область A принимается отношение

$$\mathrm{P}(A)=\frac{S(A)}{S(\Omega)}, \tag{1.5}$$

где S (A) и S ( ) — геометрические меры (длина, площадь, объем и т.д.) областей A и соответственно.

Основные комбинаторные формулы

Пусть имеется множество $X = \{x_1 , x_2 , .. , x_n\}$, состоящее из n различных элементов. (n , r) - *выборкой* называется множество, состоящее из r элементов, взятых из множества X .

Упорядоченной называется выборка, для которой важен порядок следования элементов. Если каждый элемент множества X может извлекаться несколько раз, то выборка называется *выборкой с повторениями*.

Число упорядоченных (n , r) - выборок (*перестановок*) с повторениями $\hat{P}(n,r)$ и без повторений P (n ,r) равно

$$\hat{P}(n,r)=n^r , \tag{1.6}$$

$$P(n,r)=\frac{n!}{(n,r)!} \quad (1.7)$$

Число неупорядоченных (n , r) - выборок (*сочетаний*) с повторениями $\hat{C}_n^r$ и без повторений C_n^r равно

$$\hat{C}_n^r=\frac{(n+r-1)!}{r!(n,r)!}, \quad (1.8)$$

$$C_n^r=\frac{n!}{r!(n,r)!} \quad (1.9)$$

Число различных разбиений множества из n элементов на k непересекающихся подмножеств, причем в 1-м подмножестве r_1 элементов, во 2-м r_2 элементов и т.д., а $n = r_1 + + r_2 +\ldots + r_k$ равно

$$P_n(r_1,r_2,\ldots,r_k)=\frac{n!}{r_1!r_2!\ldots r_k!} \quad (1.10)$$

Пример 1.1. В партии транзисторов n стандартных и m бракованных. При контроле оказалось, что первые k транзисторов стандартны. Найти вероятность p того, что следующий транзистор будет стандартным.

Решение . Всего осталось для проверки $n+m-k$ транзисторов, из которых стандартных $n-k$. По формуле классического определения вероятности

$$p=\frac{n-k}{n+m-k}.$$

Пример 1.2. Банковский сейф имеет кодовый замок, состоящий из шести дисков с восьмью буквами на каждом. Сейф открывается при наборе единственной комбинации букв. Злоумышленник пытается открыть сейф, причем на проверку одной кодовой комбинации у него уходит 10 секунд. Какова вероятность того, что злоумышленник успеет открыть сейф, если в его распоряжении 1 час?

Решение . Обозначим искомую вероятность через P(A). Общее число исходов, равное числу кодовых комбинаций замка определяется по формуле (1.6) и равно 8^6. Число благоприятствующих исходов, в данном случае равное числу комбинаций, которые успеет испробовать злоумышленник за 1 час, равно 360. Таким образом, искомая вероятность будет равна

$$P(A)=\frac{360}{8^6}\approx 1,4\cdot 10^{-3}$$