ТЕМА 3. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ.

3.1.Определение и классификация случайных величин. Закон распределения случайной величины.

Под с***лучайной величиной*** понимается величина, которая в результате опыта со случайным исходом принимает то или иное значение. Возможные значения случайной величины образуют множество Ξ, которое называется ***множеством возможных значений*** случайной величины. Обозначения случайной величины: X, *Y, Z* ; возможные значения случайной величины: *x* , *y, z* .

<u>Примеры случайных величин:</u>

1. Опыт –бросание двух монет. Тогда Ξ = { (г,г) , (г,ц) , (ц,г) , (ц,ц) } . Числовая функция *X* (СВ *X*)– число выпадений герба, определенная на множестве Ξ={0,1,2} – герб может выпасть 0,1,2 раза.

2. Опыт - работа ЭВМ после ремонта, случайная величина *T* – время наработки на отказ . Множество возможных значений Ξ – теоретически вся правая половина оси абсцисс. Множество возможных значений для этого опыта несчетно.

В зависимости от вида множества Ξ случайные величины могут быть *дискретными* и *недискретными*. СВ *X* называется ***дискретной***, если множество ее возможных значений Ξ – счетное или конечное. Если множество возможных значений СВ несчетно, то такая СВ является ***недискретной***.

В теоретико-множественной трактовке основных понятий теории вероятностей случайная величина *X* есть функция элементарного события: $X = \phi(\omega)$, где ω – элементарное событие, принадлежащее пространству Ω. При этом множество Ξ возможных значений СВ *X* состоит из всех значений, которые принимает функция $\phi(\omega)$.

Законом распределения СВ называется любое правило (таблица, функция), позволяющее находить вероятности всевозможных событий, связанных со случайной величиной. (То есть, всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями СВ и их вероятностями.)

СВ будет полностью описана с вероятностной точки зрения, если мы зададим это распределение, т.е. в точности укажем, какой вероятностью обладает каждое событие. Про случайную величину мы будем говорить, что она *подчинена данному закону распределения*.

3.2 Ряд распределения дискретной случайной величины.

Наиболее простую форму можно придать закону распределения дискретной случайной величины. *Рядом распределения* дискретной случайной величины называется таблица, в которой перечислены в порядке возрастания все возможные значения случайной величины *X* : $x_1, x_2, \ldots, x_n$, … и вероятности этих значений $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$, где $p_i=P\{X=x_i\}$ – вероятность того, что в результате опыта СВ X примет значение x_i ($i = 1,2,\ldots, n$, …).

Ряд распределения записывается в виде таблицы:

X	x_1	x_2	…	x_n	…
P	p_1	p_2	…	p_n	…

Так как события { X = x 1}, { X = x 2}, … несовместны и образуют полную группу, то сумма всех вероятностей, стоящих в нижней строке равна единице:

$$\sum_i P\{X = x_i\} = 1. \qquad (3.1)$$

Многоугольник вероятностей – есть графическое изображение ряда вероятностей – по оси абсцисс откладываются возможные значения случайной величины, а по оси ординат – вероятности этих значений. Для наглядности полученные точки соединяются отрезками прямых. Многоугольник распределения, так же, как и ряд распределения полностью характеризует случайную величину – и является одной из форм закона распределения.

3.3.Функция распределения и ее свойства.

Наиболее общей формой закона распределения, пригодной для *всех* случайных величин (как дискретных, так и недискретных) является функция распределения.

Функцией распределения случайной величины *X* называется вероятность того, что она примет значение меньшее, чем аргумент функции *x* : $F(x) = P\{X < x\}$.

Геометрически функция распределения интерпретируется как вероятность того, что случайная точка X попадет левее заданной точки X (рис. 3.1).

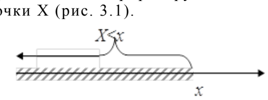

Рис. 3.1

Из геометрической интерпретации наглядно можно вывести основные *свойства функции распределения.*

1. $\lim\limits_{n\to-\infty} F(x) =$ F (- ¥) = 0. (3.2)

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} F(x) =$ F (+ ¥) = 1. (3 .3)

3. $F(x)$ – неубывающая функция своего аргумента, т.е. при $x_1 < x_2$
$F(x_1)$ £ $F(x_2)$.

Доказательство этого свойства иллюстрируется рис. 3.2.

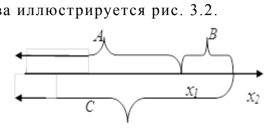

Рис. 3.2

Представим событие $C =\{X < x_2\}$ как сумму двух несовместных событий $C=A+B$, где $A =\{X < x_1\}$ и $B =\{x_1$£$X<x_2\}$.

По правилу сложения вероятностей

$$P(C) = P(A) + P(B),$$

т.е. $P\{X < x_2\} = P\{X < x_1\} + P\{x_1$£$X<x_2\}$, или

$$F(x_2) = F(x_1) + P\{x_1 £ X < x_2\}.$$

Но P {x_1£X<x_2 } £ 0, следовательно, F (x_1) £ F (x_2)

4. P (α £ X < β) = F (β) - F (α), для " [α , β [Î R . (3.4)

Доказательство этого свойства вытекает из предыдущего доказательства.

Вероятность того, что случайная величина X в результате опыта попадет на участок от α до β (включая α) ***равна приращению функции распределения*** *на этом участке.*

Таким образом, *функция распределения F(x)любой случайной величины есть неубывающая функция своего аргумента, значения которой заключены между 0 и 1: 0≤F(x)≤1, причем F(-∞)=0, F(+∞)=1.*

3.4. Функция распределения дискретной случайной величины.

Исходной информацией для построения функции распределения дискретной случайной величины X является ряд распределения этой СВ.

x_i	x_1	x_2	x_3	…	x_n	$>x_n$
p_i	p_1	p_2	p_3	…	p_n	0
$F(x_i)$	0	p_1	p_1+p_2		$p_1+..+p_{n-1}$	1

F (x_i)= P {X <x_i }= P {(X =x_1) È (X =x_2) È … È (X =x_{i-1})}= p_1 +…+p_{i-1} .

$F(x)=\sum\limits_{x_i<x} P(X=x_i)$, то есть суммирование распространяется на все значения x_i , которые меньше x.

Функция распределения любой дискретной СВ есть разрывная ступенчатая функция, скачки которой происходят в точках, соответствующих возможным значениям случайной величины, и равны вероятности этих значений.

$$F(x)=\begin{cases} 0, x \le x_1, \\ p_1, x_1 \le x \le x_2, \\ p_1+p_2, x_2 \le x \le x_3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ p_1+p_2+\dots p_i, x_i \le x \le x_{i+1}, \\ 1, x \ge x_n \end{cases} \quad (3.5)$$

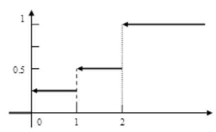

Рис. 3.3

Пример: СВ X – количество выпавших гербов при подбрасывании двух монет. Случайная величина X принимает следующие значения X ={ 0, 1, 2}. Вероятности этих значений: *P(X= 0)=* 0,25*; P(X=* 1*)=*0,5*; P(X=* 2*)=*0,25. Тогда функция распределения этой случайной величины имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases} 0, x \le 0, \\ 0{,}25, 0<x \le 1 \\ 0{,}25+0{,}5, 1<x \le 2 \\ 1, x>2 \end{cases}$$

3.5. Непрерывная случайная величина. Плотность распределения непрерывной случайной величины и ее свойства.

Случайная величина X называется ***непрерывной***, если ее функция распределения *F(x)* есть непрерывная, кусочно-дифференцируемая функция с непрерывной производной.

Так как для таких случайных величин функция *F(x)* нигде не имеет скачков, то *вероятность любого отдельного значения непрерывной случайной величины равна нулю*

P {X =α }= 0 для любого α.

В качестве закона распределения, имеющего смысл только для непрерывных случайных величин, существует понятие ***плотности распределения*** или ***плотности вероятности***.

Вероятность попадания непрерывной случайной величины X на участок от x до x + D x равна приращению функции распределения на этом участке:

P{x£ X <x+ D x }= F (x+ D x) - F(x).

Плотность вероятности на этом участке определяется отношением

$$f(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P\{x \le X \le x+\Delta x\}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\frac{dF(x)}{dx} \quad (3.6)$$

Плотностью распределения (или плотностью вероятности) непрерывной случайной величины X в точке x называется производная ее функции распределения в этой точке и обозначается $f(x)$. График плотности распределения называется кривой распределения.

Пусть имеется точка x и прилегающий к ней отрезок dx . Вероятность попадания случайной величины X на этот интервал равна $f(x)dx$. Эта величина называется **элементом вероятности.**

Вероятность попадания случайной величины X на произвольный участок [a , b] равна сумме элементарных вероятностей на этом участке:

$$\mathrm{P}\{a \le X < b\} = \int_a^b f(x)dx. \quad (3.7)$$

В геометрической интерпретации P {α≤ X <β} равна площади, ограниченной сверху кривой плотности распределения $f(x)$ и опирающейся на участок (α,β) (рис. 3.4).

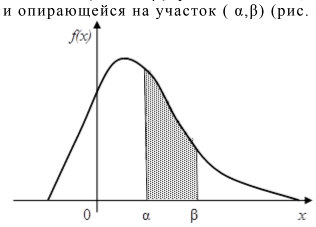

Рис. 3.4

Это соотношение позволяет выразить функцию распределения $F(x)$ случайной величины X через ее плотность:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx \quad (3.8)$$

В геометрической интерпретации $F(x)$ равна площади, ограниченной сверху кривой плотности распределения $f(x)$ и лежащей левее точки x (рис. 3.5) .

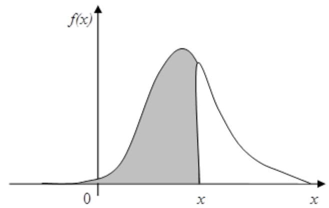

Рис. 3.5

Основные свойства плотности распределения:

1. Плотность распределения неотрицательна: f(x) ³ 0 .

Это свойство следует из определения *f(x)* – производная неубывающей функции не может быть отрицательной.

2. *Условие нормировки:* $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$ Это свойство следует из формулы (5.8), если положить в ней $x = \infty$.

Геометрически основные свойства плотности f*(x)* интерпретируются так:

1. вся кривая распределения лежит не ниже оси абсцисс;
2. полная площадь, ограниченная кривой распределения и осью абсцисс, равна единице.