ТЕМА 5. ТИПОВЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

5.1. Типовые законы распределения ДСВ

5.1.1. Геометрическое распределение

Дискретная случайная величина X имеет ***геометрическое распределение***, если вероятности ее возможных значений 0,1,…,k,.. определяются так:

$$p_k = P\{X = k\} = q^k p,$$

где p – параметр распределения, $(0 \le p \le 1)$, а $q=1-p$.

x_i	0	1	2	…	k	…
p_i	p	$q^1 p$	$q^2 p$	…	$q^k p$	…

На практике геометрическое распределение появляется при следующих условиях. Пусть производится некоторый опыт, в котором некоторое событие появляется с вероятностью p. Опыты производятся последовательно, до наступления события. Случайная величина X, равная числу неудачных опытов, имеет геометрическое распределение.

Числовые характеристики геометрического распределения:

$$M[X] = q/p, D[X] = q/p.^2$$

"Смещенное" геометрическое распределение получается из геометрического путем преобразования СВ X и СВ Y=X+1.

Дискретная случайная величина Y имеет смещенное геометрическое распределение если вероятности ее возможных значений 1,…,k, определяются так

$$p_k = P(Y = k) = q^{k-1} p,$$

где p – параметр распределения $(0 \le p \le 1)$, а $q=1-p$.

x_i	1	2	3	…	k	…
p_i	p	$q^1 p$	$q^2 p$	…	$q^{k-1} p$	…

Числовые характеристики смещенного геометрического распределения определяются с использованием их свойств:

$$M[Y] = M[X+1] = M[X] + 1 = q/p + 1 = 1/p,$$
$$D[Y] = D[X+1] = D[X] = q/p^2.$$

5.1.2. Индикатор случайного события.

Величина X называется индикатором случайного события A, если она равна 1 при осуществлении события A и 0 при осуществлении A.

$$X = \begin{cases} 1, & A \\ 0, & \overline{A} \end{cases}$$

Ряд распределения вероятностей

x_i	0	1
P_i	q	p

P – вероятность наступления события A.

Числовые характеристики индикатора события определяются так.

$$M[X] = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p;$$
$$M[X^2] = 0^2 \cdot q + 1^2 \cdot p = p;$$
$$D[X] = M[X^2] - m_x^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq; \qquad \sigma_x = \sqrt{pq}.$$

5.1.3. Биноминальный закон распределения

Дискретная случайная величина X имеет *биноминальное* распределение, если ее закон распределения описывается формулой Бернулли:

$$P\{X = k\} = P(n,k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

где p – параметр распределения $(0 \le p \le 1), q = 1 - p.$

Распределение загасит от двух параметров n и p.

На практике биноминальное распределение возникает при следующих условиях. Пусть производится серия из n испытании, в каждом из которых некоторое событие появляется с вероятностью p. Случайная величина X, равная числу наступлений события в n опытах, имеет биноминальное распределение.

Числовые характеристики: $M[X] = n$, $D[X] = npq$.

Название объясняется тем, что правую часть равенства можно рассматривать как общий член разложения Бинома Ньютона:

$$(p+q)^n = C_n^n p^0 q^n + C_n^1 p q^{n-1} + \ldots + C_n^k p^k q^{n-k} + C_n^n p^n \cdot q^0 = 1, \quad p + q = 1,$$

т.е. $$\sum_{k=0}^{n} P_n(k) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = 1.$$

5.1.4. Распределение Пуассона

Соотношениями, описывающими биноминальное распределение, удобно пользоваться в тех случаях, если величина и достаточно мала, а *p* велико.

Теорема: Если, $n \to \infty$, а $p \to 0$ так, что $np = \alpha (0 < \alpha < \infty)$, то

$$P\{X = k\} = C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{\alpha^k}{k!} e^{-a}$$

при любом *k=0,1,…*.

Числовые характеристики: *M[X]* = α, D[*X*] = α.

Закон Пуассона зависит от одного параметра α, смысл которого заключается в следующем: он является одновременно и математическим ожиданием и дисперсией случайной величины *X*.

Физические условия возникновения распределения.

Рассмотрим временную ось, на которой будем отмечать моменты возникновения случайных событий (например, отказы компонентов в сложном техническом устройстве, заявки на обслуживание).

Поток случайных событий называется *стационарным*, если число событий, приходящихся на интервал t в общем случае не зависит от расположения этого участка на временной оси и определяется только его длительностью, т.е. среднее число событий в единице времени (l) (интенсивность потока) постоянно.

Поток случайных событий называется *ординарным*, если вероятность попадания в некоторый участок D*t* двух и более случайных событий пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью попадания на него одного события.

В потоке *отсутствует последействие*, если вероятность попадания событий на участок t не зависит от того, сколько событий попало на другие участки, не пересекающиеся с данным.

Поток случайных событий называется *простейшим*, или *Пуассоновским*, если он является

стационарным, ординарным и без последействия.

Для Пуассоновского потока число событий поступивших в течение интервала t является дискретной случайной величиной с распределением Пуассона с параметром α = tl

Пример 7.1. Вероятность того, что изделие не выдержит испытания, равна 0,0004. Найти вероятность того, что из 1000 изделий не менее двух не выдержит испытаний.

Решение. В данном случае имеет место последовательность независимых испытаний, для которых применима формула Бернулли, но так как *p* = 0,0004 мало, а *n* = 1000 велико, то можно считать, что число неисправных изделий *X* распределено по закону Пуассона с параметром, $\lambda = pn =$. 0,0004 • 1000 = 4. Необходимо найти вероятность $P\{x \geq 2\}$:

$$P\{x \geq 2\} = 1 - P\{x < 2\} = 1 - (P\{x = 0\} + P\{x = 1\}),$$

$$P\{X = 0\} = \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} = e^{-4} \approx 0{,}018,$$

$$P\{X = 1\} = \frac{\lambda^1}{1!} e^{-\lambda} = 4e^{-4} \approx 0{,}0733,$$

$$P\{x \geq 2\} = 1 - (0{,}018 + 0{,}0733) = 0{,}908.$$

5.2. Типовые законы распределения НСВ

5.2.1. Равномерное распределение.

Непрерывная случайная величина *X* равномерно распределена в интервале [*а; в*], если ее плотность вероятности в этом интервале постоянна, т.е. если все значения в этом интервале равновероятны:

$$f(x) = \begin{cases} c, & a \leq x \leq b \\ 0, & x \leq a, \quad x \geq b \end{cases} \tag{8.1}$$

Значение постоянной *с* определяется из условия нормировки:

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 0 + \int_a^b c dx + 0 = c(b-a) \Rightarrow c = \frac{1}{b-a}. \tag{8.2}$$

Функция распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ (x-a)/(b-a), & a \leq x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases}, \tag{8.3}$$

Числовые характеристики равномерно распределенной случайной величины определяются так:

$$M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{a} xf(x)dx + \int_a^b xf(x)dx + \int_b^{+\infty} xf(x)dx =$$

$$\int_{-a}^{+b} \frac{x}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2} \tag{8.4}$$

$$D[X]=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-a)^2 f(x)dx=$$

$$=\int_{-\infty}^{a}(x-a)^2 f(x)dx+\int_{a}^{b}(x-a)^2 f(x)dx+\int_{b}^{+\infty}(x-a)^2 f(x)dx=$$

$$=\int_{a}^{b}\frac{(x-a)^2}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{(x-a)^3}{3}\Bigg|_a^b=\frac{(x-\frac{a+b}{2})^3}{3(b-a)}\Bigg|_a^b=$$

$$=\frac{(b-\frac{a+b}{2})^3-(a-\frac{a+b}{2})^3}{3(b-a)}=\frac{(b-a)^2}{12} \qquad (8.5)$$

Среднее квадратичное отклонение равномерного распределения равно

$$\sigma_x=\frac{b-a}{2\sqrt{3}} \qquad (8.6)$$

Равномерное распределение случайной величины полностью определяется двумя параметрами: a и b – интервалом, на котором определена случайная величина.

При необходимости можно определить параметры a и b равномерного распределения по известным значениям математического ожидания m_X и дисперсии D_X случайной величины. Для этого составляется система уравнений следующего вида:

$$\begin{cases}\dfrac{a+b}{2}=m_X\\ \dfrac{b-a}{2\sqrt{3}}=\sigma_X\end{cases}, \qquad (8.7)$$

из которой определяются искомые параметры.

Вероятность попадания равномерно распределенной случайной величины в интервал [α,β) определяется так:

$$P(c\le X\le d)=\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\int_{\alpha}^{\beta}dx=\frac{\beta-\alpha}{b-a}$$, где $[\alpha,\beta]\in[a,b]$

Например, шкала измерительного прибора проградуирована в некоторых единицах. СВ. Х – ошибка при округлении до ближайшего целого деления, которая с постоянной плотностью вероятности принимает любое значение между двумя соседними делениями. ХÎ(к, к+1). Ошибка измерения имеет равномерное распределение на интервале (-1/2,1/2).

5.2.2. Показательное (экспоненциальное) распределение.

Непрерывная случайная величина Х, принимающая только положительные значения имеет *показательное* (или экспоненциальное) распределение, если

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0\end{cases}, \qquad (8.8)$$

Положительная величина 1 называется параметром показательного распределения и полностью определяет его.

Определим функцию распределения случайной величины.

1. при t<0

$$F(t)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\int_{-\infty}^{x}0dt=0,$$

2. при t≥0

$$F(t)=\int_{-\infty}^{t}f(x)dx=\int_{-\infty}^{0}0dx+\int_{0}^{t}\lambda e^{-\lambda x}dx=-e^{-\lambda x}\Big|_0^t=-(-e^{-\lambda t}-e^{0})=1-e^{-\lambda t}.$$

Таким образом, функция распределения имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1-e^{-\lambda x}, & x\ge 0\end{cases} \qquad (8.9)$$

Графики плотности и функции распределения вероятностей экспоненциального распределения приведены на рис. 8.1.

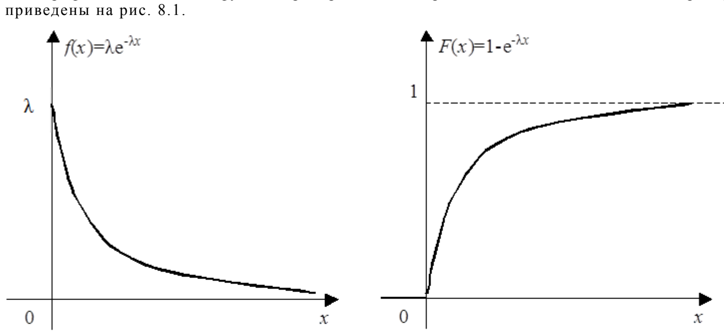

Рис. 8.1

Числовые характеристики случайной величины.

$$M[X]=\int_{0}^{\infty}xf(x)dx=\lambda\int_{0}^{\infty}xe^{-\lambda x}dx.$$

Проводя интегрирование по частям и учитывая, что при $x\to\infty$ e^{-x} стремиться к нулю быстрее, чем возрастает любая степень x , находим:

$$m_x = \frac{1}{\lambda}. \tag{8.10}$$

Дисперсия случайной величины определяем по формуле:

$$D[X] = \alpha_2 - m_x^2 = \lambda \int_0^\infty x^2 e^{-\lambda x} dx - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}. \tag{8.11}$$

Показательное распределение тесно связано с простейшим (стационарным пуассоновским) потоком событий. *Интервал времени T между двумя соседними событиями в простейшем потоке имеет показательное распределение с параметром, равным интенсивности потока.*

Функция распределения СВ T интервала времени между двумя соседними событиями в потоке:

$$F(t) = P\{T < t\}.$$

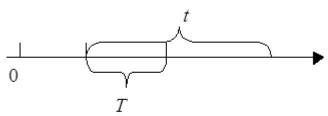

Рис. 8.2

Рассмотрим на оси $0t$ интервал времени T между двумя соседними событиями (рис. 8.2). Для того, чтобы выполнилось неравенство $T<t$, необходимо, чтобы на хотя бы одно событие потока попало на участок длины t; вероятность этого

$$P\{T < t\} = P_t(k \ge 1) = 1 - P_t(k = 0) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Таким образом:

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t},$$

а плотность распределения равна

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t},$$

т.е. случайная величина имеет показательное распределение.

5.2.3. Нормальное распределение (закон Гаусса)

Непрерывная случайная величина X имеет нормальное распределение, если ее плотность вероятности имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\}. \tag{8.12}$$

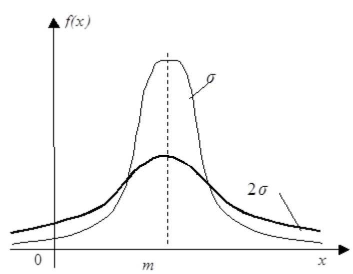

Рис. 8.3

Кривая нормального распределения приведена на рис. 8.3.

Определим *числовые характеристики* нормально распределенной случайной величины X. Математическое ожидание:

$$M[X] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\} dx.$$

Применяя замену переменной

$$t = (x-m)/(\sigma\sqrt{2}), \tag{8.13}$$

получим

$$M[X] = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma t\sqrt{2} + m) e^{-t^2} dt = \frac{\sigma\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-t^2} dt + \frac{m}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

В полученном выражении первый интеграл равен нулю (интеграл в симметричных пределах от нечетной функции), а второй интеграл есть интеграл Эйлера-Пуассона:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = 2\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}. \tag{8.14}$$

Таким образом, математическое ожидание величины X равно m:

$$M[X]=m.$$

Вычислим дисперсию СВ X:

$$D[X] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2 \cdot \exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\} dx.$$

Применяя замену переменной (8.13) получим:

$$D[X] = \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} 2t^2 e^{-t^2} dt.$$

Интегрируя по частям, получим:

$$D[X] = \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} 2t^2 e^{-t^2} dt = \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \left\{ -te^{-t^2}\Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt \right\}.$$

Первое слагаемое в фигурных скобках равно нулю (т.к. e^{-t^2} при t→∞ убывает быстрее, чем возрастает любая степень t), второе слагаемое, согласно (8.14), равно $\sqrt{\pi}$, откуда

$$D[X] = \sigma^2.$$

Таким образом, нормальное распределение случайной величины полностью описывается двумя числовыми характеристиками: математическим ожиданием $M[X]$ и средним квадратичным отклонением σ.

Рассмотрим влияние параметров m и σ на кривую распределения. При изменении параметра m кривая $f(x)$, не изменяя формы, будет смещаться вдоль оси абсцисс. Изменение σ равносильно изменению масштаба кривой по обеим осям; например, при удвоении σ масштаб по оси абсцисс удвоится, а по оси ординат уменьшится в два раза (рис. 8.3).

Центральные моменты нечетной степени для нормально распределенной случайной величины определяются равны нуню; для вычисления центральных моментов четной степени используется рекуррентное соотношение следующего вида:

$$\mu_s = (s-1)\sigma^2 \mu_{s-2}. \qquad (8.15)$$

Определим вероятность попадания нормально распределенной случайной величины в интервал от α до β:

$$P\{\alpha \le X < \beta\} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} \exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\} dx.$$

Сделав замену переменной $t=(x-m)/\sigma$, получим:

$$P\{\alpha \le X < \beta\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\alpha-m}{\sigma}}^{\frac{\beta-m}{\sigma}} e^{-t^2/2} dt.$$

Так как первообразная для e^{-x} не выражается через элементарные функции, то для вычисления вероятностей событий, связанных с нормальными случайными величинами используют табулированную *функцию Лапласа*:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} e^{-t^2/2} dt$$

С помощью этой функции вероятность попадания нормально распределенной случайной величины на интервал от α до β определится так:

$$P\{\alpha \le X < \beta\} = \Phi\left(\frac{\beta-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-m}{\sigma}\right). \qquad (8.16)$$

Функция Лапласа обладает следующими свойствами:

1. $\Phi(0)=0$;
2. $\Phi(-x)=-\Phi(x)$;
3. $\Phi(-\infty)=0{,}5$.

Функция распределения нормально распределенной случайной величины через функцию Лапласа выражается так:

$$F(x) = 0{,}5 + \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right). \qquad (8.16)$$

Значения функции Лапласа приведены в Приложении.

Нормально распределенная случайная величина возникает в тех случаях, когда складывается много независимых (или слабо зависимых) случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Тогда, каковы бы не были законы распределения отдельных случайных величин X_i, закон распределения их суммы будет близок к нормальному распределению. В частности, ошибки измерений распределяются по закону, близкому к нормальному.

Пример 8.1. Время безотказной работы аппаратуры является случайной величиной X, распределенной по показательному закону. Среднее время безотказной работы 100 ч. Найти вероятность того, что аппаратура проработает больше среднего времени.

Решение. Плотность распределения $X: f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x > 0$. Параметр $\lambda = 1/m_X$. где m_x = 100 — среднее время безотказной работы. Искомая вероятность $f\{X>m_x\}$ = P(X>100):

$$P\{X > 100\} = \int_{100}^{\infty} f(x)dx = \int_{100}^{\infty} 0{,}01e^{-0{,}01x} dx = -e^{-0{,}01x}\Big|_{100}^{\infty} = e^{-0{,}01\cdot100} = e^{-1} \approx 0{,}368.$$

Пример 8.2. Имеется СВ, распределенная нормально с параметрами m, δ. Найти вероятность того, что СВ отклоняется от своего математического ожидания m на величину, большую чем 3δ.

Решение.

$$P\{|X-m| < 3\delta\} = 2\Phi\left(\frac{3\delta}{\delta}\right) = 2\Phi(3).$$

По таблицам функции Лапласа (Приложение 2) находим Φ(3) = 0,49865.

Тогда $P\{|X-m| < 3\delta\}$ = 1 - 2-0,49865 = 0,0027.

Пример 8.3. Для замера напряжения используются специальные датчики. Определить среднюю квадратичную ошибку датчика, если он не имеет математических ошибок, а случайные распределены по нормальному закону и с вероятностью 0,8 не выходят за пределы ±0,2.

Решение. Из условия задачи следует, что $P\{-0{,}2 < X < 0{,}2\} = 0{,}8$. Так как распределение ошибок нормальное, а математическое ожидание равно 0 (систематические ошибки отсутствуют), то

$$P\{-0{,}2 < x < 0{,}2\} = \Phi(-0{,}2/\delta) - \Phi(0{,}2/\delta) = 2\Phi(0{,}2/\delta) = 0{,}8.$$

По таблице Лапласа находим аргумент $0{,}2/\delta = 1{,}28$, откуда δ -0,2/1,28=1,0156.