13. ИНТЕРВАЛЬНАЯ ОЦЕНКА

13.1. Сущность задачи интервального оценивания параметров

Интервальный метод оценивания параметров распределения случайных величин заключается в определении интервала (а не единичного значения), в котором с заданной степенью достоверности будет заключено значение оцениваемого параметра. *Интервальная оценка* характеризуется двумя числами – концами интервала, внутри которого предположительно находится истинное значение параметра. Иначе говоря, вместо отдельной точки для оцениваемого параметра можно установить интервал значений, одна из точек которого является своего рода "лучшей" оценкой.

Постановка задачи интервальной оценки параметров заключается в следующем.

Имеется: выборка наблюдений ($x_1, x_2, \dots, x_n$) за случайной величиной X. Объем выборки n фиксирован.

Необходимо с доверительной вероятностью $g=1-a$ определить интервал

$$\theta_0 - \theta_1 \ (\theta_0 < \theta_1),$$

который накрывает истинное значение неизвестного скалярного параметра Θ (здесь, как и ранее, величина Θ является постоянной, поэтому некорректно говорить, что значение Θ попадает в заданный интервал).

Ограничения: выборка представительная, ее объем достаточен для оценки границ интервала.

Эта задача решается путем построения доверительного утверждения, которое состоит в том, что интервал от θ_0 до θ_1 накрывает истинное значение параметра Θ с доверительной вероятностью не менее g. Величины θ_0 и θ_1 называются нижней и верхней доверительными границами (НДГ и ВДГ соответственно). Доверительные границы интервала выбирают так, чтобы выполнялось условие $P(\theta_0 \le \Theta^* \le \theta_1) = g$.

В инженерных задачах доверительную вероятность g назначают в пределах от 0,95 до 0,99. В доверительном утверждении считается, что статистики θ_0 и θ_1 являются случайными величинами и изменяются от выборки к выборке. Это означает, что доверительные границы определяются неоднозначно, существует бесконечное количество вариантов их установления.

На практике применяют два варианта задания доверительных границ:

- устанавливают симметрично относительно оценки параметра, т.е.

  $$\theta_0 = \Theta^* - \varepsilon_g, \quad \theta_1 = \Theta^* + \varepsilon_g,$$

  где ε_g выбирают так, чтобы выполнялось доверительное утверждение. Следовательно, величина абсолютной погрешности оценивания ε_g равна половине доверительного интервала;
- устанавливают из условия равенства вероятностей выхода за верхнюю и нижнюю границу

  $$P(\Theta > \Theta^* + \varepsilon_{1,g}) = P(\Theta < \Theta^* - \varepsilon_{2,g}) = a/2.$$

В общем случае величина $\varepsilon_{1,g}$ не равна $\varepsilon_{2,g}$. Для симметричных распределений случайного параметра Θ* в целях минимизации величины интервала значения $\varepsilon_{1,g}$ и $\varepsilon_{2,g}$ выбирают одинаковыми, следовательно, в таких случаях оба варианта эквивалентны.

Нахождение доверительных интервалов требует знания вида и параметров закона распределения случайной величины Θ*. Для ряда практически важных случаев этот закон можно определить из теоретических соображений.

13.2. Доверительный интервал для математического ожидания

Пусть по выборке достаточно большого объема, $n > 30$, и при заданной доверительной вероятности $1-a$ необходимо определить доверительный интервал для математического ожидания m_x, в качестве оценки которого используется среднее арифметическое

$$m_x^* = \alpha_1^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Закон распределения оценки математического ожидания близок к нормальному (распределение суммы независимых случайных величин с конечной дисперсией асимптотически нормально).

Для симметричных функций минимальный интервал тоже будет симметричным относительно оценки m_x. В этом случае выражение для доверительной вероятности имеет вид

$$P(|\, m^*_x - m_x \,| < \varepsilon) = 1 - a,$$

где ε – абсолютная погрешность оценивания.

Определим оценку дисперсии случайного параметра m^*_x, учитывая, что этот параметр равен среднему арифметическому одинаково распределенных случайных величин x_i (следовательно, их дисперсии $D(x_i)$ одинаковы и равны S^2)

$$D[\alpha_1^*] = D\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right] = \frac{1}{n^2}\left[\sum_{i=1}^{n} D[X_i]\right] = \frac{nS^2}{n^2} = \frac{S^2}{n}.$$

Итак, случайная величина m^*_x распределена по нормальному закону с параметрами m^*_x и S^2/n. Для установления необходимых соотношений целесообразно перейти к центрированным и нормированным величинам. Выражение $m^*_x - m_x$ можно трактовать как центрирование случайной величины m^*_x. Нормирование осуществляется делением на величину среднеквадратического отклонения оценки m^*_1

$$P\left(\frac{\left|m_x^* - m_x\right|}{\sqrt{S^2/n}} \le \frac{\varepsilon}{\sqrt{S^2\ /n}}\right) = \gamma$$

Для стандартизованной величины вероятность соблюдения неравенства определяется по функции нормального распределения

$$P(|z| \le \beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\beta}^{\beta} \exp(-t^2/2)dt = \Phi(\beta) - \Phi(-\beta) = -1 + 2\Phi(\beta) = 1 - \alpha,$$

где $\beta = \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{S^2/n}}$. Значение β равно квантили $u_{1-a/2}$ стандартного нормального распределения уровня $1-a/2$.

Окончательно можно записать

$$u^2_{1-a/2} = n\varepsilon/S^2 \qquad (4.1)$$

При фиксированном объеме выборки из (4.1) следует, что чем больше доверительная вероятность $1-a$, тем шире границы доверительного интервала (тем больше ошибка в оценке математического ожидания). Это равенство позволяет определить необходимый объем выборки для получения оценки математического ожидания с заданной надежностью и требуемой точностью (погрешностью):

$$n = S^2 u^2_{1-a/2}/\varepsilon^2.$$

Если перейти к относительной погрешности $\varepsilon_0 = \varepsilon/m^*_x$, то

$$n = S^2\ u^2_{1-a/2} /(\ \varepsilon_0^2\ m^{*}_x{}^2). \qquad (4.2)$$

Таким образом, чтобы снизить относительную погрешность на порядок, необходимо увеличить объем выборки на два порядка. Приведенная формула часто используется в статистическом моделировании для определения необходимого количества испытаний модели.

Во многих случаях предположение о нормальном распределении случайной величины m^*_x становится приемлемым при $n > 4$ и вполне хорошо оправдывается при $n > 10$. Оценка m^*_x вполне пригодна для применения вместо m_x. Но не так обстоит дело с дисперсией, правомочность ее замены на S^2 не обоснована даже в указанных случаях. При небольшом объеме выборки, $n < 30$, закон распределения оценки дисперсии S^2 принимать за нормальный неоправданно. Ее распределение следует аппроксимировать распределением хи-квадрат как суммы квадратов центрированных величин (хи-квадрат распределение сходится к нормальному при количестве слагаемых, превышающем 30). Но это утверждение обосновано только для случая, когда случайная величина X распределена нормально.

С учетом сделанных допущений величина z будет подчиняться закону распределения Стьюдента с $n-1$ степенями свободы (одна степень свободы использована для определения оценки дисперсии). Распределение Стьюдента симметричное, поэтому полученное соотношение между точностью, надежностью оценки и объемом выборки сохраняется, меняются только значения квантилей. Вместо квантили нормального распределения $u_{1-a/2}$ следует взять квантиль $t_{1-a/2(n-1)}$ распределения Стьюдента с $(n-1)$ степенями свободы. Значения критических точек распределения Стьюдента для некоторых вероятностей и различных степеней свободы, представлены в таблицах. Сравнение таблиц показывает, что квантили распределения Стьюдента больше квантилей нормального распределения того же уровня надежности при малом n. Иначе говоря, применение нормального распределения при небольшом объеме выборки ЭД приводит к неоправданному завышению точности оценки.

Пример 4.1. По выборке СВ объемом n=20 найти точечную оценку математического ожидания случайной величины и доверительный интервал для оценки математического ожидания случайной величины для уровня значимости 0.99.

Решение. Исходная выборка имеет вид:

$$X = [0.14;\ 0.21;\ 0.30;\ 0.32;\ 0.37;\ 0.42;\ 0.44;\ 0.48;\ 0.61;\ 0.66;\ 0.68;\ 0.70;\ 0.70;\ 0.76;\ 0.76;\ 0.86;\ 0.89;\ 0.91;\ 0.96;\ 0.98]$$

Найдем точечную оценку математического ожидания по формуле:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i / n. = 0.64$$

Найдем точечную несмещенную оценку дисперсии:

$$S_0^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = 0.14.$$

Построим доверительный интервал для математического ожидания

$$\overline{X} - \frac{s \cdot t_{\gamma,n-1}}{\sqrt{n-1}} \le m_x < \overline{X} + \frac{s \cdot t_{\gamma,n-1}}{\sqrt{n-1}},$$

где t - значение, взятое из таблицы Стьюдента, для заданного уровня значимости $\gamma = 0.99$ и объема выборки $n = 20$, $t = 2.84$, откуда

$$\frac{s * t_{\gamma,n-1}}{\sqrt{n-1}} = 0.14$$

Следовательно

$$0.5 \le m_x \le 0.78$$

13.3. Доверительный интервал для дисперсии

По выборке при заданной надежности $1-a$ необходимо определить доверительный интервал для дисперсии m_2 , оценка которой

$$\mu_2^* = S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x^*)^2.$$

Если стандартизовать оценку дисперсии, то величина $(n-1)S^2/m_2$ имеет распределение хи-квадрат с $(n-1)$ степенями свободы. Из этого вытекает вероятностное утверждение относительно выборочной дисперсии

$$P[(n-1)S^2 / \mu_2 > c^2{}_a(n-1)] = a. \qquad (4.3)$$

Функция хи-квадрат несимметричная, поэтому границы интервала $c^2{}_1(n-1)$ и $c^2{}_2(n-1)$ выбирают из условия равной вероятности выхода за их пределы

$$P[(n-1)S^2/\mu_2 < c^2{}_1(n-1)] = P[(n-1)S^2/\mu_2 > c^2{}_2(n-1)] = a/2$$

или (4.4)

$$P[(n-1)S^2/c^2{}_1(n-1) < m_2] = P[(n-1)S^2/c^2{}_2(n-1) > m_2] = a/2.$$

Значения границ соответствуют квантилям распределения хи-квадрат с значениями уровней $a/2$ и $1-a/2$, количество степеней свободы равно $n-1$.

Нижняя граница $c^2{}_1(n-1)$ равна квантили $c^2{}_{a/2}(n-1)$, а верхняя – квантили $c^2{}_{1-a/2}(n-1)$. Если воспользоваться критическими точками распределения, то следует записать

$$c^2{}_1(n-1) = c^2(1-a/2;\ n-1),$$

$$c^2{}_2(n-1) = c2(a/2;\ n-1).$$

Пример 4.2. Для выборки, приведенной в примере 4.1 найти доверительный интервал для дисперсии.

Решение.

Доверительный интервал для дисперсии определяется так:

$$\frac{ns^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2},n-1}} \le D_x < \frac{ns^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2},n-1}}$$

где $\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2},n-1}, \chi^2_{\frac{1+\gamma}{2},n-1}$ - значения, взятые из таблицы "Хи-квадрат" для заданного уровня значимости и объема выборки. Для рассматриваемого случая

$$\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2},n-1} = 37.6$$

$$\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2},n-1} = 8.26$$

$$0{,}074 \le D_x < 0{,}339$$

13.4. Доверительный интервал для вероятности

Пусть случайная величина X имеет только два возможных значения: 0 и 1. В результате проведения достаточно большого количества наблюдений эта случайная величина приняла единичное значение n раз. Необходимо при заданной надежности $1-a$ определить доверительный интервал для вероятности p, оценка которой соответствует частоте $w^* = m^*/n$.

Оценка w^* вероятности p является состоятельной, эффективной и несмещенной. Если оцениваемая вероятность не слишком мала и не слишком велика ($0{,}05 < p < 0{,}95$), то можно считать, что распределение случайной величины w^* близко к нормальному. Этим допущением можно пользоваться, если np и $n(1-p)$ больше четырех. Параметры нормального распределения частоты $m^*{}_x = p$, $S^2 = p(1-p)/n$ (дисперсия $S^2(m)$ количества успехов m составляет величину $np(1-p)$, а дисперсия частоты $S^2(m)/n^2$. Тогда по аналогии с определением доверительного интервала для математического ожидания нормально распределенной величины w^* можно записать

$$\varepsilon = |w^* - p| = u_{1-a/2}S = u_{1-a/2}(p(1-p)/n)^{0,5},$$

где $u_{1-a/2}$ – квантиль стандартизованного нормального распределения. Расчетные формулы для границ доверительного интервала имеют вид:

$$p_1 = w^* - u_{1-a/2}\,[w^*(1-w^*)/n]^{0,5},$$

$$p^2 = w^* + u_{1-a/2}\,[w^*(1-w^*)/n]^{0,5}.$$

Более общие результаты получены с учетом того, что случайная величина w^* распределена по биномиальному закону

$$F(w^*) = \sum_{k=0}^{m} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

где $C^n{}_k$ – число сочетаний из n по k.

Исходя из этого положения, для практического применения получены значения нижней p_1 и верхней p_2 доверительных границ

$$p_1 = \frac{\chi^2_{\alpha/2}(2m)}{2n-m+1+0{,}5\chi^2_{\alpha/2}(2m)}; \qquad (4.5)$$

$$p_2 = \frac{\chi^2_{\alpha/2}(2(m+1))}{2n-m+0{,}5\chi^2_{1-\alpha/2}(2(m+1))}. \qquad (4.6)$$

где $\chi^2_\xi(k)$ – квантиль распределения хи-квадрат уровня ξ с числом степеней свободы k.

Формулы (4.1) и (4.2) можно применять и в тех случаях, когда частость w^* события близка (равна) нулю или близка (равна) количеству экспериментов n соответственно. В первом случае

НДГ p_1 принимается равной нулю и рассчитывается только ВДГ p_2. Во втором случае рассчитывается НДГ p_1, а верхняя граница p_2 =1.

Пример 4.3. В результате наблюдения за 58 изделиями не было зафиксировано ни одного отказа. Определить доверительный интервал для вероятности отказа с надежностью 0,9.

Решение. Нижнюю доверительную границу p_1 следует принять равной нулю, ВДГ

$$p_2 = \frac{\chi^2_{0,95}(2)}{116 - 0 + 0,5\chi^2_{0,95}(2)} = \frac{6,0}{119} = 0,05$$

Таким образом, доверительный интервал с нижней границей 0 и верхней границей 0,05 с вероятностью 0,9 накрывает истинное значение вероятности отказа изделий.

Пример 4.4. Среди стандартных изделий одной фабрики в среднем 15% относится ко второму сорту. С какой вероятностью можно утверждать, что процент *p* изделий второго сорта среди 1000 стандартных изделий данной фабрики отличается от 15% не более чем на 2%?

Решение. Здесь n = 1000, w = 0,15, Δ = 0,02. Из (8.32) получим

$$t = \Delta\sqrt{\frac{h}{w(1-w)}} = 0,02\sqrt{\frac{1000}{0,15\cdot 0,85}} = 1,77.$$

Тогда

$$P\left\{\left|p - 0,15\right| \le 0,02\right\} = \Phi(1,77) = 0,9233.$$