ВВЕДЕНИЕ

Математической статистикой называется наука, занимающаяся методами обработки экспериментальных данных (ЭД), полученных в результате наблюдений над случайными явлениями.

Перед любой наукой ставятся следующие задачи:

- Описание явлений;
- Анализ и прогноз;
- Выборка оптимальных решений.

Применительно к математической статистике пример задачи первого типа: пусть имеется статистический материал, представляющий собой случайные числа. Требуется его упростить, представить в виде таблиц и графиков, обеспечивающих наглядность и информативность представленного материала.

Пример задачи второго типа: оценка (хотя бы приблизительная) характеристик случайных величин, например, математического ожидания, дисперсии и т.д. Какова точность полученных оценок.

Одной из характерных задач третьего типа является задача проверки правдоподобия гипотез, которая формулируется следующим образом: можно ли предполагать, что имеющаяся совокупность случайных чисел не противоречит некоторой гипотезе (например о виде распределения, наличия корреляционной зависимости и т.д.).

В курсе рассматриваются задачи всех трех типов: способы описания результатов опыта, способы обработки опытных данных и оценки по ним характеристик случайного явления, способы выбора разумных решений.

ТЕМА 9. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

Пусть проводится опыт Е, в котором нас интересует признак Х, или СВ Х. При однократном проведении Е нельзя заранее сказать, какое значение примет Х. Но при *n*-кратном повторении «среднее» значение величины Х (среднее арифметическое) теряет случайный характер и становится близким к некоторой константе.

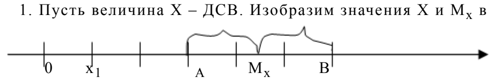
Закон больших чисел – совокупность теорем, определяющих условия стремления средних арифметических значений случайных величин к некоторой константе, при увеличении числа опытов до бесконечности (n®¥).

9.1. НЕРАВЕНСТВА ЧЕБЫШЕВА

<u>Теорема</u>. *Для любой случайной величины X с m_x, D_x выполняется следующее неравенство* $P(|X-m_x|\ge\varepsilon)\le\dfrac{D_x}{\varepsilon^2}$ *где $e>0$.*

<u>Доказательство:</u>

1. Пусть величина Х – ДСВ. Изобразим значения Х и M_x в виде точек на числовой оси Ох



Вычислим вероятность того, что при некотором $\varepsilon\ge 0$ величина Х отклонится от своего МО не меньше чем на ε:

$$P(|X-m_x|\ge\varepsilon).$$

Это событие заключается в том, что точка Х не попадет на отрезок $[m_x-\varepsilon,\ m_x+\varepsilon]$, т.е.

$$P(|X-m_x|\ge\varepsilon)=P(X\not\subset[m_x-\varepsilon,m_x+\varepsilon)=\sum_{|x_i-m_x|\ge\varepsilon}p_i \text{ --}$$

для тех значений x, которые лежат вне отрезка $[m_x-\varepsilon,\ m_x+\varepsilon]$.

Рассмотрим дисперсию с.в. Х:

$$D_x=M[(X-m_x)^2]=\sum_{i=1}^{n}|x_i-m_x|^2p_i.$$

Т.к. все слагаемые – положительные числа, то если убрать слагаемые, соответствующую отрезку $[m_x-\varepsilon,\ m_x+\varepsilon]$, то можно записать:

$$D_x\ge\sum_{|x_i-m_x|\ge\varepsilon}^{n}|x_i-m_x|^2p_i,$$

т.к. $|X-m_x|\ge\varepsilon$, то неравенство можно усилить

$$D_x\ge\sum_{|x_i-m_x|\ge\varepsilon}^{n}\varepsilon^2p_i=\varepsilon^2\sum_{|x_i-m_x|\ge\varepsilon}^{n}p_i$$

$$\text{Р } D_x\ge\varepsilon^2P(|X-m_x|\ge\varepsilon) \quad \text{Р } P(|X-m_x|\ge\varepsilon)\le\frac{D_x}{\varepsilon^2}$$

2. Для НСВ:

$$P(|X-m_x|\ge\varepsilon)=\int_{|x_i-m_x|\ge\varepsilon}f(x)dx$$

$$D_x=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-m_x)^2f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}|x-m_x|^2f(x)dx\ge\int_{|x-m_x|\ge\varepsilon}|x-m_x|^2f(x)dx$$

- это интегрирование по внешней части отрезка $[m_x-\varepsilon,\ m_x+\varepsilon]$.

Применяя неравенство $|x-m_x|\ge\varepsilon$ и подставляя его под знак интеграла, получаем

$$D_x \ge \int\limits_{|x-m_x|\ge\varepsilon} |x-m_x|^2 f(x)dx \ge \alpha^2 \int\limits_{|x-m_x|\ge\varepsilon} f(x)dx = \varepsilon^2 P(|x_i - m_x| \ge \varepsilon).$$

Откуда и вытекает неравенство Чебышева для НСВ.

Следствие. $P(|X-m_x| \le \varepsilon) \le 1 - \frac{D_x}{\varepsilon^2}$ - это 2-е неравенство Чебышева.

Доказательство: События $|X-m_x| \le \varepsilon$ и $|X-m_x| \ge \varepsilon$ - противоположны Þ $P(|X-m_x| \le \varepsilon) + P(|X-m_x| \ge \varepsilon) = 1$.

1. ***Лемма:*** Пусть X –СВ, e>0 – любое число. Тогда

$$P(|X| \ge \varepsilon) < \frac{M(X^2)}{\varepsilon^2}$$

Доказательство:

$$P(|X| \ge \varepsilon) = \int\limits_{|x|\ge\varepsilon} f(x)dx = \int\limits_{|x|\ge\varepsilon} \frac{x^2}{\varepsilon^2} \cdot \frac{\varepsilon^2}{x^2} f(x)dx \le \int\limits_{|x|\ge\varepsilon} \frac{x^2}{\varepsilon^2} f(x)dx = \frac{1}{\varepsilon^2} \int\limits_{|x|\ge\varepsilon} x^2 f(x)dx \le$$

$$\le \frac{1}{\varepsilon^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \frac{1}{\varepsilon^2} M(X^2),$$

Т.к. $\frac{\varepsilon^2}{x^2} \le 1$.

Следствие. $P(|X - M(x)| \ge \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2} D(X)$.

Д-во: Полагаем, вместо св X – св X-M(X), т.к. $M(X-M(X))^2 = D(X)$ и получаем нер-во.

Следствие: (правило трех сигм для произвольного распределения):

Полагаем в неравенстве Чебышева $\alpha = 3\sigma_x$, имеем

$$P(|X-m_x| \ge 3\sigma_x) \le \frac{D_x}{9\sigma_x^2} = \frac{1}{9}.$$

Т.е. вероятность того, что отклонение св от ее МО выйдет за пределы трех СКО, не больше 1/9.

Неравенство Чебышева дает только верхнюю границ вероятности данного отклонения. Выше этой границы - значение не может быть **ни при никаком** распределении.

9.2. СХОДИМОСТЬ ПО ВЕРОЯТНОСТИ

Последовательность случайных величин X_n ***сходится по вероятности к величине а***, $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ если при увеличении *n* вероятность того, что X_n и а будут сколь угодно близки, неограниченно приближается к единице:

$$p(|X_n - a| < \varepsilon) > 1 - \delta$$

где *e,d* - произвольно малые положительные числа.

9.3.ТЕОРЕМЫ ЧЕБЫШЕВА

Одна из важнейших, но наиболее важных форм закона больших чисел – **теорема** Чебышева – она устанавливает связь между средним арифметическим наблюденных значений СВ и ее МО.

9.3.1.Первая теорема Чебышева.

Теорема. *При достаточно большом числе независимых опытов среднее арифметическое значений случайной величины сходится по вероятности к ее математическому ожиданию:*

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} m_x$$

Доказательство: Рассмотрим величину *Y* равную

$$Y_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}.$$

Определим числовые характеристики Y_n m_y и D_Y.

$$m_y = M[Y_n] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M[X_i] = \frac{1}{n} n m_x = m_x, \quad D_y = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D[X_i] = \frac{D_x}{n}$$

Запишем неравенство Чебышева для величины Y_n

$$p\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - m_x\right| \ge \varepsilon\right) < \frac{D_y}{\varepsilon^2} = \frac{D_x}{\varepsilon^2 n}$$

Как бы ни было мало число e, можно взять *n* таким большим, чтобы выполнялось неравенство

$\frac{D_x}{\varepsilon^2 n} \le \delta$, где δ - сколь угодно малое число. Тогда

$$p(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - m_x\right| \geq \varepsilon) < \delta$$

Переходя к противоположному событию:

$$p(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - m_x\right| \leq \varepsilon) < 1 - \delta$$

Т.е. вероятность может быть сколь угодно близкой к 1.

9.3.2. Вторая теорема Чебышева:

Теорема. Если $X_1 .....X_n$ – последовательность попарно независимых СВ с МО $m_{x1}....m_{xn}$ и дисперсиями $D_{x1}..D_{xn}$ ограничены одним и тем же числом $D_{xi}<L$ $(i=1..n)$, $L=const$, тогда для любого e, $d>0$ – бесконечно малых

$$P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^{n} m_{X_i}}{n}\right| < \varepsilon\right) > 1 - \delta$$

или

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^{n} m_{X_i}}{n}\right| < \varepsilon\right) = 1$$

<u>Доказательство:</u> Рассмотрим СВ

$$Y = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}, \quad m_y = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_{X_i}}{n}, \quad D_y = \frac{\sum_{i=1}^{n} D_{X_i}}{n^2}.$$

Применим к Y неравенство Чебышева:

$$P(\left|Y - m_Y\right| \leq \varepsilon) \geq 1 - \frac{D_x}{\varepsilon^2}$$

или

$$P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^{n} m_{X_i}}{n}\right| \leq \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} D_{X_i}}{n^2 \varepsilon^2}$$

Заменим:

$$P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^{n} m_{X_i}}{n}\right| \leq \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{L}{n^2 \varepsilon^2}$$

Как бы ни было мало число е, можно взять n таким большим, чтобы выполнялось неравенство

$\frac{D_x}{\varepsilon^2 n} \leq \delta$, где δ - сколь угодно малое.

Т.е., взяв предел при n®¥ от обеих частей и $\lim_{n\to\infty} \frac{L}{n\varepsilon^2} = 0$ получаем:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^{n} m_{X_i}}{n}\right| < \varepsilon\right) = 1$$

(так как вероятность не может быть больше 1).

<u>Пример1.1.</u> Производится большое число n независимых опытов, в каждом из которых некоторая случайная величина имеет равномерное распределение на участке [1,2]. Рассматривается среднее арифметическое наблюденных значений случайной величины X. На основании Закона больших чисел выяснить, к какому числу a будет приближаться величина Y при $n\to\infty$. Оценить максимальную практически возможную ошибку равенства $Y\approx a$.

<u>Решение.</u>

$$a = M[Y] = M\left[\frac{1}{n}\sum_{i-1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n} M\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} M[X_i] = \frac{1}{n} \cdot n \cdot M[X] = M[X] = 1{,}5.$$

$$D[Y] = D\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n^2} D\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{i-1}^{n} D[X_i] = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot D[X] = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{12n}.$$

$$\sigma_y = \frac{1}{2\sqrt{3n}}.$$

Максимальное практически возможное значение ошибки $3\sigma_y = 3/2\sqrt{3n}$.

9.4. ТЕОРЕМА БЕРНУЛЛИ

Пусть произведены n независимых опытов, в каждом из которых возможно событие А с вероятностью p. Тогда относительная частота появления события А в n опытах стремится по вероятности к вероятности появления А в одном опыте.

<u>Теорема Бернулли:</u> *При неограниченном увеличении числа опытов до n частота события А сходится по вероятности к его вероятности р*: $p^*(A) \xrightarrow[n\to\infty]{} p(A)$,

где $p^*(A) = \frac{m}{n}$ -- частота события А в n опытах, где m-число опытов в которых произошло событие А, n-число проведенных опытов или

$$\lim_{n\to\infty} P(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon) = 1 \quad \text{или} \quad \frac{m}{n} \approx p.$$

Событие X_i – число появлений события А в i-м опыте. СВ X может принимать только два значения: X=1 (событие наступило) и X=0 (событие не наступило). Пусть СВ X_i – индикатор события А в i-м опыте . Числовые характеристики x_i: $m_i = p$ $D_i = pq$.

Они независимы, следовательно, можем применить теорему Чебышева:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + ...+ X_n}{n} - a\right| < \varepsilon\right) = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + ...+ X}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1$$

Дробь $\dfrac{X_1 + X_2 + ...+ X}{n} = \dfrac{m}{n}$ равна относительной частоте появлений события А в испытаниях Þ получаем

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) = 1$$

Пояснения: В теореме речь идет лишь о вероятности того, что при достаточно большом числе испытаний относительная частота будет как угодно мало отличаться от постоянной вероятности появления события в каждом испытании.

Теорема Бернулли объясняет, почему относительная частота при достаточно большом числе испытаний обладает свойством устойчивости и оправдывает статистическое определение вероятности: в качестве *статистической вероятности события* принимают относительную частоту или число, близкое к ней.

9.5. ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА

Данная теорема определяет условия, при которых возникает СВ с нормальным законом распределения – т.е. *закон распределения суммы большого числа СВ* $X_1 + X_2 + ...+ X_n$ *близок к нормальному.*

Эта теорема впервые была сформулирована русским математиком Ляпуновым А.М. (1857-1918).

Одна из простейших форм – относится к случаю одинаково распределенных слагаемых.

Теорема. *Если $X_1 ... X_n$-случайные независимые величины имеющие одно т тоже распределение с математическим ожиданием m и дисперсией σ^2, то при увеличении n закон распределения суммы*

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

неограниченно приближается к нормальному.

Теорема Ляпунова. *Пусть X_1, ...,X_n – независимые случайные величины с математическими ожиданиями m_1, ..., m_n и дисперсиями D_1, ..., D_n, причем при $n\to\infty$*

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n}\left|\overset{0}{X}\right|^3 \Big/ \left(\sum_{i=1}^{n} D_i\right)^{3/2} \right] = 0$$

При наличии данных условий закон распределения

$$Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_n$$

неограниченно стремится к нормальному при n ®¥

Например, теоремы Муавра–Лапласа – частный случай ЦПТ. Если производится *m* независимых опытов, в каждом из которых событие А появляется с вероятностью *p*, то справедливо соотношение:

$$P(\alpha < \frac{Y - np}{\sqrt{npq}} < \beta) = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha)$$

Упрощенный вариант – Если СВ есть сумма большого числа независимых СВ, влияние которых на всю сумму мало, то X имеет закон распределения, близкий к нормальному.

Пример1.2. Требуется произвести 60 выплат. Размер выплат случаен, но средняя выплата равна 50, а средне квадратичное отклонение равно 20.

1. Сколько должно быть денег в кассе, чтобы с вероятностью 0Б95 хватило всем?
2. Сколько денег с вероятностью 0,95 останется в кассе, если первоначально было 3500.

Решение. Суммарная выплата $Y = \sum_{i=1}^{60} X_i$. На основании центральной предельной теореме для одинаково распределенных слагаемых Y имеет приблизительно нормальное распределение с параметрами

$$M[Y] = nM[X] = 50 \cdot 60 = 3000; \quad \sigma_y = \sqrt{n}\sigma_x = \sqrt{60} \cdot 20 \cong 154{,}8.$$

Необходимый запас определяем с использованием функции Лапласа:

$$\Phi\left(\frac{L - M[Y]}{\sigma_y}\right) + 0{,}5 = 0{,}95; \quad \frac{L - M[Y]}{\sigma_y} = 1{,}65; \quad L = 3255{,}6.$$

Остается 3500-3255,6=244.4.

9.6. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ

9.6.1. Локальная теорема Муавра-Лапласа.

Теорема Муавра-Лапласа устанавливает условия, при которых биномиальную случайную величину можно приближённо рассматривать как нормальную.

Пусть $X \sim B(n, p)$. При n®¥ и любых фиксированных a и b, a£b:

$$C_n^m p^m q^{n-m} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp[-\frac{(m-np)^2}{2npq}] \; *)$$

для любых m, удовлетворяющих неравенствам: a£ $\dfrac{m-np}{\sqrt{npq}}$ £b.

Ошибка приближения зависит от того, достаточно ли велико n, не слишком ли близко p к 0 или к 1 и каково интересующее нас значение m. Эта ошибка в настоящее время хорошо изучена и оценена; при необходимости всю нужную информацию можно найти в литературе.

9.6.2. Интегральная теорема Муавра-Лапласа.

Пусть X~$B(n, p)$. Тогда при n®¥ и любых фиксированных a и b, a£b:

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{a \le \frac{m-np}{\sqrt{npq}} \le b\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

Теорема Муавра-Лапласа позволяет уточнить связь относительной частоты и вероятности.

По этой формуле можно приближённо находить вероятность a заданного отклонения относительной частоты от вероятности, вычислять необходимое число опытов n, при котором с данной вероятностью a указанное отклонение не превышает е. Исходное уравнение выглядит так:

$$\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = \alpha \, .$$