Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

Факультет непрерывного и дистанционного обучения

Кафедра информатики

Электронный учебно-методический комплекс

по дисциплине

**Методы численного анализа**

**Часть 1**

Для студентов специальности

**1-31 03 04 “Информатика“**

Минск 2010

# Общие сведения

## Сведения об ЭУМК

Данный комплекс специально разработан для студентов, обучающихся дистанционно. Целью его создания было сделать процесс изучения данной дисциплины максимально удобным и комфортным для студентов. Кроме того, обладание комплексом должно позволить студенту минимизировать свои непосредственные контакты с университетом и компьютером, что особенно удобно для иногородних студентов, а также тех, кто по различным причинам вынужден на долгое время уезжать из города. В принципе данный комплекс позволяет студенту изучить дисциплину и подготовиться к сдаче экзамена по ней “автономно”

Выше приведён перечень и описание составных частей данного комплекса. Они выполнены в виде гиперссылок и для перехода к нужной части требуется, удерживая клавишу “Ctrl”, щёлкнуть левой кнопкой мыши выбранную гиперссылку. Впрочем, поскольку весь комплекс представляет собой файл Microsoft Word, его можно просматривать в обычном режиме, а также полностью или частично печатать

**Составитель: Анисимов В.Я**., доцент**,** кафедры информатики Учреждения образования «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники», кандидат ф.-м.н.

Рассмотрен и рекомендован к изданию на заседании кафедры информатики, протокол № \_2\_ от \_27\_.\_09\_.2010.

## Методические рекомендации по изучению дисциплины

В соответствии с учебным планом студенты дистанционной формы обучения инженерных специальностей изучают курс «Методы численного анализа».

Учебным планом по данному курсу (часть 1) предусмотрено изучение теоретических вопросов, решение задач, выполнение одной контрольной работы, 2 ИПР с ИКТ и одной курсовой работы. Изучение курса заканчивается сдачей экзамена. К сдаче экзамена студенты допускаются только при условии выполненных и защищенных контрольных работ, ИПР с ИКТ и курсовой работы

Рекомендуется изучать курс «Методы численного анализа» в соответствии с рабочей программой. Сначала необходимо ознакомиться с содержанием курса, затем изучить рекомендуемую литературу, обращая внимание на вопросы, выделенные в рабочей программе, после чего изучить теоретическое изложение курса по приведенным разделам, темам и вопросам, ответить на контрольные вопросы, выполнить задачи для решения (выполнения контрольных работ) в соответствии с заданием.

Так как теоретический материал излагается в строгой логической последовательности, рекомендуется изучать данную дисциплину, придерживаясь данной логики.

.

# Рабочая учебная программа

**Учреждение образования**

**«Белорусский государственный университет**

**информатики и радиоэлектроники»**

УТВЕРЖДАЮ

Декан факультета непрерывного и дистанционного обучения

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ В. М. Бондарик

«\_\_\_\_» \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 2010 г.

Регистрационный № -\_\_\_/.

**Методы численного анализа**

**Часть 1**

Рабочая учебная программа

**для направления специальности 1-31 03 04**

**“Информатика“**

Факультет **непрерывного и дистанционного обучения**

Кафедра **информатики**

Курс **третий (семестр 6)**

**Контрольные работы** **1 работа**

**ИПР с ИКТ 2 работы**

**Курсовая работа 1 работа**

**Часов часть 1 155 часов**

Всего часов **305 часов**

Экзамен **3 курс**

Форма получения

высшего образования **дистанционная**

Минск 2010

Составили Минченко Л.И., Анисимов В.Я.

Учебная программа составлена на основе типовой учебной  *«Методы численного анализа*» для специальности 1-31 03 04 Информатика, утвержденной Министерством образования Республики Беларусь 14. 04. 2010 регистрационный № ТД-G.266/тип.

Рассмотрена и рекомендована к утверждению на заседании кафедры информатики

протокол № \_\_ от \_\_\_\_\_ \_\_\_\_

Заведующий кафедрой Минченко Л.И.

Одобрена и рекомендована к утверждению Научно-методической комиссией факультета компьютерных систем и сетей Учреждения образования «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»

протокол № \_\_ от \_\_\_\_\_ \_\_\_

Председатель Лукашевич М.М.

СОГЛАСОВАНО

Начальник отдела методического обеспечения

учебного процесса \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ Ц. С. Шикова

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Цель преподавания дисциплины. Дисциплина «Методы численного анализа» ставит своей целью подготовку студентов к разработке и применению с помощью ЭВМ вычислительных алгоритмов решения математических задач, возникающих в процессе математического моделирования.

Задачи изучения дисциплины. Изучение курса преследует цель сформировать у студентов навыки проведения вычислительного эксперимента. При изложении курса важно не только знакомить студентов с теоретическими характеристиками алгоритмов, но и указывать возможные пути улучшения последних при адаптации алгоритмов к решению конкретных задач математического моделирования.

В результате изучения дисциплины выпускник должен

знать:

-основные подходы к исследованию существующих и созданию новых алгоритмов решения указанных классов задач;

-методы решения численных уравнений и систем таких уравнений;

-основные понятия и методы решения задач теории приближения;

-методы теории квадратур;

-методы решения интегральных уравнений (в том числе в некорректной постановке);

-классические методы решения основных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений;

уметь:

-решать нелинейные уравнения и системы;

-приближать функции;

-решать основные задачи для функциональных уравнений;

-адаптировать известные алгоритмы к решению конкретных естественнонаучных задач на компьютере.

иметь представление о:

-выборе оптимальных методов решения вычислительных задач,

степени точности полученных численных решений,

сходимости и скорости сходимости алгоритмов,

устойчивости и сходимости разностных схем.

Перечень дисциплин, усвоение которых необходимо для изучения данной дисциплины

Дисциплина «Методы численного анализа» непосредственно связана и базируется на знании дисциплин «Математический анализ» и «Геометрия и алгебра», «Вычислительные методы алгебры». В свою очередь дисциплина «Методы численного анализа» служит основной базой для изучения дисциплин «Методы оптимизации» и «Исследование операций»..

Содержание дисциплины.

1. Название тем теоретического материала, их содержание, рекомендуемый объем в часах

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Ку  р  с | Название и содержание тем (*по типовой или учебной программе*) | Контрольная работа (номер и тема по п.2) | | Лабораторная работа с указанием вида 1  (по п.1) | Оснащение контрольных и лабораторных работ  (по п.5) | Литература (по п.4) | Рекомендуемый объем для изучения (в часах)2 | Форма контроля знаний (зачет по контрольной работе, тесты, защита лабораторной работы, защита курсового проекта, экзамен, зачет) |
| 1 | 2 | 3 | | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| **Часть 1**. | | | | | | | | |
|  | *Тема 1. Методы решения нелинейных уравнений*   1. . Вариационный подход к решению нелинейных систем. 2. Сведение решения системы нелинейных уравнений к решению вариационных задач. 3. Метод покоординатного спуска. Метод градиентного спуска. | |  |  |  | 5.1.1  5.1.2  5.1.7  **.** | 20 |  |
|  | *Тема 2. Приближение функций*   1. Постановка задачи интерполирования и ее разрешимость. Алгебраическое интерполирование. 2. Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа. Остаток интерполирования в форме Лагранжа. 3. Разделенные разности и их свойства. Интерполяционный многочлен в форме Ньютона для неравномерной сетки. Конечные разности и их свойства. Интерполяционные формулы Ньютона для равномерной сетки 4. Интерполяционная формула Стирлинга. Многочлены Чебышева. Минимизация остатка интерполирования. 5. Интерполирование с кратными узлами. Многочлен Эрмита. Остатки интерполирования с кратными узлами 6. Понятие сплайн-функции. Сплайн-интерполирование. Построение кубического сплайна. Вариационная и физическая интерпретация кубического сплайна 7. Задача о наилучшем приближении в линейных нормированных пространствах. Метод наименьших квадратов. Среднеквадратичные приближения. 8. Применение интерполирования к вычислению производных. Погрешность формул приближенного дифференцирования | | КР №1 |  |  | **5.1.1**  **5.1.3**  **5.1.6**  **5.1.7** | 20 | Зачет по контрольной работе №1 |
|  | Тема 3.. Численное интегрирование   1. Квадратурные формулы и связанные с ними задачи. Интерполяционные квадратурные формулы. Простейшие квадратурные формулы Ныотона-Котеса. Квадратурные формулы прямоугольников, трапеций, Симпсона. 2. Оценки точности квадратурных формул. Правило Рунге и автоматический выбор шага, интегрирования 3. Квадратурные формулы наивысшей алгебраической степени точности (НАСТ). Критерий и свойства квадратурных формул НАСТ. 4. Теоремы существования, единственности и о свойствах узлов квадратурных формул НАСТ. Частные случаи квадратурных формул НАСТ. Выделение особенностей интегрируемых функций | |  | ИПР с ИКТ№1 |  | **5.1.1**  **5.1.3**  **5.1.5**  **5.1.7**  **5.2. 3** | 20 | Защита **ИПР с ИКТ** №1 |
|  | Тема 4.. Методы численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений   1. Методы решения задачи Коши. Построение одношаговых методов способом разложения решения в ряд Тейлора. Одношаговые методы типа Рунге-Кутта. 2. Построение вычислительных правил на основе принципа последовательного повышения порядка точности. 3. Главный член погрешности. Правило Рунге. Методы решения жестких систем. 4. Многошаговые методы. Экстраполяционный и интерполяционный методы Адамса | |  | ИПР с ИКТ№2 |  | 5.1.2  5.1.3  5.1.6  5.1.7  5.2. 3 | 35 | Защита ИПР с ИКТ №2 |
|  | *Тема 5 Решение краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений*.  1. Многоточечные и граничные задачи 2. Решение линейных граничных задач. Метод дифференциальной прогонки. Метод стрельбы. Метод редукции. 3. Методы решения нелинейных задач. 4. Метод разностной прогонки. Методы Галеркина, наименьших квадратов, Ритца. | |  |  |  | 5.1.2  5.1.3  5.1.6  5.1.7  5.2. 3 | 35 |  |
|  | *Тема 6. Разностные схемы для обыкновенных дифференциальных уравнений*   1. Основные понятия теории разностных схем. Аппроксимация простейших дифференциальных операторов. Постановка разностной задачи. 2. Сходимость и устойчивость разностных схем. Математический аппарат теории разностных схем 3. Метод сеток решения граничных задач. Разрешимость системы разностных уравнений 4. Порядок аппроксимации разностной схемы | |  |  |  | 5.1.6  5.1.7  5.2. 3 | 25 |  |
|  |  | |  |  |  |  | 155 |  |

2. КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ, ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № пп | Тема | Характеристика | Рекомендуемый объем  в часах |
| 1. | Численное интегрирование и аппроксимация функций**.** | Изучение правил численного интегрирования и основных методов приближения функций | 4 |

3.ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ПРАКТИЧЕСКИЕ РАБОТЫ, ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № пп | Название темы | Содержание | Объем в часах |
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| Шестой семестр | | | |
| 1. | Методы решения нелинейных уравнений Многочлен наилучшего средне квадратичного приближения. Метод наименьших квадратов. | Решение нелинейных уравнений. Методы хорд и касательных, Ньютона. Многочлен наилучшего среднеквадратичного приближения. Метод наименьших квадратов. | 4 |
| 2. | Методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. | Одношаговые и многошаговые методы решения задачи Коши. Численное решение задачи Коши методом ломаных Эйлера. Оценка точности метода Рунге-Кутта 2-го порядка. Метод Адамса | 4 |
| Итого: | | | 8 |

4.КУРСОВЫЕ РАБОТЫ (ПРОЕКТЫ), ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № пп | Тема | Характеристика | Рекомендуемый объем  в часах |
| 1. | Приближение фун-кций. Методы чис-ленного решения обыкновенных дифференциальных уравнений | Освоить основные методы численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений и аппроксимации функций с использованием основных математических пакетов. Примерный объем его задания 15 -20 страниц. Необходимое количество часов на выполнение работы 20 | 16 |

5. ЛИТЕРАТУРА

5.1.ОСНОВНАЯ

1. Бахвалов Н.С. Численные методы. М.: Наука, 1975.
2. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы. М.:, Наука, 1976, 1977.
3. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М..: Наука, 1980.
4. Калиткин Н.Н. Численные методы. Наука, 1978.
5. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. Наука, 1989.
6. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Бином, 2004.
7. Минченко Л.И. Краткий курс численного анализа. Ч.1. Минск, БГУИР, 2006.

5.2.ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ

1. Воеводин В.В. Численные методы линейной алгебры. М., 1977.
2. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы высшей математики. Т.1-2. Вышейшая школа,1972, 1975.

6. ПЕРЕЧЕНЬ КОМПЬЮТЕРНЫХ ПРОГРАММ, НАГЛЯДНЫХ И ДРУГИХ ПОСОБИЙ, МЕТОДИЧЕСКИХ УКАЗАНИЙ И МАТЕРИАЛОВ И ТЕХНИЧЕСКИХ СРЕДСТВ ОБУЧЕНИЯ

1. Минченко Л.И. Методические указания к лабораторным работам по курсу «Численные методы». Минск, 2001.
2. Программные пакеты по математике MATLAB, MATHCAD.
3. Электронный учебно-методический комплекс «Вычислительные методы алгебры». БГУИР, 2009.

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ ПО ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ С ДРУГИМИ ДИСЦИПЛИНАМИ СПЕЦИАЛЬНОСТИ

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Название дисциплины,  с которой требуется согласование | Кафедра, обеспечивающая изучение этой дисциплины | Предложения об изменениях в содержании учебной программы по изучаемой дисциплине | Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с ука- занием даты и но- мера протокола)1 |
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| Методы оптимизации | информатики | нет | согласовано |
| Исследование операций | информатики | нет | согласовано |

Зав. кафедрой информатики Минченко Л.И.

# Теоретический раздел

## Лекции

### ВВЕДЕНИЕ

Изучение курса «Методы численного анализа» предполагает освоение методов решения классических задач вычислительной математики с помощью компьютерной техники. В пособии изложены основные понятия, определения и алгоритмы методов численного анализа, рассмотрены основные методы решения систем линейных уравнений, нахождения собственных значений и собственных векторов, численного решения нелинейных уравнений и систем нелинейных уравнений, а также излагаются основные методы аппроксимации и интерполяции функций, методы численного дифференцирования и интегрирования функций, численного решения задачи Коши и краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений в частных производных. Цель данного пособия: познакомить студентов с основными методами численного анализа, а также научить численному решению типичных задач вычислительной математики, достаточно сложных в вычислительном отношении и требующих применения ЭВМ.

**1.** **ТЕМА 1. МЕТОДЫ РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ**

Пусть дано уравнение *f(x)* = 0. Ставится задача: найти решение данного уравнения с точностью до некоторой заданной величины ε. Точное решение данного уравнения будем обозначать через , а приближенное через .

Методы решения уравнений делятся на прямые и итерационные.

Прямые методы – это методы, позволяющие вычислить решение по формуле. Например, нахождение корней квадратного или кубического уравнения.

Итерационные методы − это методы, в которых задается некоторое начальное приближение и строится сходящаяся последовательность приближений к точному решению, причем каждое последующее приближение вычисляется c использованием предыдущих:

.

Очевидно, что прямые методы могут быть использованы только для решения простейших уравнений (так уже для многочлена 5-й степени не существует общих формул для вычисления корней).

Одним из простейших методов решения нелинейных уравнений является использование теоремы Больцано-Коши. Известно, что если функция  непрерывна на отрезке  и  то на отрезке существует хотя бы один корень уравнения ( рис. 1.1).

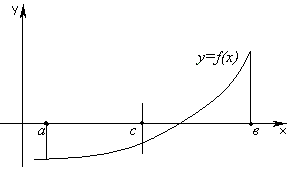


Рис. 1.1

Методом дихотомии (делением отрезка пополам) можно выделить промежуток половинной длины, на концах которого функция принимает значения разных знаков. Продолжая процесс можно найти корень с любой заданной точностью.

Очевидным недостатком этого метода является его трудоемкость. Другой менее очевидный, однако более существенный недостаток иллюстрируется рисунком 1.2.

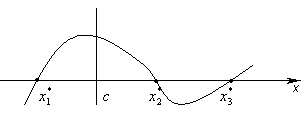


Рис.1.2

Если на отрезке есть несколько корней данного уравнения (см. рис. 1.2), при делении отрезка пополам будет найден только один корень и произойдет потеря других. Чтобы избежать этого, нужно предварительно провести процедуру отделения корней.

Другим простейшим методом решения нелинейных уравнений является использование принципа сжимающих отображений.

Пусть функция  непрерывно дифференцируема на отрезке  и на концах его принимает значения разных знаков. По уравнению  строим уравнение , где . Множитель λ выбираем таким образом, чтобы на отрезке были выполнены условия φ:  и

||<*q<1* на . После этого строим итерационную последовательность

.

которая сходится к искомому решению уравнения.

**1.1. ПРОБЛЕМА ОТДЕЛЕНИЯ КОРНЕЙ**

Поставим задачу: найти интервал *(a,b),* на котором для заданной функции *f(х)* выполняется условие и который содержит *только один* корень функции *f(х)*.

Если функция на заданном интервале непрерывно дифференцируема, то можно воспользоваться следствием из теоремы Ролля, по которому между парой корней всегда находится по крайней мере одна стационарная точка. Алгоритм решения задачи в данном случае будет следующий:

1)находим производную,

2) решаем уравнение *= 0* для нахождения стационарных точек,

3) разбиваем исходный интервал (*a,b*)на меньшие интервалы с помощью найденных стационарных точек,

4) из полученных интервалов выбираем только те, на концах которых *f(x)* принимает значения разных знаков,

5)уточняем интервалы за счет их сужения.

Очевидным недостатком метода является трудность нахождения стационарных точек (зачастую это более трудная задача, чем решение заданного уравнения). К достоинствам метода можно отнести его принципиальную простоту и то обстоятельство, что часто других более хороших способов нет.

Для отделения корней можно также воспользоваться графиком функции.

К достоинствам подобного способа можно отнести его наглядность и простоту, к недостаткам низкую точность и необходимость строить график функции.

Полезным средством для отделения корней является также использование теоремы Штурма.

Пусть *f(x)* – многочлен, и уравнение *f(x)=0* не имеет кратных корней, т.е. нет точек, в которых  и  (стационарные точки не являются корнями).

Построим так называемый ряд Штурма: *f0(x) , f1(x) , … , fn(x)*, где



*f2(x)* – остаток от деления , взятый с обратным знаком,

*fk(x)* − остаток от деления , взятый с обратным знаком,

и так далее, пока не получим постоянную.

Обозначим через *N(a)* – число перемен знаков в ряде Штурма, при *x=a;* через  *N(b)* – число перемен знаков в ряде Штурма, при *x=b.*

**Теорема Штурма.** При сделанных выше предположениях, число корней уравнения *f(x) = 0* на отрезке [a, b] равно *N(a) - N(b).*

Получим простую оценку для погрешности приближения.

Пусть

, .

Тогда по формуле конечных приращений

, где .

Так как  – корень, то  и, следовательно,

.

Предполагаем, что в интервале  корень отделен, а производная не обращается в нуль на , т.е. стационарных точек нет.

Оценим снизу и сверху абсолютное значение производной:

. Тогда получаем оценку

 (1.1)

**1.2. МЕТОД ХОРД**

Пусть дано уравнение , , где  − дважды непрерывно дифференцируемая функция.

Пусть выполняется условие  и проведено отделение корней, т.е. на данном интервале (*a, b*) находится один корень уравнения. При этом, не ограничивая общности, можно считать, что *f(b) > 0 .*

Пусть функция *f* выпукла на интервале *(a, b)* (рис.1.3).

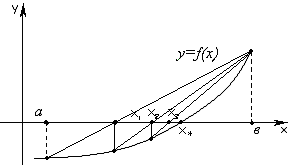


Рис. 1.3

Заменим график функции хордой (прямой), проходящей через точки

 и .

Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки, можно записать в виде . В нашем случае получим .

Найдем точку пересечения хорды с осью Oх.

Полагая , получаем из предыдущего уравнения:

.

Теперь возьмем интервал *(x1,b)* в качестве исходного и повторим вышеописанную процедуру (рис. 6.3). Получим

.

Продолжим процесс. Каждое последующее приближение вычисляется по рекуррентной формуле

 , (1.2)

.

Если же функция вогнута (см. рис. 1.4),

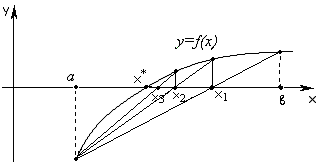


Рис. 1.4

уравнение прямой, соединяющей точки  и  запишем в виде

.

Найдем точку пересечения хорды с осью Oх:

.

Теперь возьмем интервал *(a,x1)* в качестве исходного и найдем точки пересечения хорды, соединяющей точки *(a, f(a))* и *(x1, f(x1))* с осью абсцисс(рис. 1.4). Получим

.

Повторяя данную процедуру, получаем рекуррентную формулу

 (1.3)

 .

Описанный выше метод построения рекуррентных последовательностей (1.2) и (1.3) называется методом хорд. Для использования метода хорд нужно было бы предварительно найти точки перегиба и выделить участки, на которых функция не меняет характер выпуклости. Однако на практике поступают проще: в случае ** для построения рекуррентной последовательности применяются формулы (1.2), а в случае, когда  , применяют формулы (1.3).

Докажем сходимость метода хорд.

Очевидно, обе последовательности (1.2) и (1.3) могут быть записаны в виде

,

где *= а* или *= b.*

Построим функцию ,

где  или  (в зависимости от характера выпуклости). Тогда метод хорд дает рекуррентную последовательность, определяемую единой формулой

 . (1.4)

Покажем, что  будет сжимающим отображением в случае достаточно малого интервала (*a,b*). Приведем выражение для  к общему знаменателю:



Найдем производную



Вычислим значение этой производной в точке , учитывая, что :



По формуле Тейлора

,

где  некоторая точка, лежащая между  и . С учетом данного выражения получим

.

Оценим полученное выражение для производной :

 ,

где .

Откуда, учитывая полученную ранее оценку (1.1)

,

имеем

.

Таким образом, для сходимости итерационной последовательности (6.4) достаточно потребовать выполнения условия

 или .

Очевидно, при значении  достаточно близком к точке  последнее неравенство всегда выполняется и, значит, в некоторой окрестности  точки  выполнено условие ||<1 и, следовательно, отображение *φ*  является сжимающим.

Остается показать, что . Действительно, для любого *x* из этой окрестности справедливо

|| = | | 

 | | + ||  *q* || < *δ,*

где точка ζ лежит в окрестности . Последнее неравенство означает, что .

Таким образом, в силу принципа сжимающих отображений, метод хорд сходится, когда начальное приближение достаточно близко к решению.

**1.3. МЕТОД НЬЮТОНА (МЕТОД КАСАТЕЛЬНЫХ)**

Пусть дано уравнение , , где  − дважды непрерывно дифференцируемая функция.

Если выполняется условие , то на данном интервале содержится корень уравнения. Предположим, что корень отделен, т.е. на данном интервале он только один. Не ограничивая общности, можно считать, что *f(a) < 0, f(b)>0 .*

Рассмотрим рис. 1.5.

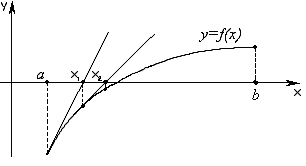


Рис. 1.5

Пусть

.

Запишем уравнения касательной в точке :

.

Найдем точку ее пересечения с осью *Ox*. Получаем

.

Построив касательную в точке , находим точку ее пересечения с осью *Ox*:

.

Продолжая процесс, получим

 .

Для рис. 1.5 характерно условие: , так как вторая производная и сама функция отрицательны.

Рассмотрим ситуацию с  (рис. 1.6).

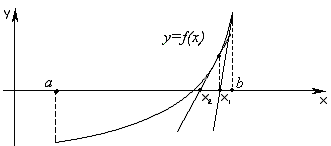


Рис. 1.6

Здесь  и .

Построив касательную в точке , находим точку ее пересечения с осью *Ox*:

 , т. е. .

Продолжая процесс, получаем ту же рекуррентную формулу

,

но с начальным условием .

Таким образом, рекуррентная последовательность Ньютона задается единой формулой

,

где  (при ) или  (при ).

Исследуем сходимость метода Ньютона:

 ,

 или *b.*

Причем  при  и  при *.*

Очевидно,

,

где  − некоторая точка между точками *а* и *b*.

Получаем

,

откуда

,

,

или окончательно

.

Отсюда

,

где

, .

Таким образом, получаем следующую оценку скорости сходимости:

.

Из полученной оценки можно получить

,

где , и далее



, … .

Т.е. итерационная последовательность будет заведомо сходиться, если , т. е. если  выбрано достаточно близко к .

Кроме того, полученная оценка скорости сходимости свидетельствует об очень быстром характере сходимости. Такая скорость сходимости называется квадратичной. Таким образом, метод Ньютона сходится с квадратичной скоростью.

К некоторым недостаткам метода относится необходимость выбора хорошего начального приближения.

**Пример**. Вычислить  с точностью .

Строим функцию  и решаем методом Ньютона уравнение  на отрезке [*3, 4*]. Очевидно , следовательно .

Вычисляем

, и т.д.

Можно проверить, что уже  дает приближение с необходимой точностью.

#### 1.4. КОМБИНИРОВАННЫЙ МЕТОД ХОРД И КАСАТЕЛЬНЫХ

Пусть для определенности  ( рис.1.7).

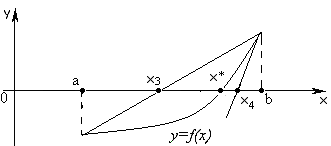


Рис. 1.7.

Тогда, применяя метод хорд при , получим



Применяя метод Ньютона при , получим

.

При этом .

Продолжая процесс далее, получаем



причем .

Отсюда

, .

, ,

причем всегда .

Пусть теперь  (рис. 1.8).

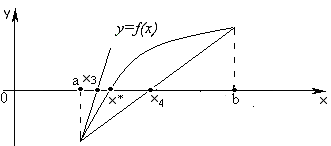


Рис. 1.8.

Применяем метод Ньютона при  и метод хорд при , и получаем



причем 

Таким образом, комбинированный метод хорд и касательных удобен тем, что корень уравнения всегда находится в интервале между двумя последовательными приближениями.

**1.5. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ**

Пусть есть система *n* уравнений с *n* неизвестными:

 (1.5)

Запишем ее в векторном виде:

, (1.6)

где



**1.5.1. МЕТОД ПРОСТЫХ ИТЕРАЦИЙ**

Система (1.4) преобразуется к виду:

,. (1.7)

где .

Пусть есть начальное приближение ,  – δ-окрестность начального приближения и пусть *ϕ -* сжимающее отображение на , т. е.

, где *q<1,*



Последнее условие заведомо выполняется, если



где



- матрица частных производных , называемая также матрицей Якоби функции *φ(х).*

**Теорема1.** Пусть *φ* – непрерывно дифференцируемая векторная функция, для которой выполняются следующие условия:

1) ;

2) .

Тогда система (1.7) имеет решение, причем единственное, и итерационная последовательность , с начальным приближением  сходится к решению  системы (1.7) . При этом справедлива следующая оценка скорости сходимости:

.

Доказательство. Из условия (1.7) вытекает сжимаемость этого отображения. Проверим, что

.

Разложив  по формуле Тейлора, получаем для 

,

где . Тогда



т. е. .

Следовательно, мы можем применить принцип сжимающих отображений, в силу которого получаем результат теоремы. При этом из принципа сжимающих отображений следует, что

,

что равносильно оценке скорости сходимости



в нашем случае.

**1.5.2.МЕТОД НЬЮТОНА**

Рассмотрим снова систему (1.6):

.

Пусть  – начальное приближение. Предположим, что в окрестности начального приближения матрица Якоби



не вырождена, т. е. .

Заменим систему (1.6) линеаризованной системой:

.

Решая данную систему относительно *х*, получим:

,

откуда

.

Заменим (1.6) на систему вида:

.

Отсюда:

,

и продолжая процесс, получим

.

Полученная рекуррентная последовательность называется *последовательностью Ньютона*. При *n* = *1*, из нее получается обычный метод Ньютона.

Так же как и в случае *n*=*1*,можно показать, что рекуррентная последовательность Ньютона сходится, если начальное приближение выбрано достаточно близко к решению .

1. Часто метод Ньютона используется не с рекуррентной формулой Ньютона, а на каждой итерации решают систему линейных уравнений
2. .
3. Оценим сходимость метода. Очевидно,

,

где  означает, что , *M = const > 0*.

Поскольку *=0*, получим:

, т. е.

.

Таким образом, метод Ньютона имеет квадратичную сходимость.

Недостатки метода Ньютона: начальное приближение должно быть близким к решению, а матрица Якоби должна быть невырожденной.

Достоинство: быстрая сходимость.

Отметим, что выбор начального приближения является слабым местом итерационных методов.

**2**. **ТЕМА 2.** ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ

Из математического анализа известно, что в окрестности точки *x0*  любую *n* раз непрерывно дифференцируемую функцию можно аппроксимировать (приблизить) ее многочленом Тейлора:

,

причем







Очевидно, такая аппроксимация во многих отношениях является очень хорошей, но она имеет локальный характер, т.е. хорошо аппроксимирует функцию только вблизи точки *x0* . Это главный недостаток аппроксимации с помощью многочлена Тейлора.

Если речь идет об аппроксимации функции на отрезке, применяются другие методы.

Пусть  – непрерывная функция. Рассмотрим задачу аппроксимации (приближения) ее более простой функцией (обычно многочленом).

Известно из математического анализа, что в силу теоремы Вейерштрасса, любую функцию можно с какой угодно точностью приблизить многочленом по норме  пространства С[*a, b*], т. е. в смысле равномерной сходимости. Но существуют и другие нормы:

 или .

Тогда  означает, что площадь или усредненная площади фигуры, заключенной между графиками функции *f(x)* и многочлена *P(x)*, должна быть меньше ε (заданной точности).

Возможен и другой подход, когда в качестве аппроксимирующей функции берут многочлен или другую достаточно простую функцию, значения которых совпадают со значениями исходной функции в заданных заранее точках, так называемых узлах. Такого рода приближение функций имеет свое собственное название - интерполяция.

**2.1. ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЙ МНОГОЧЛЕН**

Пусть *f(x) –* функция, непрерывная на отрезке [*a,b*].

Выберем на этом отрезке точки, называемые *узлами интерполяции*:

** .

Предположим, что известны значения функции в узлах интерполяции:

.

Ставится задача найти многочлен *Pn(x)* такой, что

. (2.1)

Такой многочлен *Pn(x)* называется *интерполяционным многочленом*, а задача его нахождения – *задачей интерполяции.*

Покажем, что задача интерполяции имеет решение, причем единственное.

Пусть .

Тогда для определения коэффициентов многочлена из условия (2.1) получаем систему:



Ее определитель  с точностью до знака совпадает с так называемым определителем Вандермонда.

.

Поскольку все  различны, определитель Δ отличен от нуля, и, следовательно, система имеет единственное решение. Отсюда вытекает существование и единственность интерполяционного многочлена.

**Погрешность интерполяции.**

Обозначим

 и будем искать ее оценку.

Пусть . Положим ,

где .

Зафиксируем произвольную точку *х*, отличную от узлов интерполяции , и построим вспомогательную функцию:

 . (2.2)

Очевидно,  и, кроме того .

Таким образом, функция *F(t)* имеет по крайней мере (*n+2*) нуля на отрезке [*a,b*]. Применим теорему Ролля, по которой между каждой парой нулей функции находится по крайней мере один нуль производной этой функции. Тогда производная  имеет по крайней мере (*n+1*) нулей на данном интервале (a,b). Продолжая рассуждение, получим в итоге, что  имеет, по крайней мере, два нуля, а  − один нуль в некоторой точке ξ на (a,b).

Продифференцируем равенство (2.2) (*n+1*) раз и подставим *t = ξ*. Получим



Откуда .

Тогда

,

где  (очевидно формула напоминает остаток формулы Тейлора в форме Лагранжа). В итоге имеем оценку погрешности интерполяции:

, где .

* 1. **ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЙ МНОГОЧЛЕН ЛАГРАНЖА**

Пусть даны узлы на отрезке [*a,b*], , и

значения функции *F(x)* в узлах

.

Пусть ,

,

т. е. .

Положим ,

т. е. .

Очевидно 

Построим многочлен .

Легко видеть, что , т.е. это интерполяционный многочлен. Его называют интерполяционным многочленом Лагранжа.

Пример. Рассмотрим задачу интерполяции для функции

, на .

Выберем в качестве узлов точки , , . Тогда значения функции: , , .

Получим

.

Оценим погрешность. Поскольку можно показать, что , то .

* 1. **ЛИНЕЙНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ**

Пусть *n=1*, т. е. даны два узла *x0, x1* справа и слева от точки x:

.

Построим интерполяционный многочлен первой степени по этим узлам.

Значения функции *f(x)* в этих узлах *y0, y1*.

Получаем:

.

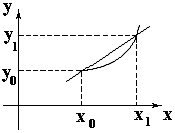


Рис. 7.1.

т. е. графически интерполяционный многочлен представляет собой хорду, соединяющую точки *(x0, y0)* и  *(x1, y1)* (рис. 2.1).

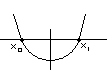
Оценим погрешность линейной интерполяции.

Пусть .

Тогда ,

так как функция  достигает максимума на  в точке .

(рис. 2.2).



xm

Рис.2.2.

Обозначим ,

тогда ,

т. е.  в случае линейной интерполяции.

Пример. Рассмотрим функцию

 на отрезке [*0, 1*] .

Пусть  − расстояние между узлами. Оценим погрешность линейной интерполяции. Получим



следовательно,



* 1. **ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЙ МНОГОЧЛЕН НЬЮТОНА**

Пусть  − набор узлов интерполирования,

 − значения функции  в узлах.

Величину  называют конечной разностью первого порядка в *к*-м узле.

Аналогично определяются конечные разности высших порядков.



.

Конечные разности обычно считают по схеме:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *xi* | *yi* | *yi* | *yi* | *yi* |
| *x0*  *x1*  *x2*  *x3* | *y0*  *y1*  *y2*  *y3* |  |  |  |

Разделенной разностью первого порядка называется выражение

.

Разделенной разностью второго порядка называется выражение

 и т. д.

Пусть *х* – любая точка отрезка, не совпадающая с узлами. Тогда

,

откуда . (2.3)

Далее ,

откуда .

Подставляя в (2.3), получаем

. (2.4)

Далее ,

откуда .

Подставляя в (4), имеем:

 (2.5)

Продолжая процесс, получим:

,

где .

Очевидно, при ,

т. е.  − интерполяционный многочлен. Его называют интерполяционным многочленом Ньютона.

Достоинство интерполяционного многочлена Ньютона: он удобен при расширении интерполяции и добавлении узлов.

Недостаток: в какой-то степени он сложнее в подсчете конечных разностей по сравнению с многочленом Лагранжа.

* 1. **ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЙ МНОГОЧЛЕН НЬЮТОНА - ГРЕГОРИ**

Рассмотрим случай задачи интерполяции с равноотстоящими узлами,

т. е. пусть

, для всех .

Будем искать интерполяционный многочлен Ньютона в форме

,

где коэффициенты многочлена не определены.

Используем условие

.

Получим:







Откуда ,

,

,

.

Продолжая, можем по индукции получить формулу

.

В итоге получаем интерполяционный многочлен Ньютона - Грегори:

.

*Пример.* Пусть требуется найти интерполяционный многочлен

для функции , имеющей в узлах , , , ,  значения , , , , . Вычислим конечные разности:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *xi* |  |  |  |  |  |
| 0  1  2  3  4 | *5*  *3*  *2*  *4*  *6* | *-2*  *-1*  *2*  *2* | *1*  *3*  *0* | *2*  *-3* | *-5* |

Подставляя их значения в формулу для интерполяционного многочлена Ньютона - Грегори, в итоге получаем 

* 1. **АППРОКСИМАЦИЯ ПО СРЕДНЕ КВАДРАТИЧНОМУ ОТКЛОНЕНИЮ**

Пусть есть пространство непрерывных функций *C[a,b]* .

Введем в нем скалярное произведение и новую норму

,



 .

Система функций

 (2.6)

называется линейно-независимой, если равенство  возможно, тогда и только тогда, когда . В противном случае система функций называется линейно зависимой.

Известно, что система попарно-ортогональных ненулевых функций всегда линейно независима. Чтобы найти критерий линейной независимости в общем случае, построим определитель, состоящий из скалярных произведений функций:

.

Определитель  называется определителем Грамма.

**Теорема 1: (Критерий линейной независимости).** Для того чтобы система функций (7.6) была линейно независима, необходимо и достаточно, чтобы .

Доказательство: Докажем утверждение равносильное теореме, т. е. докажем, что система (2.6) линейно зависима тогда и только тогда, когда =0.

1) Необходимость. Пусть система линейно зависима, т. е. существуют  такие, что

 , и .

Будем последовательно умножать это тождество на . Получим систему

 (2.7)

Это однородная система линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов  и ее определитель .

Поскольку система (2.7) имеет ненулевые решения, то , т. е. .

2) Достаточность. Пусть . Из этого следует, что система (2.7) имеет ненулевые решения . Подставим эти решения в систему (2.7) и получим систему тождеств. Перепишем систему в виде



и умножим равенства последовательно на *αi,* , а затем просуммируем:

.

Последнее означает, что 

где .

Но тогда, поскольку функция g(x) непрерывна,



при , т. е. система функций (2.6) линейно зависима.

Теорема доказана.

Рассмотрим функцию *f(x)* на отрезке [*a,b*]. Пусть

 − линейно независимые непрерывные функции.

Построим их линейную комбинацию , называемую обобщенным многочленом по системе функций .

Ставится задача: найти такие коэффициенты  обобщенного

многочлена, чтобы выполнялось условие:

,

где минимум берется по всевозможным значениям  и

 .

Такой обобщенный многочлен называется многочленом наилучшего средне квадратичного отклонения.

**Теорема 2.** Решение задачи аппроксимации функции по средне квадратичному отклонению существует и единственно.

Доказательство. Рассмотрим функцию от .





Очевидно, *Q * принимает наименьшее значение тогда и только тогда, когда  − наилучшее приближение в средне квадратичном для функции *f(x)*. Но для того чтобы *Q* достигло минимума по , необходимо, чтобы





.

Перепишем систему в виде следующей системы, называемой нормальной системой:



Ее определитель , т. к. система функций  линейно независима. Но тогда нормальная система имеет единственное решение .

Убедимся, что , т. е. выполнены достаточные условия минимума. Очевидно,

 − матрица Грамма.

Матрица положительно определена, когда положительно определена соответствующая ей квадратичная форма.

Квадратичная форма , построенная по данной матрице, называется квадратичной формой Грамма.

Но

,

причем, поскольку функции  линейно независимы, квадратичная форма равна нулю только тогда, когда все  нулевые.

Следовательно, решение нормальной системы доставляет минимум функции *Q(**)*.

Теорема доказана.

**Следствие**. Чтобы численно решить задачу построения среднеквадратичного многочлена, надо составить и решить нормальную систему, а ее решение взять в качестве коэффициентов обобщенного многочлена.

*Пример*. Пусть  **[*0, 1*]*.* Построим многочлен наилучшего средне квадратичного отклонения по системе линейно независимых функций: *1, x.* Обозначим его **

Получаем:

**,

**

**.

Записываем нормальную систему:

**

решая ее, находим:

* *.

**2.7. АППРОКСИМАЦИЯ МЕТОДОМ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ**

Пусть дана функция  на отрезке [*a, b*].

Разобьем отрезок с помощью узлов

.

Пусть  − значение функции *f(x)* в узлах.

Если  − большое число, то интерполяционный  − многочлен высокой степени. Зачастую неудобно использовать многочлены очень высокой степени. Очевидно, мы можем отказаться от использования части узлов и тем самым понизить степень интерполяционного многочлена, но тогда теряется часть информации. Поэтому вместо интерполяционного многочлена будем искать многочлен *(x)* меньшей степени *(m<n)*, такой что сумма



принимает наименьшее значение. Данный многочлен называется многочленом наилучшего приближения по методу наименьших квадратов.

Положим



и будем искать решение задачи



Приравнивая к нулю производные , получим систему линейных уравнений для определения коэффициентов :



.

Отсюда получается



− нормальная система для определения коэффициентов 

Когда , можно показать, что нормальная система имеет единственное решение, которое действительно дает минимальное значение для функции *S*. Получив решения нормальной системы , строим многочлен наилучшего приближения по методу наименьших квадратов.

В частном случае, когда *m=n*, многочлен *Pn(x)* переходит в интерполяционный многочлен.

Для решения нормальной системы обычно используется следующая таблица:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *i* | *xi* |  | *………* |  | *yi* | *yi xi* | *………* | *yi* |
| 0  1  .  .  .  n | *х0*  *x1*  *.*  *.*  *.*  *xn* | *.*  *.*  *.* |  | *.*  *.*  *.* | *y0*  *y1*  *.*  *.*  *.*  *yn* | *y0 x0*  *y1 x1*  *.*  *.*  *.*  *yn xn* |  | *y0*  *y1*  *.*  *.*  *.*  *yn* |
|  |  |  | *…* |  |  |  | *…* |  |

**2.8. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ СПЛАЙНАМИ**

Рассмотрим задачу интерполяции функции *f(x)* на отрезке[*a, b*]*.* Пусть мы имеем узлы  и значения функции  в данных узлах. Отрезок разбивается узлами на *n* элементарных отрезков , где  − длина элементарного отрезка, .

*Сплайном* называетсяфункция *S(x)*, которая на каждом элементарном отрезке является многочленом и непрерывна на всем отрезке [*a, b*], вместе со своими производными до некоторого порядка.

*Степенью сплайна* называется наивысший порядок степени многочлена.

*Дефектом сплайна* называется разность между его степенью и наивысшим порядком непрерывной на [*a, b*] производной.

*Пример.* Рассмотрим функцию



Очевидно, функция является кубическим сплайном на отрезке [*0, 4*], так как она непрерывна в узловых точках.

Действительно,

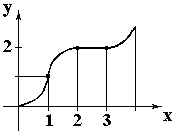


Рис. 2.3.

Найдем дефект сплайна.

В то же время  

Таким образом, наибольший порядок непрерывной производной функции  на отрезке  равен 1 и, следовательно, дефект сплайна равен 2. (См. рис. 2.3).

Отметим, что в общем случае сам сплайн многочленом не является. Чтобы он был многочленом, необходимо и достаточно, чтобы его дефект равнялся нулю.

Будем рассматривать кубические сплайны, у которых непрерывны первая и вторая производные.

Тогда на отрезке  сплайн *S(x)* имеет вид

, .

Очевидно, , . Найдем *S(x)*. Для этого требуется определить значения *4n* неизвестных коэффициентов. Очевидно, для этого необходимо иметь *4n* уравнений для определения коэффициентов.

Подставим левый конец отрезка *(xi-1)* в уравнение:

 , 

, .

В итоге получаем *2n* уравнений:



Далее во всех внутренних узлах должны совпадать первая и вторая производные *S(x)*. Имеем

,

, .

Приравниваем во внутренних узлах значения левых и правых производных. Получим:



т. е. (*2n-2*) уравнений.

Недостающие два уравнения можно задать разными способами. Обычно берут .

Отсюда

, .

Для удобства положим еще .

Объединяя все уравнения, получим систему



Решая систему, получим

далее



Откуда

, .

 Таким образом, задача определения коэффициентов сплайна свелась к решению системы

, 



Система трехдиагональна. Будем решать ее методом прогонки. Поскольку для матрицы системы выполнено условие доминирования диагональных элементов

,

то задача имеет решение, причем единственное, и это решение можно найти методом прогонки.

## ТЕМА 3.. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ И ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

**3.1. ЧИСЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ**

Пусть требуется найти численные значения  производной функции *f(x)* в узлах  отрезка [*a, b*], в которых известны значения  функции. Рассмотрим несколько случаев, в зависимости от того, сколько раз дифференцируема исходная функция.

1) Всегда можно воспользоваться простейшей формулой .

2) Пусть функция *f(x)* дважды дифференцируема на отрезке [*a, b*] и узлы равноудалены друг от друга: , . Разложим *f(xk+1)* в точке *xk*  по формуле Тейлора



и получим



или 

.

При этом оценка погрешности вычислений имеет вид , где  − максимальное на отрезке [*a, b*] значение второй производной функции *f(x)*. Таким образом, точность метода *O(h)*.

**Теорема о среднем.**  Пусть *f(x)* – непрерывная функция на отрезке [*a, b*]. Тогда для любых точек  этого отрезка справедлива формула

, где .

*Доказательство*. Пусть  − минимальное и  − максимальное значения функции на заданном отрезке. Тогда справедливы неравенства вида . Просуммируем их и разделим на *n*. Получим следующую оценку:

Пусть требуется найти численные значения  производной функции *f(x)* в узлах  отрезка [*a, b*], в которых известны значения  функции. Рассмотрим несколько случаев, в зависимости от того, сколько раз дифференцируема исходная функция.

1) Всегда можно воспользоваться простейшей формулой .

2) Пусть функция *f(x)* дважды дифференцируема на отрезке [*a, b*] и узлы равноудалены друг от друга: , . Разложим *f(xk+1)* в точке *xk*  по формуле Тейлора



и получим



или 

.

При этом оценка погрешности вычислений имеет вид , где  − максимальное на отрезке [*a, b*] значение второй производной функции *f(x)*. Таким образом, точность метода *O(h)*.

**Теорема о среднем.**  Пусть *f(x)* – непрерывная функция на отрезке [*a, b*]. Тогда для любых точек  этого отрезка справедлива формула

, где .

*Доказательство*. Пусть  − минимальное и  − максимальное значения функции на заданном отрезке. Тогда справедливы неравенства вида . Просуммируем их и разделим на *n*. Получим следующую оценку:

.

Тогда в силу теоремы Больцано - Коши о промежуточном значении непрерывной функции найдется такая точка, в которой будет выполняться равенство .

Теорема доказана.

Пусть теперь функция *f(х) –* трижды непрерывно дифференцируема, а отрезок [*a, b*] разбит с шагом *h* точками , в которых функция принимает значения  соответственно. Возьмем один из внутренних узлов, например , и оценим предыдущее и последующее значения функции:

,

.

Вычитая из второго равенства первое, получим



и, используя доказанную выше теорему о среднем, можем записать

,

где  - некоторые точки отрезка [*a, b*] .

Таким образом,  или, в общем виде

, где .

При этом оценка погрешности вычисления имеет вид , т.е. точность метода имеет порядок .

Пусть теперь функция *f(x)* – четыре раза непрерывно дифференцируема. Тогда справедливы равенства



и

,

из которых следует

.

Применяя теорему о среднем и обозначая среднее арифметическое двух производных 4-го порядка в последнем равенстве через , получим

,

где  - некоторые точки отрезка [*a, b*] .

В общем виде получается

, где .

При этом погрешность будет составлять  , т.е. точность метода имеет порядок .

**3.2. ФОРМУЛЫ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ**

Пусть требуется вычислить определенный интеграл , где *f(x)* – некоторая заданная на отрезке [*a,b*] непрерывная функция.

Для простоты разобьем промежуток интегрирования точками, равноудаленными друг от друга:  так, что будет выполняться равенство , где .

Рассмотрим несколько вариантов решения данной задачи.

**Формула прямоугольников.**

Аппроксимируем площадь под

графиком функции *f(x)* суммой прямоугольников с основанием *h* и высотой *f(ξ)*, где . Причем, если взять , то получим формулу левых прямоугольников (см. рис.3.1):

.

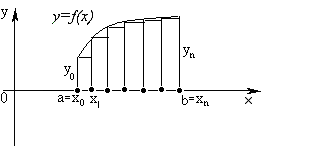


Рис. 3.1

А если взять , то получим формулу правых прямоугольников (см. рис.3.2):

.

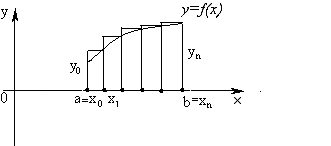


Рис. 8.2

В случае, когда мы берем среднюю точку ,

получаем формулу средних прямоугольников (рис. 3.3):

, .

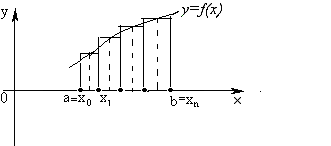


Рис. 3.3.

Оценим точность последней формулы.

Пусть, где , а подынтегральная функция − трижды непрерывно дифференцируема. Тогда

,,.

Запишем разложения функции *F* в точке  и точке : 

,

 ,

где 

Вычтем из первого равенства второе и получим: .

Используя теорему о среднем, можно записать

,

где  лежит на отрезке .

Таким образом, исходный интеграл равен .

Отсюда легко получить оценку погрешности:

, где .

Таким образом, точность формулы средних прямоугольников имеет порядок .

**Формула трапеций.** Поступаем аналогично предыдущему способу,

только аппроксимировать площадь под графиком функции *f(x)* будем трапециями. Площадь элементарной криволинейной трапеции приближенно равна , а интеграл -

.

Можно показать, что погрешность вычислений составляет , т.е. точность метода имеет порядок .

**Формула Симпсона или формула парабол.** Теперь аппроксимируем

функцию на элементарном отрезке параболой. По сравнению с предыдущими способами вдвое уменьшим расстояние между узлами , тогда искомый интеграл будет равен .

Найдем коэффициенты *a,b,c* параболы, аппроксимирующей  на отрезке . Для этого решим следующую систему:

 (8.1)

Так как главный определитель системы с точностью до знака совпадает с определителем Вандермонда, т.е.

,

то эта задача всегда имеет решение, причем единственное.

Посчитаем площадь параболической трапеции (рис. 3.4):

.

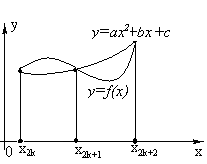


Рис. 3.4.

Возьмем для простоты начальный элементарный интервал . Площадь не изменится, если мы сдвинем криволинейную трапецию по оси *Ох* и совместим ее начало с началом координат, т.е. иными словами положим  Тогда

.

Перепишем систему (8.1) в виде:



и решим ее. Получим:





Очевидно, аналогично



Таким образом

.

Данная формула и называется формулой Симпсона. Можно показать, что погрешность формулы Симпсона , и ее точность имеет порядок .

Таким образом, по сравнению с предыдущими методами формула Симпсона является существенно более точной.

**3.3. ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ**

Вычислим интеграл , заменяя подынтегральную функцию интерполяционным многочленом с узлами , где . Получим

,

где 

и .

Формулу

 (3.2)

называют интерполяционной квадратурной формулой Лагранжа.

Заметим, что *ωk(x)* зависит только от самих узлов, на которые разбит промежуток, и не зависит от функции . Следовательно, коэффициенты *Ak* не зависят от вида функции также и, используя эти коэффициенты, можно считать интегралы от различных функций. При этом, если наша функция является многочленом, то формула (3.2) является точной формулой.

Можно найти *Ak* при помощи метода неопределенных коэффициентов:



Из данной системы можно найти *Ak.,* .

*Пример*. Построить интерполяционную квадратурную форму для вычисления интеграла



Строим систему



Решая ее, находим



Таким образом 

Недостатком интерполяционной квадратурной формулы Лагранжа является проблематичность оценки погрешности.

Наряду с интерполяционной квадратурной формулой Лагранжа для вычисления интегралов вида



часто применяется квадратурная формула Гаусса, в которой узлами разбиения служат корни многочлена

.

Отметим, что формула Гаусса точнее формулы Лагранжа.

*Замечания.*

1. Вычисление несобственных интегралов: .

Если подынтегральная функция разрывная, то аналогично:  (*b* − точка разрыва).

1. Вычисление кратных интегралов. Пусть требуется вычислить 

по области **. Не ограничивая общности, считаем, что область  является правильной вдоль оси *Оу*, т.е. имеет вид

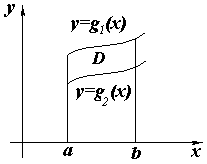


Рис. 3.5

Тогда

,

где .

Пусть  − точки разбиения. Тогда можно вычислить каждый из интегралов

,

а потом применить формулу Симпсона к интегрированию функции .

**4. ТЕМА 4.. МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

Рассмотрим дифференциальное уравнение  с начальным условием . Будем предполагать, что *f(x,y)* непрерывная и непрерывно дифференцируемая по  функция в окрестности замкнутой области

,

содержащей внутри себя точку .

Требуется решить задачу Коши: найти непрерывно дифференцируемую функцию *y=y(x)*, такую что  при всех  и .

Разобьем отрезок *[a, b]* с помощью точек разбиения  с шагом . Тогда узлы разбиения имеют вид .

Пусть  − значения функции в точках разбиения.

**4.1. МЕТОД ЛОМАНЫХ ЭЙЛЕРА**

Пусть  искомое решение задачи Коши. В точке *(x0,y0)* построим касательную (см. рис. 4.1) к графику .

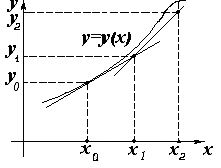


Рис. 4.1

Запишем уравнение касательной:

.

и найдем точку пересечения этой касательной с прямой : .

Запишем уравнение прямой



и найдем точку ее пересечения с прямой с :

.

Продолжая процесс, получим рекуррентную последовательность:

 (4.1)

,

которую называют последовательностью Эйлера. Соединяя ломаными все точки , полученные из рекуррентной последовательности Эйлера, получим ломаную линию, приближающую график решения . Функция, график которой совпадает с ломаной Эйлера, принимается за приближенное решение задачи Коши.

Выясним точность метода Эйлера. Сравним значения точного решения y(x) задачи Коши в узловых точках со значениями, полученными методом Эйлера:

,

.

Поскольку

,

то  при условии, что . То есть, точность метода на отдельном отрезке  совпадает с . Тогда, очевидно, точность метода Эйлера на всем отрезке [*a, b*] будет *O(h).*

Для повышения точности вычислений иногда используется модифицированный метод Эйлера, в котором рекуррентная последовательность Эйлера вычисляется по формулам

. (4.2)

Модифицированный метод Эйлера обычно дает более точное приближение решения.

*Пример.* Пусть требуется решить задачу Коши:



Полагая  и используя метод Эйлера, получим, как легко убедиться, из формулы Эйлера (4.1)

.

С другой стороны, используя модифицированный метод Эйлера, получим в силу формулы (2) рекуррентную последовательность

 .

Поскольку точным решением задачи Коши, как легко проверить, является функция , можно сравнить точность обоих методов.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|  | 0 | 0.2 | 0.4 | 0.6 | 0.8 | 1 |
|  | 1 | 0.8 | 0.64 | 0.572 | 0.4086 | 0.3277 |
|  | 1 | 0.82 | 0.6724 | 0.5514 | 0.4521 | 0.3708 |
|  | 1 | 0.8187 | 0.6703 | 0.5488 | 0.4493 | 0.3679 |

Общепризнанным недостатком метода Эйлера является его не достаточно высокая точность. Несомненным достоинством метода Эйлера является его простота.

**4.2. МЕТОДЫ РУНГЕ-КУТТА**

**4.2.1 МЕТОД РУНГЕ-КУТТА ВТОРОГО ПОРЯДКА (ИЛИ МЕТОД ТИПА «ПРЕДИКТОР-КОРРЕКТОР»).**

Метод состоит из двух этапов. Сначала находят по методу Эйлера грубое решение:

 .

На следующем шаге это грубое решение сглаживается:

.

Выясним точность метода. Преобразуя , получаем:



С другой стороны, разложим точное решение *y(x)* по формуле Тейлора. Получим



Полагая , получаем погрешность на отдельном шаге равную . Тогда на всем отрезке погрешность составит 

Достоинство метода: его точность превосходит точность метод Эйлера.

**4.2.2. МЕТОД РУНГЕ-КУТТА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА.**

На каждом шаге производится вычисление коэффициентов :

;

;

;

.

Затем вычисляем

.

Данный метод имеет точность  на [*a,b*].

Рассмотрим пример, который мы использовали для иллюстрации точности метода Эйлера.

*Пример*. Требуется решить задачу Коши:

 на отрезке [0, 1].

Выберем шаг . Результат вычислений поместим в таблицу.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|  | 0 | 0.2 | 0.4 | 0.6 | 0.8 | 1 |
|  | 1 | 0.8187 | 0.6703 | 0.5487 | 0.4493 | 0.3678 |
|  | 1 | 0.8187 | 0.6703 | 0.5488 | 0.4493 | 0.3679 |

Таким образом, метод Рунге-Кутта 4-го порядка отличается очень высокой точностью. К определенным его недостаткам относится большая сложность и трудоемкость (на каждом шаге необходимо четырежды вычислять значения функции *f* вместо одного раза в методе Эйлера).

Отметим, что на практике выбирают начальную длину шага *h* таким образом, чтобы  , где *ε* − заданная точность вычисления решения. Затем шаг выбирают вдвое меньшим и останавливают вычисления, если разность полученных значений *yk*  со значениями, полученными при начальном выборе шага меньше *ε*. В противном случае шаг еще раз уменьшают вдвое и т.д.

**4.3. МЕТОД АДАМСА**

* + 1. **НЕЯВНАЯ СХЕМА МЕТОДА АДАМСА.**

Пусть есть дифференциальное уравнение

,

с начальным условием

.

Разбиваем отрезок [*a,b*] с шагом *h* на *n* частей. То есть, получаем узлы , , где .

Пусть  − решение. Тогда на  справедливо равенство

.

Применим формулу левых прямоугольников для вычисления интеграла. Получим

, то есть формулу Эйлера.

Очевидно это не самый точный метод вычисления интеграла.

Применим формулу трапеций для вычисления интеграла. Получим

.

Вычисление более точно, но мы не можем найти  из полученной формулы. Однако в частном случае, когда дифференциальное уравнение линейно, т. е. имеет вид

,

мы получим:

,

где

*pk = p(xk)*, *qk = q(xk).*

Отсюда легко находится значение

.

**4.3.2. . ЯВНАЯ СХЕМА АДАМСА**

Используем интерполяционную квадратурную формулу Лагранжа для вычисления интеграла, т.е.

, где

, ; .

Найдем коэффициенты  методом неопределенных коэффициентов:

;

.

Получаем систему двух уравнений с двумя неизвестными



Откуда

;

;

;

.

В итоге получим:

;

.

Откуда

, где .

Следовательно, получим

.

Это формула Адамса второго порядка.

Существенным недостатком метода Адамса второго порядка является то обстоятельство, что для его применения надо знать дополнительно к начальному условию еще

 или .

Достоинством метода является то, что значение функции *f* в каждой точке *(xk, yk)* вычисляется только один раз.

*Замечания*.

1. Если необходимо решить задачу Коши для системы дифференциальных уравнений:



можно использовать методы Эйлера или Рунге-Кутта.

1. Если решается задача Коши для уравнений высшего порядка

;

;

;

………

;

то задача сводится к решению задачи Коши для системы дифференциальных уравнений.

То есть, вводим новые переменные



Откуда получается система дифференциальных уравнений 

**5. ТЕМА 5 РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

Будем рассматривать дифференциальное уравнение второго порядка.

, (5.1)

где , ,  − заданные непрерывные на отрезке *[a, b]* функции.

Напомним, что задача Коши для уравнения (1) сводится к нахождению решения , удовлетворяющего начальным условиям:



*Краевой задачей* называется задача нахождения решения , удовлетворяющего граничным условиям:

 (5.2)

Краевая задача отличается от задачи Коши непредсказуемостью. Ее решение может существовать, не существовать, быть единственным, может быть бесконечно много решений.

Часто вместо граничных условий (5.2) используют обобщенные граничные условия:

 (5.3)

Граничные условия называются *однородными,* если A=B=0.

Соответственно, краевая задача называется *однородной,* если у нее однородные граничные условия и правая часть уравнения .

Следующая теорема имеет важное теоретическое значение.

**Теорема.** Краевая задача *(1)* , *(3)* имеет решение, причем единственное тогда и только тогда, когда соответствующая ей однородная краевая имеет только нулевое решение (тривиальное решение однородной краевой задачи).

**5.1. СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ**.

Поскольку достаточно хороших аналитических методов нет, то используются приближенные методы.

Система дважды непрерывно дифференцируемых функций  называется *базисной системой*, если выполняется:

1)  удовлетворяет граничному условию (10.3)*,*

2) функции  − линейно независимы на *[a, b]* и удовлетворяют однородным граничным условиям.

По базисным функциям строят приближенное решение:

.

Задача сводится к выбору коэффициентов  таких, чтобы функция

*yn(x)* удовлетворяла граничному условию (10.3) и была в некотором смысле близкой к точному решению.

Поступают следующим образом. Выражение

 называют невязкой.

Легко видеть, что, если бы , то *yn(x)* было бы точным решением. К сожалению, так бывает очень редко. Следовательно, необходимо выбрать коэффициенты таким образом, чтобы невязка была в некотором смысле минимальной.

**5.1.1. МЕТОД КОЛЛОКАЦИЙ.**

На отрезке *[a, b]* выбираются точки, которые называются точками коллокации. Точки коллокации последовательно подставляются в невязку. Считая, что невязка должна быть равна нулю в точках коллокации, в итоге получаем систему уравнений для определения коэффициентов .

 (5.4)

Обычно *m=n*. Получается система из *n* линейных уравнений с *n* неизвестными (коэффициентами ):



Решая (5.4)*,* найдем приближенное решение *yn(x).* Для повышения точности расширяем базисную систему. Получаем более точное решение.

В значительной степени успех в применении метода зависит от удачного выбора базисной системы.

*Пример.* Пусть

,

, .

Выберем базисную систему:



Поскольку , следовательно, функции  и  линейно независимы.

Строим приближенное решение

.

Выберем точки коллокации:

.

Получаем систему уравнений



Решая ее, получим

.

**5.1.2. МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ.**

Как и в методе коллокаций приближенное решение строится по базисной системе. Для нахождения коэффициентов при базисных функциях минимизируется интеграл .

Строим систему



Решая ее, находим .

Синтезом метода наименьших квадратов и метода коллокаций является следующий метод. Выбирают *N>n* точек и решают задачу

.

Для ее решения строится система



*Пример.* Рассмотрим краевую задачу





Выберем базисную систему:



Применяя метод наименьших квадратов, можно найти



**5.1.3. МЕТОД ГАЛЕРКИНА.**

По базисной системе строим приближенное решение

.

Рассматриваем невязку  и для определения коэффициентов при базисных функциях строим систему



Решая данную систему, находим значение .

Пример. Рассмотрим краевую задачу



.

Возьмем



Тогда, применяя метод Галеркина, получим





Сравним значения точного решения  со значениями приближенных решений  и  в отдельных точках.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| xi |  |  |  |
| 0,25  0,5  0,75 | 0,044  0,07  0,06 | 0,052  0,069  0,052 | 0,044  0,062  0,06 |

5.1.4. Разностный метод решения краевых задач.

Рассмотрим краевую задачу

 (5.5)

Разобьем отрезок *[a, b]* на *n* одинаковых частей с шагом  точками:

.

Заменим



где .

Получаем для любого внутреннего узла ,  уравнение

 (5.6)

и для граничных узлов

.

То есть мы имеем систему из *(n+1)* уравнения с *(n+1)* неизвестными . Ее решение дает нам приближенное решение краевой задачи.

Рассмотрим частный случай линейной краевой задачи:

, (5.7)

.

В этом случае получаем

 (5.8)

.

То есть получили трехдиагональную систему линейных уравнений

,

в которой выполнено условие преобладания диагональных элементов

.

Такая система легко решается методом прогонки.

1. ТЕМА 6. РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Из предварительного рассмотрения краевых задач в параграфе 5 можно сделать вывод о превосходстве разностных методов численного решения краевых задач. Рассмотрим эти методы более подробно.

**6.1. РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ПОРЯДКА**

Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка

.

Пусть его решением является функция *U=U(x).*

Разобьем отрезок *[a,b]* на *n* равных частей с шагом *h*, то есть построим последовательность {*xk*}:

, , , где .

Множество узлов *xk* на отрезке *[a,b]* образует *сетку*  с шагом *h*.





При этом, любую функцию *gk* *k=0, 1,…,n* , определенную на сетке , будем называть сеточной функцией. В частности, сеточной функцией будет последовательность , порожденная решением  дифференциального уравнения.

Заменим производные функции во внутренних узлах их разностными аппроксимациями:

*.*

Значение функции *U* в *k*–ом узле обозначим *,* а функции *f* соответственно через *.* В новых обозначениях получим разностное уравнение:

*.*

C большей точностью первую производную можно также представить в виде:

**, тогда уравнение будет иметь вид *.*

Рассмотрим теперь на данном отрезке дифференциальное уравнение

второго порядка

*.*

Аналогично, заменив производные их разностными аппроксимациями, получим:

*.*

Преобразуем полученное разностное уравнение:

*.*

Полученные разностные уравнения будем также называть *разностными*

*схемами* для соответствующих дифференциальных уравнений.

Таким образом, мы перешли от дифференциальных уравнений

к разностным уравнениям вида:

 (11.1)

и

, (6.2)

где  − некоторые коэффициенты. Уравнения (6.1) и (6.2) будем называть соответственно *линейными разностными уравнениями первого и второго порядка* (при условии, что  в (6.1) и  в (6.2)).

Заметим, что при переходе от дифференциального уравнения к разностному уравнению, порядок уравнения не обязательно сохраняется.

Рассмотримсвойства линейных разностных уравнений (6.1) и (6.2) , абстрагируясь от дифференциальных уравнений, их породивших*.* Их решениями будем называть сеточные функции , удовлетворяющие соответствующим уравнениям при *k=0, 1,….,n.*

Очевидно, что для однозначного решения разностного уравнения (6.1) необходимо знать начальное значение сеточной функции  в нулевом узле, то есть *U0*. Для решения разностного уравнения (6.2)необходимо знать два начальных значения *U0 ,U1.*

Назовем разностное уравнение (6.1) линейным разностным уравнением первого порядка, а уравнение (6.2)линейным разностным уравнением второго порядка.

Рассмотрим однородное уравнение, соответствующее уравнению (6.1):

. (6.3)

Легко видеть, что если его решение, то решением также будет и сеточная функция. Тогда, очевидно, что любое другое решение уравнения (6.3) можно получить при определенном численном значении . То есть, если известно, то любое решение  представимо в виде.

Таким образом, представляет собой общее решение уравнения (6.3), из которого получаются выбором постоянной α все остальные решения. Легко видеть, что общим решением разностного уравнения (6.1) будет сеточная функция , где ** произвольное решение уравнения (6.1).

Рассмотрим однородное уравнение, соответствующее уравнению (6.2):

 (6.4)

Пусть  и  − решения (6.4), причем векторы  и  − линейно независимы, т. е.

.

Подстановка показывает, что при любых α и β сеточная функция  является тоже решением. Покажем, что  − общее решение, т.е. любое решение  можно представить в виде

.

Действительно, полагая

,

получим



Поскольку

, то решение системы ,  существует и является единственным.

Легко убедиться также, что, если  − частное решение уравнения (6.2), то общим решением уравнения (6.2) будет:

.

Теперь рассмотрим линейные однородные разностные уравнения с постоянными коэффициентами:

, (6.5)

где .

Составим уравнение , которое будем называть характеристическим для (6.5). Найдем его корни *q1* и *q2*. Возможны следующие ситуации:

1). Пусть . Тогда подстановкой легко проверить, что  − решения. Здесь *q1* и *q2* – действительные числа, отличные от нуля.

Подставив в уравнение (6.5), получим:

 или .

Поскольку

,

то общее решение имеет вид .

2. Пусть , то есть корни комплексные. Тогда

.

Это комплексное решение. Отделяя его действительную и мнимую части, получим действительные частные решения



Значит, общее решение совпадает с линейной комбинацией .

3. Пусть , то есть корни кратные.

Очевидно  будет решением. Найдем второе решение.

Положим и подставим в (6.5):

,

откуда

.

По теоремы Виета для корней квадратного уравнения получаем

 . (6.6)

Поделим квадратное уравнение на *c*:

.

Тогда, согласно (6.6), получим:



или

 .

Решением такого разностного уравнения будет любая арифметическая прогрессия, в том числе последовательность целых чисел . То есть

.

Поскольку

,

то общим решением будет

.

**6.2. Разностная краевая задача**

Рассмотрим задачу вида:

 (6.7)

называемую разностной краевой задачей (РКЗ).

Данную задачу можно коротко переписать в виде



где линейный разностный оператор  или  имеет вид .

*Пример 1*. Найти решение РКЗ ,

где , .

Запишем характеристическое уравнение . Отсюда

, и общее решение разностного уравнения имеет вид: .

Подставляя значения  и , получаем , . То есть рассматриваемая краевая задача не имеет решения.

Возьмем другие граничные условия

, .

Решая задачу с данными условиями, получим, что решений бесконечно много.

То есть в отличие от задачи Коши для разностного уравнения, в случае РКЗ возникают проблемы:

1) существования решения;

1. единственности решения.

Выделим класс задач РКЗ, которые эффективно решаются.

Пусть , где .

Задачу РКЗ будем называть *хорошо обусловленной*, если она имеет решение, причем единственное, при любых значениях , и, кроме того, это решение *{Uk}* удовлетворяет соотношению:

, (6.8)

где *M = const* , не зависящая от *n.*

Покажем, что условие (8) фактически означает слабую чувствительность задачи к ошибкам в граничных условиях и в правой части.

Рассмотрим возмущенную задачу:



Возмущенное решение имеет вид , где  − ошибка решения.

Оценим :

,

.

Тогда



Из условия (6.8) получаем оценку:

.

Следовательно, ошибка в решении ограничена последним соотношением и при уменьшении шага ошибка не увеличивается. Растет лишь число узлов.

Сформулируем теперь достаточный признак хорошей обусловленности.

**Теорема1 (достаточный признак хорошей обусловленности).** Пусть выполнимо следующее условие:

. (6.9)

Тогда задача РКЗ (6.3) хорошо обусловлена, а условие (8) имеет следующий вид:

. (6.10)

*Доказательство*. Докажем сначалда, что если РКЗ имеет решение, то это решение удовлетворяет (6.10)*.* Пусть есть некоторое решение *Uk* и пусть .

Возможны следующие ситуации:

1) *m=0*  или  *m=n*. Тогда (6.10) − тривиально выполняются.

1. *0< m < n*. Тогда

,

следовательно

.

Поскольку

, ,

то, принимая во внимание (6.9), получаем

**.

То есть **для всех . Следовательно, соотношение (6.10)справедливо.

Теперь покажем, что решение задачи РКЗ (6.9) существует и единственно.

При  задача РКЗ сводится к неоднородной линейной системе из *(n+1)* уравнений с *(n+1)* неизвестным. Она имеет единственное решение и то, тогда и только тогда, если соответствующая однородная система имеет только нулевое решение. Соответствующая однородная система имеет вид:



Тогда по условию (6.10) для этой системы . Значит, .

То есть однородная система имеет только нулевое решение, и, значит, РКЗ имеет единственное решение.

Теорема доказана.

**Теорема 2 (критерий хорошей обусловленности).** Пусть . Тогда задача является хорошо обусловленной тогда и только тогда, когда корни *q1*, *q2* характеристического уравнения удовлетворяют условиям  .

* 1. **Методы решения РКЗ**
     1. Метод прогонки.

Так как РКЗ представляет собой линейную трехдиагональную систему из *(n+1)* уравнений с *(n+1)* неизвестными, то для ее решения можно применить метод прогонки. Он обладает рядом преимуществ.

Достоинства:

а) число арифметических операций при использовании данного метода составляет *O(n)*, т. е. не превосходит *Kn* , где *K= const* .

б) при выполнении условия преобладания диагональных элементов  метод прогонки оказывается слабо чувствительным к ошибкам вычислений: вычислительная погрешность не накапливается с ростом числа узлов *n.*

6.3.2. Метод стрельбы.

Рассмотрим РКЗ:



Вначале находим частное решение, решая задачу Коши с начальными условиями:

.

Затем находим второе частное решение

.

Поскольку

,

общее решение можно записать в виде линейной комбинации этих двух частных решений

.

Нужно выбрать *σ*  так, чтобы выполнялись граничные условия:

.

Отсюда: .

Достоинством метода стрельбы является его исключительная простота.

Однако он очень неустойчив. Приведем пример.

*Пример 2.* Рассмотрим РКЗ

.

Данная РКЗ хорошо обусловлена. Это легко проверить, используя критерий хорошей обусловленности. Хорошая обусловленность означает устойчивость к ошибкам в правой части и начальных условиях.

Однако уже при вычислении *1-σ* появляется ошибка округления *ε*. Можно показать, что данная ошибка имеет экспоненциальный рост при уменьшении шага *h*, именно ~.

Отсюда видно, что уменьшение шага вычисления не дает положительного результата в виду роста ошибок. То есть, фактически метод стрельбы вследствие его неустойчивости не может иметь широкого применения.

**6.4. Сходимость разностных схем**

Выявим связь между дифференциальной краевой задачей (ДКЗ) ** (6.11)

и соответствующей ей разностной краевой задачей (РКЗ).

Будем применять в дальнейшем для сокращения записи обозначение ,

где

**



*Пример 3.* Рассмотрим задачу

, .

Запишем ее в виде:

, где

**

**

Интервал [0,1] разбиваем на множество узлов с шагом *h*, то есть строим сетку:

.

Следует отметить, что дифференциальная краевая задача может не иметь решений или ее решение может быть не единственным. Однако данное обстоятельство относится к структуре этой задачи, а не к численным методам ее решения. Поэтому будем считать, что решение ДКЗ существует ит единственно. Пусть *U(x)* – единственное решение ДКЗ (6.11). По нему можно построить следующую сетчатую функцию из значений функции в узлах:

.

Постоим такую последовательность сетчатых функций  , которая приближается к *[U]h* при убывании шага *h.*

Разностная схема для нашей задачи имеет вид:



или

, (6.12)

где





Отметим, что задача (6.12) представляет собой семейство задач для разных значений шага *h*. Эта задача в свою очередь может не иметь решения или ее решение может быть не единственным. Предположим, что задача (6.12) при любом шаге *h* имеет единственное решение .

Обозначим  − линейное пространство всех сетчатых функций на . Введем в этом пространстве норму:

.

Следует подчеркнуть, что это не единственный возможный выбор нормы в пространстве . Существует большой набор норм, отличных от введенной выше.

**Определение 1.** Будем говорить, что сетчатая функция  *сходится* к решению *U(x)* ДКЗ, если выполняется следующее условие:

 при .

При этом, если выполняется условие , где *C1* не зависит от *h* и *n*, говорят, что имеет место сходимость порядка  или .

Отметим, что сходимость – это фундаментальное свойство разностных схем, причем для одной и той же ДКЗ могут существовать разностные схемы как сходящиеся, так и расходящиеся. Более того, сходимость или расходимость разностной схемы существенно зависит от выбора нормы в пространстве сеточных функций. Примерами других возможных норм в пространстве  являются нормы



и другие.

**6.5. ПОРЯДОК АППРОКСИМАЦИИ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ**

Рассмотрим РКЗ

, (6.13)

где





Предположим она имеет единственное решение и ее решением является сеточная функция .

Пусть сеточная функция  построена из значений решения  ДКЗ в узлах сетки. Поставим ее в уравнение (6.13) и получим:

.

Величину  называют невязкой.

Введем *Fh* − пространство обобщенных правых частей или пространство невязок, элементами которого являются  и .

Введем норму в пространстве *Fh* следующим способом:

.

Отметим, что, как и в случае пространства , существует широкий выбор возможной нормы в пространстве невязок, отличный от введенного выше определения нормы.

**Определение 2.** Будем говорить, что разностная схема (6.13) *аппроксимирует ДКЗ* на решении *U(x)* с порядком , если выполняется следующее условие:

, где *C* не зависит от *h*.

*Пример 1*. Рассмотрим дифференциальную краевую задача

 .

Легко проверить, что ее решением является функция .

Рассмотрим несколько разностных схем, аппроксимирующих данную задачу.

а) Рассмотрим разностную схему, построенную на аппроксимации производной:

.

Запишем РКЗ



или



Отсюда



или



Порядок аппроксимации производной равен  и начальные условия выполнены точно, то есть разностное решение аппроксимирует дифференциальную задачу с порядком .

Соответствующая решению ДКЗ сеточная функция будет иметь вид:

.

Выясним порядок сходимости разностной схемы. Для этого используем разложение в ряд:

.

Получим следующую цепочку преобразований:



То есть

,

а это значит, что мы имеем сходимость порядка *O(h).*

б) Возьмем теперь более точную аппроксимацию производной:



и получим разностную схему



**Преобразуем ее к виду**



Для решения требуется *U1*. Найдем его, поступая следующим образом:

,

значит

,

и, следовательно

.

Разностная аппроксимация при подстановке точного решения в схему дает порядок аппроксимации *O(h2)*.

Выясним порядок сходимости. Запишем соответствующее характеристическое уравнение:

.

Решая его, имеем

,

откуда общее решение имеет вид

.

Используя начальные условия, найдем *α* и *β* из системы уравнений:

, .

Получим

 .

Тогда решение РКЗ имеет вид:

.

Так как , получим

.

Тогда



Следовательно





То есть .

В рассмотренном выше примере порядки аппроксимации и сходимости совпадают, то есть, какой порядок аппроксимации разностной схемы, такой и порядок ее сходимости. Следующий пример показывает, что это далеко не всегда верно.

*Пример 4*. Рассмотрим еще одну разностную схему, основанную на следующей аппроксимации производной

.

Предыдущие схемы были частными случаями данной схемы при  и . Если взять в разностной схеме , то порядок аппроксимации будет *O(h)*, но сходимости, как можно показать, не будет.

Вывод о совпадении порядков аппроксимации и сходимости разной схемы верен только для так называемых устойчивых разностных схем.

### 6.5. УСТОЙЧИВОСТЬ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

Рассмотрим ДКЗ

*LU=f*  (6.14)

и соответствующую ей разностную схему

. (6.15)

Пусть  - решение задачи (1) и построена сеточная функция *[U]h.*

Построим невязку

.

Напомним, что разностная схема аппроксимирует решение  с порядком *m*, если справедливо соотношение:

,

где C – постоянная, не зависящая от *h*.

Рассмотрим возмущенную разностную схему:

, где . (6.16)

Т.е. схема (6.16) получена добавлением к правой части разностной схемы (6.15) возмущения . Новое решение обозначим через *Z(h).*

Определение 3. *Разностную схему* (6.15) будем называть *устойчивой*, если существуют числа  и  такие, что при всех  и всех таких, что , возмущенная разностная схема (11.16) имеет единственное решение, и это решение удовлетворяет оценке

 , (6.17)

где С=const и не зависит от *h*.

Необходимо подчеркнуть, что устойчивость не связана с дифференциальной краевой задачей (6.14), а имеет отношение только к разностной краевой задаче (6.15). То есть устойчивость – это внутреннее свойство разностной схемы.

Пусть задачи (6.14) и (6.15) линейны, тогда можно дать равносильное определение устойчивости разностной схемы.

**Определение 4.** В случае линейной РКЗ *разностная схема* (6.15) называется *устойчивой*, если существует число  такое, что при любом  разностное задача (6.15) имеет единственное решение при любой правой части *f(h)*, и это решение удовлетворяет соотношению

**, (**6**.**18)

где С – независимая от шага *h* константа.

Убедимся в равносильности этих определений в случае линейной разностной краевой задачи. Пусть задача (6.15) линейна и устойчива по определению 4 . Наряду с задачей (6.15)

****,

рассмотрим возмущенную задачу (6.16)

**,**

которая имеет решение, причем единственное. Вычтем (6.15) из (6.16), используя линейность разностного оператора. Получим

****,

****,(6.19)

где ****.

Разностная задача (6.19) имеет единственное решение по определению 4, причем выполнено условие (6.18):

****.

С учетом введенных обозначенийвыполнено также условие **(**6.17**),** то есть .

То есть из определения 4 следует определение 3. Нетрудно показать, что справедливо и обратное.

*Замечания.*

1) Понятие устойчивости зависит от определения нормы. За счет выбора подходящей нормы можно в известных пределах добиться устойчивости разностной схемы, неустойчивой в другой норме.

2) Понятие хорошей обусловленности представляет собой частный случай устойчивости, когда разностное уравнение линейно, второго порядка и выбор нормы зафиксирован (как выше).

*Пример 5*. Рассмотрим ДКЗ

****

Для данной задачи построим разностную схему:

* , i=0,…,n.*

Она аппроксимирует задачу с порядком аппроксимации *O(h2).*

Тогда имеем РКЗ:

******

Покажем, что задача хорошо обусловлена.

****,

****, ****.

При  задача является хорошо обусловленной. Из этого следует устойчивость задачи.

**Теорема 3.** Если разностная схема (6.15) аппроксимирует дифференциальную краевую задачу (6.14) на решении *U(x)* с порядком аппроксимации *O(hm*) и разностная схема (6.15) устойчива, то имеет место сходимость разностной схемы (6.15) на решении *U(x)* с порядком сходимости *O(hm*).

*Доказательство*. Рассмотрим решение *U(x)* задачи (6.14) и сеточную функцию *[U]h*. Запишем невязку:

**.**

Преобразуем это выражение в

.

Мы получили возмущенную задачу, где  и  − возмущение.

Так как разностная схема устойчива, то

****.

Последнее означает, что имеет место сходимость порядка *m*.

Теорема доказана.

Возвращаясь к примеру 3, можем сделать вывод, что порядок сходимости разностной схемы в данном примере равен O(*h2)*.

Следующий пример показывает применение теоремы 1 для доказательства устойчивости разностных схем.

*Пример 6*. Рассмотрим разностную краевую задачу

****

Будем предполагать функции *G* и *g*  непрерывными по совокупности переменных, а функцию *G* дополнительно непрерывно дифференцируемой по *u*. Тогда в некоторой замкнутой ограниченной области на плоскости *Oxu,* содержащей внутри себя точку (0, φ) , будет выполнено неравенство

****,

где *М*=const.

Запишем разностную схему:

****

или

 (6.20)

Очевидно, разностная схема (6.20) представляет собой известную схему Эйлера.

Рассмотрим возмущенную задачу:

 (6.21)

или .

Обозначим **** и, вычитая из (6.21) равенство (6.20) и применяя формулу Лагранжа, получим задачу



Отсюда

****, где ****, ξi  **-** некоторое промежуточное значение между *Ui*  и *Zi* . Очевидно ****,и, следовательно,

****,

где

****.

Тогда ****,

и

****,

****,

**, **.

Поскольку

****,

то

****,

и значит

**.**

Таким образом, выполнено условие (6.17), и, по определению 3, разностная схема устойчива. Тогда, согласно теореме 1, схема Эйлера сходится с порядком сходимости *O(h).*

### ЛИТЕРАТУРА

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М: БИНОМ, 2004. – 636с.
2. Мысовских И.П. Лекции по методам вычислений. М.: Наука, 1993. – 496с.
3. Калитин Н.Н. Численные методы. – М : Наука, 1978. – 612с.
4. Бахвалов Н.С. Численные методы. – М : Наука, 1976. – 632с.
5. Демидович В.П. и др. Численные методы анализа. –М: Физматгиз, 1963. – 400с.
6. Волков Е.А. Численные методы. – М: Наука, 1982. – 255с.
7. Крылов В.И. и др. Вычислительные методы высшей математики. Т.1. - Мн : Выш шк., 1972. – 684с.
8. Крылов В.И. и др. Вычислительные методы высшей математики. Т.2. – Мн : Выш. шк., 1976. – 672с.
9. Форсайт Дж. и др. Машинные методы математических вычислений. – М : Мир, 1980. – 280с.
10. Шуп Т. Решение инженерных задач на ЭВМ. – М: Мир, 1982. – 238с.
11. Сборник задач по методам вычислений / Под ред. Монастырного П.И. – М: Наука, 1994. – 318с.
12. Самарский А.А. Введение в численные методы. – М: Наука, 1987. – 288с.
13. Березин И.С. , Жидков Н.П. Методы вычислений. Т.1. - М: Фитматгиз, 1962. – 464с.

# Практический раздел

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ПРАКТИЧЕСКИЕ РАБОТЫ, ИХ ХАРАКТЕРИСТИКА

### Введение ……..

При изучении курса студенты должны освоить методы решения классических элементарных задач. С этой целью необходимо выполнить предлагаемые индивидуальные задания, охватывающие основные задачи:

* Численное решение нелинейных уравнений;
* Численное решение систем нелинейных уравнений;
* Аппроксимация функций - интерполяция, метод наименьших квадратов;
* Численное дифференцирование и интегрирование;
* Решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений;

По результатам работы студентом должен быть представлен и защищен отчет. Содержание отчета включает:

1. Введение, содержащее постановку задачи, обзор имеющихся методов ее решения, их сравнительная характеристика.
2. Детальное описание и схема алгоритма выбранного метода.
3. Распечатку программы ( каждый метод должен быть реализован в виде отдельной подпрограммы, в головной программе предусмотреть ввод исходных данных и обращение к подпрограмме), таблицы полеченных результатов, графики сходимости приближенного решения к точному.
4. Анализ полученных результатов, включающий аналитическую оценку точности метода и ее сравнение с численно полученными результатами (т.е. оценку разности между точным и приближенным решением при различных параметрах метода).

#### ЗАДАНИЕ ИПР №1. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. ………………...

##### Цель работы:

Изучение методов численного решения нелинейных уравнений - методов бисекции, хорд, простой итерации, релаксации, метода Ньютона и его модификаций; исследование скорости сходимости итерационных процедур; изучение метода Эйткена ускорения сходимости; сравнение числа итераций, необходимого для достижения заданной точности вычисления разными методами.

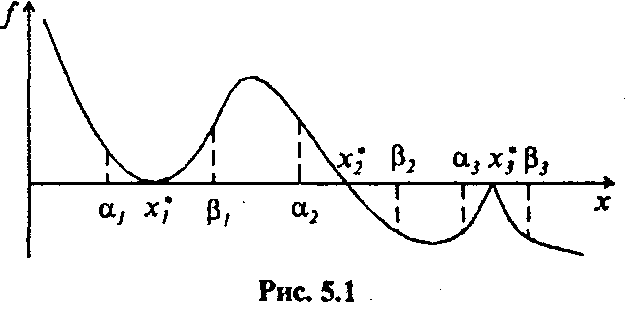
##### КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

###### ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ

Численное решение нелинейного уравнения *f(x)=0* заключается в вычислении с заданной точностью значения всех или некоторых корней уравнения и распадается на несколько задач: *во-первых*, надо исследовать количество и характер корней (вещественные или комплексные, простые или кратные), *во-вторых*, определить их приближенное расположение, т.е. значения начала и конца отрезка, на котором лежит только один корень, *в-третьих*, выбрать интересующие нас корни и вычислить их с требуемой точностью. Вторая задача называется *отделением корней*. Решив ее, по сути дела, находят приближенные значения корней с погрешностью, не превосходящей длины отрезка, содержащего корень. Отметим два простых приема отделения действительных корней уравнения - *табличный* и *графический*. Первый прием состоит в вычислении таблицы значений функции *f(x)* в заданных точках *xi* и использовании следующих теорем математического анализа:

1. *Если функция y=f(x) непрерывна на отрезке [а,b] и f(a)f(b)<0, то внутри отрезка [a,b] существует по крайней мере один корень уравнения f(x)=0.*
2. *Если функция y=f(x) непрерывна на отрезке [а,b], f(a)f(b) < 0 и f′(x) на интервале (a,b) сохраняет знак, то внутри отрезка [a,b] существует единственный корень уравнения f(x)=0.*

Таким образом, если при некотором *k* числа *f(xk)* и *f(xk+1)* имеют разные знаки, то это означает, что на интервале *(xk,xk+1)* уравнение имеет по крайней мере один действительный корень нечетной кратности (точнее - нечетное число корней). Выявить по таблице корень четной кратности очень сложно.



На рис. представ­лены три наиболее часто встречающиеся ситуации:

а) кратный корень: *f'(x\*)=0, f(a1)\* f(b1) > 0;*

б) простой корень: *f'(x\*)=0, f(a2)\* f(b2) < 0;*

в) вырожденный корень: *f'(x\*)* не существует, *f(a3)\* f(b3)>0.*

Как видно из рис., в первых двух случаях значение корня совпадает с точкой экстремума функции и для нахождения таких корней рекомендуется ис­пользовать методы поиска минимума функции.

Для определения числа корней на заданном промежутке используется Теорема Штурма: Если f (x) многочлен и уравнение не имеет кратных корней на промежутке[a, b], то число корней уравнения f (x) = 0, лежащих на промежутке [a, b], совпадает с числом N(a) − N(b), которое определяется из следующей процедуры.

*Строим ряд Штурма*  *f*0 (*x*), *f*1 (*x*), *f*2 (*x),…, f*m *(x), где*

*f*0 (*x*) = *f* (*x*);

*f*1 (*x*) = *f'* (*x*);

*f*0 (*x*) *делим на* *f*1 (*x*) *и в качестве* *f*2 (*x*) *берем остаток от деления, взятый с обратным знаком;*

*f*1 (*x*) *делим на* *f*2 (x) *и в качестве* *f*3 (x) *берем остаток от деления, взятый с обратным знаком;*

*и т.д.*

*Полагаем N(a) – число перемен знака в ряде Штурма, если вместо x подставлена точка a, N(b) – число перемен знака в ряде Штурма, если вместо x подставлена точка b.*

Для отделения корней можно использовать график функции *y=f(x).* Корнями уравнения являются те значения *х*, при которых график функции пересекает ось абсцисс. Построение графика функции даже с малой точностью обычно дает представление о расположении и характере корней уравнения (иногда позволяет выявить даже корни четной кратности). Если построение графика функции *y=f(x)* вызывает затруднение, следует преобразовать исходное уравнение к виду *ϕ1(x)=ϕ2(x)* таким образом, чтобы графики функций *y=ϕ1(x)* и *y=ϕ2(x)* были достаточно просты. Абсциссы точек пересечения этих графиков и будут корнями уравнения.

Допустим, что искомый корень уравнения отделен, т.е. найден отрезок[*а,b*], на котором имеется только один корень уравнения. Для вычисления корня

с требуемой точностью ε обычно применяют какую-либо итерационную процедуру***уточнения корня***, строящую числовую последовательность значений *xn*, сходящуюся к искомому корню уравнения. Начальное приближение *x0* выбирают на отрезке [а,b], продолжают вычисления, пока не выполнится неравенство , и считают, что *xn* - есть корень уравнения, найденный с заданной точностью. Имеется множество различных методов построения таких последовательностей и выбор алгоритма - весьма важный момент при практическом решении задачи. Немалую роль при этом играют такие свойства метода, как простота, надежность, экономичность, важнейшей характеристикой является его *скорость сходимости*. Последовательность *xn*, сходящаяся к пределу *x\**, имеет скорость сходимости порядка α ,если при   . При α=1 сходимость называется линейной, при 1<α<2- сверхлинейной, при α=2 - квадратичной. С ростом α алгоритм, как правило, усложняется и условия сходимости становятся более жесткими. Рассмотрим наиболее распространенные итерационные методы уточнения корня.

###### МЕТОД ПРОСТЫХ ИТЕРАЦИЙ.

Вначале уравнение *f(x)=0* преобразуется к эквивалентному уравнению вида *x=ϕ(x).* Это можно сделать многими способами, например, положив *ϕ(x)=x+(x)f(x)*, где *(x)* -произвольная непрерывная знакопостоянная функция. Выбираем некоторое начальное приближение *x0* и вычисляем дальнейшие приближения по формуле

*xk=ϕ( xk-1), k=0,1,...*

Метод простых итераций не всегда обеспечивает сходимость к корню уравнения. Достаточным условием сходимости этого метода является выполнение неравенства  на отрезке, содержащем корень и все приближения *xn*. Метод имеет линейную скорость сходимости и справедливы следующие оценки:



Метод имеет простую геометрическую интерпретацию: нахождение корня уравнения *f(x)=0* равносильно обнаружению неподвижной точки функции *x=ϕ(x)*, т.е. точки пересечения графиков функций *y=ϕ(x)* и *y=x*. Если производная *ϕ'(x)<0*, то последовательные приближения колеблются около корня, если же производная *ϕ'(x)>0*, то последовательные приближения сходятся к корню монотонно.

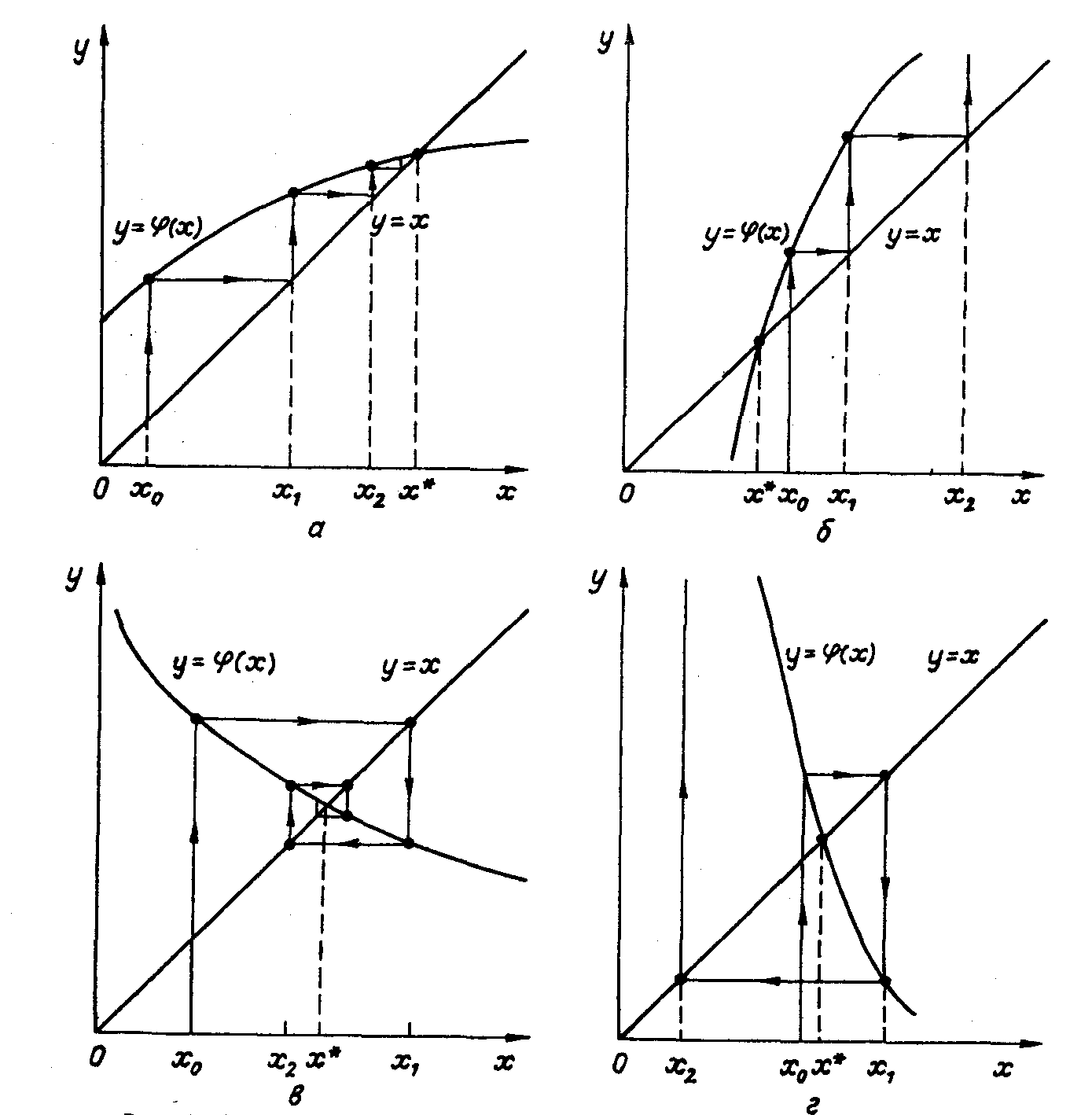


Рис..2. Метод простых итераций: а - односторонний сходящийся процесс; б - односторонний расходящийся процесс; в - двухсторонний сходящийся процесс; *г*- двухсторонний расходящийся процесс

Рассмотрим процесс графически (рис..2). Из графиков видно, что при *ф'(х) > 0* и при *ф'(х) > 0* возможны как сходящиеся, так и расходящиеся итерационные процессы. Скорость сходимости зависит от абсолютной величины производной *ф(х)*. Чем меньше |*ф'(х)|* вблизи корня, тем быстрее сходится процесс.

**МЕТОД ХОРД.**

Пусть дано уравнение , , где  − дважды непрерывно дифференцируемая функция.

Пусть выполняется условие  и проведено отделение корней, то есть на данном интервале *(a, b)* находится один корень уравнения. При этом, не ограничивая общности, можно считать, что *f(b) > 0 .*

Пусть функция *f* выпукла на интервале *(a, b)* (см. рис..3).

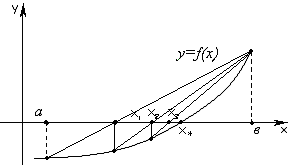


Рис..3

Заменим график функции хордой (прямой), проходящей через точки

 и .

Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки, можно записать в виде . В нашем случае получим: .

Найдем точку пересечения хорды с осью Oх.

Полагая , получаем из предыдущего уравнения:

.

Теперь возьмем интервал *(x1,b)* в качестве исходного и повторим вышеописанную процедуру (см. рис..3). Получим

.

Продолжим процесс. Каждое последующее приближение вычисляется по рекуррентной формуле

 , (.1)

.

Если же функция вогнута (см. рис..4),

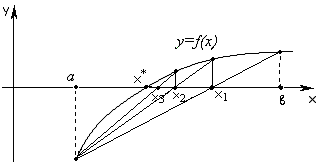


Рис..4

уравнение прямой соединяющей точки  и  запишем в виде

.

Найдем точку пересечения хорды с осью Oх:

.

Теперь возьмем интервал *(a,x1)* в качестве исходного и найдем точки пересечения хорды, соединяющей точки *(a, f(a))* и *(x1, f(x1)),* с осью абсцисс(см. рис. 3.4). Получим

.

Повторяя данную процедуру, получаем рекуррентную формулу:

 (.2)

 .

Описанный выше метод построения рекуррентных последовательностей (.1) и (2) называется методом хорд. Для использования метода хорд нужно было бы предварительно найти точки перегиба и выделить участки, на которых функция не меняет характер выпуклости. Однако на практике поступают проще: в случае ** для построения рекуррентной последовательности применяются формулы (1), а в случае, когда  , применяют формулы (2).

###### МЕТОД НЬЮТОНА (КАСАТЕЛЬНЫХ).

Для начала вычислений требуется задание одного начального приближения *x0*, последующие приближения вычисляются по формуле

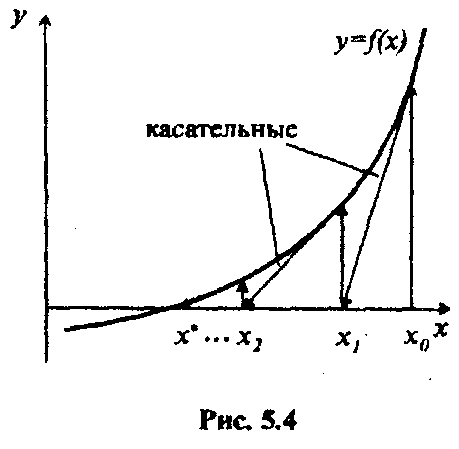
.

Метод имеет квадратичную скорость сходимости для простого корня, но очень чувствителен к выбору начального приближения. При произвольном начальном приближении итерации сходятся, если всюду , в противном случае сходимость будет только при *x0*, достаточно близком к корню. Существует несколько достаточных условий сходимости. Если производные *f'(x)* и *f''(x)* сохраняют знак в окрестности корня, рекомендуется выбирать *x0* так, чтобы . Если, кроме этого, для отрезка [*а,b*], содержащего корень, выполняются условия

то метод сходится для любых *a*≤*x0≤b*.

Метод Ньютона полу­чил также второе название *метод каса­тельных* благодаря геометрической ил­люстрации его сходимости, представлен­ной на рис. 3.4

 Метод Ньютона позволяет на­ходить как простые, так и кратные корни. сновной его недостаток - малая область сходимости и необходимость вычисления производной.

###### РЕШЕНИЕ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ …………………….

Пусть дана система нелинейных уравнений (система не линейна, если хотя бы одно из входящих в нее уравнений не линейно):



Мы можем записать систему в более компактной векторной форме

*f(x)= 0,*  (4.1)

где *f = (f , …, f ), x=(x , …, x)T .*

Для решения системы (4.1) иногда можно применить метод последовательного исключения неизвестных, который приводит решение системы к решению одного уравнения с одним неизвестным. Однако в подавляющем большинстве случаев систему уравнений (4.1) решают итерационными методами. Для решения системы (4.1) существует набор методов, из которых рассмотрим простейшие методы: метод простых итераций, базирующийся на принципе сжимающих отображений и метод Ньютона (многомерный аналог метода касательных).

Метод простых итераций. Чтобы воспользоваться методом простых итераций, необходимо предварительно привести систему к следующему виду:

 Или в векторной форме

 (4.2)

где 

Исходя из некоторого начального приближения , построим итерационную последовательность точек

, *k=1,2,….*

Пусть точка есть некоторое начальное приближение к решению. Рассмотрим δ-окрестность  этой точки. В силу принципа сжимающих отображений итерационная последовательность

, *k=1,2,….*

будет сходиться, если существует число q<1 такое, что

выполнено условие:

,  ( 4.3 )

называемое условием сжатия для отображения ϕ. В частности, это условие всегда выполняется, если векторная функция ϕ непрерывно дифференцируема и норма матрицы производных функции ϕ удовлетворяет неравенству:



во всех точках *x* из δ-окрестности точки .

Следующая теорема дает условие сходимости и оценку скорости сходимости метода простых итераций.

*Теорема. Пусть отображение φ является сжатием в  и пусть*

*.*

*Тогда итерационная последовательность:*

*,*

*с начальной точкой , сходится к решению  системы (1). При этом справедлива следующая оценка погрешности:*

*.*

Отметим, что начальное приближение  выбирают экспериментально. (Например, на основе грубого графического решения системы, если порядок системы не высок. По точкам строят график первого уравнения, потом второго и ищут приблизительно точку их пересечения).

Метод Ньютона.

Пусть дана система нелинейных уравнений :



Запишем ее в векторной форме:

 (4.1)

Найдем начальное приближение .

Будем предполагать, что векторная функция *f* непрерывна дифференцируема в некоторой окрестности начального приближения. Вместо системы (4.1) будем искать решение соответствующей ей линеаризованной системы

 ,

где через  *J(**)* обозначена для удобства записи матрица производных векторной функции *f* в точке (матрица Якоби системы (4.1) в этой точке).

При этом при применении метода Ньютона предполагается, что в окрестности точки .

Тогда из линеаризованной системы, которая линейна относительно переменных *x*, можно найти первое приближение



Рассматривая линеаризованную систему в точках при *k=1,2,….* , найдем к-ое приближение



Построенная таким способом рекуррентная последовательность Ньютона сходится при определенных дополнительных условиях к решению системы (4.1). Легко видеть, что рассматриваемый метод совпадает с методом касательных в случае *n=1*, т.е. является многомерным вариантом метода касательных.

На практике обратную матрицу не считают, а на каждом шаге решают линеаризованную систему:



*Теорема. При сделанных выше предположениях, последовательность*

*Ньютона сходится к решению системы (4.1), если начальное*

*приближение выбрано достаточно близко к решению.*

Отметим в заключение, что метод Ньютона сходится достаточно быстро (скорость сходимости квадратичная), если начальное приближение выбрано удачно. На практике итерационный процесс заканчивают, когда норма разности двух последовательных приближений меньше заданной точности вычисления решения.

###### ЗАДАНИЕ НА РАБОТУ №1.

1. Используя теорему Штурма определить число корней уравнения:

x3+ax2 +bx + c=0 на отрезке [-10,10]. Значения коэффициентов уравнения взять из таблицы.

1. Отделить все корни, лежащие на данном отрезке.
2. Вычислить наименьший из корней сначала методом половинного деления, а за затем методом хорд и методом Ньютона. Сравнить число необходимых итераций в обоих методах. Точность до 0.0001.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| a | b | c | № вариан-та |
| -14,4621 | 60,6959 | -70,9238 | 1 |
| -10,2374 | -91,2105 | 492,560 | 2 |
| -19,7997 | 28,9378 | 562,833 | 3 |
| -5,5796 | -193,022 | -633,105 | 4 |
| 9,57496 | -243,672 | 773,65 | 5 |
| 20,2374 | -131,210 | -843,923 | 6 |
| 38,4621 | 364,594 | 914,196 | 7 |
| -13,3667 | 39,8645 | -20,6282 | 8 |
| 2,65804 | -28,0640 | 21,9032 | 9 |
| -6,4951 | -31,2543 | 23,1782 | 10 |
| 9,9296 | 17,8390 | -24,4532 | 11 |
| 6,0951 | -35,3942 | -25,7283 | 12 |

**4)** **Решить систему нелинейных уравнений:**

где x>0, y>0,

с точностью до 0,0001 методами простых итераций и Ньютона,

принимая для номера варианта k значения параметров a и m из таблицы:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| k | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| m | 0,0 | 0,1 | 0,1 | 0,2 | 0,2 | 0,3 | 0,3 | 0,4 | 0,4 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,2 | 0,2 |
| a | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1,0 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1,0 | 0,7 | 0,5 |

Начальные приближения найти графически. Сравнить скорость сходимости методов.

#### ЗАДАНИЕ ИПР №2. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ.

**Цель выполнения задания:**

Изучить решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений методом Эйлера и методами Рунге-Кутта и методом Адамса.

**Краткие теоретические сведения.**

Рассмотрим дифференциальное уравнение с начальным условием . Будем предполагать, что *f(x,y)* непрерывная и непрерывно дифференцируемая по функция в окрестности замкнутой области



,



содержащей внутри себя точку .



Требуется решить задачу Коши: найти непрерывно дифференцируемую функцию *y=y(x)*, такую что при всех и .



Разобьем отрезок *[a, b]* с помощью точек разбиения с шагом . Тогда узлы разбиения имеют вид .



Пусть − значения функции в точках разбиения.



1. **Метод Эйлера**

Построим рекуррентную последовательность:

(1)



,



которую называют последовательностью Эйлера. Соединяя ломаными все точки , полученные из рекуррентной последовательности Эйлера, получим ломаную линию, приближающую график решения . Функция, график которой совпадает с ломаной Эйлера, принимается за приближенное решение задачи Коши.



Точность метода Эйлера на всем отрезке [*a, b*] будет *O(h).*

Для повышения точности вычислений иногда используется модифицированный метод Эйлера, в котором рекуррентная последовательность Эйлера вычисляется по формулам

. (9.2)



Модифицированный метод Эйлера обычно дает более точное приближение решения.

*Пример.* Пусть требуется решить задачу Коши:



Полагая и используя метод Эйлера, получим, как легко убедиться, из формулы Эйлера (9.1)



.



С другой стороны, используя модифицированный метод Эйлера, получим в силу формулы (2) рекуррентную последовательность

.



Поскольку точным решением задачи Коши, как легко проверить, является функция , можно сравнить точность обоих методов.



|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|  | 0 | 0.2 | 0.4 | 0.6 | 0.8 | 1 |
|  | 1 | 0.8 | 0.64 | 0.572 | 0.4086 | 0.3277 |
|  | 1 | 0.82 | 0.6724 | 0.5514 | 0.4521 | 0.3708 |
|  | 1 | 0.8187 | 0.6703 | 0.5488 | 0.4493 | 0.3679 |

Общепризнанным недостатком метода Эйлера является его не достаточно высокая точность. Несомненным достоинством метода Эйлера является его простота.

**2) Метод Рунге-Кутта четвертого порядка.**

На каждом шаге производится вычисление коэффициентов :



;



;



;



.



Затем вычисляем

.



Данный метод имеет точность на [*a,b*].



Рассмотрим пример, который мы использовали для иллюстрации точности метода Эйлера.

*Пример*. Требуется решить задачу Коши:

на отрезке [0, 1].



Выберем шаг . Результат вычислений поместим в таблицу.



|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|  | 0 | 0.2 | 0.4 | 0.6 | 0.8 | 1 |
|  | 1 | 0.8187 | 0.6703 | 0.5487 | 0.4493 | 0.3678 |
|  | 1 | 0.8187 | 0.6703 | 0.5488 | 0.4493 | 0.3679 |

Таким образом, метод Рунге-Кутта 4-го порядка отличается очень высокой точностью. К определенным его недостаткам относится большая сложность и трудоемкость (на каждом шаге необходимо четырежды вычислять значения функции *f* вместо одного раза в методе Эйлера).

Отметим, что на практике выбирают начальную длину шага *h* таким образом, чтобы , где *ε* − заданная точность вычисления решения. Затем шаг выбирают вдвое меньшим и останавливают вычисления, если разность полученных значений *yk*  со значениями, полученными при начальном выборе шага меньше *ε*. В противном случае шаг еще раз уменьшают вдвое и т.д.



Метод Адамса.

Пусть есть дифференциальное уравнение

,

с начальным условием

.

Разбиваем отрезок [*a,b*] с шагом *h* на *n* частей. То есть, получаем узлы , , где .

Пусть  − решение. Тогда на  справедливо равенство

.

Применим формулу левых прямоугольников для вычисления интеграла. Получим

, то есть формулу Эйлера.

Очевидно, то не самый точный метод вычисления интеграла.

Используем интерполяционную квадратурную формулу Лагранжа для вычисления интеграла, т.е.

, где

, ; .

Найдем коэффициенты  методом неопределенных коэффициентов:

;

.

Получаем систему двух уравнений с двумя неизвестными



Откуда

;

;

;

.

В итоге получим:

;

.

Откуда

, где .

Следовательно, получим

.

Это формула Адамса второго порядка, которая используется для выполнения задания.

Существенным недостатком метода Адамса второго порядка является то обстоятельство, что для его применения надо знать дополнительно к начальному условию еще

 или .

Достоинством метода является то, что значение функции *f* в каждой точке *(xk, yk)* вычисляется только один раз.

##### ЗАДАНИЕ НА РАБОТУ №2.

С помощью метода Эйлера, а затем методами Рунге-Кутта и Адамса найти с точностью до 0.001 решения следующих уравнений на отрезке [0; 1].

, ,



где значения параметров *a* и *m* принимают следующие значения для вариантов *k.*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| k | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| *m* | 1.0 | 1.5 | 2.0 | 1.0 | 1.5 | 2.0 | 1.0 | 1.5 | 2.0 | 1.0 | 1.5 | 2.0 | 1.0 | 2.0 |
| *a* | 0.5 | 0.7 | 0.9 | 1.1 | 1.3 | 0.5 | 0.7 | 0.9 | 1.1 | 1.3 | 0.5 | 0.7 | 0.9 | 1.0 |

Шаг интегрирования , обеспечивающий требуемую точность, выбирать в процессе вычисления из сравнения результатов, полученных с и . В случае необходимости шаг должен быть уменьшен.



Сравнить результаты.

## КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

### КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №1

#### УКАЗАНИЯ ПО ВЫБОРУ ВАРИАНТА

Студенту необходимо выполнить одну контрольную работу, состоящую из шести задач. В работу должны быть включены те из приведенных ниже задач, последняя цифра номера которых совпадает с последней цифрой учебного шифра студента.

Все задачи должны быть решены как аналитически, так и с помощью указанной интегрированной системы.

Контрольную работу следует выполнять в отдельной тетради, оставив в ней поля для замечаний преподавателя – рецензента. На обложке тетради должны быть указаны: дисциплина, номер контрольной работы, шифр, курс, фамилия, имя, отчество студента.

Работу необходимо выполнять аккуратно, любыми чернилами, кроме красных. При выполнении контрольной работы обязательно должны быть даны подробные вычисления и четкие пояснения к решению задач. Решения на ПЭВМ должны сопровождаться указаниями действий с клавиатурой ПЭВМ. В каждой задаче должен быть ответ. В конце работы студент ставит дату выполнения и свою подпись.

#### ЗАДАНИЕ НА КОНТРОЛЬНУЮ РАБОТУ №1

**1-10.** На депозитный счет банка изначально положена сумма А рублей. Годовой банковский процент составляет р %. Требуется определить средства на счете после 3-х лет.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Вариант | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| А | 1000 | 2000 | 3000 | 4000 | 5000 | 6000 | 7000 | 8000 | 9000 | 9500 |
| р | 6 | 6,5 | 7 | 7,5 | 8 | 8,5 | 9 | 9,5 | 10 | 10,5 |

Задачу 1-10 решить аналитически и с помощью Matlab

**11-20.** Отделить графически и найти методом итераций действительные корни уравнения ах2+bx+c=0 c пятью верными знаками.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Вариант | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| а | 1,01 | 1,09 | 1,05 | 1,07 | 1,02 | 1,08 | 1,04 | 1,03 | 1,06 | 1,04 |
| b | 0,07 | 0,02 | 0,04 | 0,01 | 0,05 | 0,06 | 0,08 | 0,02 | 0,01 | 0,05 |
| c | 0,004 | 0,002 | 0,006 | 0,005 | 0,001 | 0,003 | 0,001 | 0,004 | 0,002 | 0,006 |
| d | 1,952 | 1,947 | 1,950 | 1,951 | 1,949 | 1,952 | 1,948 | 1,951 | 1,947 | 1,952 |

Задачу 11-20 решить аналитически и в системе Matlab

**21-30.** Вычислить по формуле Симпсона приближенное значение определенного интегралас шагом .



Задачу 21-30 решить аналитически и в системе Matlab.

**31 - 40.** Найти решение дифференциального уравнения у'=f(x, у) с заданным начальным условием у (х0)=у0:

31. у'=х2+у, у(0)=2;

32. у'=сos(x+у) у(0)=0;

33. у'=х+у у(0)=0;

34. у'=xlny у(0)=e;

35. у'=х2-у у(0)=1;

36. у'=3х2+6у у(0)=3;

37. у'=х+уcosх у(0)=2;

38. у'=х+0,1у у(0)=1;

39. у'=х2-2у у(0)=-1;

40. у'=2х-3у  у(0)=1;

а) в виде пяти отличных от нуля членов разложения в степенной ряд;

б) методом Рунге-Кутта с шагом h=0,1 на отрезке [0; 0,5] с точностью 10-5.

Сравнить полученные результаты.

Решить задачу 31 - 40 аналитически и в системе Matlab.

**41 - 50.** Данные о сроке службы электроламп, соответствующие нормальному ходу технологического процесса, имеют вид:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Срок службы ламп, час | 900-110 | 1100-1300 | 1300-1500 |
| Количество ламп | 1000 | 6000 | 3000 |

На основании контрольной выборки, объем которой приведен ниже, сделать заключение об устойчивости технологического процесса, об увеличении дисперсии или необходимости наладки оборудования.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Срок службы, час | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 |
| 900-1100 | 10 | 60 | 30 | 40 | 50 | 60 | 30 | 20 | 30 | 70 |
| 1100-1300 | 120 | 110 | 90 | 100 | 80 | 80 | 120 | 120 | 130 | 90 |
| 1300-1500 | 70 | 30 | 80 | 60 | 70 | 60 | 50 | 60 | 40 | 40 |

**51-60.** Методом наименьших квадратов найти эмпирическую формулу у=ах+b зависимости х и у, заданной таблицей и сделать прогноз на три шага вперед.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Вариант | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 |
| х | у | | | | | | | | | |
| 1 | 4,35 | 4,5 | 4,7 | 4,9 | 5,1 | 3,9 | 5,2 | 5,5 | 5,7 | 5,9 |
| 2 | 5,3 | 5,5 | 5,7 | 5,9 | 6,1 | 4,9 | 6,2 | 6,5 | 6,7 | 6,9 |
| 3 | 3,8 | 4,0 | 4,2 | 4,4 | 4,6 | 3,4 | 4,7 | 5,0 | 5,2 | 5,4 |
| 4 | 1,8 | 2,0 | 2,2 | 2,4 | 2,6 | 1,4 | 2,7 | 3,0 | 3,2 | 3,4 |
| 5 | 2,3 | 2,5 | 2,7 | 2,9 | 3,1 | 1,9 | 3,2 | 3,5 | 3,7 | 3,9 |

## 3. Задание на курсовую работу, ее характеристика.

#### МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Студенту необходимо выполнить курсовую работу, состоящую из шести задач. В работу должны быть включены те из приведенных ниже задач, последняя цифра номера которых совпадает с последней цифрой учебного шифра студента.

Все задачи должны быть решена как аналитически, так и с помощью указанного интегрированного пакета.

Работу необходимо выполнять аккуратно, любыми чернилами, кроме красных. При выполнении курсовой работы обязательно должны быть даны подробные вычисления и четкие пояснения к решению задач. Решения на ПЭВМ должны сопровождаться указаниями действий с клавиатурой ПЭВМ. В каждой задаче должен быть ответ. В конце работы студент ставит дату выполнения и свою подпись.

#### Задание на курсовую работу*.*

1-10. Найти абсолютную Δ и относительную δ погрешности числа а, имеющего только верные цифры.

|  |  |
| --- | --- |
| 1. а=0,2387; | 6. а=0,374; |
| 2. а=3,751; | 7. а=20,43; |
| 3. а=11,445; | 8. а=0,0384; |
| 4. а=2,3445; | 9. а=12,688; |
| 5. а=8,345 | 10. а=43,813. |

11-20. В банк была положена сумма Р руб. В течение 4-х лет ежегодный банковский процент составлял 12%, а затем в течение 4-х лет он равнялся 8%. Найти сумму на счете через 3 года, 5 лет, 8 лет.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Вариант | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| Р | 1000 | 1100 | 1200 | 1300 | 1400 | 1500 | 1600 | 1700 | 1800 | 2000 |

21-30. Урожай с виноградника определенной площади ежегодно позволяет получить А декалитров молодого вина, 70% которого реализуется немедленно по цене Р1 франков за литр. Оставшаяся часть идет в продажу через год по цене Р2 франков за литр. В производство вкладывается 80% процентов ежегодной выручки, что позволяет ежегодно увеличивать площади под виноградники и расширять производство. При этом на каждый вложенный франк дополнительно получается В=0,2 лира вина. Найти сумму выручки за каждый из 5-ти лет.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Вариант | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| А | 70 | 75 | 80 | 85 | 90 | 95 | 100 | 105 | 110 | 115 |
| Р1 | 8 | 9 | 10 | 8 | 7 | 9 | 10 | 8 | 9 | 7 |
| Р2 | 25 | 28 | 30 | 26 | 29 | 27 | 30 | 25 | 26 | 28 |

31 - 40. Вычислить, используя Интерполяционные квадратурные формулы значение определенного интеграла от функции:





с шагом  и с шагом .Оценить абсолютную погрешность по правилу Рунге. Ответ дать с учетом поправки Рунге.

Определить число шагов, необходимое для достижения точности вычислений 10-5.

41 - 50. Дано дифференциальное уравнение второго порядка вида F(y, у', у'')=0 с начальными условиями у(х0)=у0 и у'(х0)=у'0

Для данного дифференциального уравнения найти решение у=у(х), удовлетворяющее заданному начальному условию, в виде: а) пяти отличных от нулю членов разложения в степенной ряд; б) по методу Рунге-Кутта составить таблицу приближенных значений решения системы дифференциальных уравнений первого порядка, соответствующей заданному уравнению, на отрезке [0; 0,5] с шагом h==0,1. Все вычисления производить с округлением до пятого десятичного знака. Результаты, полученные в пунктах а) и б), сравнить.

41. у''-5у'+4у=0 у(0)=0, у'(0)=1.

42. у''+2у'+у=0 у(0)=0, у'(0)=2.

43. у''-6у'-7у=0 у(0)=1, у'(0)=1.

44. у''+7у'-8у=0 у(0)=0, у'(0)=0.

45. у''-10у'+25у=0 у(0)=3, у'(0)=0.

46. у''-5у'+6у=0 у(0)=2, у'(0)=1.

47. у''+5у'+6у=0 у(0)=0, у'(0)=1.

48. у''-6у'+5у=0 у(0)=2, у'(0)=2.

49. у''+4у'+3у=0 у(0)=0, у'(0)=1.

50. у''+6у'+8у=0 у(0)=2, у'(0)=1.

Задачи 41 - 50 решить аналитически и в системе Maple V.

51 - 60. Методом наименьших квадратов найти эмпирическую формулу указанного вида для зависимости х и у, заданной таблицей.

51.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| х | 0 | 1 | 1,5 | 2,5 | 3 | 4,5 | 5 | 6 | Общий вид зависимости у=ах+b |
| у | 0 | 67 | 101 | 168 | 202 | 310 | 334 | 404 |

52.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| х | 46 | 48 | 50 | 52 | 54 | 56 | 58 | 60 | Общий вид зависимости у=ах |
| у | 500 | 685 | 925 | 1100 | 1325 | 1520 | 1750 | 950 |

53.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| х | 1 | 0,5 | 0,3 | 0,25 | 0,2 | 0,17 | 0,14 | 0,12 | Общий вид зависимости |
| у | 3 | 2 | 1,6 | 1,5 | 1,4 | 1,3 | 1,3 | 1,2 |

54.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| х | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | Общий вид зависимости |
| у | 521 | 308 | 240 | 204 | 183 | 175 | 159 | 152 |

55.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| х | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | Общий вид зависимости у=ах+b |
| у | 0,33 | 0,49 | 0,59 | 0,65 | 0,71 | 0,75 | 0,77 | 0,81 |

56.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| х | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | Общий вид зависимости у=ахb |
| у | 56,9 | 67,3 | 81,6 | 201 | 240 | 474 | 490 | 518 |

57.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| х | 0 | 0.2 | 0.5 | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 | Общий вид зависимости у=ахb |
| у | 1 | 1,2 | 1,5 | 2,0 | 2,5 | 3,0 | 3,5 | 4,0 |

58.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| х | 0 | 4 | 10 | 15 | 21 | 29 | 36 | 51 | Общий вид зависимости у=аеbх |
| у | 0 | 41 | 106 | 145 | 205 | 285 | 350 | 3510 |

59.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| х | 57 | 60 | 65 | 70 | 75 | 84 | 90 | 105 | Общий вид зависимости у=ах+b |
| у | 67 | 71 | 76 | 80 | 86 | 93 | 99 | 114 |

60.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| х | 1 | 3 | 6 | 14 | 20 | 30 | 51 | 60 | Общий вид зависимости у=ахb |
| у | 16 | 26 | 40 | 82 | 115 | 164 | 270 | 313 |

Задачи 51-60 решить аналитически и с помощью системы MapleV.