

1. 集合

若集合 A 有 n 个元素，则 A 有 2^n 个子集，有 $2^n - 1$ 个真子集或非空真子集。

满足 $A \subseteq B \subseteq \{a_1, a_2, a_3 \cdots a_n\}$ 的集合对 (A, B) 有 3^n 组

摩根法则

$$\complement_u(A \cup B) = \complement_u A \cap \complement_u B$$

并集的补集等于补集的交集

$$\complement_u(A \cap B) = \complement_u A \cup \complement_u B$$

交集的补集等于补集的并集

2. 函数

一般地，若 $f(x)$ 的定义域是 $[a, b]$ ，则 $f(x)$ 的定义域是 $a < g(x) < b$ 的解集

一般地， $f[g(x)]$ 的定义域是 $[a, b]$ ，则 $f(t)$ 的定义域是函数 $t = g(x), x \in [a, b]$ 的值域

画简单幂函数 $y = x^a$ 的图像步骤，先作第一象限的图像，若 $a > 0$ ，则图像为抛物线型，且满足 $a > 1$ 时开口向上，当 $0 < a < 1$ 时开口向右，且过定点 $(0, 0)$ ， $(1, 1)$ ，若 $a < 0$ 时，图像为双曲线，过 $(1, 1)$ 点，之后按照奇偶性定义域补完全图。

函数的单调性：

若函数 $y = f(x)$ ，对于区间 I 上任意 $x_1 < x_2$ 总有 $f(x_1) < f(x_2)$ ，则称 $f(x)$ 为定义在 I 区间上的增函数，否则为定义在区间 I 上的减函数， I 称为单调区间。

对于复合函数 $y = f[g(x)]$ ，若 $y = f(u)$ 与 $u = z(x)$ 的单调性相反，则称 $y = f[g(x)]$ 为减函数，否则为增函数。

设 $y = f(x)$ 在区间 I_1, I_2 上为增函数，且 $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$ ，则 $f(x)$ 在区间 $I_1 \cup I_2$ 上也是增函数。

若 $y = f(x)$ 在区间 I 上是增函数，且 $f(x)$ 的值域为 I' ，则 $f(x)$ 在区间 I 上必

有反函数 $f^{-1}(x)$,且 $f^{-1}(x)$ 在区间上为增函数,且原函数与反函数关于直线 $y=x$ 对称。

函数的奇偶性:

$y=f(x)$ 为奇函数,定义域 A 关于原点对称,且 $f(x)=-f(-x)$; $y=f(x)$ 为偶函数,定义域关于原点对称且 $f(x)=f(-x)$ 。

$y=f(x)$ 关于直线 $x=a$ 对称,则 $f(x-a)=f(x+a)$, $y=f(x)$ 的图像关于点 $(a,0)$ 对称,则 $f(a-x)=-f(a+x)$

定义在 R 上的函数 $f(x)$ 总可以表示为一个奇函数 $g(x)$ 与一个偶函数 $h(x)$ 的和,且 $g(x)=\frac{1}{2}[(f(x)-f(-x))]$, $h(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$

函数的周期性

设函数 $y=f(x)$,如果存在 $T \neq 0$,使得对任何 x 属于 A 都有 $f(x+T)=f(x)$,则称函数 $y=f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数,如果周期函数 $f(x)$ 的所有周期中存在一个最小值 T ,则称 T 为函数 $f(x)$ 的最小正周期。

周期性的几个结论

1. 设 $f(x)$ 有最小正周期 T ,则除 $\pm nT$ 外,函数无其他周期

2. 设周期函数 $f(x)$ 有最小正周期 T ,则 $f(\lambda x)$ 有最小正周期 $\frac{T}{|\lambda|}$

3. $u=g(x)$ 是周期函数, $f(u)$ 是任意函数,则 $f(g(x))$ 也是周期函数

若奇函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处有意义,则 $f(0)=0$,若函数周期为 T ,则 $f(\frac{T}{2})=0$

若 $f(x)$ 为奇函数且以直线 $x=a$ 对称,则函数 $f(x)$ 是周期函数,且 $T=4a$,类似函数为 $y=\sin x$

若 $f(x)$ 为偶函数且以直线 $x=a$ 对称,则函数 $f(x)$ 是周期函数,且 $T=4a$,类似函数为 $y=\cos x$

函数图像的代数特征:

奇函数的图像关于原点对称,偶函数的图像关于 y 轴对称。

$y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于 $y=x$ 对称。

求函数最值或值域的常用方法

判别式法:

将 $y=f(x)$ 上的 y 视为常数, 若他关于 x 是二次的, 则可由其关于 x 的判别式非负而求得 y 的范围, 注意检验等号是否成立

换元法:

引入适当的变量, 将复杂的函数表达式化为已知的简单函数式注意变量的取值范围

利用二次函数:

划归为二次函数的最值或者限定条件下的二次函数范围问题, 可用配方方法结合限定区间得到函数的取值范围

利用单调性: 将函数化为已知的函数类型利用单调性求解

利用不等式: 利用算数不等式几何不等式求解

图像法: 利用图像直观求解

3. 指数函数与对数函数:

外移公式

$$\log_a^n b^m = \frac{m}{n} \log_a b$$

连锁公式

$$\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c d = \log_a d$$

真数互换公式

$$\log_x a \cdot \log_y b = \log_x b \cdot \log_y a$$

换底公式

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

对数与指数的转换:

$$e^{\ln x} = x$$