Министерство науки и высшего образования Российской федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)
Институт прикладной математики и компьютерных наук
Кафедра прикладной информатики

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ В ГЭК

Зав.каф. прикладной информатики
д-р.физ.-мат.н., профессор
__________ Е.М. Семёнов
«____»__________2021 г.

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

ИССЛЕДОВАНИЕ ДВУМЕРНОГО ВЫХОДЯЩЕГО ПОТОКА МАРКОВСКОЙ МОДЕЛИ УЗЛА ОБРАБОТКИ ЗАПРОСОВ С ПОВТОРНЫМИ ОБРАЩЕНИЯМИ И ВЫЗЫВАЕМЫМИ ЗАЯВКАМИ

по основной образовательной программе подготовки бакалавров
направление подготовки
090303 - Прикладная информатика

Благинин Алексей Леонидович

Руководитель ВКР
доцентр.каф. прикладной информатики
__________ И.Л. Лапатин
«____»__________2021 г.

Автор работы
студент группы № 931704
__________ А.Л. Благинин

Томск-2021

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Множество ситуаций обслуживания с использованием очередей имеют особенность, заключающуюся в том, что клиенты, обнаруживающие, что зона обслуживания занята по прибытии, присоединяются к группе неудовлетворенных клиентов, которые повторяют свой запрос через некоторое случайное время. В таком случае, в рамках теории массового обслуживания, говорят, что заявка находится на орбите.

Такие модели массового обслуживания возникают при стохастическом моделировании многих протоколов связи (стандарт IEEE 802.11), локальных сетей и повседневных жизненных ситуаций. Самый простой и очевидный пример - это человек, который звонит по телефону. Если линия занята, значит, он не может стоять в очереди, но через некоторое время снова испытывает удачу [7].

Основные принципы систем массового обслуживания с повторными вызовами изложены в [2, 8], а так же в библиографической информации [1].

Помимо повторных вызовов, существуют ситуации (например, сценарий call-центра), когда обслуживающие единицы имеют возможность делать исходящие запросы на обслуживание в тот период времени, когда они находятся в простое. Эта модель организации известна как парная коммутация. В [9] получены интегральные формулы для частичных производящих функций и явные выражения для ожидаемого значения некоторых характеристик производительности системы с повторными вызовами и двухсторонней связью в предположении, что длительности входящих и исходящих вызовов соответствуют одинаковым распределение времени обслуживания. Однако на практике это предположение носит ограничительный характер, поскольку разные типы клиентов обычно демонстрируют разное поведение и, следовательно, у них должны быть разные потребности в обслуживании.В [3] использовали метод анализа среднего значения для получения некоторых ожидаемых значений, связанных со временем ожидания в очереди на повторное обращение с двусторонней связью и различным распределением времени обслуживания входящих и исходящих вызовов. (абзац полностью слизан со статьи Phung Duc Two way communcication)

СТАТЬЯ

В этой работе мы рассматриваем двумерный выходящий поток системы массового обслуживания [11, 13] с повторными вызовами [2] и вызываемыми заявками [12]. Такую систему можно интерпретировать как узел обработки запросов с множественным произвольным доступом, который в свободное от обработки запросов время может запрашивать самодиагностику или любую другую процедуру, которая будет продолжаться в течение произвольного времени. Также рассматриваемая система может быть применена для моделирования узлов обработки с разными типами заявок. Заявки одного типа не теряются и будут обслуживаться в любом случае, а приложения другого типа будут обслуживаться только со свободным обслуживающей единицей.

В данной работе рассматривается влияние параметров системы на значения асимптотического коэффициента корреляции компонентов двумерного процесса вывода различных типов приложений. Для исследования системы используется метод асимптотического анализа для нахождения вида предельного двумерного распределения количества обслуженных заявок входящего потока и количества обслуженных вызванных заявок за некоторое время t, при условии, что на орбите [15] наблюдается большая задержка заявок.

1 Математическая модель

Рассмотрим RQ-систему, на вход которой поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ. Заявка входящего потока, поступая в систему и обнаруживая прибор свободным, занимает его. Прибор, в свою очередь, начинает обслуживание в течение случайного времени, распределенного экспоненциально с параметром μ_1. Если же при поступлении в систему заявка обнаруживает прибор занятым, она мгновенно уходит на орбиту и осуществляет там случайную задержку в течение экспоненциально распределенного времени с параметром σ. В свободное от обслуживания заявок с входящего потока время прибор сам вызывает заявки с интенсивностью α и обслуживает их в течение экспоненциально-распределенного времени с параметром μ_2.

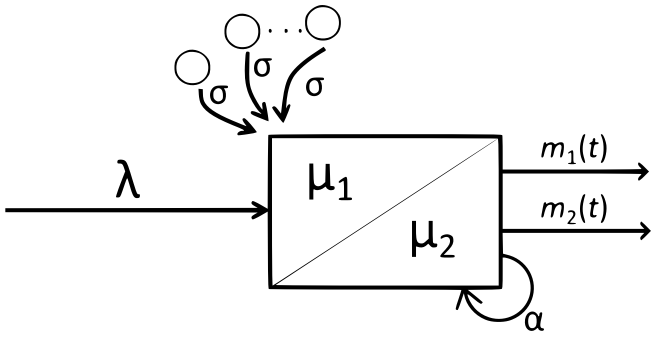

Рисунок 1 — Модель системы

Введем следующие обозначения: *i(t)* — число заявок на орбите в момент времени t, *k(t)* – состояние прибора: *0* – прибор свободен, *1* – прибор занят обслуживанием заявки входящего потока, *2* – прибор занят обслуживанием вызванной заявки; $m_1(t)$ — число обслуженных заявок входящего потока в момент времени t, $m_2(t)$ — число обслуженных вызванных заявок t.

2 Уравнения Колмогорова

Итак, мы имеем три характеристики, определяющие результат функционирования системы за некоторое время *i(t)*: состояние прибора – *k(t)*, количество заявок на орбите – *i(t)*, количество обслуженных заявок входящего потока – $m_1(t)$, количество обслуженных вызванных заявок – $m_2(t)$, что можно представить в виде четырех-мерного Марковского процесса

$$\{k(t), i(t), m_1(t), m_2(t)\}$$

Заметим, что именно такая комбинация характеристик будет являться Марковским процессом, так как даёт достаточно информации о том, какое состояние система примет в следующий момент времени. Для этого необходимо знать, в каком состоянии прибор был в предшествующий момент времени, и какое количество заявок находилось в источнике повторных вызовов. Следующее состояние, которое прибор может принять, зависит от состояния, в котором он находился прежде, то есть, каждое из трех состояний *k(t)* принимается прибором с некоторыми вероятностями. Введем их в рассмотрение

$$\begin{aligned}
P\{k(t) = 0, i(t) = i, m_1(t) = m_1, m_2(t) = m_2\} = P_0(i, m_1, m_2, t)\\
P\{k(t) = 1, i(t) = i, m_1(t) = m_1, m_2(t) = m_2\} = P_1(i, m_1, m_2, t)\\
P\{k(t) = 2, i(t) = i, m_1(t) = m_1, m_2(t) = m_2\} = P_2(i, m_1, m_2, t)
\end{aligned}$$

Запишем получившуюся систему уравнений

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P_0(i, m_1, m_2, t)}{\partial t} &= -(\lambda + i\sigma + \alpha)P_0(i, m_1, m_2, t) + P_1(i, m_1 - 1, m_2, t)\mu_1 +\\
&+ P_2(i, m_1, m_2 - 1, t)\mu_2,\\
\frac{\partial P_1(i, m_1, m_2, t)}{\partial t} &= -(\lambda + \mu_1)P_1(i, m_1, m_2, t) + (i + 1)\sigma P_0(i + 1, m_1, m_2, t) +\\
&+ \lambda P_0(i, m_1, m_2, t),\\
\frac{\partial P_2(i, m_1, m_2, t)}{\partial t} &= -(\lambda + \mu_2)P_2(i, m_1, m_2, t) + \lambda P_2(i - 1, m_1, m_2, t) +\\
&+ \alpha P_0(i, m_1, m_2, t).
\end{aligned} \tag{1}$$

Полученная система уравнений – система дифференциальных уравнений Колмогорова, где в левой части каждого уравнения находится производная вероятности состояния рассматриваемого процесса, а в правой – сумма произведений вероятностей состояний, из которых прибор может принять это состояние, на интенсивности соответствующих потоков заявок. Решением данной системы будут являться вероятности всех состояний прибора в виде функций времени. Таким образом, задача сводится к решению данной системы дифференциальных уравнений. Решить данную систему аналитически не получится, так как это система бесконечного числа дифференциальных конечно-разностных уравнений с переменными коэффициентами. Для того, чтобы перейти к конечному числу уравнений, введем частные характеристические функции, обозначив $j = \sqrt{-1}$,

$$H_k(u, u_1, u_2, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} e^{jui} e^{ju_1 m_1} e^{ju_2 m_2} P_k(i, m_1, m_2, t).$$

Тогда перепишем систему (1) в виде

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H_0(u, u_1, u_2, t)}{\partial t} &= -(\lambda + \alpha) H_0(u, u_1, u_2, t) + j\sigma \frac{\partial H_0(u, u_1, u_2, t)}{\partial u} + \\
&+ \mu_1 e^{ju_1} H_1(u, u_1, u_2, t) + \mu_2 e^{ju_2} H_2(u, u_1, u_2, t), \\
\frac{\partial H_1(u, u_1, u_2, t)}{\partial t} &= -(\lambda + \mu_1) H_1(u, u_1, u_2, t) - j\sigma e^{-ju} \frac{\partial H_0(u, u_1, u_2, t)}{\partial u} + \\
&+ \lambda H_0(u, u_1, u_2, t) + \lambda e^{ju} H_1(u, u_1, u_2, t), \\
\frac{\partial H_2(u, u_1, u_2, t)}{\partial t} &= -(\lambda + \mu_2) H_2(u, u_1, u_2, t) + \lambda e^{ju} H_2(u, u_1, u_2, t) + \\
&+ \alpha H_0(u, u_1, u_2, t).
\end{aligned} \tag{2}$$

Таким образом, мы получили ровно три дифференциальных уравнения в частных производных с переменными коэффициентами.

3 Метод асимптотического анализа

Полученную систему дифференциальных уравнений в частичных производных (2) будем решать методом асимптотического анализа в предельном условии большой задержки заявок на орбите ($\sigma \to 0$).

Обозначим $\epsilon = \sigma, u = \epsilon w, F_k(w, u_1, u_2, t, \epsilon) = H_k(u, u_1, u_2, t)$, тогда система запишется в виде

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_0(w,u_1,u_2,t,\epsilon)}{\partial t} &= -(\lambda+\alpha)F_0(w,u_1,u_2,t,\epsilon) + j\frac{\partial F_0(w,u_1,u_2,t,\epsilon)}{\partial w} + \\
&+ \mu_1 e^{ju_1} F_1(w,u_1,u_2,t,\epsilon) + \mu_2 e^{ju_2} F_2(u,u_1,u_2,t,\epsilon), \\
\frac{\partial F_1(w,u_1,u_2,t,\epsilon)}{\partial t} &= -(\lambda+\mu_1)F_1(w,u_1,u_2,t,\epsilon) - je^{-j\epsilon w}\frac{\partial F_0(w,u_1,u_2,t,\epsilon)}{\partial w} + \\
&+ \lambda F_0(w,u_1,u_2,t,\epsilon) + \lambda e^{j\epsilon w} F_1(w,u_1,u_2,t,\epsilon), \\
\frac{\partial F_2(w,u_1,u_2,t,\epsilon)}{\partial t} &= -(\lambda+\mu_2)F_2(w,u_1,u_2,t,\epsilon) + \lambda e^{j\epsilon w} F_2(w,u_1,u_2,t,\epsilon) + \\
&+ \alpha F_0(w,u_1,u_2,t,\epsilon).
\end{aligned} \tag{3}$$

Затем, что используя условие согласованности многомерных распределений, характеристическая функция процессов $m_1(t)$ и $m_1(t)$ будет записана в следующем виде с введенными функциями

$$M\{\exp(ju_1 m_1(t))\exp(ju_2 m_2(t))\} = \sum_{k=0}^{2} H_k(0,u_1,u_2,t) = \sum_{k=0}^{2} F_k(0,u_1,u_2,t,\epsilon).$$

Теорема 1. *Асимптотические приближение двумерной характеристической функции числа обслуженных заявок входящего потока и числа обслуженных вызванных заявок за некоторое время t имеет вид*

$$\boldsymbol{F}(u_1,u_2,t) = \lim_{\sigma \longrightarrow 0} M\{\exp(ju_1 m_1(t))\exp(ju_2 m_2(t))\} =$$
$$= \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \sum_{k=0}^{2} F_k(0,u_1,u_2,t,\epsilon) = \boldsymbol{R} \cdot \exp\{G(u_1,u_2)t\} \cdot \boldsymbol{E}$$

где

$$\boldsymbol{G}(u_1,u_2) = \begin{bmatrix} -(\lambda+\alpha+\kappa) & \mu_1 e^{ju_1} & \mu_2 e^{ju_2} \\ \kappa+\lambda & -\mu_1 & 0 \\ \alpha & 0 & -\mu_2 \end{bmatrix}^T,$$

вектор-строка $\boldsymbol{R} = \{R_0, R_1, R_2\}$ - стационарное распределение вероятности состояния прибора

$$\boldsymbol{R} = \{\frac{\mu_2(\mu_1-\lambda)}{\mu_1(\mu_2-\alpha)}, \frac{\lambda}{\mu_1}, \frac{\alpha(\mu_1-\lambda)}{\mu_1(\mu_2+\alpha)}\},$$

κ - нормированное среднее число заявок на орбите

$$\kappa = \frac{\lambda(\lambda\mu_2+\alpha\mu_1)}{\mu_2(\mu_1-\lambda)},$$

а $\boldsymbol{E}$ - единичный вектор-столбец соответствующей размерности.

Доказательство. Делая предельный переход $\lim_{\epsilon \to 0} F_k(w, u_1, u_2, t, \epsilon) = F_k(w, u_1, u_2, t)$ в полученной системе (3) , система уравнений будет записана в виде

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_0(w,u_1,u_2,t)}{\partial t} &= -(\lambda+\alpha)F_0(w,u_1,u_2,t) + j\frac{\partial F_0(w,u_1,u_2,t)}{\partial w} + \\
&+ \mu_1 e^{ju_1} F_1(w,u_1,u_2,t) + \mu_2 e^{ju_2} F_2(w,u_1,u_2,t), \\
\frac{\partial F_1(w,u_1,u_2,t)}{\partial t} &= -(\lambda+\mu_1)F_1(w,u_1,u_2,t) - j\frac{\partial F_0(w,u_1,u_2,t)}{\partial w} + \\
&+ \lambda F_0(w,u_1,u_2,t) + \lambda F_1(w,u_1,u_2,t), \\
\frac{\partial F_2(w,u_1,u_2,t)}{\partial t} &= -(\lambda+\mu_2)F_2(w,u_1,u_2,t) + \lambda F_2(w,u_1,u_2,t) + \\
&+ \alpha F_0(w,u_1,u_2,t).
\end{aligned} \tag{4}$$

Решение системы (4) будет получено в следующей форме

$$F_k(w,u_1,u_2,t) = \Phi(w) F_k(u_1,u_2,t). \tag{5}$$

$\Phi(w)$ - асимптотическое приближение характеристической функции числа заявок на орбите при условии большой задержки на орбите.

Подставив (5) в систему (4) и разделив обе части уравнений на $\Phi(w)$, получим

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_0(u_1,u_2,t)}{\partial t} &= -(\lambda+\alpha)F_0(u_1,u_2,t) + j\frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)} F_0(u_1,u_2,t) + \\
&+ \mu_1 e^{ju_1} F_1(u_1,u_2,t) + \mu_2 e^{ju_2} F_2(u_1,u_2,t), \\
\frac{\partial F_1(u_1,u_2,t)}{\partial t} &= -(\lambda+\mu_1)F_1(u_1,u_2,t) - j\frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)} F_0(u_1,u_2,t) + \\
&+ \lambda F_0(u_1,u_2,t) + \lambda F_1(u_1,u_2,t), \\
\frac{\partial F_2(u_1,u_2,t)}{\partial t} &= -(\lambda+\mu_2)F_2(u_1,u_2,t) + \lambda F_2(u_1,u_2,t) + \\
&+ \alpha F_0(u_1,u_2,t).
\end{aligned} \tag{6}$$

Заметим, что w содержится только в отношении $\frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)}$, а остальные слагаемые и левые части уравнений не зависят от w. Это означает, что $\Phi(w)$ имеет вид экспоненты. Учитывая, что $\Phi(w)$ имеет смысл асимптотического приближения характеристической функции числа заявок на орбите, мы можем конкретизировать вид данной функции

$$\frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)} = \frac{e^{j\kappa w} j\kappa}{e^{j\kappa w}},$$

где κ - нормированное среднее число заявок на орбите, которое было получено в [15] и имеет вид

$$\kappa = \frac{\lambda(\lambda\mu_2 + \alpha\mu_1)}{\mu_2(\mu_1 - \lambda)}.$$

Исходя из этого, система (6) примет следующий вид

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_0(u_1,u_2,t)}{\partial t} &= -(\lambda+\alpha+\kappa)F_0(u_1,u_2,t)+ \\
&+ \mu_1 e^{ju_1}F_1(u_1,u_2,t)+\mu_2 e^{ju_2}F_2(u_1,u_2,t), \\
\frac{\partial F_1(u_1,u_2,t)}{\partial t} &= (\lambda+\kappa)F_0(u_1,u_2,t)-\mu_1F_1(u_1,u_2,t)+ \\
&+ 0F_2(u_1,u_2,t), \\
\frac{\partial F_2(u_1,u_2,t)}{\partial t} &= \alpha F_0(u_1,u_2,t)+0F_1(u_1,u_2,t)- \\
&- \mu_2F_2(u_1,u_2,t).
\end{aligned} \tag{7}$$

Введем следующие обозначения

$$\boldsymbol{F}(u_1,u_2,t)=\{F_0(u_1,u_2,t),F_1(u_1,u_2,t),F_1(u_1,u_2,t)\}$$

$$\boldsymbol{G}(u_1,u_2)=\begin{bmatrix} -(\lambda+\alpha+\kappa) & \mu_1e^{ju_1} & \mu_2e^{ju_2} \\ \kappa+\lambda & -\mu_1 & 0 \\ \alpha & 0 & -\mu_2 \end{bmatrix}^T,$$

$\boldsymbol{G}(u_1,u_2)$ - транспонированная матрица коэффициентов системы (7). Тогда получим следующее матричное уравнение

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}(u_1,u_2,t)}{\partial t}=\boldsymbol{F}(u_1,u_2,t)\boldsymbol{G}(u_1,u_2),$$

общее решение которого имеет вид

$$\boldsymbol{F}(u_1,u_2,t)=\boldsymbol{C}e^{\boldsymbol{G}(u_1,u_2)t}. \tag{8}$$

Для того, чтобы получить единственное решение, которое соответствует поведению рассматриваемой системы, примем в рассмотрение начальное условие

$$\boldsymbol{F}(u_1,u_2,0)=\boldsymbol{R}, \tag{9}$$

где вектор-строка $\boldsymbol{R}$ - стационарное распределение вероятности состояния прибора, то есть процесса $k(t)$, которое имеет форму [15]

$$\boldsymbol{R}=\{\frac{\mu_2(\mu_1-\lambda)}{\mu_1(\mu_2-\alpha)},\frac{\lambda}{\mu_1},\frac{\alpha(\mu_1-\lambda)}{\mu_1(\mu_2+\alpha)}\}.$$

Описав начальное условие, мы можем перейти к решению задачи Коши (8, 9).

Поскольку нас интересует распределение вероятностей количества заявок в выходных процессах, необходимо найти маргинальное распределение. Для этого суммируем компоненты вектор-строки $\boldsymbol{F}(u_1,u_2,t)$ по k и умножаем результат на единичный вектор-столбец $\boldsymbol{E}$. Получим

$$\boldsymbol{F}(u_1,u_2,t)\boldsymbol{E}=\boldsymbol{R}e^{\boldsymbol{G}(u_1,u_2)t}\boldsymbol{E}. \tag{10}$$

Эта формула позволяет найти асимптотическое приближение характеристической функции количества вызванных и входящих заявок, обслуженных системой к некоторому моменту времени t. Другими словами, формула (10) является решением рассматриваемой системы. $\square$

Список литературы

[1] Artalejo, J.R.: Accessible bibliography on retrial queues: progress in 2000–2009. Mathematical and computer modelling **51**(9-10), 1071–1081 (2010)

[2] Artalejo, J.R., Gómez-Corral, A.: Retrial Queueing Systems: A Computational Approach. Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2008)

[3] Artalejo, J.R., Resing, J.A.C.: Mean value analysis of single server retrial queues. Asia-Pacific Journal of Operational Research **27**(03), 335–345 (2010)

[4] Bronson, R.: Matrix methods: An introduction. Gulf Professional Publishing (1991)

[5] Burke, P.: The output process of a stationary m/m/s queueing system. The Annals of Mathematical Statistics **39**(4), 1144–1152 (1968)

[6] Daley, D.: Queueing output processes. Advances in Applied Probability **8**(2), 395–415 (1976)

[7] Erlang, A.K.: The theory of probabilities and telephone conversations. Nyt. Tidsskr. Mat. Ser. B **20**, 33–39 (1909)

[8] Falin, G., Templeton, J.G.: Retrial queues, vol. 75. CRC Press (1997)

[9] Falin, G.: Model of coupled switching in presence of recurrent calls. Engineering Cybernetics **17**(1), 53–59 (1979)

[10] Gharbi, N., Dutheillet, C.: An algorithmic approach for analysis of finite-source retrial systems with unreliable servers. Computers & Mathematics with Applications **62**(6), 2535–2546 (2011)

[11] Kendall, D.G.: Stochastic processes occurring in the theory of queues and their analysis by the method of the imbedded markov chain. The Annals of Mathematical Statistics pp. 338–354 (1953)

[12] Kulkarni, V.G.: On queueing systems with retrials. Journal of Applied Probability pp. 380–389 (1983)

[13] Lapatin, I., Nazarov, A.: Asymptotic analysis of the output process in retrial queue with markov-modulated poisson input under low rate of retrials condition. In: International Conference on Distributed Computer and Communication Networks. pp. 315–324. Springer (2019)

[14] Mirasol, N.M.: The output of an $m/g/\infty$ queuing system is poisson. Operations Research **11**(2), 282–284 (1963)

[15] Nazarov, A.A., Paul, S., Gudkova, I., et al.: Asymptotic analysis of markovian retrial queue with two-way communication under low rate of retrials condition (2017)

[16] Paul, S., Phung-Duc, T.: Retrial queueing model with two-way communication, unreliable server and resume of interrupted call for cognitive radio networks. In: Information Technologies and Mathematical Modelling. Queueing Theory and Applications, pp. 213–224. Springer (2018)