张宇数学教育系列丛书·六

云图 YUN TU　2021版

考研数学命题人终极预测8套卷

○ 主编　张宇

【数学一】

北京理工大学出版社

• 张宇

博士，全国著名考研数学辅导专家，教育部"国家精品课程建设骨干教师"，全国畅销书《张宇考研数学基础30讲》《张宇高等数学18讲》《张宇线性代数9讲》《张宇概率论与数理统计9讲》《张宇考研数学题源探析经典1000题》《张宇考研数学闭关修炼》《张宇考研数学真题大全解》《考研数学命题人终极预测8套卷》《张宇考研数学最后4套卷》作者，高等教育出版社原《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲解析》及新编《全国硕士研究生招生考试经济类专业学位联考综合能力考试大纲解析》编者之一，北京、上海、广州、西安等地全国著名考研数学辅导班首席主讲。

• 张宇数学教育系列丛书

○ 教材类

张宇考研数学基础30讲

张宇高等数学18讲

张宇线性代数9讲

张宇概率论与数理统计9讲

○ 题集类

张宇考研数学闭关修炼

张宇考研数学题源探析经典1000题（分数学一、数学二、数学三）

张宇考研数学真题大全解（分上、下册）（分数学一、数学二、数学三）

考研数学命题人终极预测8套卷（分数学一、数学二、数学三）

张宇考研数学最后4套卷（分数学一、数学二、数学三）

○ 教辅类

张宇带你学高等数学·同济七版（分上、下册）

张宇带你学线性代数·同济六版

张宇带你学概率论与数理统计·浙大四版

理工社网址：http://www.bitpress.com.cn

宇哥考研 新浪微博　专码

张宇考研数学 微信公众号

张宇考研数学 微信交流群

北京时代云图 官方微博

ISBN 978-7-5682-9041-8

定价：28.80元

注意:
因以下项目填写不清而影响成绩责任自负

准考证号

姓名

考试地点

______考场______号

报考单位______

(密 封 线 内 不 要 答 题)

绝密★启用前

考研数学命题人终极预测卷(一)

(科目代码:301)

考试时间:上午 8:30—11:30

考生注意事项

1. 答题前,考生须在指定位置上填写考生姓名、报考单位和准考证号。
2. 答案必须写在答题纸指定位置上,写在其他地方无效。
3. 填(书)写必须使用黑(蓝)色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束,将答题纸装入试题袋中交回。

本卷得分

题型	选择题	填空题	解答题	总计
总分	50	30	70	150
得分	______分	______分	______分	______分

一、选择题:1 ~ 10 小题,每小题 5 分,共 50 分. 下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求. 请将所选选项前的字母填在答题纸指定位置上.

1. 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2+nx(1-x)\sin^2\pi x}{1+n\sin^2\pi x}$,则 $f(x)$ (　　)

A. 处处连续.

B. 只有第一类间断点.

C. 只有第二类间断点.

D. 既有第一类间断点,又有第二类间断点.

2. 设 $x\to0^+$ 时,$(1+ax)^{\frac{1}{3}}-1$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^n}{4^n\cdot(2n)!}$ 是等价无穷小,则 $a=$ (　　)

A. $-\dfrac{8}{3}$.　　B. $\dfrac{8}{3}$.　　C. $-\dfrac{3}{8}$.　　D. $\dfrac{3}{8}$.

3. 设函数 $f(x)=\int_0^x\dfrac{(t+3)(t^2-1)}{e^{t}\sqrt{1+t^4}}dt$,则 $f(x)$ (　　)

A. 有 1 个极大值点,2 个极小值点.

B. 有 2 个极大值点,1 个极小值点.

C. 有 3 个极大值点,没有极小值点.

D. 有 3 个极小值点,没有极大值点.

4. 下列反常积分中收敛的是 (　　)

A. $\int_0^2\dfrac{dx}{\sqrt{x^2+x^3}}$.　　B. $\int_0^2\dfrac{dx}{x\sqrt{x+2}}$.

C. $\int_1^{+\infty}\dfrac{xdx}{\sqrt{x+1}\,\ln(1+x)}$.　　D. $\int_0^{+\infty}\dfrac{xdx}{e^{x^2}}$.

5. 已知幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-a)^n}{n}$ 在点 $x=-1$ 处收敛,则实数 a 的取值范围是 (　　)

A. $-2<a\leqslant0$.　　B. $-2\leqslant a<0$.

C. $-1<a\leqslant1$.　　D. $-1\leqslant a<1$.

6. 设 $f(t)$ 具有连续导函数,且 $f(t)$ 在$[0,4]$上的平均值为 $a(a\neq0)$,又 L 为曲线 $y=\sqrt{2x-x^2}$,起点为 $O(0,0)$,终点为 $A(2,0)$,则 $\int_L f(x^2+y^2)(xdx+ydy)=$ (　　)

A. 0.　　B. a.　　C. $2a$.　　D. $4a$.

7. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶方阵，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 相似于矩阵 $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，其中 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的转置，$\boldsymbol{E}$ 表示 3 阶单位矩阵. 若 $r(5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}) = k + r(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$，则 k 等于 (　　)

A. -3.　　B. 3.　　C. -2.　　D. 2.

8. 设 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为线性无关的 3 维列向量，$\boldsymbol{P}$ 为 3 阶矩阵，且 $\boldsymbol{PA} = (-\boldsymbol{\alpha}_1,-2\boldsymbol{\alpha}_2,-3\boldsymbol{\alpha}_3)$，则 $|\boldsymbol{P}-\boldsymbol{E}| =$ (　　)

A. 6.　　B. -6.

C. 24.　　D. -24.

9. 设随机变量 X 与 $-X$ 服从同一均匀分布 $U[a,b]$，已知 X 的概率密度 $f(x)$ 的平方 $f^2(x)$ 也是概率密度，则 $b =$ (　　)

A. $-\frac{1}{2}$.　　B. $\frac{1}{2}$.

C. -2.　　D. 2.

10. 设随机变量 $X \sim E(1)$，记 $Y = \max(X,1)$，则 $EY =$ (　　)

A. 1.　　B. $1-\mathrm{e}^{-1}$.

C. $1+\mathrm{e}^{-1}$.　　D. e^{-1}.

二、填空题：11～16 小题，每小题 5 分，共 30 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

11. 设 $x>0$ 且 $x \neq 1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(\sqrt[n+1]{x}-\sqrt[n]{x}) =$ ________.

12. 设函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上连续，$\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，且满足 $f(x) = \frac{\ln x}{(1+x)^2} + \frac{1+x^2}{1+x^4}\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$，则 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x =$ ________.

13. 由方程 $xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$ 所确定的函数 $z=z(x,y)$ 在点 $(1,0,-1)$ 处的全微分 $\mathrm{d}z\big|_{(1,0,-1)} =$ ________.

14. 曲面 $z = xy$ 被围在柱面 $x^2+y^2=1$ 内的面积为________.

15. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3) = 2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$ 的正惯性指数为________.

16. 设总体 X 的概率密度 $f(x;\theta) = \begin{cases} \sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}-1}, & 0<x<1, \\ 0, & 其他 \end{cases}$ $(\theta>0$ 未知$)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的一个简单随机样本. 则 θ 的最大似然估计量为________.

三、解答题：17～22 小题，共 70 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（本题满分 10 分）

求 $|z|$ 在约束条件 $\begin{cases} x^2+y^2-2z^2=0, \\ x+y+3z=5 \end{cases}$ 下的最大值与最小值.

18.（本题满分 10 分）

设一空间物体是由曲面 $z=x^2+y^2$ 及平面 $z=2x$ 所围成的，其体积密度为 $\rho = y^2$，求它对 z 轴的转动惯量.

密　封　线　内　不　要　答　题

密　封　线　内　不　要　答　题

19.（本题满分 10 分）

已知 x_n 为方程 $e^x + \ln x = n(n = 3,4,\cdots)$ 的正根，并设

$$a_n = \left(\frac{x_n}{n}\right)^p, p > 0.$$

（1）证明 x_n 唯一存在，且 $1 < x_n < \ln n$；

（2）讨论 p 取何值时，级数 $\sum_{n=3}^{\infty} a_n$ 收敛；p 取何值时，级数 $\sum_{n=3}^{\infty} a_n$ 发散，并说明理由.

20.（本题满分 10 分）

计算 $I = \iint\limits_{\Sigma} 2zdydz - 2ydzdx + (5z - z^2)dxdy$，其中 Σ 是由 $\begin{cases} z = e^y, \\ x = 0 \end{cases}$ $(1 \leqslant y \leqslant 2)$ 绕 z 轴旋转一周所成的曲面，并取外侧.

21.（本题满分 15 分）

已知实矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 2 & a\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}4 & b\\ 3 & 1\end{bmatrix}$，$a$ 为正整数. 若存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，使得 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}$.

(1) 求 a，b 的值；

(2) 求矩阵 $\boldsymbol{C}$.

22.（本题满分 15 分）

设二维随机变量 (U,V) 在以点 $(-2,0)$，$(2,0)$，$(0,1)$，$(0,-1)$ 为顶点的四边形区域 D 上服从均匀分布，令

$$X=\begin{cases}-1, & U\leqslant -1,\\ 1, & U>-1,\end{cases}\quad Y=\begin{cases}-1, & V\leqslant \frac{1}{2},\\ 1, & V>\frac{1}{2}.\end{cases}$$

(1) 求 (X,Y) 的分布律；

(2) 求 X 和 Y 的相关系数 ρ_{XY}；

(3) 求 V 的边缘概率密度.

密　封　线　内　不　要　答　题

注意：
因以下项目填写不清而影响成绩责任自负
准考证号

姓名

考试地点________考场____号

报考单位

（密封线内不要答题）

绝密★启用前

考研数学命题人终极预测卷(二)

（科目代码:301）

考试时间:上午 8:30—11:30

考生注意事项

1. 答题前,考生须在指定位置上填写考生姓名、报考单位和准考证号.
2. 答案必须写在答题纸指定位置上,写在其他地方无效.
3. 填(书)写必须使用黑(蓝)色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔.
4. 考试结束,将答题纸装入试题袋中交回.

本卷得分

题型	选择题	填空题	解答题	总计
总分	50	30	70	150
得分	____分	____分	____分	____分

一、选择题:1～10 小题,每小题 5 分,共 50 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求.请将所选选项前的字母填在答题纸指定位置上.

1. 下列反常积分中,收敛的是　(　　)

A. $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$.　　B. $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(x^2-1)}$.

C. $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x(x-1)}}$.　　D. $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$.

2. 设函数 $f(x)=x^2 2^x$,则对于任意正整数 $n>1$, $f(x)$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0)=$　(　　)

A. $n(n-1)(\ln 2)^{n-2}$.　　B. $n(n-2)(\ln 2)^{n-1}$.

C. $n(n+1)(\ln 2)^{n-2}$.　　D. $n(n+2)(\ln 2)^{n-1}$.

3. 由方程 $2y^3-2y^2+2xy+y-x^2=0$ 确定的函数 $y=y(x)$　(　　)

A. 有驻点且为极小值点.　　B. 有驻点且为极大值点.

C. 有驻点但不是极值点.　　D. 没有驻点.

4. 设方程 $x+y^2+\sin(xy)=0$,则在点 $(0,0)$ 的某邻域内,该方程　(　　)

A. 只可以确定一个具有连续导数的隐函数 $y=y(x)$.

B. 只可以确定一个具有连续导数的隐函数 $x=x(y)$.

C. 可以确定两个具有连续导数的隐函数 $x=x(y)$ 和 $y=y(x)$.

D. 不可以确定任何一个具有连续导数的隐函数.

5. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n-1})$ 收敛,正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$　(　　)

A. 发散.　　B. 条件收敛.

C. 绝对收敛.　　D. 收敛性不确定.

6. 设 $p(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上是连续的非负函数,若微分方程 $dy+p(x)ydx=0$ 的任一解均满足 $\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=0$,则 $p(x)$ 必然满足　(　　)

A. $\lim\limits_{x\to+\infty}p(x)=0$.　　B. $\lim\limits_{x\to+\infty}p(x)=+\infty$.

C. $\int_a^{+\infty}p(x)dx$ 收敛.　　D. $\int_a^{+\infty}p(x)dx$ 发散.

7. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶实对称矩阵, $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$, $r(\boldsymbol{A})=2$,且 $\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}$ 为正定矩阵,其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵,则 k 应满足的条件是　(　　)

A. $k>0$.　　B. $k\geqslant 0$.

C. $k>2$.　　D. $k\geqslant 2$.

8. 设 2 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 λ_1,λ_2,且 $\lambda_1\neq\lambda_2$, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 分别是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于

λ_1,λ_2 的单位特征向量,则与矩阵 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_1^T$ 相似的对角矩阵为 ( )

A. $\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}$.　　B. $\begin{bmatrix}\lambda_1+1 & 0\\ 0 & \lambda_2+1\end{bmatrix}$.

C. $\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2+1\end{bmatrix}$.　　D. $\begin{bmatrix}\lambda_1+1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}$.

9. 某电子设备制造厂所用的元件是由三家元件制造厂提供的. 根据以往的记录有以下的数据:

元件制造厂	次品率	提供元件的份额
1	0.02	0.15
2	0.01	0.80
3	0.03	0.05

设这三家工厂的元件在仓库中是混合堆放的,且无区别标志. 现从仓库中随机取一只元件,若已知取到的是次品,则最有可能来自 ( )

A. 元件制造厂 1.　　B. 元件制造厂 2.

C. 元件制造厂 3.　　D. 无法判断.

10. 设 n 为正整数,随机变量 $X\sim t(n)$,$Y\sim F(1,n)$,常数 c 满足 $P\{X>c\}=\frac{2}{5}$,则 $P\{Y\leqslant c^2\}=$ ( )

A. $\frac{1}{5}$.　　B. $\frac{2}{5}$.　　C. $\frac{3}{5}$.　　D. $\frac{4}{5}$.

二、填空题:11 ~ 16 小题,每小题 5 分,共 30 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

11. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1-4x^2\sin x}-1}{x\ln(1+2x^2)}=$ ______.

12. 设 $y_1=2xe^{-3x}$ 是二阶常系数齐次线性微分方程 $y''+ay'+by=0$ 的一个特解,函数 $y(x)$ 是该方程满足条件 $y(0)=2,y'(0)=-5$ 的解,则 $\int_0^{+\infty}y(x)\mathrm{d}x=$ ______.

13. 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续,且对任意正值 a 与 b,积分 $\int_a^{ab}f(x)\mathrm{d}x$ 的值与 a 无关,且 $f(1)=1$,则 $f(x)=$ ______.

14. 设 Σ 是 $z=x^2+y^2$ 被平面 $z=1$ 所割下的有限部分,则 $\iint\limits_{\Sigma}|xyz|\,\mathrm{d}S=$ ______.

15. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 4 & 0\\ -1 & 0 & -2\\ a & b & c\end{bmatrix}$,且矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有无穷多解,则 $\boldsymbol{X}=$ ______.

16. 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}ax, & 2<x<4,\\ \frac{1}{4}, & -5<x\leqslant -3,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

则方程 $3x^2-X^2x+6=0$ 有正实根的概率为______.

三、解答题:17 ~ 22 小题,共 70 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本题满分 10 分)

已知 $y=y(x)(x>0)$ 由方程 $y^3=x(x^2-2y)$ 所确定,且曲线 $y=y(x)$ 有斜渐近线 $y=ax+b$,求 a,b 的值.

密封线内不要答题

18.（本题满分 11 分）

设 L 为平面曲线 $x^2+y^2=2x(y\geqslant 0)$ 上从点 $O(0,0)$ 到点 $A(2,0)$ 的一段弧，连续函数 $f(x)$ 满足

$$f(x)=x^2+\int_L[yf(x)+e^x y]\mathrm{d}x+(e^x-xy^2)\mathrm{d}y.$$

求 $f(x)$ 的表达式.

19.（本题满分 10 分）

证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}\cos nx}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{12}-\dfrac{x^2}{4},-\pi\leqslant x\leqslant\pi$，并求数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 的和.

20.（本题满分 11 分）

(1) 证明当 $x<0$ 时，$e^x(x^2+2)<2$；

(2) 记函数 $f(x)=\max\left\{e^{-x},\dfrac{1}{2}x^2+1\right\}$，若可导函数 $g(x)\geqslant f(x),x\in\mathbf{R}$，证明 $g(0)>1$.

21.（本题满分 14 分）

(1) 设二次型 $f(x,y,z)=y^2+2xz$，用正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 将其化为标准形，并写出 $\boldsymbol{Q}$；

(2) 求函数 $g(x,y,z)=\dfrac{y^2+2xz}{x^2+y^2+z^2}\ (x^2+y^2+z^2\neq 0)$ 的最大值，并求出一个最大值点.

22.（本题满分 14 分）

设总体 $X\sim U[\theta,2\theta]$，其中 $\theta(>0)$ 是未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的一个简单随机样本，$\overline{X}$ 为样本均值.

(1) 求参数 θ 的矩估计量，并判断它是否是无偏估计和相合估计；

(2) 求参数 θ 的最大似然估计量，并判断它是否是无偏估计.

密封线内不要答题

注意：
因以下项目填写不清而影响成绩责任自负

准考证号

姓名

考试地点 ______ 考场 ______ 号

报考单位 ______

（密 封 线 内 不 要 答 题）

绝密★启用前

考研数学命题人终极预测卷（三）

（科目代码：301）

考试时间：上午 8:30—11:30

考生注意事项

1. 答题前，考生须在指定位置上填写考生姓名、报考单位和准考证号。
2. 答案必须写在答题纸指定位置上，写在其他地方无效。
3. 填（书）写必须使用黑（蓝）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束，将答题纸装入试题袋中交回。

本卷得分

题型	选择题	填空题	解答题	总计
总分	50	30	70	150
得分	______分	______分	______分	______分

一、选择题：1 ～ 10 小题，每小题 5 分，共 50 分. 下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求. 请将所选选项前的字母填在答题纸指定位置上.

1. 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+3}}{\sqrt{3^{2n}+x^{2n}}}(-\infty<x<+\infty)$，则 $f(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上 （　）

A. 连续.

B. 有一个可去间断点.

C. 有一个跳跃间断点.

D. 有一个第二类间断点.

2. 设函数 $f(x)=\max\limits_{0\leqslant y\leqslant 1}\dfrac{|x-y|}{x+y+1}$，$0\leqslant x\leqslant 1$，则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最小值与最大值分别为 （　）

A. $0,2-\sqrt{3}$.　　B. $0,\dfrac{1}{2}$.

C. $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2},\dfrac{1}{2}$.　　D. $2-\sqrt{3},\dfrac{1}{2}$.

3. 设有曲面 Σ 为 $z=x+f(y-z)$，其中函数 $f(u)$ 可导，则该曲面上任意一点 (x,y,z) 处的切平面的法向量 $\boldsymbol{n}$ 与向量 $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ 的夹角 θ 为 （　）

A. $\dfrac{\pi}{2}$.　　B. $\dfrac{\pi}{3}$ 或 $\dfrac{2\pi}{3}$.

C. $\dfrac{\pi}{4}$ 或 $\dfrac{3\pi}{4}$.　　D. 0 或 π.

4. 下列级数中发散的是 （　）

A. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\sqrt{\ln n}}{n^3}$.　　B. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\ln n}{n^2}$.

C. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n-\ln n}$.　　D. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n\ln(\ln n)}$.

5. 函数 $f(x,y)=\ln(x+y+\sqrt{1+x^2+y^2})$ 在点 $(0,0)$ 处 （　）

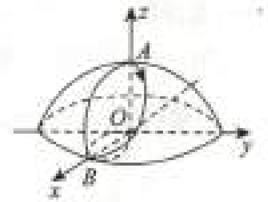
A. 可微且 $\mathrm{d}z\Big|_{\substack{x=0\\y=0}}=\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$.

B. 可微且 $\mathrm{d}z\Big|_{\substack{x=0\\y=0}}=0$.

C. 连续但偏导数不存在.

D. 不连续.

6. 设 L 为第一卦限内沿曲线 $\begin{cases}(x-1)^2+y^2=1,\\ x^2+y^2+z^2=4\end{cases}$ 从 $A(0,0,2)$ 到 $B(2,0,0)$ 的一段(如图)，则



$I=\int_L y\mathrm{d}x-y(x-1)\mathrm{d}y+y^2z\mathrm{d}z=$ ( )

A. $\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}$.　　B. $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}$.

C. $\frac{2}{3}-\frac{\pi}{2}$.　　D. $\frac{1}{3}-\frac{\pi}{4}$.

7. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&0&3\\1&4&5\\0&0&2\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&2&1\\3&5&a\\2&5&7\end{bmatrix}$，矩阵 Q 满足 $AQA^*=B$，且秩 $r(Q)=2$，其中 A^* 是 A 的伴随矩阵，则 $a=$ ( )

A. -1.　　B. 1.

C. -2.　　D. 2.

8. 已知3阶矩阵 A 的秩 $r(A)=2$，其伴随矩阵 A^* 可经初等行变换化为矩阵 B，又设 b 是 B 的一个非零列向量，则 ( )

A. 方程组 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解.

B. 方程组 $A^*x=0$ 与 $Bx=0$ 同解.

C. 方程组 $Ax=b$ 与 $Bx=b$ 同解.

D. 方程组 $A^*x=b$ 与 $Bx=b$ 同解.

9. 设 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$ 分别为随机变量 X_1,X_2 的分布函数，且存在点 x_0 使得 $F_1(x_0)>F_2(x_0)$. 若 $X_i\sim B(1,p_i)(0<p_i<1)$，$i=1,2$，则必有 ( )

A. $p_1=p_2$.　　B. $p_1+p_2=1$.

C. $p_1<p_2$.　　D. $p_1>p_2$.

10. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n\geqslant 2)$ 为来自标准正态总体 X 的简单随机样本，记 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，$Y=\overline{X}-S$，则 $E(Y^2)=$ ( )

A. $1-\frac{1}{n}$.　　B. $1+\frac{1}{n}$.

C. $1-\frac{1}{n-1}$.　　D. $1+\frac{1}{n-1}$.

二、填空题：11～16小题，每小题5分，共30分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

11. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n})\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{(n+1)(n+2)}=$ ________.

12. 设 L 是曲线 $x^2+y^2-2x-2y+1=0$ 沿顺时针一周，则曲线积分 $\oint_L y\cos x\mathrm{d}x+(xy^2+\sin x)\mathrm{d}y=$ ________.

13. 设一直线经过点 $P(1,0,1)$ 且与已知直线 $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{1}$ 垂直相交，则交点的坐标为________.

14. 已知某三阶常系数齐次线性微分方程有两个特解，分别为 $e^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x$ 与 e^x，则该微分方程为________.

15. 若方程组

$$(\text{I})\begin{cases}ax_1+x_2+x_3=a^2,\\(1+a)x_1+(1+a)x_2+2x_3=a(a^2+1)\end{cases}$$

与方程组

$$(\text{II})\begin{cases}x_1+x_2+ax_3=a^2,\\(1+a)x_1+2x_2+(1+a)x_3=1+a^2,\\(1+a)x_1+(1+a)x_2+2x_3=1+a\end{cases}$$

同解，则 $a=$ ________.

16. 设某种电器元件的使用寿命 T(单位：小时)服从指数分布，其概率密度为

$$f(t)=\begin{cases}\frac{C}{\theta}e^{-\frac{t-\mu}{\theta}}, & t\geqslant\mu,\\0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中 μ,θ 为未知参数，$\theta>0$. 设 $T_1,T_2,\cdots,T_n$ 是来自总体 T 的简单随机样本，$\overline{T}$ 为样本均值，则 μ 的矩估计量为________.

三、解答题：17 ～ 22 小题，共 70 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（本题满分 10 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\arctan(1-e^x)}{\sqrt{1+4x^2}}+\left(\dfrac{\arctan x}{\tan x}\right)^{\frac{1}{x^2}}\right]$.

18.（本题满分 11 分）

计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$，其中 Σ 分别取下面两种曲面：

(1) Σ 是曲面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧，其中 $a>0$；

(2) Σ 是曲面 $z=\sqrt{1-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{3}}$ 的上侧.

19.（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上具有连续导数，$f'(x)>0$，且 $a\leqslant f(x)\leqslant b$. 求证：

(1) 对任意 $x_1,x_2\in(a,b)$，存在 $c\in(a,b)$，使得 $f'(c)=\sqrt{f'(x_1)f'(x_2)}$；

(2) 存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f[f(a)]-f[f(b)]=[f'(\xi)]^2(a-b)$.

20.（本题满分 11 分）

(1) 求微分方程 $y'(x)+y(x)=\dfrac{(-x)^{n-1}}{3^n e^x}$ 的通解，其中 n 为任意正整数；

(2) 记 $a_n(x)$，$n=1,2,\cdots$ 是 (1) 中满足条件 $y(0)=0$ 的特解，求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ 的和函数.

21.（本题满分 15 分）

设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 分别是 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 -1 与 1 的特征向量，且

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{0}.$$

（1）证明 $\boldsymbol{P}$ 可逆；

（2）计算 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}$.

22.（本题满分 13 分）

设随机变量 X,Y 相互独立，且 X 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

Y 的概率密度为 $f_Y(y)=\begin{cases}e^{ay}, & y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

（1）求 a 的值；

（2）若 $Z=2X+aY$，求 Z 的概率密度.

密 封 线 内 不 要 答 题

注意：
因以下项目填写不清而影响成绩责任自负
准考证号

姓名

考试地点________
________考场______号
报考单位________

(密 封 线 内 不 要 答 题)

绝密★启用前

考研数学命题人终极预测卷(四)

(科目代码:301)

考试时间:上午 8:30—11:30

考生注意事项

1. 答题前,考生须在指定位置上填写考生姓名、报考单位和准考证号。
2. 答案必须写在答题纸指定位置上,写在其他地方无效。
3. 填(书)写必须使用黑(蓝)色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束,将答题纸装入试题袋中交回。

本卷得分

题型	选择题	填空题	解答题	总计
总分	50	30	70	150
得分	____分	____分	____分	____分

一、选择题:1 ~ 10 小题,每小题 5 分,共 50 分. 下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求. 请将所选选项前的字母填在答题纸指定位置上.

1. 设 $f(x)$ 是$(-\infty,+\infty)$上的连续正值函数,满足 $f(x)+\int_{x-1}^{x} f(t)\mathrm{d}t = C$,其中 C 为正常数,则函数 $e^{2x}f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$上 ( )

A. 严格单调递减. B. 严格单调递增.
C. 存在极小值. D. 存在极大值.

2. 设 $a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$, $b_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\,\mathrm{d}t$,则极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{(n+1)a_n}{b_n}\right]^n$ ( )

A. 等于 0. B. 等于 e. C. 等于 e^{-1}. D. 为 $+\infty$.

3. 设 $F(u,v)$ 具有连续偏导数,a,b 是非零常数,$a\frac{\partial F}{\partial u}+b\frac{\partial F}{\partial v}\neq 0$,则曲面 $F(x-az,y-bz)=0$ 上任一点处的切平面都平行于一条固定直线 ( )

A. $x=\frac{y}{a}=\frac{z}{b}$. B. $\frac{x}{a}=y=\frac{z}{b}$.
C. $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=z$. D. $x=\frac{y}{b}=\frac{z}{a}$.

4. 设函数 $u=u(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续,在 D 的内部具有连续偏导数,且满足 $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=1+u^2$,则 ( )

A. $u(x,y)$ 的最大值和最小值都在 D 的边界上取得.
B. $u(x,y)$ 的最大值和最小值都在 D 的内部取得.
C. $u(x,y)$ 的最大值在 D 的内部取得,最小值在 D 的边界上取得.
D. $u(x,y)$ 的最小值在 D 的内部取得,最大值在 D 的边界上取得.

5. 设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $x=2$ 处条件收敛,则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(x-1)^n$ 在 $x=-1$ 处 ( )

A. 必绝对收敛. B. 必条件收敛.
C. 必发散. D. 敛散性要看具体的 $\{a_n\}$.

6. 设 $f(x)=\begin{cases}x+1, & 0\leqslant x\leqslant \pi,\\ 0, & -\pi\leqslant x<0,\end{cases}$ $S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 是 $f(x)$ 以 2π 为周期的傅里叶级数,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=$ ( )

A. $-\frac{\pi}{4}$. B. $\frac{\pi}{4}$. C. $-\frac{\pi}{2}$. D. $\frac{\pi}{2}$.

7. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶不可逆矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 3×2 矩阵，$r(\boldsymbol{B})=2$，且 $\boldsymbol{AB}+3\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$，则行列式 $|\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}|=$ （　）

A. 0.　　B. 2.

C. 3.　　D. 6.

8. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1&1\\-2&2&1\\1&-1&k\end{bmatrix}$，$r((3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^2)<r(3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$，其中 $\boldsymbol{E}$ 是 3 阶单位矩阵，则常数 $k=$ （　）

A. 0.　　B. 3.

C. 6.　　D. 9.

9. 设某种电子器件的寿命(以小时计) T 服从参数为 λ 的指数分布，其中 $\lambda>0$ 未知. 从这批器件中任取 $n(n\geqslant 2)$ 只，并在时刻 $t=0$ 时投入独立寿命试验，试验进行到预定时间 T_0 结束，此时有 $k(0<k<n)$ 只器件失效，则 λ 的最大似然估计量 $\hat{\lambda}$ 为 （　）

A. $\dfrac{1}{T_0}e^{nT_0}$.　　B. $\dfrac{1}{T_0}e^{-nT_0}$.

C. $\dfrac{1}{T_0}\ln\dfrac{n-k}{n}$.　　D. $\dfrac{1}{T_0}\ln\dfrac{n}{n-k}$.

10. 设一批零件的长度 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，其中 σ^2 未知，μ 未知. 现从中随机抽取 15 个零件，测得样本均值为 $\bar{x}$，样本方差为 s^2，则当置信度为 0.90 时，判断 μ 是否大于 μ_0 的接受条件为 （　）

A. $\bar{x}\geqslant\mu_0-\dfrac{s}{\sqrt{15}}t_{0.10}(14)$.　　B. $\bar{x}\geqslant\mu_0+\dfrac{s}{\sqrt{15}}t_{0.10}(15)$.

C. $\bar{x}\geqslant\mu_0+\dfrac{s}{\sqrt{15}}t_{0.10}(14)$.　　D. $\bar{x}\geqslant\mu_0-\dfrac{s}{\sqrt{15}}t_{0.05}(15)$.

二、填空题：11～16 小题，每小题 5 分，共 30 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

11. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n=2$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=6$，又 $v_n=3u_{2n-1}-u_{2n}$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n=$ ________.

12. 微分方程 $\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{1}{1-y}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2=0$，满足条件 $y\big|_{x=0}=0$，$\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=0}=2$ 的特解是 $y=$ ________.

13. 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $e^{x-2y+3z}-2xe^{-y}\cos z=1$ 所确定的函数，则 $dz\big|_{(0,0)}=$ ________.

14. 设 l 为圆周 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2,\\x+y+z=a\end{cases}(a>0)$，则空间第一型曲线积分 $\oint_l x^2\,ds=$ ________.

15. 若可逆矩阵 $\boldsymbol{D}$ 满足 $\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&2&-3\\1&-3&6\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{D}=$ ________.

16. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n>2)$ 是来自总体 $X\sim N(0,1)$ 的简单随机样本，由切比雪夫不等式得 $P\{0<\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2<2n\}$ 不小于________.

三、解答题：17～22 小题，共 70 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本题满分 10 分)

设 a 与 b 都是常数且 $b>a>0$.

(1) 写出 yOz 平面上的圆 $(y-b)^2+z^2=a^2$ 绕 Oz 轴旋转一圈生成的环面 Σ 的方程；

(2) 记 Σ 所围成的空间区域为 Ω，计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}(x+y)^2\,dv$.

密 封 线 内 不 要 答 题

18.（本题满分 10 分）

将函数 $f(x)=\ln\left|\dfrac{x}{x-3}\right|$ 展开成 $x-2$ 的幂级数，并求出其收敛区间.

19.（本题满分 11 分）

设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，$f(0)=1$，且 $f(x)\geqslant 0$，$f'(x)\leqslant 0$，$f''(x)\leqslant f(x)$. 证明：

(1) $[f'(x)]^2-[f(x)]^2$ 在 $[0,1]$ 上为单调递增函数；

(2) $f'(0)\geqslant -\sqrt{2}$.

20.（本题满分 10 分）

设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的连续函数且其在 $[0,1]$ 上的平均值 $\overline{f}=\dfrac{1}{2}$，满足 $f(x)+a\int_1^x f(y)f(y-x)\,\mathrm{d}y=1$，求常数 a 的值.

21.（本题满分 14 分）

设 a,b,c,d 为常数，其中 $b\neq 0$，矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 的二重特征值为 λ，求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$.

22.（本题满分 15 分）

某人在超市里买了 10 节甲厂生产的电池，又买了 5 节乙厂生产的电池. 这两种电池的寿命（以小时计）分别服从参数为 $\frac{1}{20}$ 和 $\frac{1}{40}$ 的指数分布. 他任取一节电池装在相机里. 求：

(1) 此电池寿命 X 的概率密度；

(2) EX；

(3) 若用了 40 小时电池仍有电，还可以再用 20 小时以上的概率.

密 封 线 内 不 要 答 题

注意:
因以下项目填写不清而影响成绩责任自负
准考证号

姓名

考试地点 ______ 考场 ______ 号

报考单位 ______

(密 封 线 内 不 要 答 题)

绝密★启用前

考研数学命题人终极预测卷(五)

(科目代码:301)

考试时间:上午 8:30—11:30

考生注意事项

1. 答题前,考生须在指定位置上填写考生姓名、报考单位和准考证号。
2. 答案必须写在答题纸指定位置上,写在其他地方无效。
3. 填(书)写必须使用黑(蓝)色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束,将答题纸装入试题袋中交回。

本卷得分

题型	选择题	填空题	解答题	总计
总分	50	30	70	150
得分	____分	____分	____分	____分

一、选择题:1 ~ 10 小题,每小题 5 分,共 50 分. 下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求,请将所选选项前的字母填在答题纸指定位置上.

1. 已知曲面 $2z = x^2 + y^2$ 上点 M 的切平面平行于平面 $x - y + z = 1$,则 M 点的坐标是 ( )

A. $(-1,-1,1)$. B. $(-1,1,1)$.

C. $(1,-1,1)$. D. $(1,1,1)$.

2. 设函数 $f(x) = xe^{\frac{1}{1-x^2}}$,$-1 < x < 1$,则 ( )

A. $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内有一个零点.

B. $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内有两个零点.

C. $f'(x)$ 在 $(-1,1)$ 内有一个零点.

D. $f'(x)$ 在 $(-1,1)$ 内有两个零点.

3. 设函数 $u = u(x,y)$ 的定义域为 $\{(x,y) \mid x + y \neq 0\}$,其全微分为 $du = \frac{y}{(x+y)^2}dx - \frac{x+ky}{(x+y)^2}dy$,则 k 等于 ( )

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

4. 设 $\{a_n\}$ 是等差数列,$a_1 > 0$,公差 $d > 0$,$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{S_n}$ ( )

A. 发散. B. 条件收敛.

C. 绝对收敛. D. 敛散性取决于公差 d.

5. 设 L 是星形线:$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}(a > 0)$,则 $\int_L (x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}})ds =$ ( )

A. $2a^{\frac{7}{3}}$. B. $4a^{\frac{7}{3}}$. C. $2a^3$. D. $4a^3$.

6. 设三元函数 $u = \sqrt{x^2 + 2y^2 + 3z^2}$,点 $M(0,0,0)$,始于点 M 的单位向量 $\boldsymbol{l} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. 考虑点 M 处的偏导数 $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M$ 与方向导数 $\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_M$,则 ( )

A. $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M$ 与 $\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_M$ 都存在. B. $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M$ 与 $\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_M$ 都不存在.

C. $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M$ 存在,$\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_M$ 不存在. D. $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M$ 不存在,$\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_M$ 存在.

7. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 都是 2×2 矩阵,$r\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix}\right) = 2$,则行列式 $\begin{vmatrix} |\boldsymbol{A}| & |\boldsymbol{B}| \\ |\boldsymbol{C}| & |\boldsymbol{D}| \end{vmatrix} =$ ( )

A. $|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{D}|$. B. $-|\boldsymbol{B}||\boldsymbol{C}|$. C. 1. D. 0.

微信公众号【顶尖考研】
(ID:djky66)

8. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&a\end{bmatrix}$ 可逆，向量 $\boldsymbol{\alpha}=(1,b,1)^{\mathrm{T}}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 对应于特征值 λ 的一个特征向量，$b>0$，则 (a,b,λ) 为　　（　　）

A. $\left(\frac{2}{3},\frac{5}{3},1\right)$.　　B. $\left(\frac{2}{3},\frac{5}{3},4\right)$.

C. $(2,1,1)$.　　D. $(2,2,4)$.

9. 已知做某种试验成功的概率为 $\frac{6}{7}$，重复试验直到成功为止，则试验次数为 3 的概率为　　（　　）

A. $\left(\frac{1}{7}\right)^3$.　　B. $\left(\frac{1}{7}\right)^2\frac{6}{7}$.

C. $\frac{1}{7}\left(\frac{6}{7}\right)^2$.　　D. $\left(\frac{6}{7}\right)^2$.

10. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n>2)$ 是来自正态总体 $X\sim N(0,\sigma^2)(\sigma>0)$ 的简单随机样本. 记

$$\overline{X}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,S_{n-1}^2=\frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n-1}(X_i-\overline{X}_{n-1})^2,$$

已知 $Y=\frac{\overline{X}_n}{S_{n-1}}\sqrt{a}$（$a$ 为正常数）服从参数为 b 的 t 分布，则参数 a,b 应为　　（　　）

A. $a=n-1,b=n-1$.　　B. $a=n-1,b=n-2$.

C. $a=n,b=n-1$.　　D. $a=n,b=n-2$.

二、填空题：11 ～ 16 小题，每小题 5 分，共 30 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

11. 微分方程 $y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y=y^2\mathrm{e}^y\mathrm{d}y$ 的通解为________.

12. 设 $f(x,y)=\mathrm{e}^{ay}\cos(\ln x)$，常数 $a\neq0$，则 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{1}{a^2x^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial f}{\partial x}=$________.

13. 无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1(1-\sqrt{x})^n\mathrm{d}x$ 的和为________.

14. 设 $\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant1\}$，则三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{e}^{|z|}\mathrm{d}v=$________.

15. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实对称矩阵，$\lambda_1=\lambda_2=3$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值，$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,2)^{\mathrm{T}}$ 都是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 3 的特征向量. 又设二次型 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的符号差为 2，则矩阵 $\boldsymbol{A}=$________.

16. 设总体 X 服从均匀分布，其概率密度 $f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}, & 0<x\leqslant\theta,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，则总体 X 的方差 DX 的最大似然估计量 $\widehat{DX}=$________.

三、解答题：17 ～ 22 小题，共 70 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（本题满分 10 分）

设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\mathrm{e}^y+4xy+x^2=1$ 确定.

(1) $y(x)$ 在 $x=0$ 处是否取得极值？说明理由；

(2) 证明：$y(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内是单调递减函数.

18.（本题满分 10 分）

设 $I_n=\int_0^1\sin(a+x^n)\mathrm{d}x,n=1,2,\cdots$，其中 a 为实数，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}I_n=\sin a$.

密　封　线　内　不　要　答　题

密 封 线 内 不 要 答 题

19.（本题满分 10 分）

设函数 $z=f(r)$ 具有二阶连续导数，$r=\sqrt{x^2+y^2}$，满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\sin\sqrt{x^2+y^2}$，$f(\pi)=0$，且 $\lim\limits_{t\to 0}f'(t)=0$，求积分 $\int_0^{\pi} f(t)\mathrm{d}t$.

20.（本题满分 11 分）

设函数 $f(x),g(x)$ 二阶导数连续，$f(0)=0$，$g(0)=0$，且对于平面上任一简单闭曲线 L，均有

$$\oint_L [y^2 f(x)+2ye^x+2yg(x)]\mathrm{d}x+2[yg(x)+f(x)]\mathrm{d}y=0.$$

(1) 求 $f(x),g(x)$ 的表达式；

(2) 设 L_1 为任一条从点 $(0,0)$ 到点 $(1,1)$ 的曲线，利用 (1) 中的 $f(x),g(x)$，求 $\int_{L_1}[y^2 f(x)+2ye^x+2yg(x)]\mathrm{d}x+2[yg(x)+f(x)]\mathrm{d}y$.

21.（本题满分 14 分）

(1) 设二次型 $f(x_1,x_2)=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，$g(x_1,x_2)=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$，其中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 2 阶实对称矩阵，且 $\boldsymbol{B}$ 可逆. 若 $f(x_1,x_2)$ 与 $g(x_1,x_2)$ 均可经可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 化为标准形，证明方程 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{B}|=0$ 的根均为实数；

(2) 证明二次型 $f_1(x_1,x_2)=x_1^2+2x_1x_2$ 与 $g_1(x_1,x_2)=2x_1x_2+x_2^2$ 不可经同一可逆线性变换化为标准形.

22.（本题满分 15 分）

设随机变量 $X\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{pmatrix}$，随机变量 $Y\sim E(1)$，且 X,Y 相互独立. 设 $Z=(2X-1)Y$，记 (Y,Z) 的分布函数为 $F(y,z)$，求：

(1) Z 的概率密度 $f_Z(z)$；

(2) $F(2,-1)$ 的值.

密 封 线 内 不 要 答 题

注意：
因以下项目填写不清而影响成绩责任自负
准考证号

姓名

考试地点______考场______号

报考单位______

（密 封 线 内 不 要 答 题）

绝密★启用前

考研数学命题人终极预测卷（六）

（科目代码：301）

考试时间：上午 8:30—11:30

考生注意事项

1. 答题前，考生须在指定位置上填写考生姓名、报考单位和准考证号。
2. 答案必须写在答题纸指定位置上，写在其他地方无效。
3. 填（书）写必须使用黑（蓝）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束，将答题纸装入试题袋中交回。

本卷得分

题型	选择题	填空题	解答题	总计
总分	50	30	70	150
得分	______分	______分	______分	______分

一、选择题：1 ~ 10 小题，每小题 5 分，共 50 分. 下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求. 请将所选选项前的字母填在答题纸指定位置上.

1. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，$f'(a)f'(b)<0$. 下述命题

① 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$，使 $f(x_0)<f(a)$；

② 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$，使 $f(x_0)>f(b)$；

③ 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$，使 $f'(x_0)=0$；

④ 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$，使 $f(x_0)=\frac{1}{2}[f(a)+f(b)]$.

正确的个数为 （　）

A. 1.　　B. 2.　　C. 3.　　D. 4.

2. 设 $f(x)=e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x^2-4x+5}+x\left[\frac{1}{x}\right]$，其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，则曲线 $y=f(x)$ 的渐近线的条数为 （　）

A. 0.　　B. 1.　　C. 2.　　D. 3.

3. 若 $y=(x+1)e^{-x}$ 是线性微分方程 $y''+ay'+by=c(x+1)e^{x}$ 的解，则 （　）

A. $a=-2,b=1,c=0$.　　B. $a=-2,b=1,c=1$.

C. $a=2,b=1,c=0$.　　D. $a=2,b=1,c=-1$.

4. 设二元函数 $f(x,y)=\int_0^{x-y}\frac{1+u^2}{1+e^{-u^2}\cos^2 u}du$，则下列结论正确的是 （　）

A. $f(1,1)<-2$.　　B. $f(1,-1)>2$.

C. $f(-1,-1)>2$.　　D. $f(-1,1)>-2$.

5. 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-2)^n$ 在 $x=-2$ 处条件收敛，$a_n>0,n=0,1,2,\cdots$，则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-2)^{2n+1}$ 的收敛域为 （　）

A. $(0,2)$.　　B. $(0,4)$.　　C. $[-2,2)$.　　D. $[-4,4)$.

6. 设 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2(R>0)$ 的上半个，Σ_1 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的上半个并且其法向量 $\boldsymbol{n}$ 与 z 轴正向的夹角 γ 满足 $0\leqslant\gamma\leqslant\frac{\pi}{2}$，则下列四组积分中，同一组的两个积分均为零的是 （　）

A. $\iint\limits_{\Sigma}y\,dS,\iint\limits_{\Sigma_1}x\,dydz$.　　B. $\iint\limits_{\Sigma}x\,dS,\iint\limits_{\Sigma_1}y\,dzdx$.

C. $\iint\limits_{\Sigma}xy\,dS,\iint\limits_{\Sigma_1}x^2\,dydz$.　　D. $\iint\limits_{\Sigma}z\,dS,\iint\limits_{\Sigma_1}y\,dxdy$.

7. 设 A 是3阶实对称矩阵，满足 $A+A^2+\frac{1}{2}A^3=O$，则关于 A 的秩必有 （　）

A. $r(A)=0$.　B. $r(A)=1$.　C. $r(A)=2$.　D. $r(A)=3$.

8. 设 A 是4阶矩阵，向量 α,β 是齐次线性方程组 $(A-E)x=0$ 的一个基础解系，向量 γ 是齐次线性方程组 $(A+E)x=0$ 的一个基础解系. 则齐次线性方程组 $(A^2-E)x=0$ 的通解为 （　）

A. $C_1\alpha+C_2\beta$，其中 C_1,C_2 为任意常数.

B. $C_1\alpha+C_2\gamma$，其中 C_1,C_2 为任意常数.

C. $C_1\beta+C_2\gamma$，其中 C_1,C_2 为任意常数.

D. $C_1\alpha+C_2\beta+C_3\gamma$，其中 C_1,C_2,C_3 为任意常数.

9. 设 A,B 是随机事件且满足 $P(A|B)=P(B|A)=\frac{2}{3}$，$P(\overline{A})=\frac{3}{4}$，则 （　）

A. A,B 不独立且 $P(A\cup B)=\frac{1}{3}$.　B. A,B 不独立且 $P(A\cup B)=\frac{2}{3}$.

C. A,B 独立且 $P(A\cup B)=\frac{1}{4}$.　D. A,B 独立且 $P(A\cup B)=\frac{3}{4}$.

10. 设随机变量 X_1,X_2 相互独立，且都服从标准正态分布 $N(0,1)$，记 $Y=X_1-X_2$，$Z=X_1X_2$，则 Y,Z 的相关系数 $\rho_{YZ}=$ （　）

A. -1.　B. 0.　C. $\frac{1}{2}$.　D. 1.

二、**填空题**：11～16小题，每小题5分，共30分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

11. 若反常积分 $\int_0^{+\infty}e^{-ax}\cos bx\,dx$ 收敛，则 a,b 的取值范围分别为 ______.

12. 设 $y=y(x)$ 是由方程 $y^3+xy+x^2-2x+1=0$ 确定的满足 $y(1)=0$ 的可微函数，则 $\lim\limits_{x\to1}\frac{\int_1^x y(t)dt}{(x-1)^3}=$ ______.

13. 设曲线 $\Gamma:\begin{cases}y-z=0,\\x^2+y^2+z^2=1,\end{cases}$ 从 z 轴正向看去，Γ 沿逆时针方向，则 $\oint_\Gamma xyz\,dz=$ ______.

14. 设 $f(x)=2-x\ (0\leqslant x<2)$，而 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{2}\ (-\infty<x<+\infty)$，其中

$$b_n=\int_0^2 f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx\ (n=1,2,3,\cdots),$$

则 $S(3)=$ ______.

15. 设平面 $\pi_1:x+ay=a$，$\pi_2:ax+z=1$，$\pi_3:ay+z=1$，已知这三个平面没有公共交点，则 $a=$ ______.

16. X_1 是来自正态总体 $X\sim N(0,\sigma^2)(\sigma>0)$ 的一个简单随机样本，x_1 为其样本值. 则 σ^2 的一个无偏估计量为 ______.

三、**解答题**：17～22小题，共70分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（本题满分10分）

设 $f(x)$ 是可微函数，$f(1)=0$，且 $\lim\limits_{x\to1}f'(x)=\frac{1}{3}$，求极限：

$$\lim_{x\to1}\frac{\int_1^x f(t)dt}{\sqrt{(2-x)^2}-1+\frac{3}{2}\ln x}.$$

密　封　线　内　不　要　答　题

密 封 线 内 不 要 答 题

18.（本题满分 10 分）

求椭球面$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}+z^2=1$被平面$x+y+z=0$截得的椭圆的长半轴与短半轴.

19.（本题满分 11 分）

设$f(x)$在$(0,+\infty)$上二阶可导，满足$f(1)=-\frac{1}{2}$，$f'(1)=-2$，并且使得曲线积分

$$I=\int_L[4f(x)+2x^3]y\mathrm{d}x+[3xf(x)-x^2f'(x)]\mathrm{d}y$$

与路径无关，其中L为沿曲线$y=1+\sqrt{2x-x^2}$由点$(0,1)$到点$(2,1)$的有向弧段.

(1) 利用变换$z=\frac{f(x)}{x}$求函数$f(x)$；

(2) 求曲线积分I的值.

20.（本题满分 11 分）

设a_n表示由曲线$y=x^n$与$y=x^{n+1}$所围成的平面图形的面积，$n=1,2,\cdots$.

(1) 求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$的收敛域与和函数$S(x)$；

(2) 求数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+1)2^n}$之和.

21. (本题满分 14 分)

已知三元二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$,其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2b & 0\\ 0 & a & 1\\ 2 & 1 & 1\end{bmatrix},\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}.$$

若该二次型可由正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 化为 $y_1^2+4y_2^2$,求:

(1) a,b 的值;

(2) 正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$.

22. (本题满分 14 分)

设随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ 在给定 $X=x(0<x<1)$ 的条件下,随机变量 Y 在 $(-x,x)$ 上服从均匀分布.

(1) 求 $P\left\{\frac{1}{2}<X<\frac{3}{2}\middle|Y=EY\right\}$;

(2) 判断 X 与 Y 的独立性、相关性,并给出理由;

(3) 令随机变量 $Z=X-Y$,求 $f_Z(z)$.

密 封 线 内 不 要 答 题

注意：
因以下项目填写不清而影响成绩责任自负

准考证号

姓名

考试地点

______考场______号

报考单位

（密封线内不要答题）

绝密★启用前

考研数学命题人终极预测卷(七)

（科目代码:301）

考试时间:上午 8:30—11:30

考生注意事项

1. 答题前,考生须在指定位置上填写考生姓名、报考单位和准考证号.
2. 答案必须写在答题纸指定位置上,写在其他地方无效.
3. 填(书)写必须使用黑(蓝)色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔.
4. 考试结束,将答题纸装入试题袋中交回.

本卷得分

题型	选择题	填空题	解答题	总计
总分	50	30	70	150
得分	____分	____分	____分	____分

一、选择题:1 ~ 10 小题,每小题 5 分,共 50 分. 下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求. 请将所选选项前的字母填在答题纸指定位置上.

1. 设当 $x \to 0^+$ 时,$\ln(1+x^2)\cdot\sin^2 x$ 是比 $x^k(\sqrt{1+x^2}-1)$ 高阶的无穷小,而 $x^k(\sqrt{1+x^2}-1)$ 是比 $(1-\cos\sqrt{x})\arctan x$ 高阶的无穷小,则 k 的取值范围是 (　　)

　A. $(0,4)$.　　B. $(0,2)$.　　C. $(2,4)$.　　D. $(2,+\infty)$.

2. 曲线 $y=\sqrt{4x^2-3x+7}-2x$ 的渐近线的条数为 (　　)

　A. 0.　　B. 1.　　C. 2.　　D. 3.

3. 设 m 与 n 都是常数,若反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x^m(1-e^{-x})}{(1+x)^n}dx$ 收敛,则 m 与 n 的取值范围为 (　　)

　A. $n>-2, m>n+1$.　　B. $n>-2, m<n+1$.

　C. $n<-2, m<n+1$.　　D. $n<-2, m>n+1$.

4. 设 $F(x,y)=\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{x-y}}$,其中 $x\neq y$,且 $xy>0$. 又设

$$f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{y\to x}F(x,y), & x\neq 0,\\ e, & x=0,\end{cases}$$

则点 $x=0$ 为 $f(x)$ 的 (　　)

　A. 连续点.　　B. 可去间断点.

　C. 跳跃间断点.　　D. 无穷间断点.

5. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛,则下述结论不成立的是 (　　)

　A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 必收敛.　　B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^3$ 必收敛.

　C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$ 必收敛.　　D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n a_{n+1}$ 必收敛.

6. 设函数 $f(t)$ 连续,且 $\int_0^{2x+3y+1}f(t)dt=4x^2+9y^2+12xy-2$,并设起点 $O(0,0)$,终点 $A(1,3)$,l 为联结 O 与 A 的逐段光滑曲线,则 $\int_l xy^2 f(xy)dx+x^2yf(xy)dy$ 的值 (　　)

　A. 与曲线 l 有关.　　B. 为 3.

　C. 为 4.　　D. 为 9.

7. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实对称矩阵,满足 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$,且 $r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=2$,则 $r(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})=$ ( )

A. 0.　　B. 1.　　C. 2.　　D. 3.

8. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶实对称可逆矩阵,则存在 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使下列关系式

①$\boldsymbol{PA}=\boldsymbol{B}$;②$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{ABP}=\boldsymbol{BA}$;③$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$;④$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}^2$.

成立的个数为 ( )

A. 1.　　B. 2.　　C. 3.　　D. 4.

9. 在独立重复试验中,事件 A 发生的概率为 $p(0<p<1)$,不发生的概率为 $1-p$. 记 Y 为事件 A 首次发生时前面的试验次数,则 $EY=$ ( )

A. $(1-p)^2$.　　B. $p(1-p)$.

C. $\dfrac{1-p}{p}$.　　D. $\dfrac{p}{1-p}$.

10. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_6$ 是来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本,$Y_1=\dfrac{1}{4}\sum\limits_{i=1}^{4}X_i$,$Y_2=\dfrac{X_5+X_6}{2}$,$Z^2=\sum\limits_{i=1}^{4}(X_i-Y_1)^2$,而 $T=k\dfrac{Y_1-Y_2}{Z}$. 若 $T\sim t(n)$,则 ( )

A. $k=\dfrac{1}{2},n=3$.　　B. $k=2,n=3$.

C. $k=\dfrac{1}{2},n=4$.　　D. $k=2,n=4$.

二、**填空题**:11～16 小题,每小题 5 分,共 30 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

11. 设常数 $k>0$,则 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}+k$ 在 $(0,+\infty)$ 内的零点个数为________.

12. 设 $\begin{cases}x=\tan t,\\ y=\dfrac{u(t)}{\cos t},\end{cases}$ 函数 $y=y(x)$ 满足 $(1+x^2)^2y''=y$,则 $\dfrac{d^2u}{dt^2}=$________.

13. 设 $z=(1+x^2y)^{xy^2}$,则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}-2y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$________.

14. 设平面区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant t^2,t>0\}$,则极限

$\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{1}{t^2}\iint\limits_D e^{x^2-y^2}\cos(x+y)d\sigma=$________.

15. 已知 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 $\lambda_1=3$,其对应的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1=(-3,1,1)^{\mathrm{T}}$,且 $r(\boldsymbol{A})=1$,则 $\boldsymbol{A}=$________.

16. 已知甲、乙两袋中装有同种球,其中甲袋中装有 10 个红球和 10 个白球,乙袋中装有 10 个红球. 从甲袋中一次性取 10 个球放入乙袋,则从乙袋中任取一球是白球的概率为________.

三、**解答题**:17～22 小题,共 70 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.(本题满分 11 分)

设 $0<x<1$,$f(x)=\int_0^{+\infty}x^{t^2}dt$.

(1) 用初等函数表示 $f(x)$;

(2) 设 $\lim\limits_{x\to1^-}(1-x)^p\int_0^{+\infty}x^{t^2}dt$ 存在且不为零,求常数 p 的值及该极限的值.

18.(本题满分 10 分)

求曲面 $4z=3x^2-2xy+3y^2$ 上的点到平面 $x+y-4z=1$ 的最短距离.

密 封 线 内 不 要 答 题

密 封 线 内 不 要 答 题

19.（本题满分 10 分）

设 $f(u)$ 为奇函数，且具有一阶连续导数，Σ 是由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$，两球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 与 $x^2+y^2+z^2=2(z>0)$ 所围立体的全表面，方向向外. 求

$$\iint_{\Sigma} x^3\,dydz+[y^3+f(xy)]dzdx+[z^3+f(yz)]dxdy.$$

20.（本题满分 11 分）

设数列 $\{a_n\}$ 定义为 $a_n=1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}$，$n=1,2,\cdots$.

（1）证明不等式 $a_n<\frac{2}{3}(n+1)^{\frac{3}{2}}$ 对 $n\geqslant 1$ 恒成立；

（2）证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ 收敛.

21.（本题满分 14 分）

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{P}$ 均为 3 阶矩阵，$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为 3 维列向量且线性无关，若 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(3\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1)$.

(1) 证明 $\boldsymbol{A}$ 可相似于对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$；

(2) 若 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\0&1&0\\0&3&1\end{bmatrix}$，求可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，使得 $\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{\Lambda}$，并写出 $\boldsymbol{\Lambda}$.

22.（本题满分 14 分）

设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{\theta}{x^2}, & x\geqslant\theta,\\ 0, & x<\theta,\end{cases}$$

其中 $\theta>0$ 为未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n\ (n>1)$ 为来自总体 X 的简单随机样本，$X_{(1)}=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$.

(1) 求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}$，并求常数 a，使得 $a\hat{\theta}$ 为 θ 的无偏估计；

(2) 对于原假设 $H_0:\theta=2$ 与备择假设 $H_1:\theta>2$，若 H_0 的拒绝域为 $V=\{X_{(1)}\geqslant 3\}$，求犯第一类错误的概率 α.

密 封 线 内 不 要 答 题

注意:因以下项目填写不清而影响成绩责任自负

准考证号 ____

姓名 ____

考试地点 ____

____考场____号

报考单位 ____

(密封线内不要答题)

绝密★启用前

考研数学命题人终极预测卷(八)

(科目代码:301)

考试时间:上午 8:30—11:30

考生注意事项

1. 答题前,考生须在指定位置上填写考生姓名、报考单位和准考证号。
2. 答案必须写在答题纸指定位置上,写在其他地方无效。
3. 填(书)写必须使用黑(蓝)色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束,将答题纸装入试题袋中交回。

本卷得分

题型	选择题	填空题	解答题	总计
总分	50	30	70	150
得分	____分	____分	____分	____分

一、选择题:1 ~ 10 小题,每小题 5 分,共 50 分. 下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求. 请将所选选项前的字母填在答题纸指定位置上.

1. 曲线 $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, & x<0, \\ (3-x)\sqrt{x}, & x\geqslant 0 \end{cases}$ 的拐点个数为 ( )

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

2. 若曲线 $y=x^2+ax+b$ 和 $2y=xy^3-x^2$ 在点 $(1,-1)$ 处相切, 其中 a,b 是常数, 则 ( )

A. $a=1,b=-3$. B. $a=1,b=1$.

C. $a=-1,b=-1$. D. $a=-3,b=1$.

3. 设可微函数 $f(u,v)$ 满足 $f(x-y,x+e^y)=x^2-y^2$, 则 $f(u,v)$ 在点 $(1,2)$ 处的方向导数的最大值等于 ( )

A. 1. B. $\sqrt{2}$. C. $\sqrt{3}$. D. 2.

4. 设 $f(t)$ 为连续函数, a 是常数, 下述命题正确的是 ( )

A. 若 $f(t)$ 为奇函数, 则 $\int_a^x dy\int_0^y f(t)dt$ 是 x 的奇函数.

B. 若 $f(t)$ 为偶函数, 则 $\int_0^x dy\int_a^y f(t)dt$ 是 x 的奇函数.

C. 若 $f(t)$ 为奇函数, 则 $\int_0^x dy\int_y^a f(t)dt$ 是 x 的奇函数.

D. 若 $f(t)$ 为偶函数, 则 $\int_0^x dy\int_a^a f(t)dt$ 是 x 的奇函数.

5. 已知幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛域为 $(-4,4]$, 则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{2n+1}$ 的收敛域为 ( )

A. $(-2,2]$. B. $[-2,2]$. C. $(-4,4]$. D. $[-4,4]$.

6. 设以下的 A,B,C 为常数, 微分方程 $y''+4y=\sin^2 x$ 有特解形如 ( )

A. $A\sin^2 x$. B. $A\cos^2 x$.

C. $x(A+B\cos 2x+C\sin 2x)$. D. $A+x(B\cos 2x+C\sin 2x)$.

7. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$ 均是 4 维列向量, 记 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$, $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)$. 已知方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\alpha}_5$ 有通解 $k(1,-1,2,0)^T+(2,1,0,1)^T$, 其中 k 是任意常数, 则下列向量不是方程组 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的解的是 ( )

A. $(1,-2,-2,0,-1)^T$. B. $(0,3,-4,1,-1)^T$.

C. $(2,1,0,1,-1)^T$. D. $(3,0,2,1,-1)^T$.

8. 已知3阶方阵$\boldsymbol{A}$的特征值为$1,-2,3$,则$\boldsymbol{A}$的行列式$|\boldsymbol{A}|$中元素a_{11},a_{22},a_{33}的代数余子式的和$A_{11}+A_{22}+A_{33}=$ （　　）

A. 6.　　B. -5.　　C. -2.　　D. 3.

9. 设$f_1(x)$为标准正态分布的概率密度,$f_2(x)$为$[-1,1]$上均匀分布的概率密度.若随机变量X的概率密度为$f(x)=\begin{cases}af_1(x), & x>0,\\ bf_2(x), & x\leqslant 0\end{cases}(a>0,b>0)$,且$P\{X>0\}=\dfrac{1}{4}$,则$E(X^2)=$ （　　）

A. $\dfrac{1}{16}$.　　B. $\dfrac{1}{8}$.　　C. $\dfrac{1}{4}$.　　D. $\dfrac{1}{2}$.

10. 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1+xy}{4}, & |x|<1,|y|<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

则 （　　）

A. X与Y相互独立,X^2与Y^2也相互独立.

B. X与Y相互独立,X^2与Y^2不相互独立.

C. X与Y不相互独立,X^2与Y^2相互独立.

D. X与Y不相互独立,X^2与Y^2也不相互独立.

二、填空题:11～16小题,每小题5分,共30分.请将答案写在答题纸指定位置上.

11. 设函数$u(x,y)$具有连续的一阶偏导数,L为自点$O(0,0)$沿曲线$y=\sin x$至点$A(\pi,0)$的有向弧段,则曲线积分$\int_L[yu(x,y)+xyu'_x(x,y)+y+x\sin x]\mathrm{d}x+[xu(x,y)+xyu'_y(x,y)+e^{y^2}-x]\mathrm{d}y=$______.

12. 设函数f与g均可微,$z=f[xy,\ln x+g(xy)]$,则$x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$______.

13. 设$u=u(x,y,z)$具有二阶连续偏导数,且满足$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=x^2+y^2+z^2$.又设$\Sigma$为曲面$x^2+y^2+z^2=2az(a>0)$的外侧,则$\oiint\limits_{\Sigma}\dfrac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\dfrac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\dfrac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$______.

14. 设L是球面$x^2+y^2+z^2=R^2$与平面$x+y+z=0$的交线,则$\oint_L(y^2-2x-2y-2z)\mathrm{d}s=$______.

15. 设矩阵$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}1&1&-1\\-1&0&3\\0&1&1\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}1&&\\&-1&\\&&2\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{QD}$,$\boldsymbol{E}$是3阶单位矩阵,则$\boldsymbol{A}^3-3\boldsymbol{A}^2+5\boldsymbol{E}=$______.

16. 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体X的简单随机样本,$X\sim N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0)$,$\mu,\sigma^2$为未知参数,$Y$服从参数为$\sigma$的指数分布,并记$\theta=P\{Y>1\}$,则$\theta$的最大似然估计量$\hat{\theta}=$______.

三、解答题:17～22小题,共70分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（本题满分10分）

设$f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.

(1) 证明$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}\int_0^{x^2}f(t)\mathrm{d}t=0$;

(2) 证明$F'_+(0)=0$.

密封线内不要答题

18.（本题满分 10 分）

已知圆$(x-1)^2+y^2=1$内切于椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0,a\neq b)$.

(1) 证明 $a^2-a^2b^2+b^4=0$;

(2) 求上述椭圆所围区域的面积达到最小时的椭圆方程.

19.（本题满分 11 分）

设 $f(x)=\frac{1}{1-x-x^2}$,记 $a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}(n=0,1,2,\cdots)$.

(1) 证明 $a_0=a_1=1,a_{n+2}=a_{n+1}+a_n,n=0,1,2,\cdots$;

(2) 求级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{a_na_{n+2}}$ 的和.

20.（本题满分 11 分）

设函数 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续且 $f(0)=f(1)=0$,在$(0,1)$内二阶可导且 $f''(x)<0$, 记 $M=\max\limits_{0\leq x\leq 1}f(x)>0$.

(1) 证明对任意正整数 n,存在唯一的 $x_n\in(0,1)$,使得 $f'(x_n)=\frac{M}{n}$;

(2) 对(1) 中得到的$\{x_n\}$,证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,且$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=M$.

21.（本题满分 14 分）

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}$ 可用正交变换化为标准形 $f=2y_1^2-2y_2^2-y_3^2$，其中 $\boldsymbol{A}^*$ 是 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵.

(1) 求 $r(\boldsymbol{A}^*+2\boldsymbol{E})$，其中 $\boldsymbol{E}$ 是 3 阶单位矩阵；

(2) 已知二次型 $g(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的正惯性指数为 2，求行列式 $|\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}|$.

22.（本题满分 14 分）

设随机变量 X 和 Y 相互独立且服从相同的分布，$X\sim\begin{bmatrix}0 & 1\\ q & p\end{bmatrix}$，$p+q=1$，$0<p<1$，又

$$Z=\begin{cases}1, & X+Y \text{ 为奇数},\\ 0, & X+Y \text{ 为偶数}.\end{cases}$$

(1) 求 XZ 的分布律；

(2) 求 p 取何值时，X 和 Z 相关，说明理由.

密　封　线　内　不　要　答　题