

নিউমেরিকাল মেথডস

নিউমেরিকাল মেথডস কি?

নিউমেরিকাল মেথডস বা নিউমেরিকাল এনালাইসিস হল কোন বীজগণিত, ক্যালকুলাস বা গণিতের অন্যান্য শাখার বিভিন্ন সমীকরণ এবং সমস্যার আসন্ন সমাধান বের করার প্রোগ্রামেবল পদ্ধতি। এই পদ্ধতিগুলো নির্দিষ্ট সংক্ষক স্টেপ এ সাজানো যায়। স্টেপগুলোকে অ্যালগরিদম আকারে লেখা যায় বা ফ্লোচার্ট হিসেবে আঁকা যায়। যার ফলে এগুলোকে কোন প্রোগ্রামিং ল্যাংগুয়েজ দিয়ে প্রোগ্রামও করা যায়।

আমরা এখন পর্যন্ত গণিতের সমস্যার সমাধান করতে সিম্বোলিক ম্যানিপুলেশনের বিভিন্ন সূত্র যেমন বীজগণিত, ত্রিকোণমিতি, ক্যালকুলাসের সূত্র এবং বিভিন্ন পদ্ধতি যেমন প্রতিস্থাপন, অপনয়ন, বজ্রগুণন পদ্ধতি ব্যবহার করে আসছি। সিম্বোলিক ম্যানিপুলেশনে আমরা exact analytical solution পাই। কিন্তু অনেক সমস্যা আছে যেগুলোর কোনো exact analytical solution পাওয়া যায়না। সেসব সমস্যা সমাধান করতে নিউমেরিকাল মেথডস ব্যবহার করে approximate solution বের করার কোন বিকল্প নেই।

গণিত এবং ইঞ্জিনিয়ারিং এর বিভিন্ন সমস্যার নিউমেরিকাল ক্যালকুলেশন ছিল ১৯৫০ এর দশকে কম্পিউটারের প্রথম ও প্রধান অ্যাপ্লিকেশনগুলির মধ্যে একটি। এই উদ্দেশ্যে ব্যবহৃত প্রথম হাই-লেভেল কম্পিউটার ভাষা ছিল FORTRAN। প্যাসকেল, সি++, জাভা এবং পাইথনের মতো শক্তিশালী ভাষার বিকাশ এবং ম্যাটল্যাব ও ম্যাথমেটিকার মতো ইন্টিগ্রেটেড কম্পিউটেশনাল এনভায়রনমেন্ট (ICE) নিউমেরিকাল মেথডসের কোড ও কৌশলের সক্ষমতা বৃদ্ধি করেছে।

গণিতের সমস্যাগুলো সাধারণত প্রধান দুই ভাগে ভাগ করা যায় - কন্টিনিউয়াস ম্যাথমেটিকস এবং ডিসক্রিট ম্যাথমেটিকস। ডিসক্রিট ম্যাথমেটিকস ডিসক্রিট বা পরস্পরের সাথে সম্পর্কহীন ডেটা ও ফাংশন নিয়ে কাজ করে, যেমন - সেট, ম্যাট্রিক্স, সম্ভাব্যতা, গ্রাফ, ট্রি, কম্বিনেট্রিক্স, নান্দ্রার থিউরি। কন্টিনিউয়াস ম্যাথমেটিকস কন্টিনিউয়াস ফাংশন নিয়ে কাজ করে, যেমন - ক্যালকুলাস, ধারা, ভেক্টর, পলিনমিয়াল ইকুয়েশন, ত্রিকোণমিতিক ও লগারিদমিক ফাংশন ইত্যাদি। নিউমেরিকাল মেথডস কাজ করে কন্টিনিউয়াস ম্যাথমেটিকসের সমস্যাগুলোর উপর।

Roots of High-Degree Equations

High-Degree Equation বা “ননলিনিয়ার ইকুয়েশন” হতে পারে “হাইয়ার অর্ডার পলিনমিয়াল ইকুয়েশন” অথবা যেসব ইকুয়েশনে স্কয়ার রুট (square root, nth root) বা ট্রান্সেন্ডেন্টাল (ত্রিকোণমিতিক, লগারিদমিক) ফাংশন থাকে।

পলিনমিয়াল ইকুয়েশন হচ্ছে সাধারণ একটা ইকুয়েশন যাতে সংখ্যা ও ভ্যারিয়েবল মিলে কতগুলো টার্ম থাকে। ইকুয়েশনের কোন টার্মের ভ্যারিয়েবলগুলোর পাওয়ারের সমষ্টি যেটা সর্বোচ্চ ইকুয়েশনটিকে সেই অর্ডারের পলিনমিয়াল বলে। যেমন $2x^2 - 4x + 1 = 0$ ইকুয়েশনটিতে $2x^2$ টার্মের একটি মাত্র ভ্যারিয়েবল x এর পাওয়ার 2 সর্বোচ্চ হওয়ায় এটি 2nd অর্ডার পলিনমিয়াল। একটি পলিনমিয়ালের অর্ডার যত, তার ভ্যারিয়েবলের ততগুলো সমাধান পাওয়া যায়।

হাই-ডিগ্রি ইকুয়েশনের সবচেয়ে সহজ উদাহরণ হল কোয়াড্রেটিক ইকুয়েশন: $ax^2 + bx + c = 0$

এর সমাধান সহজেই সূত্রের মাধ্যমে পাওয়া যায়:
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

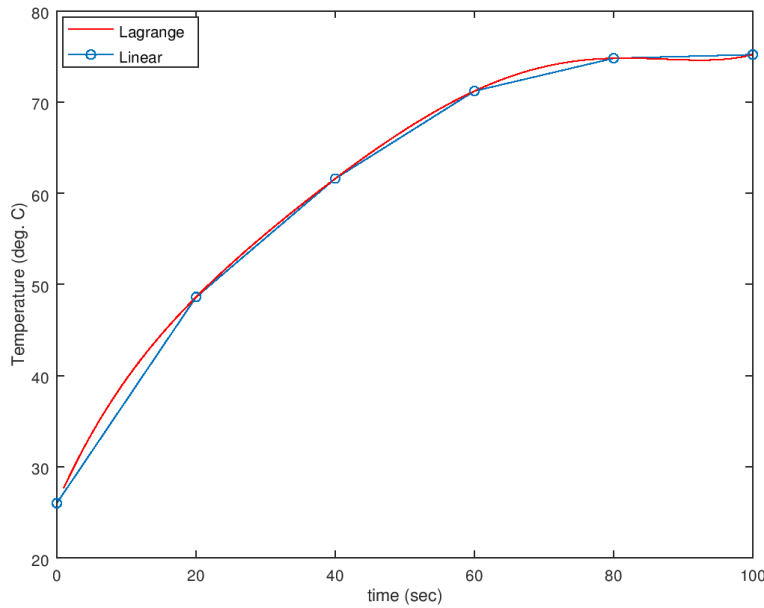
কিন্তু ইকুয়েশনের ডিগ্রি এর চেয়ে বড় হলে বা ট্রান্সেন্ডেন্টাল ফাংশনের টার্ম থাকলে সূত্রের মাধ্যমে সমাধান পাওয়া যায় না, তখন নিউমেরিকাল মেথডসই হয় সমাধান পাওয়ার একমাত্র উপায়।

হাই-ডিগ্রি ইকুয়েশন সমাধানের নিউমেরিকাল মেথডস দুই রকম - ওপেন মেথডস ও ব্র্যাকেটিং মেথডস। ব্র্যাকেটিং মেথডস এমন দুটি ইনিসিয়াল ভ্যালু নিয়ে কাজ শুরু করে যেন সমাধান এদুটির মাঝেই থাকে। অন্যদিকে ওপেন মেথডস একটি ইনিসিয়াল গেস নিয়ে কাজ করে। ফলে ওপেন মেথডস অনেকসময় সমাধান না দিয়ে সমাধান থেকে দূরে সরে যেতে পারে। যেসব ক্ষেত্রে সমাধান থেকে দূরে সরে যায় তাকে ডাইভারজেন্ট কেস বলে। আর ব্র্যাকেটিং মেথডস সবসময় সমাধানের দিকে যায় অর্থাৎ সবসময় কনভারজেন্স হয়। কিন্তু অনেক সময় একদম exact সমাধান পাওয়া যায় না। দশমিকের পর যত ঘর পর্যন্ত ঠিক হলে সমাধান গ্রহণযোগ্য হবে তাকে ঐ সমস্যার রিকোয়ার্ড degree of accuracy বলে।

ওপেন মেথডস - Simple Iterations method, Newton-Raphson method

ব্র্যাকেটিং মেথডস - Bisection method, False Position method, Secant method

Interpolation and Curve Fitting



ইন্টারপোলেশন মেথডে কতগুলো ডেটা পয়েন্ট দেওয়া থাকে যার সংযোগকারী ফাংশন থেকে মধ্যবর্তী অন্য কোন ডেটা পয়েন্ট বের করতে হয়। যেমন উপরের ডেটা সেটে ৬০ ও ৮০ সেকেন্ডের তাপমাত্রা দেওয়া আছে, ৬৫ সেকেন্ডে তাপমাত্রা কত ছিল তা বের করতে হলে ইন্টারপোলেশন মেথডস লাগবে। ইন্টারপোলেশন মেথডস - Linear Interpolation method, Lagrange's method, Newton's method.

ডেটা সেটের শুরু অর্থাৎ x_0 এর দিক থেকে ইন্টারপোলেট শুরু করলে তাকে ফরওয়ার্ড ইন্টারপোলেশন এবং শেষ অর্থাৎ x_n এর দিক থেকে ইন্টারপোলেট শুরু করলে তাকে ব্যাকওয়ার্ড ইন্টারপোলেশন বলে। যে ডেটা পয়েন্ট বের করতে হবে সেটি যদি শেষ দিকে থাকে যেমন উপরের উদাহরণের জন্য ব্যাকওয়ার্ড ইন্টারপোলেশন ভাল কাজ করবে।

কার্ভ ফিটিং হল এমন একটি সমীকরণ খুঁজে বের করা যা প্রদত্ত ডেটা পয়েন্টের মধ্য দিয়ে এমনভাবে যায় যেন পয়েন্টগুলো থেকে সমীকরণের বিচ্যুতি সর্বনিম্ন হয়। ইন্টারপোলেশন এবং কার্ভ ফিটিং এর মধ্যে প্রধান পার্থক্য হল যে কার্ভ ফিটিং এর সমীকরণকে সব ডেটা পয়েন্ট দিয়ে যেতে হয় না। কার্ভ ফিটিং এ পয়েন্টগুলো থেকে সমীকরণের দূরত্বের বর্গকে সর্বনিম্ন করার চেষ্টা করা হয় দেখে কার্ভ ফিটিং মেথডস গুলোকে লিস্ট স্কয়ার্স মেথডসও বলা হয়।

কার্ভ ফিটিং মেথডস দুটি - Linear Regression ও Polynomial Regression. লিনিয়ার রিগ্রেশনে একটি সরলরেখার সমীকরণ দিয়ে পয়েন্টগুলোকে ফিট করানো হয়। পলিনমিয়াল রিগ্রেশনে 2nd or higher অর্ডার পলিনমিয়ালের কার্ভ দিয়ে পয়েন্টগুলোকে ফিট করানো হয়।

Numerical Differentiation

যদিও অধিকাংশ গাণিতিক সমীকরণ এবং সূত্র analytically ডিফারেনসিয়েট করা যায়, বিভিন্ন এক্সপেরিমেন্ট ও অবজারভেশন থেকে পাওয়া অনেক কার্ভ এবং ডেটা সেট থাকে যেগুলো ডিফারেনসিয়েট করতে নিউমেরিকাল ডিফারেনসিয়েসনের মেথড লাগে।

নিউমেরিকাল ডিফারেনসিয়েসনের মেথড - Finite Differences Approximations.

Numerical Integration

ইন্টিগ্রেশনে কোন একটি ফাংশনের কার্ভের নিচের ক্ষেত্রফল বের করা হয় analytical বিভিন্ন সূত্র দিয়ে। যেসব ফাংশনের ইন্টিগ্রেশন সূত্র দিয়ে করা যায় না সেসব ফাংশনের ইন্টিগ্রেশন করতে কার্ভের নিচের ক্ষেত্রকে ছোট ছোট অংশে ভাগ করে সেগুলোর ক্ষেত্রফল বের করে যোগ করতে হয়। সাধারণত যত বেশি ভাগে ভাগ করা হয়, সমাধানের accuracy তত বেশি হয়।

নিউমেরিকাল ইন্টিগ্রেশন মেথডস - Trapezoidal Rule, Simpson's 1/3 Rule, Simpson's 3/8 Rule, Weddle's Rule.

Systems of Linear Equations

সিস্টেম অফ লিনিয়ার ইকুয়েশনস বলতে কতগুলো একাধিক ভ্যারিয়েবলের 1st অর্ডার পলিনমিয়াল ইকুয়েশনের সমষ্টিকে বোঝায়। একটি ইকুয়েশনে যতগুলো ভ্যারিয়েবল থাকে তা সমাধান করতে সিস্টেমে ঠিক ততগুলো ইকুয়েশন থাকতে হয়। যেমন দুটি ভ্যারিয়েবলের সিস্টেম:

$$\begin{aligned}x - 2y &= -2 \\ 7x - 3y &= 19\end{aligned}$$

সিস্টেমস অফ লিনিয়ার ইকুয়েশনসের মেথডস - Gauss Elimination method, Gauss-Jordan method, Triangularization or Factorization or LU Decomposition method, Cholesky's method.

Ordinary Differential Equations

সাধারণ ডিফারেনশিয়াল সমীকরণ (ODE) হল এমন একটি ডিফারেনশিয়াল সমীকরণ যাতে একটি স্বাধীন চলকের এক বা একাধিক ফাংশন এবং এর ডেরিভেটিভ থাকে। সাধারণ শব্দটি আংশিক ডিফারেনশিয়াল সমীকরণের বিপরীতে ব্যবহৃত হয় যাতে একাধিক স্বাধীন চলক থাকতে পারে।

ODE মেথডস - Picard's method, Euler's method, Runge-Kutta 2nd order, 4th order method, Milne's Predictor Corrector Method.

কেন শিখব?

নিউমেরিকাল মেথডস এর সাহায্যে অনেক জটিল গাণিতিক সমস্যাকে কতগুলো ছোট ছোট এবং তুলনামূলকভাবে সহজ স্টেপে ভাগ করে সাধারণ ফাংশন ও যোগ, বিয়োগ, গুণ, ভাগের মত অপারেশন দিয়ে সমাধান করা যায়। এগুলো

কম্পিউটারের বেসিক অপারেশন হওয়ায় জটিল গাণিতিক সমস্যা সহজে সমাধান করতে কম্পিউটার নিউমেরিকাল মেথডস এর অ্যালগরিদম গুলো ব্যবহার করে।

নিউমেরিকাল মেথডস ব্যবহৃত হয় ইঞ্জিনিয়ারিং এর সকল ক্ষেত্রে এবং physical sciences, astronomy, life and social sciences, medicine, business এর বিভিন্ন ক্ষেত্রে। এর মধ্যে Machine Learning, System Simulation, Spacecraft Dynamics, Self-driving car, Weather predictions, Mechanical ventilation এ নিউমেরিকাল মেথডসের ব্যবহার উল্লেখযোগ্য।

পূর্বশর্ত

- ❖ বীজগণিত ও ক্যালকুলাস (MAT 111 Mathematics-I), ম্যাট্রিক্স (MAT 121 Mathematics-II) এবং Ordinary Differential Equation (MAT 211 Mathematics-III) সম্পর্কে ধারণা থাকা প্রয়োজন।
- ❖ Python বা MATLAB প্রোগ্রামিং ল্যাংগুয়েজ জানা থাকা ভাল। যদিও সি/সি++ দিয়ে নিউমেরিকাল মেথডসের কোড করা যায়, Python বা MATLAB দিয়ে করলে তা অনেক সহজ হয়। আর পরবর্তী অনেক কোর্সে Python এর কোন বিকল্প না থাকায় Python শিখে নেওয়ার এটাই ভাল সময়।

রিসোর্স

নিউমেরিকাল মেথডস শেখার ভাল একটি উপায় হল [Udemy - Programming Numerical Methods in Python](#) কোর্সটি ফলো করা। এতে পর্যাপ্ত থিউরির সাথে সাথে Python এ কোড করে দেখানো হয়েছে। আগে থেকে Python না জানলেও সমস্যা নেই, কোর্সটি করতে গিয়ে যতটুকু লাগবে শেখা হয়ে যাবে।

অতিরিক্ত রিসোর্স

1. [Coursera - Numerical Methods for Engineers](#) / [YouTube](#) - প্রচুর থিউরি এবং MATLAB কোড
2. [Coursera - Introduction to numerical analysis](#) - কিছু অতিরিক্ত থিউরি
3. Youtube Playlist [1](#), [2](#) - বাংলায় নিউমেরিকাল মেথডস

CCE 311 কোর্সে যা যা আছে

পাঠ্য বই - [Numerical Methods for Engineers - Steven C. Chapra](#), বইয়ের সমাধান।
যেসব মেথড কোর্সে আছে তার পূর্ণ তালিকা এবং বিগত সালের প্রশ্নগুলো (২০১৯ পর্যন্ত) এই [docs](#) এ সাজানো আছে।

প্রশ্নের সমাধান, ক্লাস নোট - [Roots of High-Degree Equation, Curve Fitting, Numerical Integration, Systems of Linear Equations,](#)
[ODE - Picard's Method, Euler's Method, Milne's Predictor Corrector Method, Taylor's Series.](#)

বি.দ্র. পরীক্ষায় সময় স্বল্পতা উল্লেখযোগ্য। অনেক ক্ষেত্রে দুটি ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে সময় বাচানো যায়।

CCE 312 কোর্সে যা যা লাগবে

Python কোড: <https://github.com/dmNadim/Numerical-Methods>
C++ কোড:

ক্লাসে যেসব কোড করে দেখানো লাগবে তার [লিস্ট](#)

10

এর মধ্যে থেকে অল্প কয়েকটি কোড ফাইনালের জন্য সিলেক্ট করে দেবে।

ফাইনালে ১টি কোড করে দেখানো + ২টি কোডের কয়েকটি শূণ্যস্থান পূরণ

40

ভাইবা: ফাইনালে যে কোড পরবে তার থিউরি (ক্লাস লেকচার + এই আর্টিকেল) ও use case20

মিড: ১০ টি সত্য/মিথ্যা থিউরি সিলেবাসের উপর। Interpolation ও Newton-Raphson method

($x_{\text{new}} = x - f(x)/f'(x)$, derivative নিচে) সিলেবাসের বাইরে হলেও প্রশ্ন থাকবে।

15

প্রিভিয়াস কোশেচন

[এই লিংকে](#)

কন্ট্রিবিউশন

[D. M. Nadim Hayder](#)

[Rafid Al Nahiyen](#)

[Fazle Rabbe Bipul](#)