

轮 趣 科 技

对平衡小车倒立摆的稳摆控制

推荐关注我们的公众号获取更新资料



版本说明:

版本	日期	内容说明
V1.0	2023/06/01	第一次发布

网址: www.wheeltec.net

目 录

1. 前言	3
2. 数学模型	3
2.1 平衡小车倒立摆模型	3
2.2 状态空间表达式	7
3. LQR 控制器	9
3.1 概述	9
3.2 应用	12
4. 附录	16

1. 前言

倒立摆是典型的非线性、欠驱动、不稳定的系统。通过对倒立摆系统的研究，优化，获得新的控制算法，在机器人控制、导弹拦截控制、航空对接控制和一般工业等方面均有应用前景。

本文以平衡小车倒立摆系统为研究对象，首先基于拉格朗日力学对其进行动力学分析，获得其动力学方程组，然后，将方程组写成状态空间表达式的形式（在这个过程中会用到一些分块矩阵的操作），最后，在对 LQR 控制器进行简要概述之后，利用 LQR 控制器对平衡小车倒立摆系统进行稳摆控制。

2. 数学模型

在数学模型的建立这一部分，我们基于拉格朗日力学对平衡小车倒立摆进行动力学分析，求解系统的状态空间表达式。

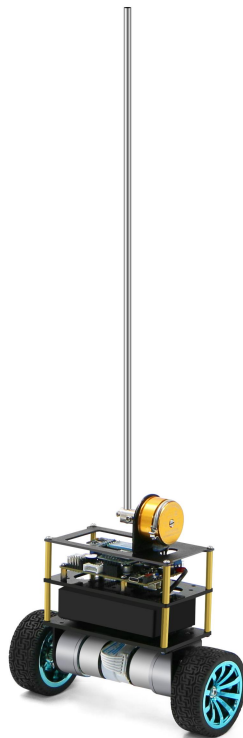


图 2-1 平衡小车倒立摆的实物图

2.1 平衡小车倒立摆模型

为了易于分析，不妨对平衡小车倒立摆模型进行简化。假设左右车轮完全相同（半径，质量，转动惯量）。在忽略空气阻力的情况下，可以将平衡小车倒立

摆视为由车轮和摆杆所组成的系统。简化后的模型如图 2-2 所示。

建立如图 2-2 所示的直角坐标系，规定相关符号如表 2-1 所示

表 2-1 符号说明

m_1	车体的质量(kg)
m_2	摆杆的质量(kg)
m_{wheel}	车轮的质量(kg)
θ_L	左轮转过的角度(rad)
θ_R	右轮转过的角度(rad)
θ_1	车体的倾角(rad)
θ_2	摆杆的倾角(rad)
l_1	车体的质心到转轴 1 的距离(m)
l_2	摆杆的质心到转轴 2 的距离(m)
L_1	车体的长度(m)
L_2	摆杆的长度(m)
w	轮距(m)
r	车轮的半径(m)
I_{wheel}	车轮转动时的转动惯量($\text{kg} \cdot \text{m}^2$)
I_1	车体绕其质心转动时的转动惯量($\text{kg} \cdot \text{m}^2$)
I_2	摆杆绕其质心转动时的转动惯量($\text{kg} \cdot \text{m}^2$)
J_δ	车体自转时的转动惯量($\text{kg} \cdot \text{m}^2$)

对左车轮

其动能为

$$E_{\text{KL}} = \frac{r^2}{2} m_{\text{wheel}} \dot{\theta}_L^2 + \frac{1}{2} I_{\text{wheel}} \dot{\theta}_L^2 \quad (1)$$

其势能为

$$E_{\text{pL}} = 0 \quad (2)$$

对右车轮

其动能为

$$E_{\text{KR}} = \frac{r^2}{2} m_{\text{wheel}} \dot{\theta}_R^2 + \frac{1}{2} I_{\text{wheel}} \dot{\theta}_R^2 \quad (3)$$

其势能为

$$E_{pR} = 0 \quad (4)$$

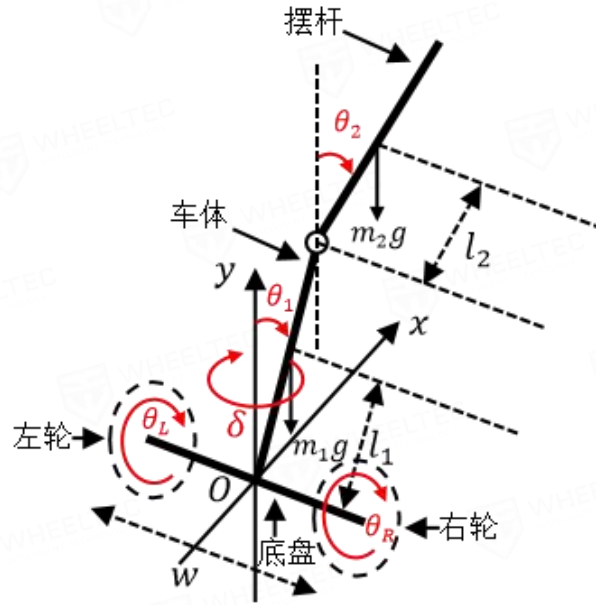


图 2-2 平衡小车倒立摆模型

对车体

其位移为

$$\begin{cases} x_1 = \frac{r}{2}(\theta_L + \theta_R) + l_1 \sin \theta_1 \\ y_1 = l_1 \cos \theta_1 \end{cases} \quad (5)$$

其速度为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{r}{2}(\dot{\theta}_L + \dot{\theta}_R) + \dot{\theta}_1 l_1 \cos \theta_1 \\ \dot{y}_1 = -\dot{\theta}_1 l_1 \sin \theta_1 \end{cases} \quad (6)$$

则

其动能为

$$\begin{aligned} E_{k1} = & \frac{r^2}{8} m_1 (\dot{\theta}_L + \dot{\theta}_R)^2 + \frac{1}{2} (m_1 l_1^2 + I_1) \dot{\theta}_1^2 + \frac{r}{2} m_1 l_1 (\dot{\theta}_L + \dot{\theta}_R) \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \\ & + \frac{1}{2} J_\delta \left(\frac{\dot{\theta}_L - \dot{\theta}_R}{w} \right)^2 \end{aligned} \quad (7)$$

其势能为

$$E_{p1} = m_1 g l_1 \cos \theta_1 \quad (8)$$

对摆杆

其位移为

$$\begin{cases} x_2 = \frac{r}{2}(\theta_L + \theta_R) + L_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 \\ y_2 = L_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2 \end{cases} \quad (9)$$

其速度为

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = \frac{r}{2}(\dot{\theta}_L + \dot{\theta}_R) + \dot{\theta}_1 L_1 \cos \theta_1 + \dot{\theta}_2 l_2 \cos \theta_2 \\ \dot{y}_2 = -\dot{\theta}_1 L_1 \sin \theta_1 - \dot{\theta}_2 l_2 \sin \theta_2 \end{cases} \quad (10)$$

则

其动能为

$$\begin{aligned} E_{k2} = & \frac{r^2}{8} m_2 (\dot{\theta}_L + \dot{\theta}_R)^2 + \frac{1}{2} m_2 L_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} (m_2 l_2^2 + I_2) \dot{\theta}_2^2 \\ & + \frac{r}{2} m_2 L_1 (\dot{\theta}_L + \dot{\theta}_R) \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + \frac{r}{2} m_2 l_2 (\dot{\theta}_L + \dot{\theta}_R) \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \\ & + m_2 L_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos (\theta_1 - \theta_2) \end{aligned} \quad (11)$$

其势能为

$$E_{p2} = m_2 g L_1 \cos \theta_1 + m_2 g l_2 \cos \theta_2 \quad (12)$$

故

系统的动能为

$$\begin{aligned} T = & E_{kL} + E_{kR} + E_{k1} + E_{k2} \\ = & \left(\frac{r^2}{2} m_{\text{wheel}} + \frac{1}{2} I_{\text{wheel}} \right) (\dot{\theta}_L^2 + \dot{\theta}_R^2) + \frac{r^2}{8} (m_1 + m_2) (\dot{\theta}_L + \dot{\theta}_R)^2 + \frac{1}{2} J_{\delta} \left(\frac{\dot{\theta}_L - \dot{\theta}_R}{w} \right)^2 \\ & + \left(\frac{r}{2} m_1 l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + \frac{r}{2} m_2 L_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + \frac{r}{2} m_2 l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \right) (\dot{\theta}_L + \dot{\theta}_R) \\ & + \frac{1}{2} (m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 + I_1) \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} (m_2 l_2^2 + I_2) \dot{\theta}_2^2 \\ & + m_2 L_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos (\theta_1 - \theta_2) \end{aligned} \quad (13)$$

系统的势能为

$$V = E_{pL} + E_{pR} + E_{p1} + E_{p2} = (m_1 l_1 + m_2 L_1) g \cos \theta_1 + m_2 g l_2 \cos \theta_2 \quad (14)$$

联立(13)(14)可得拉格朗日函数为

$$L = T - V$$

$$= \left(\frac{r^2}{2} m_{\text{wheel}} + \frac{1}{2} I_{\text{wheel}} \right) (\dot{\theta}_L^2 + \dot{\theta}_R^2) + \frac{r^2}{8} (m_1 + m_2) (\dot{\theta}_L + \dot{\theta}_R)^2 + \frac{1}{2} J_{\delta} \left(\frac{\dot{\theta}_L - \dot{\theta}_R}{w} \right)^2$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(\frac{r}{2} m_1 l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + \frac{r}{2} m_2 L_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + \frac{r}{2} m_2 l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \right) (\dot{\theta}_L + \dot{\theta}_R) \\
 & + \frac{1}{2} (m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 + I_1) \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} (m_2 l_2^2 + I_2) \dot{\theta}_2^2 + m_2 L_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos (\theta_1 - \theta_2) \\
 & - (m_1 l_1 + m_2 L_1) g \cos \theta_1 - m_2 g l_2 \cos \theta_2
 \end{aligned} \quad (15)$$

接下来，列写拉格朗日方程(Lagrange Equation)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = Q_{\text{非保守}} \quad (16)$$

式中， q 为广义坐标， \dot{q} 为广义速度， $Q_{\text{非保守}}$ 为广义非保守力。

1) 取 $q_1 = \theta_1$ ，有

$$\begin{aligned}
 & \frac{r}{2} (m_1 l_1 + m_2 L_1) \cos \theta_1 (\ddot{\theta}_L + \ddot{\theta}_R) + (m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 + I_1) \ddot{\theta}_1 \\
 & + m_2 L_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos (\theta_1 - \theta_2) + m_2 L_1 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin (\theta_1 - \theta_2) \\
 & - (m_1 l_1 + m_2 L_1) g \sin \theta_1 = 0
 \end{aligned} \quad (17)$$

2) 取 $q_2 = \theta_2$ ，有

$$\begin{aligned}
 & \frac{r}{2} m_2 l_2 \cos \theta_2 (\ddot{\theta}_L + \ddot{\theta}_R) + (m_2 l_2^2 + I_2) \ddot{\theta}_2 + m_2 L_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos (\theta_1 - \theta_2) \\
 & - m_2 L_1 l_2 \sin (\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1^2 - m_2 g l_2 \sin \theta_2 = 0
 \end{aligned} \quad (18)$$

因为该方程组中含有非线性项，因此，要进行线性化。考虑到摆杆（车体）的倾角比较小（通常情况下， $-10^\circ \leq \theta_{1,2} \leq 10^\circ$ ），则可以认为

$$\begin{cases} \cos \theta_{1,2} = 1 \\ \sin \theta_{1,2} = \theta \\ \dot{\theta}_{1,2}^2 = 0 \end{cases}$$

故方程组变为

$$\begin{cases} \frac{r}{2} (m_1 l_1 + m_2 L_1) \ddot{\theta}_L + \frac{r}{2} (m_1 l_1 + m_2 L_1) \ddot{\theta}_R + (m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 + I_1) \ddot{\theta}_1 \\ \quad + m_2 L_1 l_2 \ddot{\theta}_2 = (m_1 l_1 + m_2 L_1) g \theta_1 \\ \frac{r}{2} m_2 l_2 \ddot{\theta}_L + \frac{r}{2} m_2 l_2 \ddot{\theta}_R + m_2 L_1 l_2 \ddot{\theta}_1 + (m_2 l_2^2 + I_2) \ddot{\theta}_2 = m_2 g l_2 \theta_2 \end{cases} \quad (19)$$

式(19)即为平衡小车倒立摆的动力学方程。

2.2 状态空间表达式

状态空间表达式是现代控制理论的基础，也是描述系统数学模型的方法。为此，我们需要将上述动力学方程写成状态空间表达式的形式。首先将式(19)写成

如下矩阵的形式，即

$$P_{4 \times 4} \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_L \\ \ddot{\theta}_R \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} = Q_{4 \times 10} \begin{pmatrix} \theta_L \\ \theta_R \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_L \\ \dot{\theta}_R \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ u_L \\ u_R \end{pmatrix} \quad (20)$$

其中

$$\begin{aligned} p_{11} &= 1 & p_{22} &= 1 \\ p_{31} &= \frac{r}{2}(m_1 l_1 + m_2 L_1) & p_{32} &= \frac{r}{2}(m_1 l_1 + m_2 L_1) \\ p_{33} &= m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 + I_1 & p_{34} &= m_2 L_1 l_2 \\ p_{41} &= \frac{r}{2} m_2 l_2 & p_{42} &= \frac{r}{2} m_2 l_2 \\ p_{43} &= m_2 L_1 l_2 & p_{44} &= m_2 l_2^2 + I_2 \\ q_{19} &= 1 & q_{210} &= 1 \\ q_{33} &= (m_1 l_1 + m_2 L_1)g & q_{44} &= m_2 g l_2 \end{aligned}$$

其它未提及的矩阵元素均为零元素， $u_{L,R}$ 为系统输入，本文以小车左右车轮的加速度作为系统的输入。然后，进一步的可得

$$\begin{pmatrix} \ddot{\theta}_L \\ \ddot{\theta}_R \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} = P_{4 \times 4}^{-1} Q_{4 \times 10} \begin{pmatrix} \theta_L \\ \theta_R \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_L \\ \dot{\theta}_R \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ u_L \\ u_R \end{pmatrix} \quad (21)$$

采用如下的矩阵分块方式

$$P_{4 \times 4}^{-1} Q_{4 \times 10} = (a_{4 \times 8} \quad b_{4 \times 2})$$

则有

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta}_L \\ \dot{\theta}_R \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_L \\ \ddot{\theta}_R \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{O}_{4 \times 4} & \mathbf{E}_4 \\ \mathbf{a}_{4 \times 8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_L \\ \theta_R \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_L \\ \dot{\theta}_R \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{O}_{4 \times 2} \\ \mathbf{b}_{4 \times 2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_L \\ u_R \end{pmatrix} \quad (22)$$

令 $A = \begin{pmatrix} \mathbf{O}_{4 \times 4} & \mathbf{E}_4 \\ \mathbf{a}_{4 \times 8} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \mathbf{O}_{4 \times 2} \\ \mathbf{b}_{4 \times 2} \end{pmatrix}$, 可得系统的状态方程为

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta}_L \\ \dot{\theta}_R \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_L \\ \ddot{\theta}_R \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \theta_L \\ \theta_R \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_L \\ \dot{\theta}_R \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} u_L \\ u_R \end{pmatrix} \quad (23)$$

另一方面, 系统的输出方程为

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_L \\ \theta_R \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_L \\ \dot{\theta}_R \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} \quad (24)$$

式(23)和(24)即为系统的状态空间表达式。

3. LQR 控制器

3.1 概述

LQR(Linear Quadratic Regulator), 即线性二次型调节器。LQR 可得到状态线性反馈的最优控制规律, 易于构成闭环最优控制。LQR 最优控制利用廉价成本可以使原系统达到较好的性能指标且易于实现, 是现代控制理论中发展较为成熟的一部分。下面对其原理做一个简单的概述后将其应用于平衡小车倒立摆的稳摆过程中。

设连续线性时不变系统（假设系统完全能控）的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (25)$$

在现代控制理论中，最基本的控制系统就是全状态反馈控制系统（系统框图如图 3-1 所示），其目标是设计一个状态反馈控制器 $u = -Kx$ 来控制系统的表现。

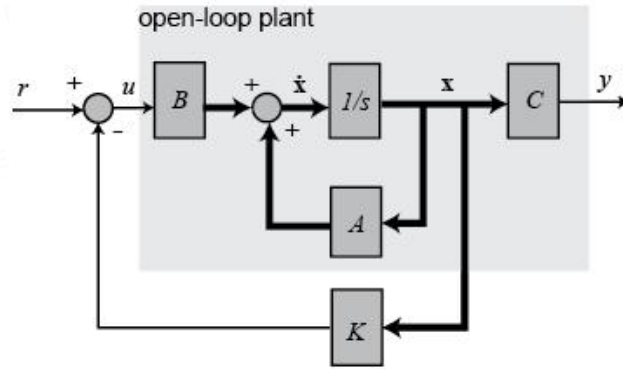


图 3-1 全状态反馈控制系统

现在的问题是这样的 K 不是唯一的，那么，怎么样的 K 才是最优的呢？在引入代价函数之前，先来看这样的问题（来自于 MATLAB 官方教程）：假设你在寻找从家里到公司的最佳方式，并且有多种交通方式可以选择，你可以开车、骑自行车、坐公交车以及租直升飞机。那么，哪种交通方式是你最佳的选择？这个问题本身没有答案，因为我们不知道什么是“最佳”。假设现在只考虑时间成本和金钱成本，将 4 种交通方式的信息填入如下的表格。

表 3-1

Transportation	Time / min	Money / \$
Car	20	45
Bike	75	0
Bus	30	12
Helicopter	4	2578

可以看到，如果时间成本是我们最关注的，那么显然租直升飞机是最佳的选择。反之，如果我们更关注金钱成本，那么骑自行车将是最佳的选择。当然，在现实生活中，人们往往会追求两者的平衡。比如：今天你有个早会，你理所当然会关注时间成本，但另一方面，你也没有足够富裕，因此也要关注金钱成本。这样的话，如何进行选择呢？这里有个简单的量化评估方法，可以建立这样一个评价函数 $J = Q \cdot \text{Time} + R \cdot \text{Money}$ ，根据个人的需要设置不同的权重。如果权重设置如表 3-2 所示，那么，最优选择为开车去上班。如果权重设置如表 3-3 所示，那么，

最优选择为坐公交车去上班。

表 3-2

Transportation	Q	Time / min	R	Money / \$	J(Cost)
Car	10	20	1	45	245
Bike	10	75	1	0	750
Bus	10	30	1	12	312
Helicopter	10	4	1	2578	2618

表 3-3

Transportation	Q	Time / min	R	Money / \$	J(Cost)
Car	5	20	5	45	325
Bike	5	75	5	0	375
Bus	5	30	5	12	210
Helicopter	5	4	5	2578	12910

类似的，对于控制系统，我们引入代价函数(Quadratic Cost Function)

$$J = \int_0^{+\infty} [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)] dt \quad (26)$$

式中， Q 为半正定的状态加权矩阵， R 为正定的控制加权矩阵。在工程实际中， Q 和 R 是对称矩阵且常取对角阵。 Q 中对角线上的元素 q_i 表示对相应误差分量 x_i （最终的目标是让每一个状态变量的值都变为0，所以每一个状态变量的值又称为误差值）的重视程度，越被重视的误差分量，希望它越快的变小，相应地，其权重系数就取得越大。类似的， R 中对角线上的元素 r_i 表示对相应输入分量 u_i 的限制，让其不要太大。LQR 控制器的设计思路就是设计一个状态反馈控制器 $u = -Kx$ ，使得代价函数最小 $\min J$ ，从而达到利用廉价成本使原系统达到较好的性能指标的目的。至于状态反馈矩阵 K 怎么计算，这里只给出相应结论：

$$K = R^{-1}B^TP \quad (27)$$

其中， P 是Riccati方程 $A^TP + PA + Q - PBR^{-1}B^TP = 0$ 的解。

类似的，对于离散线性时不变系统（假设系统完全能控），设其状态方程为

$$X(k+1) = AX(k) + BU(k) \quad (28)$$

二次型性能指标为

$$J = \sum_{k=0}^{+\infty} [X^T(k)QX(k) + U^T(k)RU(k)] \quad (29)$$

式中， Q 为对称正定的常数阵或对称半正定的常数阵， R 为对称正定的常数阵。

现在的问题是设计一个状态反馈控制器 $U(k) = -LX(k)$, 使得 J 最小。和上面一样, 这里只给出相应结论:

$$L = (R + B^T P B)^{-1} B^T P A \quad (30)$$

其中, P 是 **Riccati** 方程 $Q - P + A^T P A - A^T P B (R + B^T P B)^{-1} B^T P A = 0$ 的解。

3.2 应用

有了上述对 LQR 控制器定性的说明后, 接下来以平衡小车倒立摆的稳摆过程为实例说明 LQR 控制器的设计。

通常情况下, 我们并不会手算状态反馈矩阵, 而是借用 MATLAB 的相关函数进行计算, 相关程序如下所示:

```
clc
clear
close all
% 参数
m_1 = 0.9;
m_2 = 0.1;
r = 0.0335;
L_1 = 0.126;
L_2 = 0.390;
l_1 = L_1/2;
l_2 = L_2/2;
g = 9.8;
l_1 = (1/12)*m_1*L_1^2;
l_2 = (1/12)*m_2*L_2^2;
% p 矩阵
p_11 = 1;
p_12 = 0;
p_13 = 0;
p_14 = 0;
p_21 = 0;
p_22 = 1;
p_23 = 0;
p_24 = 0;
p_31 = (r/2)*(m_1*l_1 + m_2*L_1);
p_32 = (r/2)*(m_1*l_1 + m_2*L_1);
p_33 = m_1*l_1^2 + m_2*L_1^2 + l_1;
p_34 = m_2*L_1*l_2;
p_41 = (r/2)*m_2*l_2;
p_42 = (r/2)*m_2*l_2;
```

```

p_43 = m_2*L_1*I_2;
p_44 = m_2*I_2^2 + I_2;
p = [p_11 p_12 p_13 p_14;
      p_21 p_22 p_23 p_24;
      p_31 p_32 p_33 p_34;
      p_41 p_42 p_43 p_44];
% q 矩阵
q_11 = 0;
q_12 = 0;
q_13 = 0;
q_14 = 0;
q_15 = 0;
q_16 = 0;
q_17 = 0;
q_18 = 0;
q_19 = 1;
q_110 = 0;
q_21 = 0;
q_22 = 0;
q_23 = 0;
q_24 = 0;
q_25 = 0;
q_26 = 0;
q_27 = 0;
q_28 = 0;
q_29 = 0;
q_210 = 1;
q_31 = 0;
q_32 = 0;
q_33 = (m_1*I_1 + m_2*L_1)*g;
q_34 = 0;
q_35 = 0;
q_36 = 0;
q_37 = 0;
q_38 = 0;
q_39 = 0;
q_310 = 0;
q_41 = 0;
q_42 = 0;
q_43 = 0;
q_44 = m_2*g*I_2;
q_45 = 0;
q_46 = 0;
q_47 = 0;

```

```

q_48 = 0;
q_49 = 0;
q_410 = 0;
q = [q_11 q_12 q_13 q_14 q_15 q_16 q_17 q_18 q_19 q_110;
      q_21 q_22 q_23 q_24 q_25 q_26 q_27 q_28 q_29 q_210;
      q_31 q_32 q_33 q_34 q_35 q_36 q_37 q_38 q_39 q_310;
      q_41 q_42 q_43 q_44 q_45 q_46 q_47 q_48 q_49 q_410];
% 计算结果
temp = p^-1*q;
% A 矩阵
A = [0 0 0 0 1 0 0 0; 0 0 0 0 0 1 0 0; 0 0 0 0 0 0 1 0; 0 0 0 0 0 0 0 1; temp(:,1:8)];
% B 矩阵
B = [0 0; 0 0; 0 0; 0 0; temp(:,9:10)];
% C 矩阵
C = [1 0 0 0 0 0 0 0;
      0 1 0 0 0 0 0 0;
      0 0 1 0 0 0 0 0;
      0 0 0 1 0 0 0 0];
% D 矩阵
D = zeros(4,2);
% LQR 控制器
Ts = 0.01;
t = 0:Ts:7;
u = [zeros(size(t)); zeros(size(t))];
[G,H] = c2d(A,B,Ts);
x0 = [0; 0; -0.1745; 0.1745; 0; 0; 0; 0];
Tc = ctrb(G,H);
if (rank(Tc)==8)
    fprintf('此系统是可控的! \n');
    Q = [51.2938 0 0 0 0 0 0 0; 0 51.2938 0 0 0 0 0 0; 0 0 32.8281 0 0 0 0 0; 0 0
0 131.3123 0 0 0 0 0;...
        0 0 0 0 51.2938 0 0 0; 0 0 0 0 0 51.2938 0 0; 0 0 0 0 0 0 131.3123 0; 0 0
0 0 0 0 0 131.3123];
    rho = 0.0005;
    R = rho*[1 0; 0 1];
    K = dlqr(G,H,Q,R);
    G2 = G-H*K;
    H = zeros(8,2);
    y = dlsim(G2,H,C,D,u,x0);
    subplot(4,1,1)
    plot(t,y(:,1),'b','LineWidth',1.5); % 左车轮的转角(rad)
    grid on
    xlabel('Time(s)');
    subplot(4,1,2)

```

```

plot(t,y(:,2),'b','LineWidth',1.5); % 右车轮的转角(rad)
grid on
xlabel('Time(s)');
subplot(4,1,3)
plot(t,y(:,3),'b','LineWidth',1.5); % 车身的倾角(rad)
grid on
xlabel('Time(s)');
subplot(4,1,4)
plot(t,y(:,4),'b','LineWidth',1.5); % 摆杆的倾角(rad)
grid on
xlabel('Time(s)');
end
fprintf('K_1 = \n');
fprintf('% .4f\n',K(1,:));
fprintf('\n');
fprintf('K_2 = \n');
fprintf('% .4f\n',K(2,:));

```

运行后的结果如下所示:

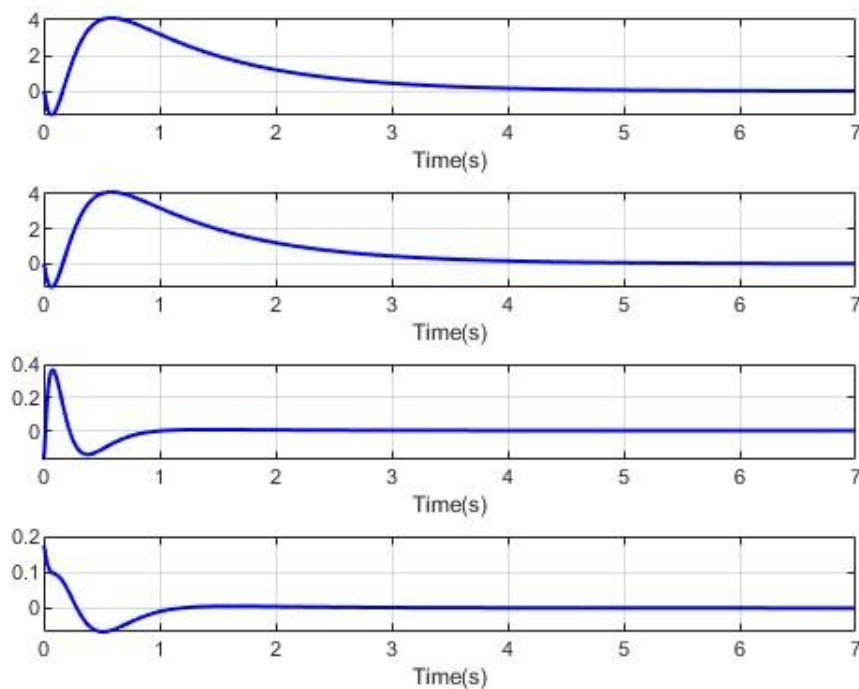


图 3-2 离散时间系统 LQR 仿真结果

对应的 C 语言程序为

```

//状态反馈系数
float K11=81.2695, K12=-10.0616, K13=-5492.4061, K14=18921.7098, K15=100.3633,

```



```

K16=8.0376, K17=447.3084, K18=2962.7738;
float K21=-10.0616, K22=81.2695, K23=-5492.4061, K24=18921.7098, K25=8.0376,
K26=100.3633, K27=447.3084, K28=2962.7738;
...
//计算输入变量(LQR 控制器)
u_L = -(K11*(theta_L-Target_theta_L) + K12*(theta_R-Target_theta_R) +
K13*(theta_1-Target_theta_1) + K14*theta_2 + K15*(theta_L_dot-Target_theta_L_dot)
+ K16*(theta_R_dot-Target_theta_R_dot) + K17*theta_dot_1 + K18*theta_dot_2);
u_R = -(K21*(theta_L-Target_theta_L) + K22*(theta_R-Target_theta_R) +
K23*(theta_1-Target_theta_1) + K24*theta_2 + K25*(theta_L_dot-Target_theta_L_dot)
+ K26*(theta_R_dot-Target_theta_R_dot) + K27*theta_dot_1 + K28*theta_dot_2);
...

```

4. 附录

为了更好的理解在现实中对平衡小车倒立摆的稳摆控制过程，下面以一个流程图来进行说明：

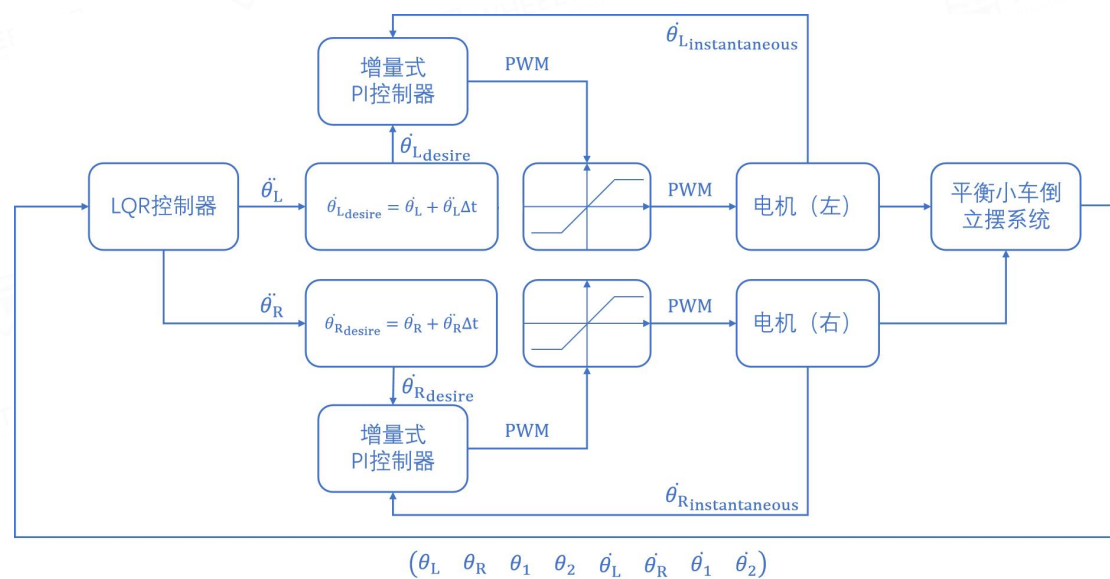


图 4-1 控制流程图