

**Единый государственный экзамен
по МАТЕМАТИКЕ
Профильный уровень**

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 18 заданий. Часть 1 содержит 11 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–11 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите их в бланк ответов № 1.

К И М
Ответ: -0,8

10	-	0	,	8																
----	---	---	---	---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Бланк

При выполнении заданий 12–18 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, что ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 записан под правильным номером.

Желаем успеха!

Справочные материалы

$$\begin{aligned}\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 \\ \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta\end{aligned}$$

Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

- 1** Найдите корень уравнения

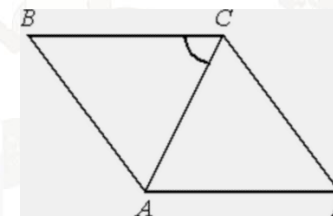
$$(x + 3)^9 = 512.$$

Ответ: _____.

- 2** В классе 16 учащихся, среди них два друга – Вадим и Сергей. Учащихся случайным образом разбивают на 4 равные группы. Найдите вероятность того, что Вадим и Сергей окажутся в одной группе.

Ответ: _____.

- 3** В ромбе $ABCD$ угол CDA равен 78° . Найдите угол ACB . Ответ дайте в градусах.



Ответ: _____.

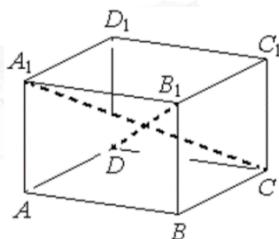


- 4 Найдите значение выражения

$$\frac{7 \sin 154^\circ}{\cos 77^\circ \cdot \cos 13^\circ}$$

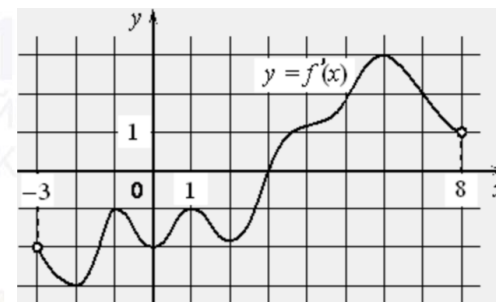
Ответ: _____.

- 5 В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известно, что $BD_1 = 2AD$. Найдите угол между диагоналями DB_1 и CA_1 . Ответ дайте в градусах.



Ответ: _____.

- 6 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-3; 8)$. В какой точке отрезка $[-2; 3]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?



Ответ: _____.

- 7 В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплён кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нём, выраженная в метрах, меняется по закону $H(t) = at^2 + bt + H_0$, где $H_0 = 3$ м – начальный уровень воды, $a = \frac{1}{768}$ м/мин² и $b = -\frac{1}{8}$ м/мин – постоянные, t – время в минутах, прошедшее с момента открытия крана. В течение какого времени вода будет вытекать из бака? Ответ приведите в минутах.

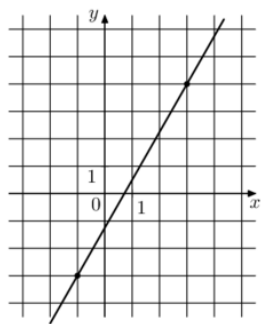
Ответ: _____.

- 8 Расстояние между городами А и В равно 420 км. Из города А в город В выехал автомобиль, а через 1 час следом за ним со скоростью 80 км/ч выехал мотоциклист, догнал автомобиль в городе С и повернул обратно. Когда он вернулся в А, автомобиль прибыл в В. Найдите расстояние от А до С. Ответ дайте в километрах.

Ответ: _____.



- 9 На рисунке изображён график функции $f(x) = kx + b$. Найдите значение x , при котором $f(x) = -13,5$.



Ответ: _____.

- 10 При артиллерийской стрельбе автоматическая система делает выстрел по цели. Если цель не уничтожена, то система делает повторный выстрел. Выстрелы повторяются до тех пор, пока цель не будет уничтожена. Вероятность уничтожения некоторой цели при первом выстреле равна 0,3, а при каждом последующем – 0,4. Сколько выстрелов потребуется для того, чтобы вероятность уничтожения цели была не менее 0,9?

Ответ: _____.

- 11 Найдите точку максимума функции $y = \ln(x + 9) - 10x + 7$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте **БЛАНК ОТВЕТОВ № 2**. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 12 а) Решите уравнение

$$16^{\sin x} + 16^{\sin(x+\pi)} = \frac{17}{4}.$$

- б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

- 13 В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона AB основания равна 16, а высота пирамиды равна 4. На рёбрах AB , CD и AS отмечены точки M , N и K соответственно, причём $AM = DN = 4$ и $AK = 3$.

- а) Докажите, что плоскости MNK и SBC параллельны.
б) Найдите расстояние от точки K до плоскости SBC .

- 14 Решите неравенство

$$\frac{15^x - 3^{x+1} - 5^{x+1} + 15}{-x^2 + 2x} \geq 0.$$

- 15 Григорий является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование.

В результате, если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $3t$ единиц товара; если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $4t$ единиц товара.

За каждый час работы (на каждом из заводов) Григорий платит рабочему 500 рублей.

Григорий готов выделять 5 000 000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?



- 16** Около треугольника ABC описана окружность. Прямая BO , где O – центр вписанной окружности, вторично пересекает описанную окружность в точке P .

- а) Докажите, что $OP = AP$.
 б) Найдите расстояние от точки P до прямой AC , если $\angle ABC = 120^\circ$, а радиус описанной окружности равен 18.

- 17** Найдите все значения параметра a , для каждого из которых любой корень уравнения

$$4\sqrt[3]{3,5x - 2,5} + 3\log_2(3x - 1) + 2a = 0$$

принадлежит отрезку $[1; 3]$.

- 18** С натуральным числом проводят следующую операцию: между каждыми двумя его соседними цифрами записывают сумму этих цифр (например, из числа 1923 получается число 110911253).

- а) Приведите пример числа, из которого получается 2108124117.
 б) Может ли из какого-нибудь числа получиться число 37494128?
 в) Какое наибольшее число, кратное 11, может получиться из трёхзначного числа?

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

О проекте «Пробный ЕГЭ каждую неделю»

Данный ким составлен командой всероссийского волонтерского проекта «ЕГЭ 100 баллов» <https://vk.com/ege100ballov> и безвозмездно распространяется для любых некоммерческих образовательных целей.

Нашли ошибку в варианте?

Напишите нам, пожалуйста, и мы обязательно её исправим!

Для замечаний и пожеланий: https://vk.com/topic-10175642_47937899
 (также доступны другие варианты для скачивания)



















СОСТАВИТЕЛЬ ВАРИАНТА:

ФИО:	Евгений Пифагор
Предмет:	Математика
Стаж:	10 лет готовлю к ЕГЭ и ОГЭ
Регалии:	Набрал 98 баллов на ЕГЭ по математике (профиль) 55 учеников набрали 90-100 баллов на ЕГЭ 2021 Высшее образование (ТГУ, 2009-2014) Победитель трёх олимпиад по высшей математике
Аккаунт и группа ВК:	https://vk.com/eugene10 https://vk.com/shkolapifagora
Ютуб и инстаграм:	https://www.youtube.com/c/pifagor1 https://www.instagram.com/shkola_pifagora/



Система оценивания экзаменационной работы по математике (профильный уровень)

Каждое из заданий 1–11 считается выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Верный ответ на каждое задание оценивается 1 баллом.

Номер задания	Правильный ответ	Видео решение
1	-1	
2	0,2	
3	51	
4	14	
5	60	
6	3	
7	48	
8	240	
9	-7	
10	5	
11	-8,9	
12	а) $\pm \frac{\pi}{6} + \pi n; n \in \mathbb{Z}$ б) $\frac{11\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}$	
13	$2,4\sqrt{5}$	
14	$(0; \log_5 3] \cup [\log_3 5; 2)$	
15	500	
16	27	
17	$\left[-\frac{17}{2}; -\frac{7}{2}\right]$	
18	а) 2847 б) нет в) 9 16 7 16 9	

Решения и критерии оценивания выполнения заданий с развёрнутым ответом

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 12–18, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. **Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.**

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.



14

Решите неравенство

$$15^x - 3^{x+1} - 5^{x+1} + 15 \geq 0.$$

Источники:

ФИПИ (старый банк)

МЕТОД ЗАМЕНЫ
МНОЖИТЕЛЕЙ

Было	Стало
$\log_a f - \log_a g$	$(a-1)(f-g)$
$a^f - a^g$	$(a-1)(f-g)$
$ f - g $	$(f-g)(f+g)$
$\sqrt{f} - \sqrt{g}$	$(f-g)$

$$\frac{15^x - 3 \cdot 3^x - 5 \cdot 5^x + 15}{x \cdot (2-x)} \geq 0$$

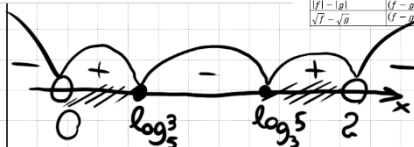
$$\frac{3^x \cdot (5^x - 3) - 5 \cdot (5^x - 3)}{x \cdot (2-x)} \geq 0$$

$$\frac{(5^x - 3) \cdot (3^x - 5)}{x \cdot (2-x)} \geq 0$$

$$\frac{(5^x - 5^{\log_5 3}) \cdot (3^x - 3^{\log_5 5})}{x \cdot (2-x)} \geq 0$$

$$\frac{(5-1) \cdot (x - \log_5 3) \cdot (3-1) \cdot (x - \log_5 5)}{x \cdot (2-x)} \geq 0$$

ОТВЕТ: $(0; \log_5 3] \cup [\log_5 2)$



15

Григорий является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате, если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят 3 t единиц товара; если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят 4 t единиц товара.

За каждый час работы (на каждом из заводов) Григорий платит рабочему 500 рублей.

Григорий готов выделить 5 000 000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

Источники: ФИПИ (старый банк), ФИПИ (новый банк), Ященко 2018, Шестаков 2017, Досрочная волна 2015

	часы	единицы товара
I	x^2	$3x$
II	y^2	$4y$

1) $(x^2 + y^2) \cdot 500 = 5\,000\,000$

Возвращаем y

$$x^2 + y^2 = 10000$$

$$y^2 = 10000 - x^2$$

$$y = \sqrt{10000 - x^2}$$

2) Надо найти макс. знач. выражения $3x + 4y$

$$f(x) = 3x + 4 \cdot \sqrt{10000 - x^2}$$

$$f'(x) = 3 + 4 \cdot \frac{1 \cdot (-2x)}{2\sqrt{10000 - x^2}} = 0$$

$$\frac{3}{1} - \frac{4x}{\sqrt{10000 - x^2}} = 0$$

$$3\sqrt{10000 - x^2} = 4x \quad |^2$$

$$9 \cdot (10000 - x^2) = 16x^2$$

$$9 \cdot 10000 = 25x^2$$

$$x^2 = \frac{9 \cdot 10000}{25}$$

$$x = \frac{3 \cdot 100}{5} = 60$$

$$f(60) = f_{\max} = 3 \cdot 60 + 4 \cdot \sqrt{10000 - 3600} = 500$$

ОТВЕТ: 500

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением / включением граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2



- 16** Около треугольника ABC описана окружность. Прямая BO , где O – центр вписанной окружности, вторично пересекает описанную окружность в точке P .

Источники:
Основная волна 2019

- а) Докажите, что $OP = AP$.
б) Найдите расстояние от точки P до прямой AC , если $\angle ABC = 120^\circ$, а радиус описанной окружности равен 18.

а) ① O – точка пересечения биссектрис
 $\Rightarrow \angle CBP = \angle ABP$
 $\angle CAO = \angle BAO$
② $CP = 2R$
 $AP = 2R$
 $\angle CAP = \angle CBP$
 $\angle AOB = 180 - 2\beta$
 $\angle AOP = \alpha + \beta$
 $\Rightarrow \triangle AOP \sim \triangle BCP$
 $\Rightarrow OP = AP$

б) ① $\angle C = 60^\circ$
 $\frac{AC}{\sin 120^\circ} = 2R$
 $\frac{AC}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2 \cdot 18$
 $AC = 18\sqrt{3}$
② $2\beta = 120^\circ$
 $\beta = 60^\circ$
③ Рассмотрим $\triangle APC$ – р/б.
т.к. хорды ср. арс. хорды равны
 $PC = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 18\sqrt{3} = 27$

ОТВЕТ: 27

- 17** Найдите все значения параметра a , для каждого из которых любой корень уравнения $4\sqrt[3]{3,5x - 2,5} + 3\log_2(3x - 1) + 2a = 0$ принадлежит отрезку $[1; 3]$.

Источники:
Ященко 2018
Ященко 2018
Досрочная волна (Резерв) 2014

В левой части ур-я у нас сумма двух возр. функций. Прямая сумма двух возр. функций экв. возр. функции при $x > \frac{1}{3}$.

$4\sqrt[3]{3,5x - 2,5} + 3\log_2(3x - 1) = -2a$

ОДЗ: $3x - 1 > 0$
 $x > \frac{1}{3}$

Пусть $f(x) = 4\sqrt[3]{3,5x - 2,5} = 4(3,5x - 2,5)^{\frac{1}{3}}$
 $f'(x) = \frac{4}{3} \cdot (3,5x - 2,5)^{-\frac{2}{3}} \cdot 3,5$
 $\frac{28}{6 \cdot \sqrt[3]{3,5x - 2,5}^2} > 0$

$f(x)$ – возр. функция

Пусть $g(x) = 3\log_2(3x - 1)$
 $g'(x) = 3 \cdot \frac{1}{(3x - 1) \cdot \ln 2} > 0$

$g(x)$ – возр. функция

$7 \leq -2a \leq 17$
 $-\frac{17}{2} \leq a \leq -\frac{7}{2}$

ОТВЕТ: $[-8,5; -3,5]$

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, и обоснованно получен верный ответ в пункте б	3
Получен обоснованный ответ в пункте б ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а, и при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, ИЛИ при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений а, отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений а	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений а	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4



18

С натуральным числом проводят следующую операцию: между каждыми двумя его соседними цифрами записывают сумму этих цифр (например, из числа 1923 получается число 110911253).

Источники:

Основная волна (Резерв) 2017

а) Приведите пример числа, из которого получается 2108124117.

б) Может ли из какого-нибудь числа получиться число 37494128?

в) Какое наибольшее число, кратное 11, может получиться из трёхзначного числа?

а) 2 8 4 7
10 12 11

б) 3 4 4
4 34 1 нет
4 941 2 нет
4 9412 8 нет

Не может, т.к. на месте первой цифры нет подходящего числа

в) 9 9 9
11:27 на 9
2:18 на 9
9 9 8
18 17
11:26 на 9
2:17 на 9
9 8 9
17 17
11:26 на 9
2:16 на 10
9 7 9
16 16
11:25 на 11
2:14 на 11

ОТВЕТ:

а) 2847

б) нет

в) 9167169

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – обоснованное решение пункта а; – обоснованное решение пункта б; – искомая оценка в пункте в; – пример в пункте в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

В соответствии с Порядком проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам среднего общего образования (приказ Минпросвещения России и Рособнадзора от 07.11.2018 № 190/1512, зарегистрирован Минюстом России 10.12.2018 № 52952)

«82. <...> По результатам первой и второй проверок эксперты независимо друг от друга выставляют баллы за каждый ответ на задания экзаменационной работы ЕГЭ с развернутым ответом. <...>

В случае существенного расхождения в баллах, выставленных двумя экспертами, назначается третья проверка. Существенное расхождение в баллах определено в критериях оценивания по соответствующему учебному предмету.

Эксперту, осуществляющему третью проверку, предоставляется информация о баллах, выставленных экспертами, ранее проверявшими экзаменационную работу».

Существенными считаются следующие расхождения:

1) расхождение в баллах, выставленных двумя экспертами за выполнение любого из заданий 12–18, составляет 2 или более балла. В этом случае третий эксперт проверяет только ответ на то задание, который был оценен двумя экспертами со столь существенным расхождением;

2) расхождения экспертов при оценивании ответов на хотя бы два из заданий 12–18. В этом случае третий эксперт проверяет ответы на все задания работы.

