

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

ПО АЛГЕБРЕ И НАЧАЛАМ АНАЛИЗА

1. Формулы сокращенного умножения

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

2. Модуль числа

$$\text{Определение: } |a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0, \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Основные свойства модуля:

- $|a| \geq 0$.
- $|a| = |-a|$.
- $\begin{cases} |a| \geq a, \\ |a| \geq -a. \end{cases}$
- $\begin{cases} |a| = a \Leftrightarrow a \geq 0, \\ |a| = -a \Leftrightarrow a \leq 0. \end{cases}$

3. Степень с действительным показателем

a	x	a^x
$a \in \mathbb{R}$	$x \in \mathbb{N}, \quad x \geq 2$	$a^x = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_x$ <small>x сомножителей</small>
$a \in \mathbb{R}$	$x = 1$	$a^1 = a$
$a \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0$	$x = 0$	$a^0 = 1$
$a \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0$	$x \in \mathbb{Z}, \quad x < 0$	$a^x = \frac{1}{a^{-x}}$
$a \geq 0$	$x = \frac{m}{n}, \quad m, n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2$	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$
$a > 0$	$x = \frac{m}{n}, \quad m, n \in \mathbb{Z}, \quad m < 0, \quad n \geq 2$	$a^x = \frac{1}{a^{-x}}$
$a > 0$	$x \in \mathbb{R}$	$a^x = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n} \quad ^*)$

Свойства степени с действительным показателем

Пусть $a > 0, b > 0, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$. Тогда верны следующие соотношения:

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$(ab)^x = a^x \cdot b^x$$

$$a^x = a^y \Leftrightarrow \begin{matrix} x = y \\ a \neq 1 \end{matrix}$$

$$a^x : a^y = a^{x-y}$$

$$(a : b)^x = a^x : b^x$$

$$a^x > a^y \Leftrightarrow \begin{matrix} x > y \\ a > 1 \end{matrix}$$

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

$$a^x > 0$$

$$a^x > a^y \Leftrightarrow \begin{matrix} x < y \\ 0 < a < 1 \end{matrix}$$

*) $\{x_n\}$ — последовательность десятичных приближений числа x , взятых с избытком или недостатком (здесь n — число знаков после запятой в десятичной записи числа x).

4. Корень n -ой степени из числа

Корнем n -ой степени ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$) из числа a называется число, n -ая степень которого равна a .

Арифметическим корнем четной степени n ($n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$) из неотрицательного числа a называется неотрицательное число, n -ая степень которого равна a .

Основные свойства арифметического корня:

$$a \geq 0: \quad (\sqrt[n]{a})^n = a, \quad \sqrt[n]{a^n} = a, \quad \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m, \quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}.$$

$$a \in \mathbb{R}: \quad \sqrt[n]{a^n} = |a|.$$

$$a \geq 0, b \geq 0: \quad \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}, \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b \neq 0).$$

$$a < 0, b < 0: \quad \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{-a} \cdot \sqrt[n]{-b}, \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{-a}}{\sqrt[n]{-b}}.$$

$$a \geq 0, b \geq 0: \quad a \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}.$$

$$a < 0, b \geq 0: \quad a \sqrt[n]{b} = -\sqrt[n]{a^n b}.$$

5. Логарифмы

Определение логарифма: $\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$, $a > 0, a \neq 1$.

Основное логарифмическое тождество: $a^{\log_a b} = b$.

Основные свойства логарифмов

Пусть $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, $x > 0$, $y > 0$, $p \in \mathbb{R}$. Тогда верны следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \log_a(xy) &= \log_a x + \log_a y & \log_a x^p &= p \log_a x & \log_a x &= \frac{\log_b x}{\log_b a} \\ \log_a\left(\frac{x}{y}\right) &= \log_a x - \log_a y & \log_{a^p} x &= \frac{1}{p} \log_a x, \quad p \neq 0 & x^{\log_a y} &= y^{\log_a x} \end{aligned}$$

6. Арифметическая прогрессия

Формула n -го члена арифметической прогрессии: $a_n = a_1 + d(n-1)$.

Характеристическое свойство арифметической прогрессии: $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, $n \geq 2$.

Сумма n первых членов арифметической прогрессии $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$.

При решении задач, связанных с арифметической прогрессией, могут оказаться полезными также следующие формулы:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n; & S_n &= \frac{2a_n - d(n-1)}{2} n; & a_n &= \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}, \quad k < n; \\ a_k + a_n &= a_{k-m} + a_{n+m}, \quad m < k; & d &= \frac{a_n - a_k}{n - k}. \end{aligned}$$

7. Геометрическая прогрессия

Формула n -го члена геометрической прогрессии: $a_n = a_1 q^{n-1}$.

Характеристическое свойство геометрической прогрессии: $a_n^2 = a_{n-1} a_{n+1}$, $n \geq 2$.

Сумма n первых членов геометрической прогрессии: $S_n = \frac{a_1 - a_n q}{1 - q}$, $q \neq 1$.

При решении задач, связанных с геометрической прогрессией, могут оказаться полезными также следующие формулы:

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}; \quad a_n^2 = a_{n-k} a_{n+k}, \quad k < n; \quad a_k a_n = a_{k-m} a_{n+m}, \quad m < k; \quad |q| = \sqrt[n-k]{\frac{a_n}{a_k}}.$$

8. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия

Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии: $S = \frac{a_1}{1 - q}$.

9. Основные формулы тригонометрии

Зависимость между тригонометрическими функциями одного аргумента

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 & \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha &= 1 \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} & 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha &= \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ \operatorname{ctg} \alpha &= \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} & 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha &= \frac{1}{\sin^2 \alpha} \end{aligned}$$

Формулы сложения

$$\begin{aligned} \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta & \operatorname{tg}(\alpha + \beta) &= \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta & \operatorname{tg}(\alpha - \beta) &= \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \\ \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta & \operatorname{ctg}(\alpha + \beta) &= \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \alpha} \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta & \operatorname{ctg}(\alpha - \beta) &= \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta + 1}{\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha} \end{aligned}$$

Формулы тригонометрических функций двойного аргумента

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha & \cos 2\alpha &= 1 - 2 \sin^2 \alpha \\ \sin 2\alpha &= \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} & \cos 2\alpha &= \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha & \operatorname{tg} 2\alpha &= \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \\ \cos 2\alpha &= 2 \cos^2 \alpha - 1 & \operatorname{ctg} 2\alpha &= \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha} \end{aligned}$$

Формулы понижения степени

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha &= \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} & \operatorname{tg}^2 \alpha &= \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} \\ \cos^2 \alpha &= \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} & \operatorname{ctg}^2 \alpha &= \frac{1 + \cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha} \end{aligned}$$

Формулы приведения

Все формулы приведения получаются из соответствующих формул сложения.

Пример 1. $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha - \sin\frac{\pi}{2}\sin\alpha = -\sin\alpha$.

Нет необходимости запоминать такое количество формул, так как их применение легко укладывается в следующую схему:

- определяется координатная четверть, в которой лежит аргумент приводимой функции, считая, что $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2})$;
- определяется знак приводимой функции;
- определяется название приведенной функции по следующему правилу:
если аргумент приводимой функции имеет вид $(\frac{\pi}{2} \pm \alpha)$ или $(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha)$, то функция меняется на кофункцию, если аргумент приводимой функции имеет вид $(\pi \pm \alpha)$, то функция названия не меняет.

Пример 2. $\operatorname{tg}(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$

- $\frac{3\pi}{2} + \alpha \in (\frac{3\pi}{2}; 2\pi)$ (IV четверть);
- $\frac{3\pi}{2} + \alpha \in (\frac{3\pi}{2}; 2\pi) \Rightarrow \operatorname{tg}(\frac{3\pi}{2} + \alpha) < 0$;
- аргумент приводимой функции имеет вид $(\frac{3\pi}{2} + \alpha)$, следовательно, название функции меняется. Таким образом: $\operatorname{tg}(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$.

Формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение

$$\begin{aligned} \sin\alpha + \sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} & \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta &= \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} \\ \sin\alpha - \sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} & \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta &= \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} \\ \cos\alpha + \cos\beta &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} & \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta &= \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta} \\ \cos\alpha - \cos\beta &= -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} & \operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta &= \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta} \end{aligned}$$

Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму

$$\begin{aligned} \cos\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)) \\ \sin\alpha\sin\beta &= \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)) \\ \sin\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)) \end{aligned}$$

10. Производная и интеграл

Таблица производных некоторых элементарных функций

Функция	Производная	Функция	Производная
c	0	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}, x > 0$
$kx + b$	k	$\sin x$	$\cos x$
$x^p, p \neq 0, p \neq 1$	px^{p-1}	$\cos x$	$-\sin x$
e^x	e^x	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
a^x	$a^x \ln a$	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}, x > 0$		

Правила дифференцирования:

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

$$(cf(x))' = cf'(x)$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

$$[f(g(x))]' = f'(g(x))g'(x)$$

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в его точке $(x_0; f(x_0))$:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Таблица первообразных для некоторых элементарных функций

Функция	Первообразные	Функция	Первообразные
a	$ax + C$	a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
$x^p, p \neq -1$	$\frac{x^{p+1}}{p+1} + C$	$\sin x$	$-\cos x + C$
$\frac{1}{x}, x > 0$	$\ln x + C$	$\cos x$	$\sin x + C$
$\frac{1}{x}, x < 0$	$\ln(-x) + C$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + C$
e^x	$e^x + C$	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x + C$

Правила нахождения первообразных

Пусть $F(x), G(x)$ — первообразные для функций $f(x)$ и $g(x)$ соответственно, a, b, k — постоянные, $k \neq 0$. Тогда:

$F(x) + G(x)$ — первообразная для функции $f(x) + g(x)$;

$aF(x)$ — первообразная для функции $af(x)$;

$\frac{1}{k} F(kx + b)$ — первообразная для функции $f(kx + b)$.

Формула Ньютона-Лейбница: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.