ԳԼՈՒԽ 1

Ֆունկցիայի ածանցյալների մոտարկման խնդրի ձևակերպումը : Թվային դիֆերենցման գաղափարը:

1.1 Դիֆերենցիալ հավասարումներ: Նախնական գաղախարներ

<u>Սահմանում:</u>

Դիֆերենցիալ հավասարում կոչվում է այն ֆունկցիոնալ հավասարումը, որում անհայտ ֆունկցիան մասնակցում է իր ածանցյալների հետ միասին: Ամենաընդհանուր տեսքով դիֆերենցիալ հավասարումը կարելի է ներկայացնել.

$$F\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right) = 0 \tag{1}$$

տեսքով, որտեղ x-ը անկախ փոփոխական է $x \in (a,b)$, $y = y(x)$-ը x-ից կախված անհայտ ֆունկցիան է, իսկ F-ը $(n+2)$ փոփոխականի տրված ֆունկցիա է:

Հավասարման մեջ անհայտ ֆունկցիայի ամենաբարձր կարգը, կոչվում է նաև դիֆերենցիալ հավասարման կարգ: $\varphi(x)$ ֆունկցիան կոչվում է հավասարման լուծում (a,b) միջակայքում, եթե $\varphi(x)$-ը n անգամ դիֆերենցելի է (a,b) միջակայքում և եթե (1) հավասարման մեջ $y, y', \dots, y^{(n)}$ –ի փոխարեն տեղադրենք համապատասխանաբար $\varphi(x)$ և $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$, …, $\varphi^{(n)}(x)$ ֆունկցիաները ապա (1)-ը կվերածվի նույնության (a,b) միջակայքում:

<u>Օրինակ:</u>

$$y' - 2y = 0$$

$y = e^{2x}$ ֆունկցիան (1)-ի լուծումն է R-ում:

$$(e^{2x})' - 2\, e^{2x} = 0$$

$$0 = 0$$

=> լուծում է ամբողջ առանցքի վրա $x \in$ R: Նաև լուծում է հանդիսանում.

$$y = C\, e^{2x}, \;\; C = const$$

(1) հավասարման համար սկզբնական պայմաններ կոչվում են հետևյալ պայմանները.

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \qquad (2)$$

<u>Սահմանում:</u>

(1) դիֆերենցիալ հավասարումը (2) սկզբնական պայմանների հետ միասին կոչվում է սկզբնական խնդիր կամ կոշու խնդիր :

1.2 Բաժանված տարբերություններ

Բաժանված տարբերությունները իրենցից ներկայացնում են ածանցյալի ընդհանրացումը: Զրոյական կարգի բաժանված տարբերությունները՝ $f(x_i)$, համընկնում են $f(x_i)$ ֆունկցիայի արժեքների հետ, իսկ առաջին կարգի տարբերությունները սահմանվում են հետևյալ բանաձևով.

$$f(x_i, x_j) = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i}$$

երկրորդ կարգի բաժանված տարբերությունները սահմանվում են հետևյալ բանաձևով.

$$f(x_i, x_j, x_k) = \frac{f(x_j,\ x_k) - f(x_i,\ x_j)}{x_k - x_i}$$

և, ընդհանրապես k –րդ կարգի բաժաված տարբերությունները սահմանվում են $(k-1)$-րդ կարգի բաժանված տարբերությունների միջոցով.

$$f(x_1, \dots, x_{k+1}) = \frac{f(x_2,\ \dots,\ x_{k+1}) - f(x_1,\ \dots,\ x_{k+1})}{x_{k+1} - x_1}$$

հաճախ, $f(x_1; \dots; x_k)$ փոխարեն օգտագործում են նաև հետևյալ նշանակումները.

$$(f)(x_1, \dots, x_k)$$

կամ

$$[x_1, \dots, x_k]$$

Սահմանված բանաձևերից հետևում է , որ բաժանված տարբերությունների միջոցով կարող ենք մոտարկել ֆունկցիայի ածանցյալները (նկար 1.1):

x	f(x)	առաջին կարգ	երկրորդ կարգ	...
x_0	$f[x_0]$			
		$f[x_0,x_1]=\frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}$		
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$	
		$f[x_1,x_2]=\frac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1}$		
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1,x_2,x_3]=\frac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$	...
		$f[x_2,x_3]=\frac{f[x_3]-f[x_2]}{x_3-x_2}$		
x_3	$f[x_3]$		$f[x_2,x_3,x_4]=\frac{f[x_3,x_4]-f[x_2,x_3]}{x_4-x_2}$	
		$f[x_3,x_4]=\frac{f[x_4]-f[x_3]}{x_4-x_3}$		
x_4	$f[x_4]$		$f[x_3,x_4,x_5]=\frac{f[x_4,x_5]-f[x_3,x_4]}{x_5-x_3}$	
		$f[x_4,x_5]=\frac{f[x_5]-f[x_4]}{x_5-x_4}$		
x_5	$f[x_5]$			
$\vdots$	$\vdots$			

նկար 1.1

1.3 Բաժանված տարբերության հատկություններ

<u>Հատկություն 1:</u>

Դիցուք տրված են $(x_k, f(x_k))$, $k = 1,2,\dots,m$ ինտերպոլյացիոն տվյալները: Այդ դեպքում.

$$f(x_1,\dots,x_m) = \sum_{j=1}^{m} \frac{f(x_j)}{\prod_{i=1,\ i\neq j}^{m}(x_j - x_i)}$$

<u>Ապացույց 1:</u>

Ապացուցելու համար օգտվենք մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդից:

$m = 2$, =>

$$f(x_1,x_2) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{f(x_2)}{x_2-x_1} - \frac{f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{f(x_1)}{x_1-x_2} + \frac{f(x_2)}{x_2-x_1}$$

ենթադրենք , որ $k = m$ բանաձևը ճիշտ է, ապացուցենք այն $k = m + 1$-ի դեպքում.

$$f(x_1,x_2,\dots,x_m,x_{m+1}) = \frac{f(x_2,\ \dots\ ,\ x_{m+1}) - f(x_1,\ \dots\ ,\ x_m)}{x_{m+1}-x_1} =$$

$$= \frac{1}{x_{m+1}-x_1}\left[\sum_{j=2}^{m+1}\frac{f(x_j)}{\prod_{i=2,\ i\neq j}^{m+1}(x_j-x_i)} - \sum_{j=1}^{m}\frac{f(x_j)}{\prod_{i=1,\ i\neq j}^{m}(x_j-x_i)}\right] =$$

$$= \frac{1}{x_{m+1}-x_i} * \frac{f(x_{m+1})}{\prod_{i=2,\ i\neq j}^{m}(x_{m+1}-x_i)} - \frac{1}{x_{m+1}-x_i} * \frac{f(x_1)}{\prod_{i=2,\ i\neq j}^{m}(x_1-x_j)} + \frac{1}{x_{m+1}-x_1} *$$

$$* \sum_{j=2}^{m}\frac{f(x_i)}{\prod_{i=2,\ i\neq j}^{m}(x_j-x_i)}\left[\frac{1}{x_j-x_{m+1}} - \frac{1}{x_j-x_1}\right] = \frac{f(x_{m+1})}{\prod_{i=1,\ i\neq j}^{m}(x_{m+1}-x_i)} +$$

$$+ \frac{f(x_1)}{\prod_{i=2,\ i\neq j}^{m+1}(x_1-x_i)} + \frac{f(x_j)}{\prod_{i=1,\ i\neq j}^{m+1}(x_j-x_i)} = \sum_{j=1}^{m+1}\frac{f(x_j)}{\prod_{i=1,\ i\neq j}^{m+1}(x_j-x_i)}$$

<u>Հատկություն 2:</u>

Բաժանված տարբերությունները (նկար 1.2) կախված չէ արգումենտների հերթականությունից.

$$f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = f(x_3, x_1, x_2, \dots, x_n)$$

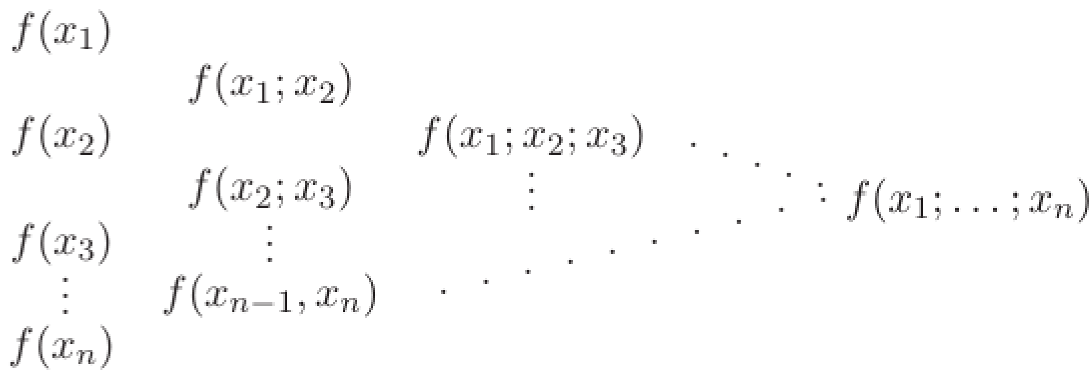
<u>Ապացույց 2:</u>

Ըստ առաջին հատկության՝ կփոխվի միայն հերթականությունը.

$$f(x_1, x_2) = \frac{f(x_1)}{x_1-x_2} + \frac{f(x_2)}{x_2-x_1}$$

$$f(x_2, x_1) = \frac{f(x_2)}{x_2-x_1} + \frac{f(x_1)}{x_1-x_2}$$

Ապացույցը հետևում է առաջին հատկությունից, քանի որ արգումենտների հերթականությունը փոխելիս, փոխվում է միայն գումարելիների հերթականությունը:



նկար 1.2

__Հատկություն 3:__

Դիցուք տրված են $(x_k, f(x_k))$ և $(x_k,\ g(x_k))$ $k = 1,2,\dots,m$ ինտերպոլյացիոն տվյալները և α ու β թվերը: Այս դեպքում՝

$$(\alpha f + \beta g)(x_1, \dots, x_m) = \alpha f(x_1, \dots, x_m) + \beta g(x_1, \dots, x_m)$$

<u>Ապացույց 3:</u>

Վերցնենք տվյալները և կիրառենք բաժանման տարբերությունը:

$f(x_1)$

$\vdots$ $\quad \longrightarrow \quad f(x_1, \dots, x_m) * \alpha$

$f(x_m)$

$+$

$g(x_1)$

$\vdots$ $\quad \longrightarrow \quad g(x_1, \dots, x_m) * \beta$

$g(x_m)$

$\alpha f(x_1) + \beta g(x_1)$

$\vdots$ $\quad \longrightarrow \quad (\alpha f + \beta g)(x_1, \dots, x_m)$

$\alpha f(x_m) + \beta g(x_m)$

$$(\alpha f+\beta g)(x_1,\dots,x_m) = \sum_{j=1}^{m}\frac{\alpha f(x_j)+\beta g(x_j)}{\prod_{i=1,\ i\neq j}^{m}(x_j-x_i)} = \alpha\sum_{j=1}^{m}\frac{f(x_j)}{\prod_{i=1,\ i\neq j}^{m}(x_j-x_i)} +$$

$$+\ \beta\sum_{j=1}^{m}\frac{g(x_j)}{\prod_{i=1,\ i\neq j}^{m}(x_j-x_i)} = \alpha f(x_1,\dots,x_m)+\ \beta g(x_1,\dots,x_m)$$

1.4 Թվային Դիֆերենցում

Ենթադրենք տրված են $x_0, x_1,\dots, x_n$ կետերը, և այդ կետերում ֆունկցիայի արժեքները՝ $f(x_0), f(x_1),\dots,f(x_n)$: Պահանջվում է գտնել ֆունկցիայի ածանցյալի արժեքը որոշ կետերում: Ընդհանուր մոտեցումը կայանում է նրանում, որ կառուցվում է ինտերպոլյացիոն բազմանամ՝ $L_n(x)$ (հիմնականում Նյուտոնի կամ Լագրանժի), և այն դիֆերենցվում է, ընդ որում սխալը թվային դիֆերենցման՝ R_d-ն հավասար է ինտերպոլյացիայի սխալի ածանցյալին.

$$f'(x) = L'_n(x) + R'_n(x)$$

$$f'(x) \approx L'_n(x)$$

$$R_d = R'_n(x)$$

այսինքն թվային դիֆերենցումը իրենից ներկայացնում է ֆունկցիայի ածանցյալների մոտավոր հաշվարկ: Թվային դիֆերենցման հիմնական բանաձևը հետևյալն է .

$$f(x,x_1,\dots,x_n) = \frac{f^{(n)}(C)}{n!} \qquad x_1 < C < x_n$$

$$f(x_1,x_2) = \frac{f'(C_1)}{1!} \qquad x_1 < C_1 < x_n$$

Թվային դիֆերենցման բանաձևից կարելի է վերցնել հետևյալ մեծությունը.

$$M_k = k!\ \max\ |f(x_i,x_{i+1},\dots,x_{i+k})| \qquad 1 \le i \le n-1$$

k-րդ կարգի ածանցյալը գնահատելու համար:

<u>Օրինակ 1։</u>

Ենթադրենք տրված է x_0, x_1 կետեր, և այդ կետերում ֆունկցիայի արժեքները՝ $f(x_0)$, $f(x_1)$։ Նշանակենք $h = x_1$ - x_0։ Օգտվելով բաժանված տարբերությունների աղյուսակից, կարող ենք գրել թվային դիֆերենցման բանաձևը երկու հանգույցի համար.

$$f'(x) \approx \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h}$$

<u>Օրինակ 2։</u>

Ենթադրենք տրված է հետևյալ տվյալները.

x	1	4	9	16
$f(x)$	1	2	3	4

=> $f(x) = \sqrt{x}$

Կազմենք բաժանված տարբերությունների աղյուսակը.

x	f(x)	1	2	3
1	1			
		1/3		
4	2		-1/60	
		1/5		1/1260
9	3		-1/210	
		1/7		
16	4			

Այժմ կազմենք Նյուտոնի 3-րդ կարգի ինտերպոլյացիոն բազմանդամը, և ածանցենք.

$$P_3(x) = 1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{60}(x-1)(x-4) + \frac{1}{1260}(x-1)(x-4)(x-9)$$

$$P'_3(x) = \frac{1}{3} - \frac{1}{60}(2x-5) + \frac{1}{1260}((x-4)(x-9) + (x-1)(x-9) + (x-1)(x-4))$$

Եթե հիմա տեղադրենք արժեքներից որևէ մեկը՝ օրինակ $x = 4$, ապա կստանանք, տվյալ կետում ֆունկցիայի ածանցյալի արժեքի՝ մոտավոր արժեքը (մոտարկված արժեքը).

$$P'_3(4) \approx 0.269$$

Հիմա հաշվենք իրական ֆունկցիայի ածանցյալի արժեքը նույն կետում.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\mathrm{x}}}$$

$$f'(4) = 1/8 = 0.25$$

$$=>$$

սխալը $\approx 0.269 - 0.25 = 0.019$: