ԳԼՈՒԽ 3

Դիֆերենցիալ հավասարման ցանցային ձևակերպում: Ցանցային մեթոդ: Վերջավոր տարբերությունների մեթոդ: Ընդհանուր գաղափարներ

3.1 Ցանցեր և ցանցային ֆունկցիաներ

Դիֆերենցիալ հավասարման ցանցային սխեման գրելու համար անհրաժեշտ է կատարել հետևյալ երկու քայլերը.

1. անհրաժեշտ է անընդհատ տիրույթը փոխարինել դիսկրետ տիրույթով,
2. անհրաժեշտ է դիֆերենցիալ օպերատորը փոխարինել որոշակի տարբերութային օպերատորով, ինչպես նաև ձևակերպել և սահմանել համարժեք սկզբնական պայմանները տարբերութային հավասարման համար :

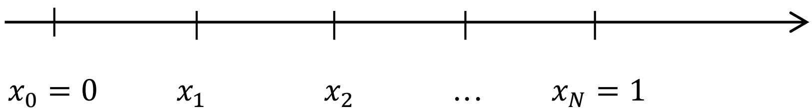
Այս երկու քայլերը կատարելուց հետո, մենք ստանում ենք հանրահաշվական հավասարումների համակարգ: Այսպիսով տրված դիֆերենցիալ հավասարման թվային լուծման խնդիրը բերվում է հանրահաշվական հավասարումների համակարգի լուծման խնդրի: Թվային մեթոդով, երկու մաթեմատիկական խնդրի լուծման դեպքում էլ ակնհայտ է, որ չենք կարող գտնել լուծումները բոլոր հնարավոր կետերում: Հետևաբար, բնական է այդ տիրույթում ընտրել վերջավոր կետերի բազմություն, և խնդրի մոտավոր լուծումը փնտրել միայն այդ կետերում : Այդ կետերի բազմությանը անվանում են ցանց, իսկ բազմության առանձին կետերին ՝ ցանցի հանգույցներ կամ ցանցի կետեր: Ցանցի հանգույցներում (կետերում) սահմանված ֆունկցիան կոչվում է ցանցային ֆունկցիա: Այսպիսով մենք անընդհատ տիրույթը փոխարինեցինք դիսկրետ տիրույթով, այսինքն ցանցով: Այլ կերպ ասած, դիֆերենցիալ հավասարումների լուծման տարածությունը մոտարկեցինք ցանցային ֆունկցիաների տարածությամբ: Ցանցային լուծման հատկությունները, և հատկապես դրա մոտեցումը ճշգրիտ լուծմանը, կախված են ցանցի ընտրությունից : Դիտարկենք մի քանի օրինակներ:

<u>Օրինակ 1.</u> <<Հավասարաչափ ցանց հատվածի վրա>>

[0;1] հատվածը հավասարաչափ բաժանենք N հավասար մասերի: Երկու հարևան հանգույցների հեռավորությունը նշանակենք h-ով.

$$x_i - x_{i-1} = h = \frac{1}{N}$$

h-ին կանվանենք ցանցի քայլ:



Այս կառուցվածքը կոչվում է հավասարաչափ ցանց, քանի որ բոլոր հանգույցների միջև եղած հեռավորությունը նույնն է: Բոլոր հանգույցների բազմությունը նշանակենք ω_h-ով.

$$\omega_h = \{x_i = ih, \qquad i = 1,2,\dots,N-1\}$$

ω_h-ը իրենից ներկայացնում է ցանց, որը տվյալ դեպքում կառուցվել է հատվածի վրա: Այս ձևով սահմանված ցանցը ներքին հանգույցներ է պարունակում, առանց եզրային կետերի՝ $x_0 = 0$ և $x_N = 1$: Այս բազմության մեջ կարելի է ներառել նաև եզրային կետերը: Այդ դեպքում ցանցը կսահմանենք հետևյալ կերպ.

$$\omega_h = \{x_i = ih, \qquad i = 0,1,\dots,N\}$$

Այսպիսով [0;1] հատվածի վրա $y(x)$ անընդհատ ֆունկցիայի փոխարեն կդիտարկենք դիսկրետ արգումենտի ֆունկցիա՝ $y_h(x_i)$ $i = 0,1,\dots,N$: Ֆունկցիայի արժեքները հաշվարկվում են ցանցի հանգույցներում (x_i-ում), իսկ ֆունկցիան կախված է ցանցի քայլից (h-ից):

<u>Օրինակ 2.</u> <<Հավասարաչափ ցանց հարթության վրա>>

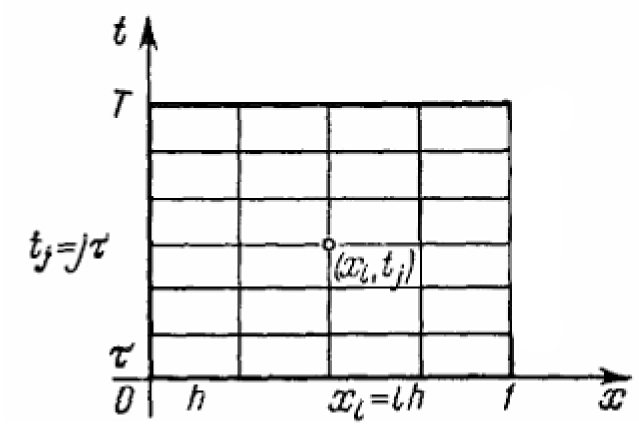
Դիտարկենք երկու փոփոխականից կազմված $u(x,t)$ ֆունկցիաների բազմությունը: Ենթադրենք մեր ֆունկցիայի որոշման (սահմանման) $\overline{D}$ տիրույթը իրենից ներկայացնում է ուղղանկյուն.

$$\overline{D} = \{0 \le x \le 1, \qquad 0 \le t \le T\}$$

Բաժանենք x առանցքի [0;1] հատվածը N_1 հավասար մասերի, իսկ t առանցքի [0;1] հատվածը N_2 հավասար մասերի: Կատարենք նշանակում.

$$h = \frac{1}{N_1}, \tau = \frac{1}{N_2}$$

որտեղ h-ը ցանցի քայլն է x-ի ուղղությամբ, իսկ τ-ն ցանցի քայլն է t-ի ուղղությամբ :



նկար 3.1

Գծելով և կառուցելով ուղիղները զուգահեռ համապատասխան առանցքներին (Նկ. 3.1), ստանում ենք ուղղանկյուն ցանց, որի հանգույցները (կետերը) տրված են (x_i, t_j) զույգերով, որտեղ $x_i = ih$, $t_j = j\tau$, $i = 0,1, \dots, N_1$, $j = 0,1, \dots, N_2$: $\overline{\omega_{h\tau}}$ - ով նշանակենք (x_i, t_j) կետերի բազմությունը $\overline{D}$ տիրույթում.

$$\overline{\omega_{h\tau}} = \{(x_i, t_j) \in \overline{D}\}$$

Այս ցանցը ունի երկու h և τ քայլեր, համապատասխան x և t ուղղություններով: Ցնացի հարակից (կամ հարևան) հանգույցներ, կոչվում են այն կետերը որոնք գտնվում են նույն ուղղու վրա (կամ հորիզոնական, կամ ուղղաձիգ), և այդ կետերի միջև եղած հեռավորությունը հավասար է ցանցի քայլին (կամ h-ին, կամ τ-ին):

<u>Օրինակ 3.</u> <<Անհավասարաչափ ցանց հատվածի վրա>>

Դիտարկենք $0 \le x \le 1$ հատվածը: Բաժանենք այն N անհավասար մասերի՝ $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{N-1} < 1$: ω_h-ով նշանակենք հանգույցների բազմությունը.

$$\omega_h = \{x_i, \quad i = 0,1, \dots, N, \quad x_0 = 0, \quad x_N = 1\}$$

ω_h-ը իրենից ներկայացնում է անհավասարաչափ ցանց [0;1] հատվածի վրա: Հարակից հանգույցների միջև հեռավորությունը, այսինքն՝ ցանցի քայլը, սահմանվում է հետևյալ կերպ.

$$h_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 0,1, \dots, N$$

h քայլը կախված է հանգույցի i համարից: Ցանցի քայլերը պետք է բավարարեն հետևյալ պայմանին.

$$\sum_{i=1}^{N} h_i = 1$$

Օրինակ 4. <<Ցանց երկչափ տիրույթում>>

Դիտարկենք (x_1, x_2) ուղղանկյուն կոորդինատական համակարգը, և այդ համակարգում ինչ-որ G տիրույթ: G տիրույթի եզրագիծը նշանակենք Γ –ով: Տրոհենք տիրույթը ցանցով, այսինքն կառուցենք, տանենք x_1-ին և x_2-ին զուգահեռ ուղիղները.

$$x_1{}^{(i_1)} = i_1 h_1, \quad i_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, h_1 > 0$$

$$x_2{}^{(i_2)} = i_2 h_2, \quad i_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, h_2 > 0$$

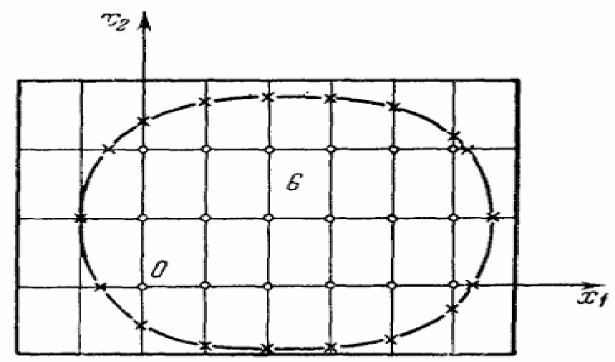
Այսպիսով, հարթության վրա ստանում ենք ուղղանկյուն ցանց, որի հանգույցները տրված են հետևյալ բանաձևով.

$$(x_1, x_2) = (i_1 h_1,\ i_2 h_2)$$

որտեղ $i_1,\ i_2 \in \mathrm{Z}$: Այս ցանցը հավասարաչափ է երկու ուղղություններով, այսինքն և՛ ըստ Ox_1-ի, և՛ ըստ Ox_2-ի: Մեզ հետաքրքրում է ցանցի միայն այն հանգույցները, որոնք պատկանում են $\overline{G}$ տիրույթին.

$$\overline{G} = G + \Gamma$$

այսինքն ներառյալ G տիրույթը և նրա Γ եզրը: Այն հանգույցները $(x_1, x_2) = (i_1 h_1,\ i_2 h_2)$, որոնք ընկած են G տիրույթի ներսում, կոչվում են ներքին կետեր: Այդ կետերի ամբողջությունը (կամ բազմությունը) նշանակենք ω_h-ով: Այժմ դիտարկենք այն հանգույցները, որոնք առաջանում են $x_1{}^{(i_1)} = i_1 h_1$, և $x_2{}^{(i_2)} = i_2 h_2$ ուղիղների հատման արդյունքում, և այն հանգույցները որոնք գտնվում են տիրույթի Γ սահմանին: Այդ հանգույցներին կանվանենք սահմանային կամ եզրային հանգույցներ: Եզրային հանգույցների բազմությունը ընդունված է նշանակել γ_h -ով: (Նկ. 3.2) –ում x-նշանով նշանակված են սահմանային հանգույցները, իսկ o-նշանով նշանակված են ներքին հանգույցները:



Նկար 3.2

Նկարից ակնհայտ է, որ գոյություն ունեն որոշակի սահմանային հանգույցներ, որոնք գտնվում են շատ մոտ իրենց հարևան ներքին հանգույցներին: Ընդ որում , նրանց միջև եղած հեռավորությունը ավելի փոքր է քան h_2-ը: Այսպիսով, չնայաց այն հանգամանքին, որ ցանցը հարթության վրա հավասարաչափ է ըստ x_1 և x_2 ուղղությունների, ամբողջական ցանցը՝ $\overline{\omega_h} = \omega_h + \gamma_h$ համարվում է ոչ հավասարաչափ G տիրույթում, մասնավորապես սահմանի մոտ:

3.2 Դիֆերենցիալ օպերատորի տարբերության մոտարկում

Ենթադրենք տրված է դիֆերենցիալ L օպերատոր, որը գործում է (ազդում է) $v = v(x)$ ֆունկցիայի վրա: Փոխարինենք Lv-ն $L_h v_h$ տարբերության արտահայտությամբ: $L_h v_h$ - ն իրենից ներկայացնում է ցանցային ֆունկցիայի արժեքների գծային կոմբինացիա, ցանցի որոշ հանգույցների բազմության վրա: Այդ հանգույցների բազմությունը կոչվում է շաբլոն:

$$L_h v_h(x) = \sum_{\varepsilon \in S(x)} A_h(x, \varepsilon)\, v_h(\varepsilon)$$

կամ

$$(L_h v_h)_i = \sum_{x_i \in S(x)} A_h(x_i, x_j)\, v_h(x_j)$$

որտեղ $A_h(x, \varepsilon)$ –ը գործակիցներն են , h-ը քայլն է, իսկ $S(x)$ –ը x կետում շաբլոն է: Այսպիսով, նման մոտեցմամբ, Lv-ի փոխարինումը $L_h v_h$ –ով , կոչվում է դիֆերենցիալ օպերատորի մոտարկում տարբերության օպերատորով: Տարբերության օպերատորով մոտարկման ուսումնասիրությունը, հիմնականում իրականացվում է ֆիքսված ինչ-որ x կետում, այսինքն տիրույթի ներսում: Եթե $v(x)$-ը անընդհատ ֆունկցիա է, ապա ցանցային մոտարկումը բավարարում է՝ $v_h(x) = v(x)$:

Նախքան L դիֆերենցիալ օպերատորը, տարբերութային օպերատորով մոտարկելը, անհրաժեշտ է ընտրել շաբլոն: Այսինքն, պետք է նշել այն հարևան հանգույցների բազմությունը, որոնք շրջապատում են տվյալ x կետը, և որտեղ $v(x)$ ֆունկցիայի արժեքները կարող են օգտագործվել L օպերատորը մոտարկելու համար: Այս բաժնում կքննարկենք օրինակներ պարզագույն դիֆերենցիալ օպերատորների տարբերութային մոտարկման համար:

Օրինակ 1. $Lv = \frac{dv}{dx}$

Ֆիքսենք ինչ-որ x կետ Ox առանցքի վրա, և վերցնենք $x - h$ ու $x + h$ կետերը, որտեղ $h > 0$: Lv-ի մոտարկման համար կարող ենք կիրառել հետևյալ արտահայտություններից ցանկացածը.

$$L_h^+ v \equiv \frac{v(x+h)-v(x)}{h} \equiv v_x \qquad (1)$$

$$L_h^- v \equiv \frac{v(x)-v(x-h)}{h} \equiv v_{\overline{x}} \qquad (2)$$

(1) արտահայտությունը կոչվում է աջ կողմի տարբերութային ածանցյալ (կնշանակենք v_x-ով), իսկ (2) արտահայտությունը կոչվում է ձախ կողմի տարբերութային ածանցյալ (կնշանակենք $v_{\overline{x}}$ -ով) (այսինքն ունենք երկկետային շաբլոն, x, $x + h$ և $x - h$, x): Բացի այդ, որպես $\frac{dv}{dx}$ ածանցյալի տարբերութային մոտարկում, կարելի է օգտագործել նաև (1) և (2) արտահայտությունների գծային կոմբինացիան.

$$L_h^\sigma \equiv \sigma v_x + (1 - \sigma)\, v_{\overline{x}}$$

որտեղ σ-ն ցանկացած իրական թիվ է: Մասնավորապես, երբ $\sigma = 0.5$, ստանում ենք այսպես կոչված կենտրոնական տարբերութային ածանցյալը.

$$v_x^o = \frac{1}{2}(v_x + v_{\overline{x}}) = \frac{v(x+h)-v(x-h)}{2h} \qquad (4)$$

Այսպիսով ստացվում է, որ կարող ենք գրել անվերջ թվով տարբերութային արտահայտություններ, որոնք մոտարկում են $Lv = v'$ (ֆունկցիայի ածանցյալը): Հարց է առաջանում, ինչ սխալ է առաջանում երբ օգտագործում ենք այս կամ այն տարբերութային մոտարկումը: Այսինքն, ինչպես է իրեն դրսևորում.

$$\varphi(x) = L_h v(x) - Lv(x)$$

տարբերությունը x կետում, երբ h ->0: $\varphi(x)$ մեծությունը իրենից ներկայացնում է Lv-ի տարբերութային մոտարկման սխալը x կետում: Այսինքն այն բնութագրում է, թե որքանով է տվյալ տարբերութային մոտարկումը հեռու ճշգրիտ ածանցյալից: Այս սխալը գնահատելու համար $v(x)$-ը վերլուծենք Թեյլորի շարքի.

$$v(x \pm h) = v(x) \pm hv' + \frac{h^2}{2}v''(x) + O(h^3)$$

(ենթադրելով, որ $v(x)$ ֆունկցիան բավականաչափ հարթ է x-ի ինչ-որ $(x - h_0, x + h_0)$ միջավայրում, որտեղ $h < h_0$, իսկ h_0-ն հաստատուն դրական թիվ է): Թեյլորի շարքի վերլուծությունը տեղադրենք (1), (2), (4) արտահայտությունների մեջ կստանանք.

$$v_x = \frac{v(x+h) - v(x)}{h} = v'(x) + \frac{h}{2}v''(x) + O(h^2)$$

$$v_{\overline{x}} = \frac{v(x) - v(x-h)}{h} = v'(x) - \frac{h}{2}v''(x) + O(h^2)$$

$$v_{\overset{o}{x}} = \frac{v(x+h) - v(x-h)}{2h} = v'(x) + O(h^2)$$

Այսպիսով ստացվում է, որ.

$$\varphi = v_x - v'(x) = O(h)$$

$$\varphi = v_{\overline{x}} - v'(x) = O(h)$$

$$\varphi = v_{\overset{o}{x}} - v'(x) = O(h^2)$$

այսինքն աջ և ձախ կողմերի տարբերութային ածանցյալները ունեն առաջին կարգի ճշտություն, իսկ կենտրոնական տարբերութային ածանցյալը ունի երկրորդ կարգի ճշտություն: Ենթադրենք V-ն հարթ ֆունկցիաների դաս է , $v \in$ V, որոնք սահմանված են (տրված են) $S(x, h_0)$-ի x կետի ինչ-որ շրջակայքում, որտեղ h_0-ն ֆիքսված դրական թիվ է, և այդ միջակայքը պարունակում է L_h տարբերութային օպերատորի շաբլոնը՝ $S(x, h)$-ը: Կասենք որ L_h տարբերութային օպերատորը մոտարկում է L դիֆերենցիալ օպերատորին, m-րդ ($m > 0$) կարգի ճշտությամբ x կետում, եթե .

$$\varphi(x) = L_h v(x) - Lv(x) = O(h^m)$$

<u>Օրինակ 2.</u> $Lv = v'' = \frac{d^2v}{dx^2}$

Երկրորդ կարգի ածանցյալը վերջավոր տարբերություններով (կամ տարբերության մեթոդով) մոտարկելու համար, անհրաժեշտ է օգտագործել երեք կետ՝ $x-h,\ x,\ x+h$: Այսինքն պետք է կիրառել եռակետ շաբլոն: Այդ դեպքում կստանանք.

$$L_h v = \frac{v(x+h)-2v(x)+v(x-h)}{h^2} \qquad (6)$$

Նկատենք, որ x կետում աջ կողմի տարբերության ածանցյալը համընկնում է $x+h$ կետում ձախ կողմի տարբերության ածանցյալի հետ: Հետևաբար (6) –ը կարող ենք գրել հետևյալ կերպ.

$$L_h v = \frac{v_x(x)-v_{\overline{x}}(x)}{h} = \frac{1}{h}\left[v_{\overline{x}}(x+h)-v_{\overline{x}}(x)\right] = v_{\overline{x}x}(x) \qquad (7)$$

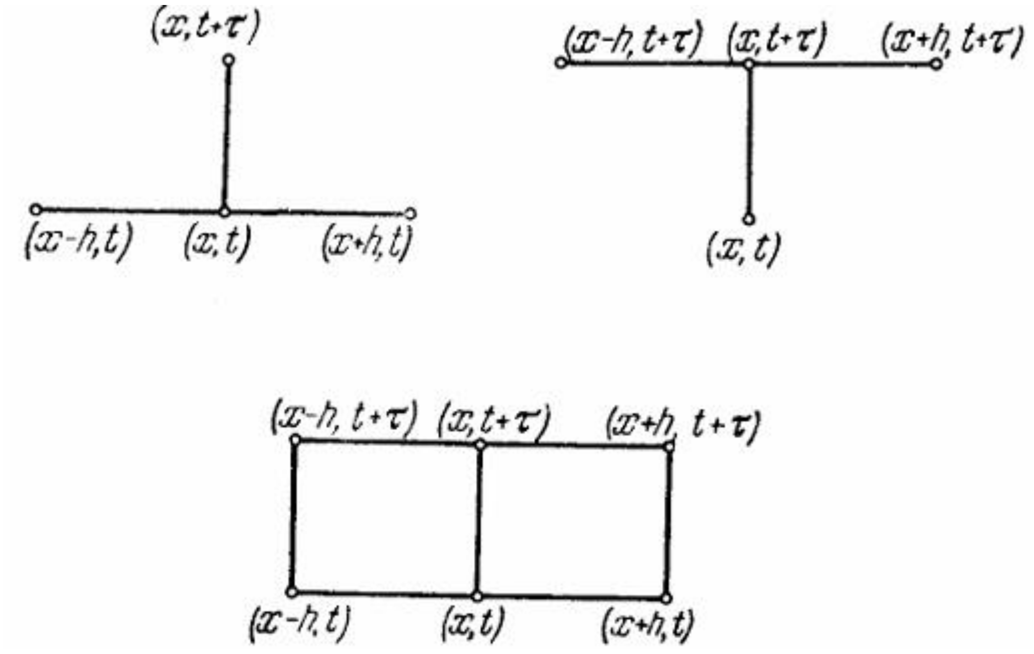
Օգտվելով $v(x)$ ֆունկցիայի Թեյլորի շարքի վերլուծությունից, կստանանք, որ մոտարկման ճշտության կարգը հավասար է երկուսի, այսինքն.

$$v_{\overline{x}x} - v''(x) = O(h^2)$$

քանի որ $v_{\overline{x}x} = v'' + \frac{h^2}{12}v^4 + O(h^4)$:

<u>Օրինակ 3.</u> $Lv = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$

Ենթադրենք (x,t)-ն ֆիքսված կետ է (x,t) հարթությունից, իսկ $h>0$, և $\tau>0$ ցանցի քայլերն են ըստ x-ի և t-ի: Որպեսզի L-ի համար գրենք (կառուցենք) $L_{h\tau}$ տարբերության մոտարկման օպերատորը, նախ և առաջ պետք է սահմանենք շաբլոնը, այսինքն ֆիքսենք թե որ հանգույցների արժեքներն ենք օգտագործելու մոտարկման մեջ: Դիտարկենք սկզբում ամենապարզ տեսակի մոտարկումները: Ենթադրենք շաբլոնը կազմված է 4 կետերից (նկ. 3.3):



նկար 3.3

Սահմանենք $L_{h\tau}$-ը հետևյալ կերպ.

$$L_{h\tau}^{(0)} = \frac{v(x,t+\tau) - v(x,t)}{\tau} - \frac{v(x+h,t) - 2v(x,t) + v(x-h,t)}{h^2} \qquad (9)$$

(9) արտահայտությունը պարզեցնելու համար , կատարենք հետևյալ նշանակումները.

$$v = v(x,t), \quad v^{\wedge} = v(x,t+\tau), \qquad v^{\vee} = v(x,t-\tau)$$

Այս նշանակումների դեպքում, ըստ t-ի ածանցյալը կգրվի հետևյալ տեսքով.

$$v_t = \frac{v(x,t+\tau) - v(x,t)}{\tau} = \frac{v^{\wedge} - v}{\tau} \qquad (10)$$

Հաշվի առնելով (7)-ը և (10)-ը , (9)-ը կարող ենք գրել հետևյալ տեսքով.

$$L_{h\tau}^{(0)} = v_t - v_{\bar{x}x} \qquad (9')$$

$L_{h\tau}^{(0)}$ վերջավոր տարբերության օպերատորը կառուցելիս, մենք վերցրեցինք $v_{\bar{x}x}$-ի արժեքը ժամանակի t պահին (այսինքն, ցանցի ստորին շերտում): Եթե օգտագործենք նկար 5-ի բ-ում պատկերված շաբլոնը, ապա կարելի է վերցնել $v_{\bar{x}x}$-ը ժամանակի $t+\tau$ պահին (այսինքն, վերին շերտում): Այդ դեպքում վերջավոր տարբերության օպերատորը կունենա հետևյալ տեսքը.

$$L_{h\tau}^{(1)} = v_t - v^{\wedge}{}_{\bar{x}x} \qquad (11)$$

Եթե վերցնենք (9$'$)-ի և (11)-ի գծային կոմբինացիան, կստանանք.

$$L_{h\tau}^{(\sigma)} = v_\tau - (\sigma v^{\wedge}{}_{\bar{x}x} - (1-\sigma) v_{\bar{x}x}) \qquad (12)$$

որտեղ $\sigma \neq 0$, $\sigma \neq 1$ և կառուցված են 6 կետանի շաբլոնի վրա *(նկար 5.. վ)*

Վերջավոր տարբերությունների մոտարկման կարգը գնահատելու համար, օգտվում ենք համապատասխան բանաձևերից.

$$v_t = \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} + \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 v\,(x,t)}{\partial t^2} + O(\tau^2) = \frac{\partial v(x,t+\tau/2)}{\partial t} + O(\tau^2)$$

$$v_{\bar{x}x} = \frac{\partial^2 v\,(x,t)}{\partial x^2} + \frac{h}{12}\,\frac{\partial^4 v\,(x,t)}{\partial x^4} + O(h^4) =$$

$$= \frac{\partial^2 v\,(x,t+\tau/2)}{\partial x^2} - \frac{\tau}{2}\,\frac{\partial^3 v\,\left(x,t+\frac{\tau}{2}\right)}{\partial x^2\,\partial \mathrm{t}} + O(h^2+\tau^2)$$

$$v^{\wedge}{}_{\bar{x}x} = \frac{\partial^2 v\,(x,t+\tau/2)}{\partial x^2} + \frac{\tau}{2}\,\frac{\partial^3 v\,\left(x,t+\frac{\tau}{2}\right)}{\partial x^2\,\partial \mathrm{t}} + O(h^2+\tau^2)$$

Տեղադրելով այս արտահայտությունները $L_{h\tau}^{(0)}$, $L_{h\tau}^{(1)}$, $L_{h\tau}^{(2)}$ բանաձևերի մեջ կստանանք համապատասխան մոտարկումները.

$$L_{h\tau}^{(0)} v = \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 v\,(x,t)}{\partial x^2} + O(h^2+\tau) = Lv(x,t) + O(h^2+\tau)$$

$$\varphi^{(0)} = L_{h\tau}^{(0)} v - Lv(x,t) = O(h^2+\tau)$$

$$L_{h\tau}^{(1)} v = \frac{\partial v(x,t+\tau)}{\partial t} - \frac{\partial^2 v\,(x,t+\tau)}{\partial x^2} + O(h^2+\tau) = Lv(x,t+\tau) + O(h^2+\tau)$$

$$\varphi^{(1)} = L_{h\tau}^{(1)} v - Lv(x,t+\tau) = O(h^2+\tau)$$

$$L_{h\tau}^{(0.5)} v = \frac{\partial v(x,t+\tau/2)}{\partial t} - \frac{\partial^2 v\,(x,t+\tau/2)}{\partial x^2} + O(h^2+\tau^2) = Lv(x,t+\tau/2) + O(h^2+\tau^2)$$

$$\varphi^{(0.5)} = L_{h\tau}^{(0.5)} v - Lv(x,t+\tau/2) = O(h^2+\tau^2)$$

Այսպիսով $L_{h\tau}^{(\sigma)}$ օպերատորը մոտարկում է L-ին 2-րդ կարգի ճշտությամբ ըստ h քայլի ցանկացած σ-ի դեպքում, ըստ τ քայլի 1-ին կարգի ճշտությամբ $\sigma = 0$, $\sigma = 1$ –ի դեպքում, և ըստ τ-ի 2-րդ կարգի ճշտությամբ երբ $\sigma = 0.5$: