代号	9-06A
模块	计算机辅助设计
层次	基础型

Matlab 7.0 使用说明

(数值计算部分)

华中科技大学国家机械基础课程教学基地

2010年 9 月

目　录

第一部分 基本操作

§1.Matlab 的使用

Matlab 的使用方法有两种：（1）在 Matlab 的命令窗口（Matlab Command Windows）中直接输入命令，即可得到结果；（2）在 Matlab 的编辑窗口（Matlab Editor）内编写 M 文件，然后在命令窗口执行该文件，得到所需的结果。

1-1.直接输入命令

在命令窗口中，直接输入命令。例如：

键入　　x=3+5
显示　　x=8
若键入　　x=3+5；　不能直接显示结果，
还须键入　　x
方可显示　　x=8

1-2.用 M 文件开发程序

1.设置当前目录

M 文件分为脚本 M 文件（相当于主程序）和函数 M 文件（相当于子程序或函数）。子程序或函数调用时，须在当前目录内操作，故建议将用户创建的子目录设置为当前目录。这样，所有程序及命令的操作都在用户子目录内，较为方便。以下操作只须设置一次，以后再进入 Matlab 系统时，当前目录即为已设定的目录。

设置当前目录步骤为：

① 将鼠标移至 Matlab 图标，按右键弹出下拉菜单；
② 点击“属性"，弹出 Matlab 属性窗口；
③ 将该窗口内“起始位置”栏中的路径更改为用户创建的子目录路径；
④ 点击“应用"，最后点击“确定"。

2.如何编写程序

对于 Matlab 命令窗口的上方菜单条，点击 File→New→M-file，则弹出 Matlab 的编辑窗口。在编辑窗口内键入 M 文件，最后点击该窗口上方菜单条中的 File→Save 保存文件。

3.例示

1) 计算函数 $\mathrm{f}(x_1,x_2)=2x_1^{\ 2}+7x_2^{\ 2}-3x_1x_2-5x_1+3x_2-12$

① 编辑窗口中输入该函数 M 文件
function y=demof_1(x1,x2)
y=2*x1^2+7*x2^2-3*x1*x2-5*x1+3*x2-12;
输入完毕后存盘（默认文件名为 demof_1.m）
② 在命令窗口中调用该函数
键入　　y=demof_1(2,3)
显示　　y=40
键入　　y=demof_1(3,-5)

显示　　y=196

2)　计算一组数据 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$的$S_1=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}$和$S_2=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n}}$

①　在编辑窗口中键入该函数的 M 文件

```
function [s1,s2]=demof_2(x)
n=length(x);
s1=sum(x)/n;
s2=sqrt(sum(x.^2)/n);
```

这是一个具有多个返回值的函数，调用语句的左边须为向量。输入完毕后保存文件（默认文件名为 demof_2.m)。

②　在命令窗口中调用函数

输入数组　x=[1,2,3,4,5]

输入调用　[t1,t2]=demof_2(x)

显示　t1=3

t2=3.3166

③　或者，通过主程序调用该函数

i)　首先，在编辑窗口输入脚本 M 文件如下：

```
x=input('x= =');
[s1,s2]=demof_2(x);
fprintf('s1=%12.5f        s2=%12.5f ' ,s1,s2);
```

ii)　保存该文件，备下次使用。

iii)　运行该脚本 M 文件，即在命令窗口点击 File→Open，调用该文件（该文件在编辑窗口）；点击 Debug→Run，在命令窗口显示待输入的数值变量提示 x= =

输入一组数据，如　[2,-3,0,9,13,55]

则显示结果　s1=12.66667　s2=23.40940

§2. M 文件程序的主要语句和主要函数

2-1.Matlab 的数字特征

1.数字类型

Matlab 中所有变量均为双精度，整型和实型之间没有差别。几个特殊的数字，如 pi 表示π的值、inf 表示∞、eps 表示计算机精度 2.2204×10^{-16} 等。

2.算术运算符

加	减	乘	除	乘方
+	-	*	/	^

3.逻辑比较符

大于	小于	大于等于	小于等于	and	or	if 语句中的不等于	if 语句中的等于
>	<	>=	<=	&	|	~=	= =

4.数组变量

（1）数组的表示

一维数组（等同于向量），例如：

x=[1,3,-4,7,21]

y=3:7　　　　　　　　(等同于 y=[3,4,5,6,7]）

z=3:0.5:6　　　　　　(等同于 z=[3,3.5,4,4.5,5,5.5,6])

v=['g','k','m']

二维数组（等同于矩阵），例如一个 3×2 数组：

m=[0.1,0.2,0.3;0.7,0.8,0.9]

（2）数组的元素

对应于上述数组，x(2)=3，y(3)=5,m(2,1)=0.7 等等。二维数组的整行或整列可以一个冒号表示，例如：m(1,:)=0.1 0.2 0.3,m(:,2)=0.2

0.8

（3）数组的运算

两数组的加（+）、减（-）运算符与向量的运算相同，而乘（.*）、除（./)、乘方（.^)运算符不同。例如，对于数组 a 和 b

相加	Z=a+b	a 和 b 的对应元素相加
相减	Z=a-b	a 和 b 的对应元素相减
相乘	Z=a.*b	a 和 b 的对应元素相乘
相除	Z=a./b	a 和 b 的对应元素相除
乘方	Z=a.^1.3	a 的所有元素的 1.3 次方

2-2.主要语句

1. if-end 语句

每个 if 语句必须以一个 end 结束，二者一一对应。例如：

①
```
if   n= =2,price=17;
end
```

②
```
if   n≤5,price=15;
else      price=12;
end
```

③
```
if   a>5,tap=10;
elseif    a<5,tap=-10;                  (如有必要，可多次使用 elseif）
else      tap=1;
end
```

2. for-end 语句

①
```
for x=1:0.5:9
y=x^2-5*x-3;
end
```

上述语句一次计算 x=1，1.5，2，…，9 时 y 的值。若改为 for x=[-2,0,15],则依次计算 x=-2,0,15 时的值。

②
```
for x=0:0.1:10
    y=sin(x);
    if y<0,y=0;                      (循环中可以插入 if-end 语句）
    end
```

```
    end
```

3. while-end 语句

①
```
    i=1;
    c=0;
    x=[-8,0,12,33,-6,5,-7];
    while i<=length(x)
        if x(i)<0,c=c+1;
        end
        i=i+1;
    end
    fprintf('C=%d',c);
```

上述语句为统计数组 x 中小于 0 的元素个数。

②
```
    while 1
        ⋮
        if x>xlimit,break;
        end
        ⋮
    end
```

while 1-end 将可以无限循环下去，当条件 x>xlimit 得到满足时，通过 break 语句中止循环。

4. 输入、输出语句

输入(input)语句举例如下：

z=input('input z=');	输入一个数
zp=input('Your name=','s');	输入一个字符或字符串

输出(fprintf)与 C 语言的输出语句类似，如

fprintf('Volume=%12.5f\n',vol);	除%12.5f 格式，还可以输出%12.5e 格式、%d 格式、%s 格式等。

2-3.常用函数

1. 常用教学函数

① 三角函数：sin(x)、cos(x)、tan(x)、asin(x)、acos(x)、atan(x)

② 初等函数：abs(x)、sqrt(x)、round(x)（四舍五入取整）、fix(x)(去尾数取整）、mod(x,y)（取余数）、exp(x)（以 e 为底的指数）、log(x)（以 e 为底的对数）、log10(x)（以 10 为底的对数）

2. 常用功能函数

① sum(x)　求向量/数组元素之和

② max(x)　求向量/数组的最大值

③ min(x)　求向量/数组的最小值

④ rand(n)　生成随机数，当 n=1 时返回一个随机数；n>1 时，返回 n×n 随机矩阵

⑤ feval(f_name,x)计算以 x 为参数，名为 f_name 的函数，

　例如，　s_name='sin'

　则　　y=feval(s_name,x)等价于 y=sin(x)

⑥ eval(s)　执行字符串 s 所代表的命令

　例如　　s='x=cos(pi/3)'

则　　　eval(s)等价于执行 x=cos(pi/3)

2-4.几个常用的命令

1.　cd　　显示或改变当前目录

① cd　　　显示当前目录

② cd　c:\matlabrll\work　　将此目录设置为当前目录

2.　dir　　列出当前目录或列出指定目录中的文件

① dir　　　　显示当前目录中的内容

② dir　c:\matlabrll\bin　　显示此目录中的内容

3.　disp　显示变量内容

4.　type　列出指定文件的全部内容

5.　clear　清除内容中的变量和函数

6.　home　　清屏并将光标移至左上角

7.　exit 或 quit　　退出 Matlab

§3. 矩阵的有关计算

3-1.矩阵的输入

1.在命令窗口内直接输入

对于 $a=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\\7 & 8 & 9\end{bmatrix}$, 可采用如下输入

```
    a=[1,2,3;4,5,6;7,8,9]
或  a=[1 2 3;4 5 6;7 8 9]
或  a=[1 2 3
       4 5 6
       7 8 9]
```

2.创建 M 文件

对于大型矩阵直接输入不方便，可以采用创建 M 文件的方式，即在编辑窗口中输入该矩阵（输入格式同 3-1 的 1），然后保存在当前目录，每次进入 Matlab 时该矩阵已自动调入内容。

3.生成特殊矩阵的命令

① zeros 生成 0 阵

例如，　a=zeros(3)　　　生成 3×3 的 0 阵

　　　　a=zeros(3,2)　　生成 3×2 的 0 阵

　　　　b=zeros(size(a))　生成与矩阵 a 维数相同的 0 阵

② ones 生成 1 阵　　　　格式同 zeros
③ eye 生成单位阵　　　　格式同 zeros

4.向量的输入

行向量　　　x=[1,2,3,4,5]
列向量　　　x=[1,2,3,4,5]'

3-2.矩阵/向量的运算

1. 加减

c=a+b
c=a-b
c=a+3　（矩阵亦可与数量运算）

2. 乘

c=a*b
c=3*a

3. 求逆

c=inv(a) (a 须为非奇异方阵）

4. 除

① 矩阵的左除 c=a\b　　（等效于 a^{-1}*b)
② 矩阵的右除 c=a/b　　（等效于 b*a^{-1})

5. 行列式的值

b=det(a) （a 须为方阵）

6. 转置

c=a'

3-3.矩阵的范数

对于矩阵 $A=\begin{bmatrix} 3 & -7 & 5 \\ 6 & 8 & 4 \\ 9 & 7 & 3 \end{bmatrix}$

1.无穷范数

定义：$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$，即矩阵元素的绝对值按行相加的最大值

输入命令　　p=norm(A,inf)
显示　　　　p=19

2.1-范数

定义：$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|$，即矩阵元素绝对值按列相加的最大值

输入命令　　p=norm(A,1)
显示　　　　p=22

3.2-范数

定义：$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}\left(A^T A\right)}$，$\lambda_{\max}\left(A^T A\right)$表示为$A^T A$的最大特征值

输入命令　　p=norm(A,2)或 p=norm(A)
显示　　　　p=15.8687

3-4.向量的范数

对于向量　　V=[1 3 6 -7]

1.无穷范数

定义：$\|V\|_\infty = \max_{1\le i\le n}|v_i|$

输入命令　　p=norm(V,inf)　　　　即 max(abs(*V*))
显示　　　　p=7
输入命令　　p=norm(V,-inf)　　　　即 min(abs(*V*))
显示　　　　p=1

2.1-范数

定义：$\|V\|_1 = \sum_{i=1}^{n}|v_i|$

输入命令　　p=norm(V,1)
显示　　　　p=17

3.2-范数

定义：$\|V\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}$

输入命令　　p=norm(V,2)或 p=norm(V)
显示　　　　p=9.7468

3-5.矩阵的条件数

定义：A 为非奇异矩阵，$\mathrm{cond}(A)_r = \|A^{-1}\|_r \|A\|_r$为矩阵 A 的条件数。其中 $r=\infty,1,2$；分别称为无穷范数条件数、1-范数条件数、2-范数条件数。

对于矩阵 $A=\begin{bmatrix}3 & 2 & 4\\ 2 & 4 & 1\\ 3 & 1 & 7\end{bmatrix}$

1.无穷范数条件数

输入命令　p=cond(A,inf)

显示　p=29.5263

2.1-范数条件数

输入命令　p=cond(A,1)

显示　p=30.3158

3.2-范数条件数

输入命令　p=cond(A)　或　p=cond(A,2)

显示　p=19.0575

3-6.矩阵的特征值和特征向量

定义：设 A 是 n×n 的矩阵，满足关系式 $AX_i=\lambda_i X_i$，则 λ_i（i=1,2,…,n）为 A 的特征值，向量 X_i 为 λ_i 对应的特征向量。

对于矩阵 $A=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 2\end{bmatrix}$

1.特征值

输入命令　d=eig(A)

显示　d=　4

1　（即 λ_1=4、λ_2=1）

2.特征向量和特征值

输入命令　[v,d]=eig(A)

显示　v=　0.8944　-0.7071

0.4472　0.7071

d=　4　0

0　1

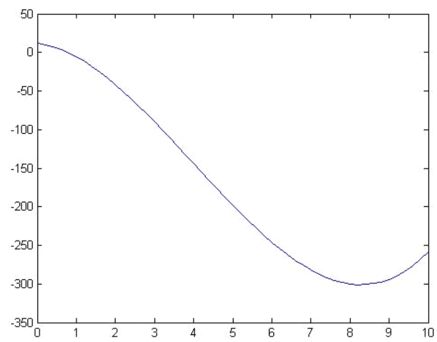
以上结果即为　λ_1=4、其对应的特征向量为 $\begin{bmatrix}0.8944\\ 0.4472\end{bmatrix}$；

λ_2=1、其对应的特征向量为 $\begin{bmatrix}-0.7071\\ 0.7071\end{bmatrix}$。

§ 4.Matlab 绘图

4-1.绘图的基本命令

1.plot　画出点数据集合的曲线



1)　基本格式

plot(x,,y)　　x,y 是点的坐标数组

例如　　x=0:0.2:10

y=x.^3-12*x.^2-7*x+12

plot(x,y)

2)　扩展格式

①　plot(x,y,'linewidth',3)　　设置线的粗细

'linewidth'和 3 控制所绘线的粗细，当用较小的数代替 3 时，线变细，反之亦然，此数的默认值是 0.5。

②　plot(x,y,'r')　　设置线的颜色

r 表示画出红色的线，其余颜色设置见下表：

红	黄	紫	青	绿	兰	白	黑
r	y	m	c	g	b	w	k

③　plot(x,y,'+')　　设置绘出线的标记

上述命令表示用标记+绘出线，设置标记见下表：

星形	点	十字形	叉形	菱形	圆形	五角形	正方形	三角形
*	.	+	×	D	O	P	S	^

颜色与标记可以组合使用，例如　　plot(x,y,’+g’)

2.grid　画网格

格式　grid on　　绘图形加上网格

grid off　　去掉网格

3.hold　保持图形

格式　hold on　　保持图形

hold off　　取消此功能

使用 plot 绘出一条曲线后，再绘出另一条曲线之前，需用此命令将原曲线保持下来。

4.xlabel 和 ylabel　给坐标轴加标注

给 x 和 y 坐标轴加上标注

例如　xlabel('x')　　给 x 轴加上标注 x

ylabel('y=sin(x)')　给 y 轴加上标注 y=sin(x)

5.title　给图形加上标题

例如　　title('pressure Rario')

6.clf 和 cla　　清除图形窗口中的全部内容

7.subplot　　绘制图形阵列

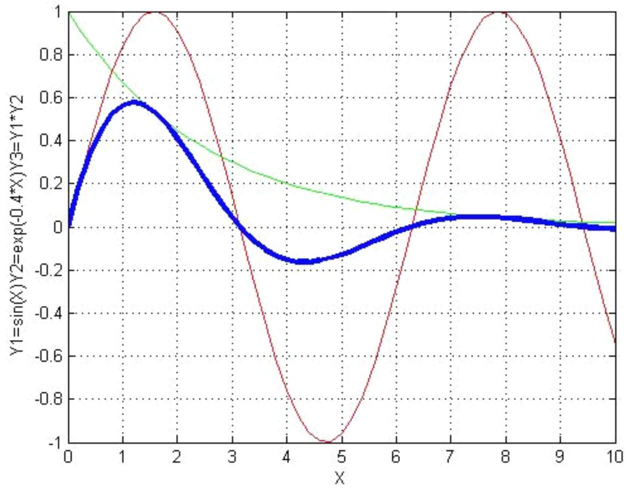
调用格式为　　subplot(m,n,k)

在图形窗口内绘制 m×n 个图形阵列，k 是图形窗口的序号。见下述[例 2]。

8.示例

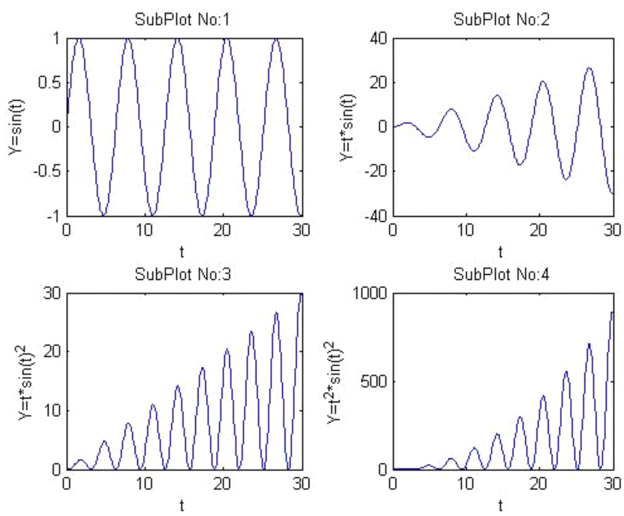
[例 1]　输入下面的 M 文件并运行之

```
clf;
x=0:0.2:10;
y1=sin(x);
y2=exp(-0.4*x);
y3=y1.*y2;
plot(x,y1,'r');
hold on
plot(x,y2,'g');
plot(x,y3,'linewidth',3);
grid on
xlabel('X');
ylabel('Y1=sin(X)  Y2=exp(-0.4*X)   Y3=Y1*Y2');
```



[例 2]　输入下面的 M 文件并运行之

```
clf;
t=0:0.1:30;
subplot(2,2,1);plot(t,sin(t));
title('SubPlot No:1');
xlabel('t');ylabel('Y=sin(t)');
subplot(2,2,2);plot(t,t.*sin(t));
title('SubPlot No:2');
xlabel('t');ylabel('Y=t*sin(t)');
subplot(2,2,3);plot(t,t.*sin(t).^2);
title('SubPlot No:3');
xlabel('t');ylabel('Y=t*sin(t)^2');
subplot(2,2,4);plot(t,t.^2.*sin(t).^2);
title('SubPlot No:4');
xlabel('t');ylabel('Y=t^2*sin(t)^2');
```



垂直叠放的两个图形可通过如下方式绘制：

```
subplot(2,1,1);plot(…;
subplot(2,1,2);plot(…;
```

4-2. 图形的交互编辑

图 4-2-1 所示为图形窗口左上角局部。

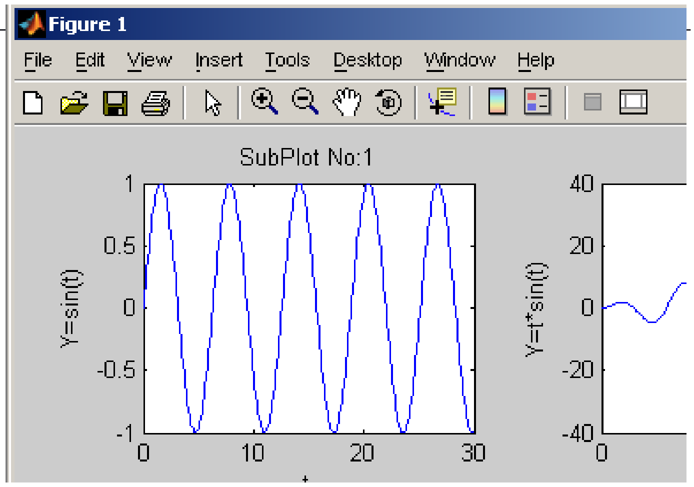


图　4-2-1

1. 改变曲线的属性

用鼠标点击菜单栏中按钮，移动鼠标使其指向所要编辑曲线上的任意一点。按下鼠标右键，曲线变成连续的黑点，并弹出下拉菜单。点击菜单中各条命令，则可以改变曲线的颜色、线宽、标记和曲线类型等属性。

2.其他的编辑命令

通过编辑窗口内的 Tools 菜单项亦可完成若干编辑功能。读者可以自行摸索。

第二部分 数值计算

§1. 方程求根

1-1.牛顿迭代法

[例 1]求解方程$\left(0.01x+1\right)\sin x-\frac{x-0.01}{x^2+1}-0.0096=0$在 x_0=4 附近的一个根。

1. 编写牛顿迭代法的函数 M 文件

```
function  x=Newt_n(f_name,x0)
x=x0;
xb=x+1;
k=0;
n=50;
del_x=0.01;
while abs(x-xb)>0.000001
    k=k+1;
    xb=x;
    if k>=n   break;end;
    y=feval(f_name,x);
    y_driv=(feval(f_name,x+del_x)-y)/del_x;
    x=xb-y/y_driv;
    fprintf('k=%3.0f,x=%12.5e,y=%12.5e,yd=%12.5e\n',k,x,y,y_driv);
end;
fprintf('\n       Final answer=%12.6e\n',x);
```

用默认文件名 Newt_n.m 存盘。

2. 编写待求方程的函数 M 文件

```
function  y=eqn_1(x)
y=(0.01*x+1)*sin(x)-(x-0.01)*(x^2+1)^(-1)-0.0096;
```

用默认文件名 eqn_1.m 存盘。

3. 求解步骤

在命令窗口中键入 Newt_n('eqn_1',4)

显示：

```
k=   1,x=2.36795e+000,y=-1.03138e+000,yd=-6.31954e-001
k=   2,x=2.92631e+000,y=3.48815e-001,yd=-6.24716e-001
  :
  :
k=   6,x=2.82170e+000,y=-9.55313e-009,yd=-8.88819e-001
              Final answer=2.821702e+000
```

注意：Newt_n.m 和 eqn_1.m 应保存在当前目录。

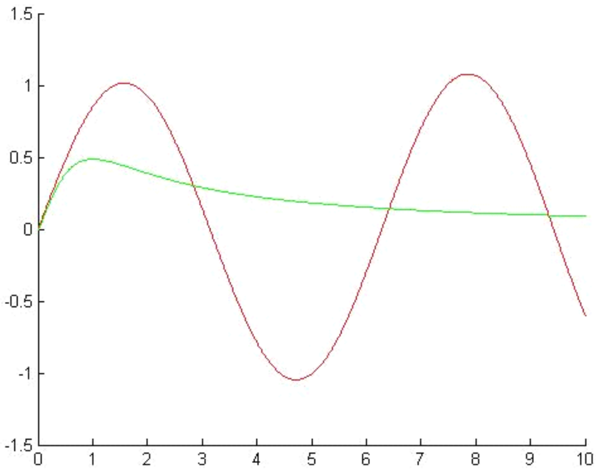
1-2. 图解法确定迭代的初始点

方程$(0.01x+1)\sin x-\dfrac{x-0.01}{x^2+1}-0.0096=0$具有多重根，若要求出某一区间（如$x\in[0,10]$）的所有根，可用图解法确定其初始点，然后再调用 Newt_n 函数解之，具体步骤为：

1.绘方程曲线

该方程的解也就是$\begin{cases} y_1=(0.01x+1)\sin x \\ y_2=\dfrac{x-0.01}{x^2+1}-0.0096 \end{cases}$的交点，故应绘出曲线 y_1 和 y_2，观测两条曲线交点的坐标值。输入 M 文件如下：

```
clf;
hold on;
x=0:0.01:10;
y1=(0.01*x+1).*sin(x);
y2=(x-0.01)./(x.^2+1)-0.0096;
plot(x,y1,'r');
plot(x,y2,'g');
```



观测图形，两条曲线在$x\in[0,10]$有 3 个交点，交点 x 坐标值约为 3、6.5 和 9.5，可将这些点作为牛顿迭代法的初始点。

2.求解

键入：Newt_n('eqn_1',3)
显示：ans=2.8217
键入：Newt_n('eqn_1',6.5)
显示：ans=6.4351
键入：Newt_n('eqn_1',9.5)
显示：ans=9.3189

§ 2. 线性方程组

2-1.迭代法的收敛性

[例 2]对于$\begin{cases} 10x_1-x_2-2x_3=7.2 \\ -x_1+10x_2-2x_3=8.3 \\ -x_1-x_2+5x_3=4.2 \end{cases}$建立 Jocobi 迭代格式为：

$$\begin{bmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \\ x_3^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{k} \\ x_2^{k} \\ x_3^{k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.72 \\ 0.83 \\ 0.42 \end{bmatrix}$$，判断其收敛性。

1) 解法一：

① 输入迭代矩阵 B= $\begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0 \end{bmatrix}$

② 调用求矩阵特征值命令（eig 命令）

输入：eig(B)

显示：ans= $\begin{matrix} -0.1000 \\ 0.3372 \\ -0.2372 \end{matrix}$

矩阵 B 的谱半径 $\rho(B)$ 为该矩阵的最大特征值，故 $\rho(B)$=0.3372<1，该迭代格式收敛。

2) 解法二：

调用求矩阵范数的命令（norm 命令）

若矩阵 B 的任意一种算子的范数小于 1，则迭代收敛。故可计算 $\|B\|_\infty$、$\|B\|_1$ 或 $\|B\|_2$ 中的任意一种，只要小于 1，即可判断出迭代收敛。

输入：norm(B,1)

显示：ans=0.4000

即 $\|B\|_1$ =0.4000<1，该迭代格式收敛。亦可调用 norm(B,2)或 norm(B,inf)来判断。

[例 3]对于[例 2]的线性方程组，若建立迭代格式为

$$\begin{bmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \\ x_3^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 10 & -2 \\ -1 & 0 & 5 \\ 5 & -0.5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{k} \\ x_2^{k} \\ x_3^{k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8.3 \\ -4.2 \\ -3.6 \end{bmatrix}$$，其收敛性如何？

2-2.线性方程组的病态问题

[例 4]分析方程组 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.0001 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ 的病态性。

① 输入该方程的系数矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.0001 \end{bmatrix}$

② 调用求矩阵条件数命令（cond 命令)

输入：cond(A,1)

显示：ans=4.0004e+004

即 cond(A)= $\|A^{-1}\|_1 \cdot \|A\|_1$ =4.0004×10⁴>>1，该方程组是病态方程组。亦可调用 cond(A)或 cond(A,inf)命令

来判断。

2-3.求解线性方程组

1.调用 x=A\b 命令求解方程组

对于线性方程组 AX=b（其中 A 为 n×n 的矩阵、x 和 b 均为 n 维列向量），有 $X=A^{-1}b$,该式与 Matlab 的矩阵左除运算等效，即 X=A\b。

[例 5]求解 $\begin{cases} 3x_1+2x_2=-1 \\ x_1-x_2=1 \end{cases}$

① 输入系数矩阵 $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ 和常数列向量 b= $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

② 输入：X=A\b

显示：X=0.2000

-0.8000

2.利用 LU 分解求解方程组

1) LU 分解

对于 $\begin{cases} 2x_1+x_2-3x_3=2 \\ -x_1+3x_2+2x_3=0 \\ 3x_1+x_2-3x_3=1 \end{cases}$

① 输入系数矩阵 $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ 和常数项列向量 b= $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

② 调用 LU 分解命令（lu 命令）

输入：[l,u,p]=lu(A)

```
显示：l=1.0000        0         0
       -0.3333    1.0000      0
        0.6667    0.1000    1.0000
     u=3.0000     1.0000   -3.0000
        0         3.3333    1.0000
        0         0        -1.1000
     p=0    0    1
        0    1    0
        1    0    0
```

其中 l 为单位下三角阵（对角线元素均为 1），u 为上三角；p 为置换矩阵，它记录了选主元高斯消去法中行交换的信息。它们之间的关系为 p*A=l*u

2) 利用 LU 分解求解线性方程组

对于 AX=b，用 p 左乘方程两边，得

pAX=pb

∵pA=lu 则 luX=pb

令　　　　　　uX=y　　　(a)
则　　　　　　ly=pb　　　(b)

通过对原方程组系数矩阵 A 的 LU 分解，将求解 AX=b 的问题转化为求解方程组(a)和方程组(b)。其操作步骤为：

① 求方程组(b)中的未知变量 y

输入：y=l\(p*b)

显示：y=1.0000
　　0.3333
　　1.3000

② 求方程组(a）中的未知变量 X

输入：X=u\y

显示：X=-1.0000
　　0.4545
　　-1.1818

亦可将上述①、②的命令合并为 X=u\(l\(p*b))

§3.插值和拟合

3-1.Lagrange 插值

1.编写 Lagrange 函数 M 文件

```
function  fi=lagrange(x,y,xi)
fi=zeros(size(xi));
npl=length(y);
for  i=1:npl
    z=ones(size(xi));
    for  j=1:npl
        if   i~=j,z=z.*(xi-x(j))/(x(i)-x(j));
        end;
    end;
    fi=fi+z*y(i);
end
```

注意：① 插值节点坐标 x、y 为数组，待插值的 xi 可以是一个标量，亦可以是数组。
② Lagrange 函数 M 文件必须保存在当前目录内。

2.调用 Lagrange 插值函数

[例 6]已知插值节点

x_k	2	4	6	8	10
y_k	5	7	9	11	13

求 xi=2.5、5、7.3、9.1 时的函数值。

① 在命令窗口内输入插值节点坐标　x、y 以及待插值的数据 xi 如下：

x=[2,4,6,8,10]

y=[5,7,9,11,13]

xi=[2.5,5,7.3,9.1]

② 调用 Lagrange 函数

输入：yi=lagrange(x,y,xi)

显示：yi=5.5000 8.0000 10.3000 12.1000

3-2.代数多项式插值

1.代数多项式的表示方法

已知(n+1)个节点信息(x_i,y_i)i=0,1…, n 可以构造一个 n 次代数插值多项式

$$p_n = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

在 Matlab 里，上述多项式用一个数组表示，其元素为多项式的系数，并且从左至右按降幂排列。

例如，多项式 $y = 2x^3 + 4x - 5$ 被表示为 p=[2 0 4 -5]。

2. 代数多项式的插值计算

分成二步进行：①通过 polyfit 命令，对已知(n+1)个节点唯一确定一个 n 次代数插值多项式；②利用这个代数插值多项式计算待插点处的函数值。

1) 构造 n 次代数插值多项式

调用格式 polyfit(x,y,n)

其中数组 x,y 是已知节点坐标，n 是代数插值多项式的阶数。利用该命令可求得 n 次代数多项式

$p(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$ 的系数。

例如，

输入节点数据：x=[1.1,2.3,3.9,5.1]

y=[3.887,4.276,4.651,2.117]

调用命令：a=polyfit(x,y,length(x)-1)

显示：a=-0.2015 1.4385 -2.7477 5.4370

其中 length(x)-1=4-1=3,故所得的多项式是：

$$y = -0.2015x^3 + 1.4385x^2 - 2.7477x + 5.4370$$

2) 代数多项式的插值计算

调用格式 polyval(a,xi)

其中 a 为插值多项式的系数数值，xi 为待插点数组。若要计算 xi=1.8,1.95,2.93,4.8 时的函数值，调用该命令即可。

输入：xi=[1.8,1.95,2.93,4.8]

yi=polyval(a,xi)

显示：yi=3.9771 4.0552 4.6685 3.1127

若调用 Lagrange 插值，可得到与上面相同的结果，说明了插值多项式存在的唯一性。

3-3. 插值误差

以下用作图方法观察插值的误差。

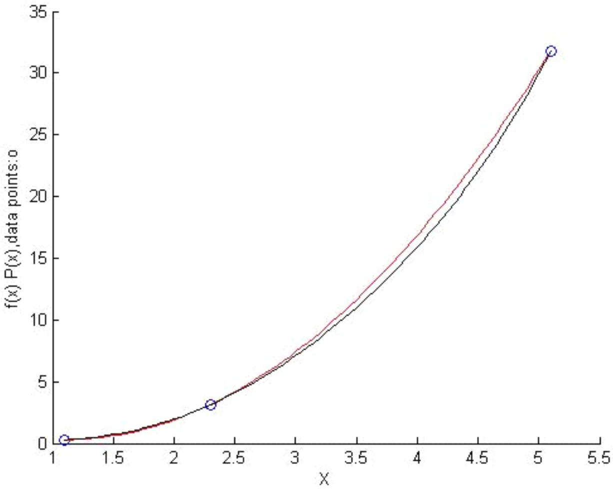
[例 7]已知曲线 $f(x) = e^{\frac{x}{1.5}} - 2\sin x$，采用 3 个节点

x	1.1	2.3	5.1
y	f(1.1)	f(2.3)	f(5.1)

构造插值多项式 $p_2(x)$作为 f(x)的近似，通过作图的方法观察在 $x\in[1.1,5.1]$ 的误差。

运行以下脚本 M 文件

```
clear,clf;hold on;
x=[1.1,2.3,5.1];
y=exp(x/1.5)-2*sin(x);
plot(x,y,'o');
n=length(x)-1;
coeff=polyfit(x,y,n);
xp=1.1:0.05:5.1;
yp=polyval(coeff,xp);
plot(xp,yp,'r');
yh=exp(xp/1.5)-2*sin(xp);
plot(xp,yh,'k');
xlabel('X');
ylabel('f(x) P(x),data points:o');
```



图中黑线为曲线 $f(x)=e^{\frac{x}{1.5}}-2\sin x$，

红线为由 3 个节点构成的 2 次插值多项式，圆圈表示插值节点。

3-4.分段线性插值

调用格式　　yi=interpl(x,y,xi,'linear')

其中数组 x 和 y 为已知节点坐标，xi 是待插值的标量或数组，对应的 yi 值通过线性插值算出。注意，调用格式中的数组全部用列向量表示。

[例 8]已知数据

x_k	1	3	5.2	8	10	13
y_k	4	6	3	8	9.1	-4

求 xi=4,5.5,11.7 时线性插值函数之值。

①在命令窗口内输入列数组 x、y 和 xi

```
x=[1, 3, 5. 2, 8, 10, 13]’
y=[4, 6, 3, 8, 9. 1, -4]’
xi=[4, 5. 5, 11. 7]’
```

②调用分段线性插值命令

```
yi=interp1(x,y,xi,'linear')
```

显示：yi=4.6364
3.5357
1.6767

3-5.数据的曲线拟合

[例 9]已知一组数据，作拟合曲线

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0.1	0.4	0.5	0.7	0.7	0.9

y_i	0.61	0.92	0.99	1.52	1.47	2.03

1) 方法一：求解正规方程

将上述一组数据标在坐标纸上，观察到各点在一条直线附近，可设拟合曲线为

$$y=c_0+c_1x$$

其正规方程为：

$$\begin{bmatrix}(\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1)\\ (\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(\varphi_0,f)\\ (\varphi_1,f)\end{bmatrix}$$

其中 $\varphi_0(x)=1,\varphi_1(x)=x$

$$(\varphi_0,\ \varphi_0)=\sum_{i=0}^{5}\varphi_0(x_i)\cdot\varphi_0(x_i)=\sum_{i=0}^{5}1\cdot 1=6$$

$$(\varphi_0,\ \varphi_1)=(\varphi_1,\ \varphi_0)=\sum_{i=0}^{5}\varphi_0(x_i)\cdot\varphi_1(x_i)=\sum_{i=0}^{5}1\cdot x_i=3.3$$

$$(\varphi_1,\ \varphi_1)=\sum_{i=0}^{5}\varphi_1(x_i)\cdot\varphi_1(x_i)=\sum_{i=0}^{5}x_i^{\ 2}=2.21$$

$$(\varphi_0,\ f)=\sum_{i=0}^{5}\varphi_0(x_i)\cdot y_i=\sum_{i=0}^{5}1\cdot y_i=7.54$$

$$(\varphi_1,\ f)=\sum_{i=0}^{5}\varphi_1(x_i)\cdot y_i=\sum_{i=0}^{5}x_i\cdot y_i=4.844$$

在 Matlab 命令窗口中

输入： a=[6,3.3;3.3,2.21]

b=[7.54,4.844]'

c=a\b

显示： c=0.2862

1.7646

即所要求的拟合曲线为 y=0.2862+1.7646x

2) 方法二：调用 polyfit(x,y,n)

调用 polyfit(x,y,n)，可求得拟合代数多项式 $p(x)=c_nx^n+c_{n-1}x^{n-1}+\cdots+c_1x+c_0$ 的系数，其中 x, y 为节点坐标数组，n 为拟合多项式的阶数。对于[例 9]中的节点数据，求拟合直线方程，操作如下：

输入： x=[0.1,0.4,0.5,0.7,0.7,0.9],

y=[0.61,0.92,0.99,1.52,1.47,2.03]

c=polyfit(x,y,1)

显示： c=1.7646 0.2862

即所要求的拟合曲线为 y=1.7646x+0.2862

§4. 数值积分

4-1.复合梯形求积公式

[例 10]用复合梯度公式求 $I=\int_0^1\frac{4}{1+x^2}dx$（此题的解析解为 π）。

复合梯形求积公式为

$$I=\int_a^b f(x)dx\approx\frac{h}{2}\left[f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)+f(b)\right]$$

其中 $h=\dfrac{b-a}{n},x_k=a+kh,k=1,2,\cdots n-1$ 。

1) 输入复合梯形公式的函数 M 文件

```
function t=trapezia(a,b,n,f_name)
h=(b-a)/n;
fa=feval(f_name,a);
fb=feval(f_name,b);
t1=0;
for k=1:n-1
     x(k)=a+k*h;
     t1=t1+feval(f_name,x(k));
end;
t=h*(fa+2*t1+fb)/2;
```

2) 输入待积分的函数 M 文件

[例 10]中的被积函数为 $f(x)=\dfrac{4}{1+x^2}$ ，其 M 文件如下，并以 func_ts.m 文件名存盘。

```
function y=func_ts(x)
y=4/(1+x^2);
```

3) 调用复合梯形公式

若取 n=8，则输入：t=trapezia(0,1,8,'func_ts')

显示：t=3.1390

4-2.复合 Simpson 求积公式

复合 Simpson 求积公式为

$$I=\int_a^b f(x)dx\approx\frac{h}{3}\left\{\frac{1}{2}\left[f(a)+f(b)\right]+\sum_{k=1}^{n}[2f(x_{2k-1})+f(x_{2k})]\right\}$$

其中 $h=\dfrac{b-a}{n},x_k=a+k\dfrac{h}{2},k=1,2,\cdots,2n$ 。

1) 输入复合 Simpson 公式的函数 M 文件

```
function  s=simpson(a,b,n,f_name)
h=(b-a)/n;
for  k=1:2*n
     x(k)=a+k*h/2;
end;
fa=feval(f_name,a);
fb=feval(f_name,b);
s1=0;
s2=0;
for  k=1:n
```

```
        s1=s1+feval(f_name,x(2*k-1));
        s2=s2+feval(f_name,x(2*k));
    end;
    s=h*(0.5*(fa-fb)+2*s1+s2)/3;
```

2) 输入待积分的函数 M 文件

此处仍以[例 10]中的被积函数为例，且以 fun_ts.m 文件名存盘。

3) 调用复合 Simpson 公式

若取 n=4，则输入：s=simpson(0,1,4,'func_ts')

显示：s=3.1416

通过对复合梯形公式和复合 Simpson 公式的比较，对于同一个被积函数，前者划分为 8 等分、计算结果为 3.1390；后者划分为 4 等分、计算结果为 3.141。两种算法计算被积函数值的次数相近（复合梯形公式计算被积函数值 9 次、复合 Simpson 公式 10 次），但复合 Simpson 公式的精度（代数精度 3）高于复合梯形公式（代数精度 1）。

§5. 常微分方程的数值解法

5-1.Euler 方法

1) 计算公式

对于初值问题$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$，Euler 公式 $y_{i+1} = y_i + h\cdot f(x_i, y_i)$。以下通过例题，说明 Euler 方法的使用。

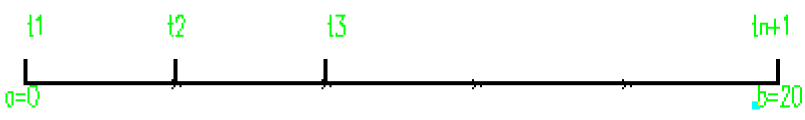
[例 11]质量 m=70kg 的人在 t=0 时刻从飞机上跳出，假设跳伞者垂直下降，且初始时刻垂直速度速度 $v(t_1)=0$，空气阻力 $F=cv^2$（N），c=0.27kg/m，取步长 h=0.1。试求速度，并绘出 $0 \le t \le 20s$ 的解的图形。

2) 分析

由牛顿第二定律，$m\dfrac{dv}{dt} = -F + mg$，式中重力加速度 $g=9.8m/s^2$。那么，建立初值问题为：

$$\begin{cases} v' = f(t,v) = -\dfrac{cv^2}{m} + g \\ v(t_1) = 0 \end{cases} \tag{5-1}$$

根据例题要求，$t \in [a,b] = [0,20]$，将求解区间离散如下：



其中等分数 $n = \dfrac{b-a}{h}$

对于所求的（5-1）式，采用 Euler 公式，可得下述的计算格式：

$$\begin{cases} t_1 = 0 \\ t_i = t_1 + (i-1)h \end{cases} i = 2,3,\cdots,n+1$$

$$\begin{cases} v_1 = 0 \\ v_i = v_{i-1} + h * f(t_{i-1}, v_{i-1}) \end{cases} \quad i = 2,3,\cdots,n+1$$

3) 编写 f(t,v)函数程序

```
function   f=descent(t,v)
c=0.27,m=70,g=9.8;
f=-c*v^2/m+g;
```

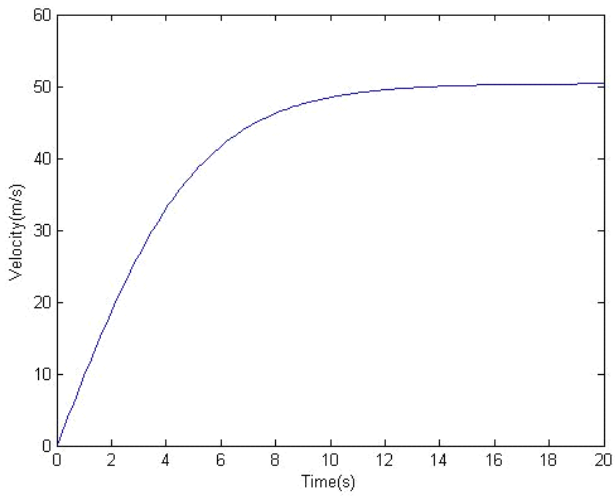
4) 编写该问题的 Euler 法求解程序

```
clear,clc;
a=0,b=20,h=0.1;
n=(b-a)/h;
t(1)=0;
v(1)=0;
for   i=2:n+1
      t(i)=t(1)+(i-1)*h;
      v(i)=v(i-1)+h*descent(t(i-1),v(i-1));
end;
for   i=1:n+1
      fprintf('Time=%f',t(i));
      fprintf('    Velocity=%f\n',v(i));
end;
plot(t,v);
xlabel('Time    (s)');
ylabel('Velocity       (m/s)');
```

5) 运行

求解[例 11]的结果如下：

```
Time=0.000000     Velocity=0.000000
Time=2.000000     Velocity=18.730327
Time=4.000000     Velocity=32.989678
Time=6.000000     Velocity=41.671830
Time=8.000000     Velocity=46.250031
Time=10.000000    Velocity=48.480593
Time=12.000000    Velocity=49.525261
Time=14.000000    Velocity=50.005441
Time=16.000000    Velocity=50.224250
Time=18.000000    Velocity=50.323563
Time=20.000000    Velocity=50.368558
```



5-2.改进的 Euler 方法

1) 计算公式

对于初值问题 $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$，改进的 Euler 公式为

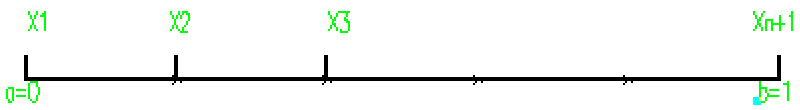
$$\begin{cases} \bar{y}_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \\ y_{i+1} = y_i + \dfrac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \bar{y}_{i+1})\right] \end{cases}$$

以下通过例题，说明改进的 Euler 方法的使用。

[例 12]求解 $\begin{cases} y' = f(x,y) = y - \dfrac{2x}{y} \\ y(x_1) = 1 \end{cases}$ 在 $x \in [0,1]$ 上各节点的数值解，取长步 h=0.1。

2) 分析

根据题意 $x \in [0,1]$，求解区间离散如下：



其中等分数 $n = \dfrac{b-a}{h}$。

对于[例 12]所求问题，采用改进的 Euler 公式，得如下计算格式：

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_i = x_1 + (i-1)h \end{cases} i = 2,3,\cdots,n+1$$

$$\begin{cases} y_1 = 1 \\ \bar{y}_i = y_{i-1} + h \cdot f(x_{i-1}, y_{i-1}) \qquad i = 2,3,\cdots,n+1 \\ y_i = y_{i-1} + \dfrac{h}{2}\left[f(x_{i-1}, y_{i-1}) + f(x_i, \bar{y}_i)\right] \end{cases}$$

3) 编写相应的程序

① 编写[例 12]中的 f(x,y)的函数程序

```
function  f=algeb(x,y)
f=y-2*x/y;
```

② 编写改进 Euler 方法的求解程序

```
clear,clc;
a=0,b=1,h=0.1;
n=(b-a)/h;
x(1)=0;
y(1)=1;
for  i=2:n+1
    x(i)=x(1)+(i-1)*h;
    yp(i)=y(i-1)+h*algeb(x(i-1),y(i-1));
    y(i)=y(i-1)+0.5*h*(algeb(x(i-1),y(i-1))+algeb(x(i),yp(i)));
```

```
    end;
    for   i=1:n+1
        fprintf('x=%f',x(i));
        fprintf('    y=%f\n',y(i));
    end
```

4) 运行结果

采用改进的 Euler 方法求解本例所得结果，与采用 Euler 方法所得结果比较见下表：

节点	精确解	Euler 方法	改进的 Euler 方法
0	1	1	1
0.1	1.095445	1.1	1.095909
0.2	1.183216	1.191818	1.184097
0.3	1.264911	1.277438	1.266201
0.4	1.341641	1.358213	1.343360
: :	: :	: :	: :

由表中数据可知，当步长 h 相同时，改进的 Euler 方法的计算精度比 Euler 方法的高，读者可自行采用 Euler 方法求解此例。

5) 步长 h 对求解精度的影响

以改进的 Euler 方法求解本例，取步长 h=0.05、0.1、0.2 时的结果如下表：

节点	精确解	h=0.05	h=0.1	h=0.2
0	1	1	1	1
0.05		1.048869		
0.1	1.095445	1.095561	1.095909	
0.15		1.140345		
0.2	1.183216	1.183437	1.184097	1.186667
0.25		1.225017		
0.3	1.264911	1.265236	1.266201	
0.35		1.304219		
0.4	1.341641	1.342075	1.343360	1.348312
: :	: :	: :	: :	: :

从表中结果中，当步长 h 取得越小，计算精度则越高，计算量却因此而加大。

读者将本节(3)中所述改进 Euler 方法程序的第 8 行 yp(i)=…删去并将第 9 行 y(i)=…改写成 y(i)=y(i-1)+h*algeb(x(i-1),y(i-1)),即可得到 Euler 方法求解的程序。

5-3.四阶龙格-库塔方法

1) 计算方法

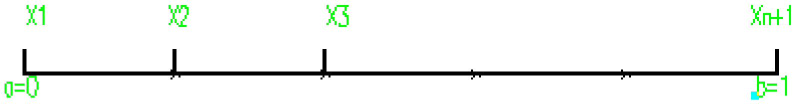
对于初值问题$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$，常用的四阶龙格-库塔公式为：

$$
\begin{cases}
k_1 = f(x_i, y_i) \\
k_2 = f\left(x_i + \dfrac{h}{2}, y_i + \dfrac{h}{2}k_1\right) \\
k_3 = f\left(x_i + \dfrac{h}{2}, y_i + \dfrac{h}{2}k_2\right) \\
k_4 = f(x_i + h, y_i + hk_3) \\
y_{i+1} = y_i + \dfrac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)
\end{cases}
$$

以下仍以[例 12]所求的问题为例，说明四阶龙格-库塔方法的使用。

2) 分析

离散求解区间[0,1]



，其中等分数 $n = \dfrac{b-a}{h}$ 。对于[例 12]所求问题，采用四阶龙格-库塔公式的计算格式为

$$
\begin{cases}
x_1 = 0 \\
x_i = x_1 + (i-1)h
\end{cases}
\quad i = 2,3,\cdots,n+1
$$

$$
\begin{cases}
k_1 = a\lg eb(x_{i-1}, y_{i-1}) \\
k_2 = a\lg eb\left(x_{i-1} + \dfrac{h}{2}, y_{i-1} + \dfrac{h}{2}k_1\right) \\
k_3 = a\lg eb\left(x_{i-1} + \dfrac{h}{2}, y_{i-1} + \dfrac{h}{2}k_2\right) \\
k_4 = a\lg eb(x_{i-1} + h, y_{i-1} + hk_3) \\
y_i = y_{i-1} + \dfrac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad i = 2,3,\cdots,n+1
\end{cases}
$$

3) 编写四阶龙格-库塔计算程序

```
clear,clc;
a=0,b=1,h=0.2;
n=(b-a)/h;
x(1)=0;
y(1)=1;
for   i=2:n+1
      k1=algeb(x(i-1),y(i-1));
      k2=algeb(x(i-1)+h/2,y(i-1)+h*k1/2);
      k3=algeb(x(i-1)+h/2,y(i-1)+h*k2/2);
      k4=algeb(x(i-1)+h,y(i-1)+h*k3);
      y(i)=y(i-1)+h*(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
      x(i)=x(1)+(i-1)*h;
end;
```

```
for   i=1:n+1
      fprintf('x=%f',x(i));
      fprintf('    y=%f\n',y(i));
end;
```

4) 运行结果

节点	精确解	Euler 方法 h=0.1	改进 Euler 方法 h=0.1	四阶龙格-库塔 h=0.2
0	1	1	1	1
0.1	1.095445	1.1	1.095909	
0.2	1.183216	1.191818	1.184097	1.183229
0.3	1.264911	1.277438	1.266201	
0.4	1.341641	1.358213	1.343360	1.3411667
: :	: :	: :	: :	: :

从上表数据可知，四阶龙格-库塔方法取 h=0.2 时的精度比改进的 Euler 方法取 h=0.1 时要高。从节点 0 到 0.2，四阶龙格-库塔方法用了一步，调用 f(x,y)4 次；改进的 Euler 方法用了二步，每步调用 f(x,y)2 次，共调用了 f(x,y)也是 4 次。两者计算相同，但前者精度高于后者。

习题

一、方程求根

1.用牛顿迭代法求解下列方程的正根

$(1)\ 0.5e^{\frac{x}{3}}-\sin x=0$

$(2)\ \log(1+x)-x^2=0$

$(3)\ e^x-5x^2=0$

$(4)\ x^3+2x-1=0$

$(5)\ \sqrt{x+2}-x=0$

2.两个椭圆最多有 4 个交点，其方程如下：

$$(x-1)^2+\left(y-3+2x^2\right)=5$$

$$2(x-3)^2+\left(\frac{y}{3}\right)^2=4$$

试用图解法与牛顿迭代法找出交点坐标。

提示：消掉 x 或 y，只剩一个变量再求解。

3.先用图解法确定初始点，然后再求方程 $x\sin x-1=0\quad x\in[0,10]$ 的所有根。

二、线性方程组

1.计算下列矩阵的逆矩阵，并验证 $AA^{-1}=I$ 和 $A^{-1}A=I$。

$$A=\begin{bmatrix}4&3&2&1\\3&3&2&1\\2&2&2&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}1&4&5\\2&1&2\\8&1&1\end{bmatrix}\qquad C=\begin{bmatrix}0&5&1\\-1&6&3\\8&-9&5\end{bmatrix}$$

2.对下述矩阵进行 LU 分解并验证此分解。

$$A=\begin{bmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&2\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}2&-1&0\\-3&4&-1\\0&-1&2\end{bmatrix}$$

3.用 LU 分解求解下列方程组

$$\begin{bmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\qquad \begin{bmatrix}2&-1&1\\-3&4&-1\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}$$

4.用三角分解法分别求 A 的逆矩阵：

记 $b_1=[1\quad 0\quad 0]^T$、$b_2=[0\quad 1\quad 0]^T$、$b_3=[0\quad 0\quad 1]^T$，用三角分解法分别求解线性方程组 $AX=b_1$、$AX=b_2$、

$AX=b_3$。由于三个方程组的系数矩阵相同，可以将分解后的矩阵重复使用。对于第一个方程组，由于 A=LU，所以求解下三角方程组 $LY=b_1$,再求解上三角方程组 UX=Y，则可得 A^{-1} 的第一列列向量；类似可解第二、第三个方程组，得 A^{-1} 的第二列列向量和第三列列向量。由三个列向量拼装可得逆矩阵 A^{-1}。

设矩阵 $A=\begin{bmatrix} 20 & 2 & 3 \\ 1 & 8 & 1 \\ 2 & -3 & 15 \end{bmatrix}$

5.给定 n×n 的 Hilber 矩阵 $A=[a_{ij}]$,其中 $a_{ij}=\dfrac{1}{1+i+j}$。计算 n=2，3，…，14 时 A 的条件数，A 的行列式值以及 A 行列式值与 A^{-1} 行列式值的乘积。

提示：Hilber 矩阵是一个著名的病态矩阵，随 n 的增大 A 接近奇异，乘积 $|A|\cdot|A^{-1}|$ 对舍入误差非常敏感，乘积与 1 有明显偏差。

6.验证 Hilber 矩阵的病态性：

对于矩阵 $H=\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix}$，取右端向量 $b=\begin{bmatrix} 11/6 \\ 13/12 \\ 47/60 \end{bmatrix}$，验证：

1) 向量 $X=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T$ 是方程组 HX=b 的准备解；

2) 取右端向量 b 的三位有效数字得 $b=\begin{bmatrix}1.83 & 1.08 & 0.783\end{bmatrix}^T$，求方程组的解，并与 $X=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T$ 作比较，说明矩阵的病态性。

三、插值与拟合

1.以下表格数据由函数 $f(x)=e^x$ 得到，

x_k	0	0.4	0.8	1.2
$f(x_k)$	1.0	1.491	2.225	3.320

采用 Larange 插值，求 x_i=0.2，0.6，1.0 处的函数值 y_i，以及误差值 $f(x_i)-y_i$。

2.编写程序，用间距为 h=0.4 的等距插值点计算区间 $0\le x\le 2$ 上函数 y=x·cosx 的 Lagrange 插值，且每隔 0.1 计算一次插值误差，并画出误差分布图。

3.用 polyfit 命令将下列多项式转换为幂级数形式。

$$u(x)=\frac{(x-1)(x-2.5)(x-4)(x-6.1)(x-7.2)(x-10)}{(5-1)(5-2.5)(5-4)(5-6.1)(5-7.2)(5-10)}$$

4.已知飞机降落曲线为 $y(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$，式中 y 表示飞机高度，x 表示飞机距指挥塔的距

离。该函数满足条件 $y(0)=0$、$y(12000)=1000$、$y'(0)=0$、$y'(12000)=0$

1) 试利用所满足的条件确定飞机降落曲线；
2) 绘制出飞机降落曲线。

5.用最小二乘法确定拟合直线（用正则方程求，再用 polyfit 命令验证）

i	0	1	2	3	4
x_i	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
y_i	2.0	3.2	4.1	4.9	5.9

6.用 polyfit 对下面数据做二次多项式拟合，并绘出图形。

i	0	1	2	3	4	5	6
x_i	0	1	2	3	4	5	6
y_i	0	2.3	4.2	5.7	6.5	6.9	6.8

7.用三次多项式拟合下面数据，并做出图形。

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
y_i	0	7.78	10.68	8.37	3.97	0

8.由开普勒第一定律知，小行星轨道的椭圆方程为

$$a_1x^2+2a_2xy+a_3y^2+2a_4x+2a_5y+1=0$$

已知所测出的 5 个观察点坐标数据（单位：万公里）为

x_i	53605	58460	62859	66662	68894
y_i	6026	11179	16954	23492	68894

试建立该椭圆方程。

四、数值积分

1.用复合梯形求积法计算下列积分，取 n=2、4、8、16

$$(a)\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} tgx dx$$

$$(b)\ \int_0^1 e^x dx$$

$$(c)\ \int_0^1 \frac{1}{2+x} dx$$

2.用复合 Simpson 求积法计算下列积分，取 n=4、8、16、32

$$(a)\ \int_0^{\pi}\frac{1}{2+\cos x}dx$$

$$(b)\ \int_0^{2}\frac{\log(1+x)}{x}dx$$

$$(c)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\sin^2 x}dx$$

3.用复合梯形求积法计算下面积分，取 h=0.4、0.2、0.1。$I=\int_0^{0.8}f(x)dx$，其中被积函数以下面表格形式给出：

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
f(x)	0	2.1220	3.0244	3.2568	3.1399	2.8579	2.5140	2.1639	1.8358

4.在习题 3 中，利用 h=0.2、0.1 的梯形法积分结果进行龙贝格积分，以求得更精确的积分值。

五、常微分方程

1.试用 Euler 法及改进 Euler 法计算初值问题

$$\begin{cases} y'(t)=y(t)-\dfrac{2t}{y(t)}, t\in[0,1] \\ y(0)=1 \end{cases}$$

取步长 h=0.2，并比较两者误差。

2.用四阶龙格-库塔法求解下列初值问题。

$$(1)\ y'=-\frac{0.9y}{1+2x} \qquad y(0)=1$$

$$(2)\ y'=-\frac{xy}{1+x^2} \qquad y(0)=2$$

《计算方法》实验报告

专业及班级________________姓名___________________学号___________日期______________

一、方程求根

1.用牛顿迭代法求解下列方程的正根

$\log(1+x)-x^2=0 \quad x=$

$e^x-5x^2=0 \quad x=$

$x^3+2x-1=0 \quad x=$

$\sqrt{x+2}-x=0 \quad x=$

2.先用图解法确定初始点，然后再求方程 $x\sin x-1=0 \quad x\in[0,10]$ 的所有根。

二、线性方程组

1.计算下列矩阵的逆矩阵，并验证之。

$$B=\begin{bmatrix}1&4&5\\2&1&2\\8&1&1\end{bmatrix}, B^{-1}=\begin{bmatrix}\quad&\quad&\quad\\ \\ \\ \end{bmatrix}, BB^{-1}=\begin{bmatrix}\quad&\quad&\quad\\ \\ \\ \end{bmatrix}, B^{-1}B=\begin{bmatrix}\quad&\quad&\quad\\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}0&5&1\\-1&6&3\\8&-9&5\end{bmatrix}, C^{-1}=\begin{bmatrix}\quad&\quad&\quad\\ \\ \\ \end{bmatrix}, CC^{-1}=\begin{bmatrix}\quad&\quad&\quad\\ \\ \\ \end{bmatrix}, C^{-1}C=\begin{bmatrix}\quad&\quad&\quad\\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

2.用两种方法求解下列线性方程组

$$(1)\ \begin{bmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$$

$$(2)\ \begin{bmatrix}2&-1&1\\-3&4&-1\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}$$

① 调用 x=A/b 命令 （1）x=[$]^T$

(2) x=[$]^T$

② 利用 LU 分解

$$（1）\ l=\begin{bmatrix}\quad&\quad&\quad\\ \\ \\ \end{bmatrix} \quad u=\begin{bmatrix}\quad&\quad&\quad\\ \\ \\ \end{bmatrix} \quad p=\begin{bmatrix}\quad&\quad&\quad\\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

调用命令 y=l\(p*b)，求得 y=[$]^T$

调用命令 x=u\y， 求得 x=[$]^T$

（2）$l=\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$ $u=\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$ $p=\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$

调用命令 y=l\(p*b)，求得 y=[$]^T$

调用命令 x=u\y， 求得 x=[$]^T$

三、插值与拟合

1.以下表格数据由函数 $f(x)=e^x$ 得到，

x_k	0	0.4	0.8	1.2
$f(x_k)$	1.0	1.491	2.225	3.320

采用 Lagrange 插值，求 x_i=0.2，0.6，1.0 处的函数值 y_i。以及误差值 $f(x_i)-y_i$。

$x_i=0.2$ $y_i=$ $f(x_i)-y_i=$

$x_i=0.6$ $y_i=$ $f(x_i)-y_i=$

$x_i=1.0$ $y_i=$ $f(x_i)-y_i=$

2.已知飞机降落曲线为 $y(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$，式中 y 表示飞机高度，x 表示飞机距指挥塔的距离。该函数满足条件 $y(0)=0$、$y(12000)=1000$、$y'(0)=0$、$y'(12000)=0$

1) 试利用所满足的条件确定飞机降落曲线；
2) 绘制出飞机降落曲线。

3.用三次多项式拟合下面数据，并做出图形

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
y_i	0	7.78	10.68	8.37	3.97	0

四、数值积分

1.用复合梯形求积法计算下列积分，取 n=2、4、8、16

(1) $\int_0^1 e^x dx$ $T_2=$ $T_4=$ $T_8=$ $T_{16}=$

(2) $\int_0^1 \frac{1}{2+x} dx$ $T_2=$ $T_4=$ $T_8=$ $T_{16}=$

2.用复合 Simpson 求积法计算下列积分，取 n=4、8、16、32

(a) $\int_0^{\pi} \frac{1}{2+\cos x} dx$ $S_4=$ $S_8=$ $S_{16}=$ $S_{32}=$

(b) $\int_0^{2} \frac{\log(1+x)}{x} dx$ $S_4=$ $S_8=$ $S_{16}=$ $S_{32}=$

(c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin^2 x} dx$ $S_4=$ $S_8=$ $S_{16}=$ $S_{32}=$

五、常微分方程

1.试用 Euler 法及改进 Euler 法计算初值问题

$$\begin{cases} y'(t) = y(t) - \dfrac{2t}{y(t)}, t \in [0,1] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

取步长 h=0.2。

Euler 法：

改进 Euler 法：

2.用四阶龙格-库塔法求解初值问题 $y' = -\frac{xy}{1+x^2}$ $y(0) = 2$ $x \in [0,10]$，取 h=1.0。