Tarea 3

Sinencio Granados Dante Jusepee

March 2020

1. Realiza las siguientes sustituciones:

1.1. $(((\forall x(\exists y P_2^2(x,z)) \vee P_2^1(y)))[x := f_1^1(z)])[y := f_3^2(z,x)]$

Aplicamos X en la formula:
$(\forall x(\exists y P_2^2(x,z)[x := f_1^1(z)]) \vee P_2^1(y)[x := f_1^1(z)])[y := f_3^2(z,x)]$

No se pudo sustituir ninguna variable por la regla 3a que encontramos en las laminas:
$(((\forall x(\exists y P_2^2(x,z)) \vee P_2^1(y))))[y := f_3^2(z,x)]$

Aplicamos Y en las formulas:
$(\forall x(\exists y P_2^2(x,z)))[y := f_3^2(z,x)] \vee P_2^1(y)[y := f_3^2(z,x)]$
$\forall x(\exists y P_2^2(x,z)[y := f_3^2(z,x)]) \vee P_2^1(y)[y := f_3^2(z,x)]$

No se pudo sustituir ninguna variable por la regla 3a que encontramos en las laminas:
$\forall x(\exists y P_2^2(x,z)) \vee P_2^1(y)[y := f_3^2(z,x)]$

Sustituimos y:
$\forall x(\exists y P_2^2(x,z)) \vee P_2^1(f_3^2(z,x))$

1.2. $(((\exists x(\forall z(\exists y P_1^3(x,y,z)))) \Leftrightarrow P_2^3(x_1,y,z_2))[x_1 := f_1^3(x,y,z_3)])[z := f_2^1(y)]$

Alfa-Equivalencia ya que X y Y aparecen del lado derecho de la sustitucion:
$(((\exists a(\forall z(\exists b P_1^3(a,b,z)))) \Leftrightarrow P_2^3(x_1,b,z_2))[x_1 := f_1^3(x,y,z_3)])[z := f_2^1(y)]$

Aplicamos x_1 a ambas formulas:
$((\exists a(\forall z(\exists b P_1^3(a,b,z)[x_1 := f_1^3(x,y,z_3)]))) \Leftrightarrow P_2^3(x_1,b,z_2)[x_1 := f_1^3(x,y,z_3)])[z := f_2^1(y)]$

Solo lo sustituimos por la derecha:
$((\exists a(\forall z(\exists b P_1^3(a,b,z)[x_1 := f_1^3(x,y,z_3)]))) \Leftrightarrow P_2^3(f_1^3(x,y,z_3),b,z_2))[z := f_2^1(y)]$

No se puede sustituir por la izquierda debido a la regla 3a:
$(((\exists a(\forall z(\exists b P_1^3(a,b,z)))) \Leftrightarrow P_2^3(f_1^3(x,y,z_3),b,z_2))[z := f_2^1(y)]$

Aplicamos z a ambas formulas:
$((\exists a(\forall z(\exists b P_1^3(a,b,z)))))[z := f_2^1(y)] \Leftrightarrow P_2^3(f_1^3(x,y,z_3),b,z_2)[z := f_2^1(y)]$

Aplicamos la sustitucion más interna del lado izquierdo:
$\exists a(\forall z(\exists b P_1^3(a,b,z)[z := f_2^1(y)])) \Leftrightarrow P_2^3(f_1^3(x,y,z_3),b,z_2)[z := f_2^1(y)]$

No podemos sustituir z del lado izquierdo porque esta ligada y no se puede sustituir por la derecha por la regla 3a:
$\exists a(\forall z(\exists b P_1^3(a,b,z))) \Leftrightarrow P_2^3(f_1^3(x,y,z_3),b,z_2)$

1.3. $((\exists x P_1^3(x,y,z)) \Rightarrow P_1^1(x))[z := f_1^2(x,y)]$

Alfa-Equivalencia ya que X y Y aparecen del lado derecho de la sustitucion:
$((\exists a P_1^3(a,y,z)) \Rightarrow P_1^1(a))[z := f_1^2(x,y)]$

Ahora lo aplicamos a la Y:
$((\exists a P_1^3(a,b,z)) \Rightarrow P_1^1(a))[z := f_1^2(x,y)]$

Aplicamos sustitucion de Z a ambas formulas:
$(\exists a P_1^3(a,b,z)[z := f_1^2(x,y)]) \Rightarrow P_1^1(a)[z := f_1^2(x,y)]$

No se puede sustituir por la derecha por la regla 3a:
$(\exists a P_1^3(a,b,z)[z := f_1^2(x,y)]) \Rightarrow P_1^1(a)$

No podemos sustituir Z del lado izquierdo porque esta ligada:
$((\exists a P_1^3(a,b,z)) \Rightarrow P_1^1(a))$

Quitamos los parentesis:
$\exists a P_1^3(a,b,z) \Rightarrow P_1^1(a)$

1.4. $(((\forall y P_1^3(x,y,z)) \bigwedge (\exists z P_2^3(x,y,z)) \bigwedge (\forall x P_3^3(x,y,z)))[x := f_1^2(y,z)])[y := f_2^2(x,z)]$

Aplicamos X a las formulas:
$((\forall y P_1^3(x,y,z)[x := f_1^2(y,z)]) \bigwedge (\exists z P_2^3(x,y,z)[x := f_1^2(y,z)]) \bigwedge (\forall x P_3^3(x,y,z)[x :=$

$f_1^2(y,z)]))[y := f_2^2(x,z)]$

Alfa-Equivalencia a por Y y b por Z:
$((\forall a P_1^3(x,a,b)[x := f_1^2(y,z)]) \bigwedge (\exists b P_2^3(x,a,b)[x := f_1^2(y,z)]) \bigwedge (\forall x P_3^3(x,a,b)[x := f_1^2(y,z)]))[y := f_2^2(x,z)]$

No podemos sustituir X porque es una variable ligada:
$((\forall a P_1^3(x,a,b)) \bigwedge (\exists b P_2^3(x,a,b)) \bigwedge (\forall x P_3^3(x,a,b)))[y := f_2^2(x,z)]$

Aplicamos Y a las formulas:
$((\forall a P_1^3(x,a,b)[y := f_2^2(x,z)]) \bigwedge (\exists b P_2^3(x,a,b)[y := f_2^2(x,z)]) \bigwedge (\forall x P_3^3(x,a,b)[y := f_2^2(x,z)]))$

Alfa-Equivalencia de c por X:
$((\forall a P_1^3(c,a,b)[y := f_2^2(x,z)]) \bigwedge (\exists b P_2^3(c,a,b)[y := f_2^2(x,z)]) \bigwedge (\forall c P_3^3(c,a,b)[y := f_2^2(x,z)]))$

No podemos sustituir Y por la regla 3a:
$((\forall a P_1^3(c,a,b)) \bigwedge (\exists b P_2^3(c,a,b)) \bigwedge (\forall c P_3^3(c,a,b)))$

Quitamos los parentesis:
$\forall a P_1^3(c,a,b) \bigwedge \exists b P_2^3(c,a,b) \bigwedge \forall c P_3^3(c,a,b)$

2. Encuentra un modelo para el siguiente conjunto de fórmulas:

$$\forall x(\exists y P_1^2(y,x)), \forall x \neg P_2^2(x,c) \Rightarrow P_1^2(x,c), \neg\exists x P_2^2(c, f_1^1(x)), \neg\exists x P_2^2(x, f_1^1(x))$$

Igualamos a Γ:
$\forall x(\exists y P_1^2(y,x)), \forall x \neg P_2^2(x,c) \Rightarrow P_1^2(x,c), \neg\exists x P_2^2(c, f_1^1(x)), \neg\exists x P_2^2(x, f_1^1(x)) = \Gamma$

Separamos los predicados:

1. $\forall x(\exists y P_1^2(y,x))$

2. $\forall x \neg P_2^2(x,c) \Rightarrow P_1^2(x,c)$

3. $\neg\exists x P_2^2(c, f_1^1(x))$

4. $\neg\exists x P_2^2(x, f_1^1(x))$

Tomemos a $P_N =< \Psi, \Phi, \sqcap >$ como un universo:

$\Psi(x) \geq 0$, $\Psi(y) = \Psi(x)$, $\Psi(c) = 0$

Sea a,b $\in N$
$\sqcap(P_1^2)$= {a = b}
$\sqcap(P_2^2)$= {a $\geq$ b}
$\sqcap(f_1^1)$= {a tal que a = (a + 1)}

1.$\forall x(\exists y P_1^2(y,x))$
$\sqcap(P_1^2(0,0)) = \{0 = 0\}$
SI SE CUMPLE

2. $\forall x \neg P_2^2(x,c) \Rightarrow P_1^2(x,c)$
$\sqcap(\neg P_2^2(2,0) \Rightarrow P_1^2(2,0)) = \{2 \geq 0\} \Rightarrow \{2 = 0\}$
Falso $\Rightarrow$ Falso
Por lo tanto es verdadero
SI SE CUMPLE

3. $\neg \exists x P_2^2(c, f_1^1(x))$
$\sqcap(P_2^2(0, f_1^1(0))$
$\sqcap(P_2^2(0, 0+1))$
$\sqcap(P_2^2(0,1)) = \{0 \geq 1\}$
Vemos que no existe una X que cumpla la condición
SI SE CUMPLE

4. $\neg \exists x P_2^2(x, f_1^1(x))$
$\sqcap(P_2^2(1, f_1^1(1))$=
$\sqcap(P_2^2(1, 1+1))$=
$\sqcap(P_2^2(1,2)) = \{1 \geq 2\}$
Vemos que no existe una X que cumpla la condición
SI SE CUMPLE

Podemos ver que los 4 predicados son Verdaderos, por lo que se ve que es una tautologia, como se puede dar una Interpretación que para cada formula de gama se cumple, entonces se puede ver que la interpretación es un modelo en Gama. Esto lo decimos porque se cumple que $\models_P \gamma$ y tambien que $\gamma \in \Gamma$.

3. Demuestra los siguientes teoremas de deducción natural:

"Nota: He preferido usar tablas para representar las cajas por conveniencia."

3.1. $\forall x(\exists y P_1^1(x) \Rightarrow P_2^1(y)) \vdash_N \neg(\exists x(\forall y P_1^1(x) \bigwedge \neg P_2^1(y)))$;

Formula	Pasos
1. $\forall x(\exists y P_1^1(x) \Rightarrow P_2^1(y))$	Premisa
2. $\neg(\forall x(\exists y P_1^1(x) \Rightarrow P_2^1(y)))$	por I$\neg$
3. $(\exists x \neg(\exists y P_1^1(x) \Rightarrow P_2^1(y)))$	por equivalencia de $\neg\forall$
4. $(\exists x(\forall y \neg(P_1^1(x) \Rightarrow P_2^1(y))))$	por equivalencia de $\neg\forall$
5. $\exists x(\forall y P_1^1(x) \bigwedge \neg P_2^1(y))$	por $\neg(p \Rightarrow q) \equiv p \bigwedge \neg q$
6. $\neg(\exists x(\forall y P_1^1(x) \bigwedge \neg P_2^1(y)))$	por I$\neg$

3.2. $\forall x \forall y P_1^1(x) \Rightarrow P_2^1(x) \bigwedge P_3^1(y), P_1^1(c) \vdash_N \neg\forall z \neg P_2^1(z)$;

Formula	Pasos
1. $\forall x \forall y P_1^1(x) \Rightarrow P_2^1(x) \bigwedge P_3^1(y)$	Premisa
2. $P_1^1(c)$	Premisa
3. $(\exists x \neg(\exists y P_1^1(x) \Rightarrow P_2^1(y)))$	por E $\forall x, y$
4. $P_2^1(c) \bigwedge P_3^1(v)$	por E $\Rightarrow$ 3,2
5. $P_2^1(c)$	por E $\bigwedge$
6. $P_3^1(v)$	por E $\bigwedge$
7. $\neg(\forall z \neg P_2^1(z)) \equiv \exists z P_2^1(z)$	
8. $\exists z P_2^1(z)$	por I$\exists$5 por equivalencia de $\neg\forall$

3.3. $\neg(\exists x(P_1^1(x) \bigwedge (\forall y \neg P_1^2(x,y)))) \vdash_N \forall x(P_1^1(x) \Rightarrow (\exists y P_1^2(x,y)))$;

Formula	Pasos
1. $\neg(\exists x(P_1^1(x) \bigwedge (\forall y \neg P_1^2(x,y))))$	Premisa
2. $\forall x \neg(P_1^1(x) \bigwedge (\forall y \neg P_1^2(x,y)))$	por equivalencia de $\neg\forall$
3. $\forall x \neg P_1^1(x) \vee \neg(\forall y \neg P_1^2(x,y))$	distributividad de la negación
4. $\forall x \neg P_1^1(x) \vee \exists y \neg(\neg P_1^2(x,y))$	por equivalencia de $\neg\forall$
5. $\forall x \neg P_1^1(x) \vee \exists y P_1^2(x,y)$	eliminamos la doble negación
6. $\forall x(P_1^1(x) \Rightarrow (\exists y P_1^2(x,y)))$	por p $\Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$

3.4. $\forall x.P_1^1(x) \Rightarrow (\forall y.P_2^1(y) \Rightarrow (\forall z.P_3^1(z) \Rightarrow (P_4^1(z) \Rightarrow (\exists x_1.P_1^2(z,x_1))))),$
$P_1^1(c), P_2^1(c), P_3^1(c) \vdash_N (\forall x_1.\neg P_1^2(c,x_1)) \Rightarrow \neg P_4^1(c)$;

Regla: $\neg x \equiv \forall \neg x$

Formula	Pasos
1. $\forall x P_1^1(x) \Rightarrow (\forall y P_2^1(y) \Rightarrow (\forall z P_3^1(z) \Rightarrow (P_4^1(z) \Rightarrow (\exists x_1 P_1^2(z, x_1)))))$	Premisa
2. $P_1^1(c)$	Premisa
3. $P_2^1(c)$	Premisa
4. $P_3^1(c)$	Premisa
5. $P_1^1(c) \Rightarrow (\forall y P_2^1(y) \Rightarrow (\forall z P_3^1(z) \Rightarrow (P_4^1(z) \Rightarrow (\exists x_1 P_1^2(z, x_1)))))$	E$\forall$ x[x:=c]
6. $(\forall y P_2^1(y) \Rightarrow (\forall z P_3^1(z) \Rightarrow (P_4^1(z) \Rightarrow (\exists x_1 P_1^2(z, x_1)))))$	E $\Rightarrow$ 2,6
7. $P_2^1(c) \Rightarrow (\forall z P_3^1(z) \Rightarrow (P_4^1(z) \Rightarrow (\exists x_1 P_1^2(z, x_1)))$	E$\forall$ y[y:=c]
8. $(\forall z P_3^1(z) \Rightarrow (P_4^1(z) \Rightarrow (\exists x_1 P_1^2(z, x_1)))$	E $\Rightarrow$ 2,8
9. $P_3^1(c) \Rightarrow (P_4^1(z) \Rightarrow (\exists x_1 P_1^2(z, x_1)))$	E $\forall$ z[z:=c]
10. $(P_4^1(z) \Rightarrow (\exists x_1 P_1^2(z, x_1)))$	E $\Rightarrow$ 9,3
11. $\neg P_4^1(z) \vee (\exists x_1 P_1^2(z, x_1))$	equivalencia $\Rightarrow$
12. $(\exists x_1 P_1^2(z, x_1)) \vee \neg P_4^1(z)$	conmutación de $\vee$
13. $\neg(\exists x_1 P_1^2(z, x_1)) \Rightarrow \neg P_4^1(z)$	equivalencia de $\Rightarrow$
14. $(\forall x_1 \neg P_1^2(z, x_1)) \Rightarrow \neg P_4^1(z)$	negación de $\exists$
15. $(\forall x_1 \neg P_1^2(c, x_1)) \Rightarrow \neg P_4^1(c)$ [z := c]	