Una situación complicada para Pedro

Inteligencia Artificial

9 de junio de 2020

Fuente: 6th Summer School on Image and Robotics, "Bayesian Programming". Curso impartido por un profesor que no publicó su nombre en el horario. (Traducido al español.). La original muy probablemente es de http://www.probayes.com/~ahuactzin/, cuyas notas se encuentran en http://www.probayes.com/~americas/SSIR/laboratorySSIR.pdf, de la compañía ProbaYes. Más diapositivas se encuentran en: http://www.docstoc.com/docs/19669949/Bayesian-Programming-Laboratory.

Pedro ofrecerá una fiesta en su casa e invitó a sus mejores amigos: María, Alicia, Juan, Víctor y Bill. A Pedro le gustaría que todos asistieran. Sin embargo, hay varios factores que influirán en la asistencia a la fiesta.

1. María, Alicia, Juan y Bill aceptarán la invitación en función de diferentes eventos.

   a) Juan es "lluviafóbico", si recibe la invitación en un día lluvioso, la rechazará con una probabilidad de 0.6. Si recibe la invitación en un día no lluvioso, la aceptará con una probabilidad de 0.9.

   b) Alicia aceptará una invitación para un fin de semana con una probabilidad de 0.8 y para un día entre semana con una probabilidad de 0.4.

   c) Bill es un hombre muy ocupado y no aceptará una invitación tardía con una probabilidad de 0.7. Aceptará una invitación a tiempo con una probabilidad de 0.95.

   d) Los mejores amigos de María son Juan y Alicia. Sin embargo, desde el punto de vista de María, Juan y Alicia siempre se están peleando.

   En concecuencia, María aceptará la invitación con una probabilidad de 0.05 si ambos, Juan y Alicia, aceptaron. Ella aceptará con una probabilidad de 0.95 si Juan aceptara pero Alicia no. Del mismo modo, si Alicia aceptara pero Juan no, ella aceptará con una probabilidad de 0.85. Si ni Alicia ni Juan aceptaran, ella dejará su decisión a un volado.

2. Víctor vive con Pedro y no necesita aceptar o rechazar la invitación. De cualquier modo, el día de la fiesta se quedará en casa dependiendo de la respuesta de

Alicia y Bill. De hecho, hay algo de "competencia" entre Bill y Víctor por Alicia, por lo tanto, si ambos aceptan Víctor estará presente. Si este no es el caso, él decidirá entre quedarse en casa e ir a un antro a ver un partido de futbol. Si ninguno de los dos acepta, se quedará en casa con una probabilidad de 0.7. Si Alicia acepta pero Bill no, se quedará en casa con una probabilidad de 0.9. Si bill acepta y Alicia no, irá al antro con una probabilidad de 0.6.

3. Una cosa es aceptar o rechazar la invitación y otra es asistir o no a la fiesta. Excepto por Víctor, todos pueden cambiar de opinión. Pedro aceptará la asistencia de un amigo incluso si dió una respuesta negativa. En el pasado, María ha cambiado de opinión 3 % de las veces. Si Alicia aceptó la invitación, se puede estar seguro en un 80 % de que asistirá, si la rechazó las probabilidades de que asista o de que no asista son iguales.

4. Juan y Bill tienen restricciones adicionales.

    a) El día de la fiesta Juan no vendrá si llueve y no aceptó la invitación. Como sea, en el pasado, cuando ha estado lloviendo y aceptó la invitación, se presentó en la fiesta el 70 % de las veces. Si el día de la fiesta no está lloviendo y rechazó la invitación, se presentará en la fiesta con una probabilidad de 0.4; si aceptó entonces se presentará con una probabilidad de 0.9.

    b) Bill trabaja en el hospital. Por ello, si el día de la fiesta hay una emergencia no vendrá. Si no hay emergencia y aceptó la invitación, vendrá con una probabilidad de 0.95; por el contrario, si la rechazó, vendrá con una probabilidad de 0.2.

5. La probabilidad de lluvia es 0.22.

6. La probabilidad de organizar la fiesta en fin de semana es de 0.28.

7. La probabilidad de recibir tarde la invitación es 0.3.

8. La probabilidad de tener una emergencia en el hospital es de 0.65.

1. Variables del problema

MA María acepta.

MP María se presenta.

AA Alicia acepta.

AP Alicia se presenta.

JA Juan acepta.

JP Juan se presenta.

BA Bill acepta.

BP Bill se presenta.

LI Invitación en día lluvioso.

LF Fiesta en día lluvioso.

FIN Fiesta en fin de semana.

E Emergencia en el hospital.

IT Invitación tardía.

VP Víctor se presenta.

2. Red Bayesiana

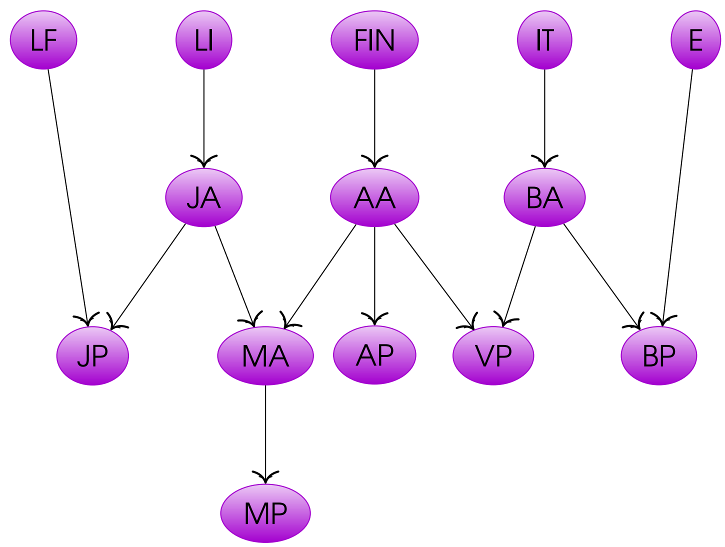

Figura 1: Red Bayesiana correspondiente a las especificaciones del problema de la fiesta de Pedro.

3. Escribir las formas paramétricas.

Las formas paramétricas son tablas donde se escriben las probabilidades condicionales de cada nodo de la gráfica de Bayes.

Nodos que no dependen de ninguna variable:

LF	P(LF)
0	0.78
1	0.22

LI	P(LI)
0	0.78
1	0.22

FIN	P(FIN)
0	0.72
1	0.28

IT	P(IT)
0	0.7
1	0.3

E	P(E)
0	0.35
1	0.65

Nodos que sólo dependen de una variable:

JA|LI	0	1
0	0.1	0.6
1	0.9	0.4

AA|FIN	0	1
0	0.6	0.2
1	0.4	0.8

BA|IT	0	1
0	0.05	0.7
1	0.95	0.3

MP|MA	0	1
0	0.97	0.03
1	0.03	0.97

AP|AA	0	1
0	0.5	0.2
1	0.5	0.8

Nodos que dependen de dos variables:

MA|JA,AA	00	01	10	11
0	0.5	0.15	0.05	0.95
1	0.5	0.85	0.95	0.05

VP|AA, BA	00	01	10	11
0	0.3	0.6	0.1	0
1	0.7	0.4	0.9	1

JP|JA, LF	00	01	10	11
0	0.6	1	0.1	0.3
1	0.4	0	0.9	0.7

BP|BA, E	00	01	10	11
0	0.8	1	0.05	1
1	0.2	0	0.95	0

4. Bases

La distribución de probabilidad conjunta completa se puede calcular para cualquier combinación de valores de las variables con la factorización siguiente, obtenida de la gráfica de Bayes:

$$\begin{aligned}P(LF, LI, FIN, IT, E, JA, AA, BA, MA, JP, MP, AP, VP, BP) = \\ P(LF)P(LI)P(FIN)P(IT)P(E) \\ P(JA|LI)P(AA|FIN)P(BA|IT) \\ P(MA|JA, AA)P(JP|LF, JA)P(MP|MA) \\ P(AP|AA)P(VP|AA, BA)P(BP|BA, E)\end{aligned} \tag{1}$$

Por ejemplo:

$$\begin{aligned}P(lf, li, fin, \neg it, \neg e, ja, \neg aa, ba, ma, jp, mp, ap, vp, bp) = \\ P(lf)P(li)P(fin)P(\neg it)P(\neg e) \\ P(ja|li)P(\neg aa|fin)P(ba|\neg it) \\ P(ma|ja, \neg aa)P(jp|lf, ja)P(mp|ma) \\ P(ap|\neg aa)P(vp|\neg aa, ba)P(bp|ba, \neg e) = \\ (0.22)(0.22)(0.28)(0.7)(0.35) \\ (0.4)(0.2)(0.95)\end{aligned}$$

$$(0.95)(0.7)(0.7)$$
$$(0.5)(0.4)(0.95) = 0.000022318 \tag{2}$$

5. Consultas

Escribir las expresiones para las preguntas siguientes:[a]

1. ¿Cuál es la probabilidad de que haya estado lloviendo cuando Juan recibió la invitación, sabiendo que María no asistió a la fiesta y que la fiesta fue un lunes?

   P(li | ¬mp, ¬fin)

   Dado que li es una variable binaria, es conveniente utilizar la fórmula siguente:

   $$P(X|e) = \alpha \sum_{Y} P(X, e, Y) = 1 \tag{3}$$

   donde e son las variables evidencia, y son las variables internas involucradas y X es la variable pregunta. Para despejar la constante de normalización α será necesario calcular las probabilidades para todos los posibles valores de X. Para este problema, la fórmula anterior se expande como sigue:

   $$P(LI|\neg mp, \neg fin) = \alpha\{P(li|\neg mp, \neg fin) + P(\neg li|\neg mp, \neg fin)\} = 1 \tag{4}$$

   Cada término se resuelve utilizando sólo el segmento relevante de la gráfica:

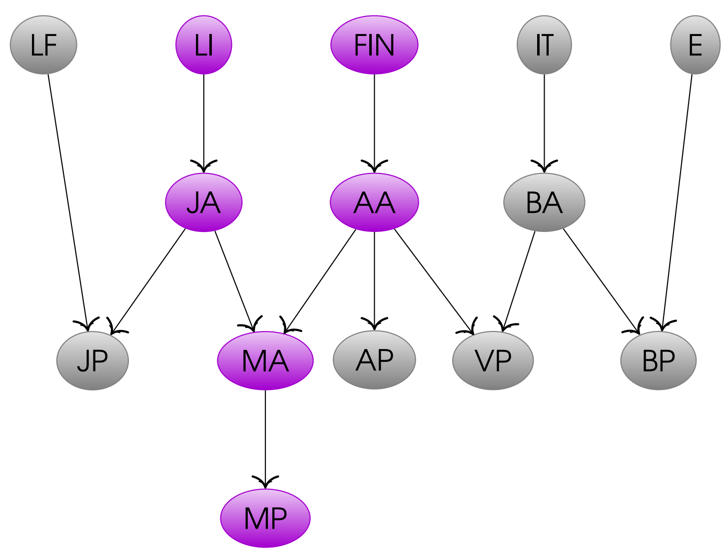

Figura 2: Nodos entre los cuales fluye influencia probabilística al calcular $P(li|\neg mp, \neg fin)$

[a] Se utiliza la notación: variables en mayúsculas, valores constantes en minúsculas.

$$
\begin{aligned}
P(li|\neg mp, \neg fin) &= \alpha \sum_{JA,AA,MA} P(li, \neg mp, \neg fin, JA, AA, MA) \\
&\overset{\text{def. prob. cond.}}{=} \alpha \sum_{JA,AA,MA} P(\neg mp|li, \neg fin, JA, AA, MA)P(li, \neg fin, JA, AA, MA) \\
&\overset{\text{independencia}}{=} \alpha \sum_{JA,AA,MA} P(\neg mp|MA)P(li, \neg fin, JA, AA, MA) \\
&\overset{\text{regla de la cadena}}{=} \alpha \sum_{JA,AA,MA} P(\neg mp|MA)P(MA|li, \neg fin, JA, AA)P(li, \neg fin, JA, AA) \\
&\overset{\text{idependencia}}{=} \alpha \sum_{JA,AA,MA} P(\neg mp|MA)P(MA|JA, AA)P(li, \neg fin, JA, AA) \\
&= \alpha \sum_{JA,AA,MA} P(\neg mp|MA)P(MA|JA, AA)P(AA|\neg fin)P(JA|li)P(li)P(\neg fin)
\end{aligned} \tag{5}
$$

Factorizando los términos constantes:

$$
\begin{aligned}
&P(li|\neg mp, \neg fin) = \\
&\quad \alpha P(li)P(\neg fin) \sum_{JA,AA,MA} P(\neg mp|MA)P(MA|JA, AA)P(AA|\neg fin)P(JA|li)
\end{aligned} \tag{6}
$$

Es posible agregar P(¬fin) a la constante de normalización, de modo que $\alpha' = \alpha P(\neg fin)$, no así P(li), pues para normalizar, será necesario calcular la probabilidad complementaria P(¬li).

Factorizando términos comunes:

$$
\begin{aligned}
&P(li|\neg mp, \neg fin) = \\
&\quad \alpha' P(li) \sum_{JA} P(JA|li) \sum_{MA} P(\neg mp|MA) \sum_{AA} P(MA|JA, AA)P(AA|\neg fin)
\end{aligned} \tag{7}
$$

Sustituyendo:

$$
\begin{aligned}
P(li|\neg mp, \neg fin) = \alpha' \times 0.22\{\ & 0.4 \quad [0.97(0.05 \times 0.6 + 0.95 \times 0.4)+ \\
& \qquad\ 0.03(0.95 \times 0.6 + 0.05 \times 0.4)]+ \\
& 0.6 \quad [0.97(0.5 \times 0.6 + 0.15 \times 0.4)+ \\
& \qquad\ 0.03(0.5 \times 0.6 + 0.85 \times 0.4)]\} \\
= \alpha' \times 0.22\{0.4[.4154] + 0.6[.3684]\} & \\
= \alpha' \times 0.085184 &
\end{aligned}
$$

Probabilidad complementaria:

$$\begin{aligned} P(\neg li|\neg mp, \neg fin) &= \alpha' \times 0.78\{0.9[.4154] + 0.1[0.3684]\} \\ &= \alpha' \times 0.320346 \end{aligned}$$

Se debe cumplir que:

$$\begin{aligned} \alpha' \times 0.085184 + \alpha' \times 0.320346 = 1 \\ \alpha' = 2.4659088 \end{aligned}$$

Entonces:

$$P(li|\neg mp, \neg fin) = 0.210056$$

2. ¿Cuál es la probabilidad de que todos los amigos de Pedro asistan a la fiesta sabiendo que será en un sábado soleado, que Bill recibió la invitación a tiempo y que no hubo emergencias en el hospital?

   P(mp ap jp bp vp | ¬lf fin ¬it ¬e)

3. ¿Cuál es la probabilidad de que Alicia, Víctor y Bill asistan a la fiesta?

   P(ap vp bp)

4. Alicia contesta el teléfono en casa de Pedro: "Hola Juan". ¿Cuál es la probabilidad de que María y Víctor hayan asistido a la fiesta? (Nota: No, no, no, Juan no está llamando desde un celular).

   P(mp vp | ap ¬jp)

5.1. Segmentos relevantes*

Para determinar qué nodos deben ser utilizados en el cálculo de una consulta es importante determinar los caminos entre ellos con un flujo activo. Aquellos nodos que no se encuentren en alguno de estos caminos pueden ser omitidos. Esto se ilustrará con el ejemplo siguiente:

Para calcular $P(li|\neg mp, \neg fin)$, los nodos sobre flujos activos se han pintado de distinto color que los que pueden ser eliminados en la figura 2.

Iniciemos el cálculo sin eliminar los nodos en gris y veámos qué sucede:

$$P(li|\neg mp, \neg fin) = \frac{P(li, \neg mp, \neg fin)}{P(\neg mp, \neg fin)} \tag{8}$$

$$P(li, \neg mp, \neg fin) = \sum_{\substack{LF,IT,E,\\JA,AA,BA,\\MA,JP,\\AP,VP,BP}} P(LF, li, \neg fin, IT, E, JA, AA, BA, MA, JP, \neg mp, AP, VP, BP) \tag{9}$$

$$= \sum_{\substack{LF,IT,E,\\JA,AA,BA,\\MA,JP,\\AP,VP,BP}} P(LF)P(li)P(\neg fin)P(IT)P(E)$$

$$P(JA|LI)P(AA|\neg fin)P(BA|IT)$$

$$P(MA|JA, AA)P(JP|LF, JA)P(\neg mp|MA)$$

$$P(AP|AA)P(VP|AA, BA)P(BP|BA, E) \tag{10}$$

(11)

Observemos primero aquellos nodos sobre los cuales se realiza una suma, pero que no tienen hijos y empujemos las sumas hasta los términos correspondientes. Es válido hacer esto pues los términos anteriores no incluyen estas variables (Figura 3).

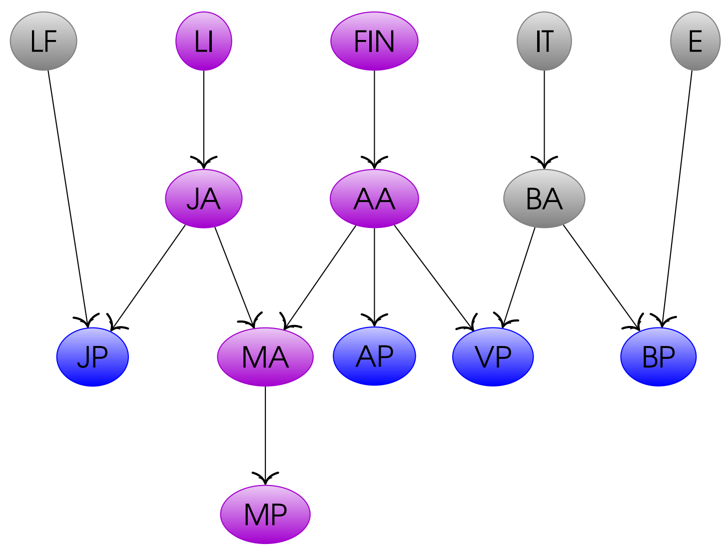

Figura 3: Nodos entre los cuales fluye influencia probabilística al calcular $P(li|\neg mp, \neg fin)$ en violeta y nodos que no contribuyen al ser marginalizados en la primer iteración.

$$P(li, \neg mp, \neg fin) = \sum_{\substack{LF,IT,E,\\JA,AA,BA,\\MA}} P(LF)P(li)P(\neg fin)P(IT)P(E)$$

$$
\begin{aligned}
&P(JA|LI)P(AA|\neg fin)P(BA|IT)\\
&P(MA|JA,AA)P(\neg mp|MA)\sum_{JP}P(JP|LF,JA)\\
&\sum_{AP}(AP|AA)\sum_{VP}P(VP|AA,BA)\sum_{BP}P(BP|BA,E)
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Tómese primero el término más a la derecha, y observemos que, dentro de la suma sobre BP, los valores de BA y E permanecen constantes, de modo que se está realizando la suma para todos los posibles valores de BP dada una evidencia fija. Por la definición de distribución de probabilidad condicional, esto debe sumar uno.

$$
\sum_{BP}P(BP|BA,E)=P(bp|BA,E)+P(\neg bp|BA,E)=1 \tag{13}
$$

Tras haber eliminado este término, se puede notar que lo mismo sucede con los otros términos (suma sobre VP, AP y JP).

$$
\begin{aligned}
P(li,\neg mp,\neg fin)=&\sum_{\substack{LF,IT,E,\\JA,AA,BA,\\MA}}P(LF)P(li)P(\neg fin)P(IT)P(E)\\
&P(JA|LI)P(AA|\neg fin)P(BA|IT)\\
&P(MA|JA,AA)P(\neg mp|MA)\cancelto{1}{\sum_{JP}P(JP|LF,JA)}\\
&\cancelto{1}{\sum_{AP}(AP|AA)}\;\cancelto{1}{\sum_{VP}P(VP|AA,BA)}\;\cancelto{1}{\sum_{BP}P(BP|BA,E)}
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Ahora podemos repetir el mismo procedimiento: seleccionar aquellos nodos que ya no tienen hijos y empjuar las sumas (Figura 3).

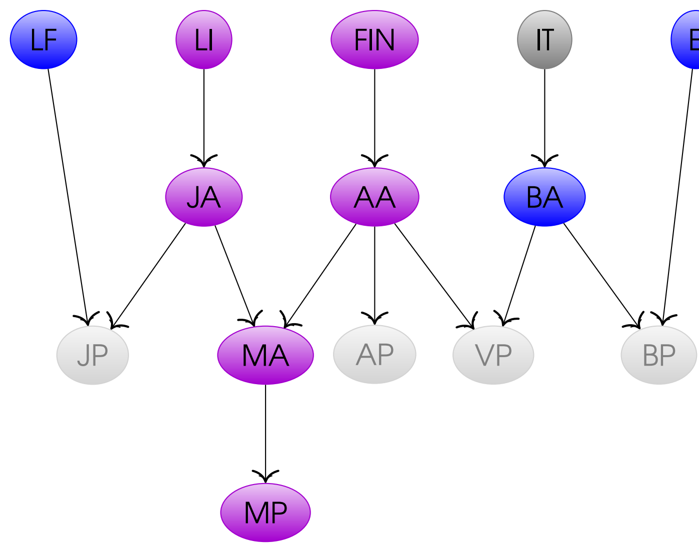

Figura 4: Nodos entre los cuales fluye influencia probabilística al calcular $P(li|\neg mp, \neg fin)$ en violeta y nodos que no contribuyen al ser marginalizados en la segunda iteración.

$$
\begin{aligned}
P(li, \neg mp, \neg fin) = & \sum_{\substack{LF,IT,E,\\ JA,AA,BA,\\ MA}} P(LF)P(li)P(\neg fin)P(IT)P(E) \\
& P(JA|LI)P(AA|\neg fin)P(BA|IT) \\
& P(MA|JA, AA)P(\neg mp|MA) \qquad (15) \\
= & \sum_{\substack{IT\\ JA,AA\\ MA}} P(li)P(\neg fin)P(IT)P(JA|LI)P(AA|\neg fin) \\
& P(MA|JA, AA)P(\neg mp|MA) \sum_{BA}(BA|IT) \sum_{LF} P(LF) \sum_{E} P(E) \qquad (16)
\end{aligned}
$$

Obsérvese que, como se llegó a nodos en la parte superior de la gráfica, también aparecen sumas sobre distribuciones marginales que también son uno, como:

$$
\sum_{E} P(E) = 1. \qquad (17)
$$

De este modo la expresión se reduce a:

$$
\begin{aligned}
P(li, \neg mp, \neg fin) = \sum_{\substack{IT\\JA,AA\\MA}} & P(li)P(\neg fin)P(IT)P(JA|LI)P(AA|\neg fin) \\
& P(MA|JA, AA)P(\neg mp|MA) \cancelto{1}{\sum_{BA}(BA|IT)} \cancelto{1}{\sum_{LF} P(LF)} \cancelto{1}{\sum_{E} P(E)} \qquad (18)
\end{aligned}
$$

Finalmente sólo queda un nodo que puede ser eliminado de esta manera (Figura 5):

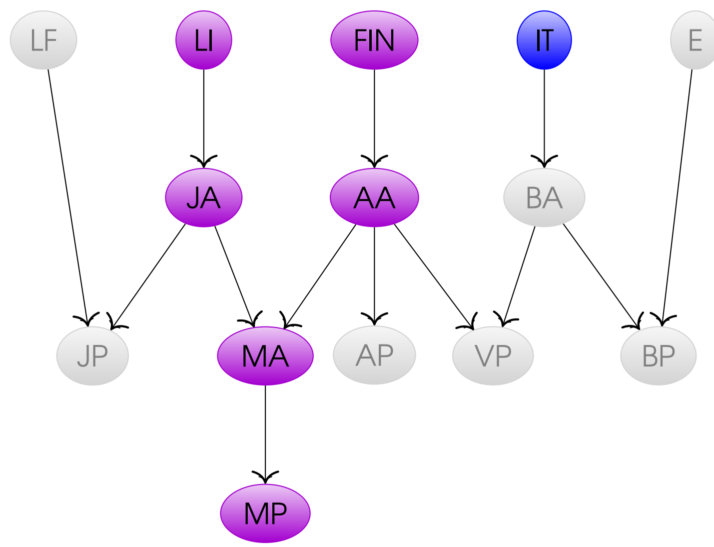

Figura 5: Nodos entre los cuales fluye influencia probabilística al calcular $P(li|\neg mp, \neg fin)$ en violeta y nodos que no contribuyen al ser marginalizados en la tercera iteración.

$$
\begin{aligned}
P(li, \neg mp, \neg fin) = \sum_{JA,AA,MA} & P(li)P(\neg fin)P(JA|LI)P(AA|\neg fin) \\
& P(MA|JA, AA)P(\neg mp|MA) \cancelto{1}{\sum_{IT} P(IT)} \qquad (19)
\end{aligned}
$$

Y con esto se obtiene la expresión utilizada en la sección anterior:

$$
\begin{aligned}
P(li, \neg mp, \neg fin) = & P(li)P(\neg fin) \sum_{JA,AA,MA} P(JA|LI)P(AA|\neg fin) \\
& P(MA|JA, AA)P(\neg mp|MA) \qquad (20) \\
= & P(li)P(\neg fin) \sum_{JA} P(JA|LI) \sum_{MA} (\neg mp|MA) \\
& \sum_{AA} P(MA|JA, AA)P(AA|\neg fin) \qquad (21)
\end{aligned}
$$