Формулы и законы логики

Определение: формулами алгебры высказываний называются:

1) любые элементарные (простые) высказывания $a, b, c, \dots$;

2) если A и B – формулы, то формулами также являются выражения вида
$\neg A, \quad A \,\&\, B, \quad A \vee B, \quad A \to B, \quad A \leftrightarrow B$.

В частности формулой является любая логическая операция, например логическое умножение $a \,\&\, b$. Обратите внимание на второй пункт – он позволяет *рекурсивным* образом «создать» сколь угодно длинную формулу. Поскольку $A = a \,\&\, b, \quad B = c$ – формулы, то $A \vee B = a \,\&\, b \vee c$ – тоже формула; так как $a \,\&\, b \vee c$ и $\neg a$ – формулы, то $(a \,\&\, b \vee c) \to \neg a$ – тоже формула и т.д. Любое элементарное высказывание *(опять же согласно определению)* может входить в формулу неоднократно.

Формулой **не** является, например, запись $a \,\& \vee b$ – и здесь прослеживается очевидная аналогия с «алгебраическим мусором» $2 \cdot +3$, из которого не понятно – нужно ли числа складывать или умножать.

Логическую формулу можно рассматривать, как **логическую функцию**. Запишем в функциональном виде ту же конъюнкцию:
$F(a; b) = a \,\&\, b$

Элементарные высказывания a и b в этом случае играют роль аргументов (независимых переменных), которые в классической логике могут принимать 2 значения: *истина* или *ложь*. Далее для удобства я буду иногда называть простые высказывания *переменными*.

Таблица, описывающая логическую формулу (функцию) называется, как уже было озвучено, **таблицей истинности**. Пожалуйста – знакомая картинка:

a	b	$a \& b$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Принцип формирования таблицы истинности таков: «на входе» нужно перечислить **все возможные комбинации** истины и лжи, которые могут принимать элементарные высказывания (аргументы). В данном случае в формулу входят два высказывания, и нетрудно выяснить, что таких комбинаций четыре. «На выходе» же получаем соответствующие логические значения всей формулы (функции).

Надо сказать, что «выход» здесь получился «в один шаг», но в общем случае логическая формула является более сложной. И в таких «непростых случаях» нужно соблюдать **порядок выполнения логических операций**:

– в первую очередь выполняется отрицание $\neg$;

– во вторую очередь – конъюнкция $\&$;
– затем – дизъюнкция $\vee$;
– потом импликация $\rightarrow$;
– и, наконец, низший приоритет имеет эквиваленция $\leftrightarrow$.

Так, например, запись $a \& b \vee c$ подразумевает, что сначала нужно осуществить логическое умножение $a \& b$, а затем – логическое сложение: $(a \& b) \vee c$. Прямо как в «обычной» алгебре – «сначала умножаем, а затем складываем».

Порядок действий можно изменить привычным способом – скобками:
$a \& (b \vee c)$ – здесь в первую очередь выполняется дизъюнкция $b \vee c$ и только потом более «сильная» операция.

Наверное, все понимают: $a \& b \vee c$ и $a \& (b \vee c)$ – это **две разные** формулы! *(как в формальном, так и в содержательном плане)*

Составим таблицу истинности для формулы $\neg p \vee q$. В данную формулу входят два элементарных высказывания и «на входе» нам нужно перечислить все возможные комбинации единиц и нулей. Чтобы избежать путаницы и разночтений договоримся перечислять комбинации <u>строго в таком порядке</u> *(который я, собственно, де-факто использую с самого начала)*:

p	q
1	1
1	0
0	1
0	0

В формулу $\neg p \vee q$ входят две логические операции, и согласно их приоритету, в первую очередь нужно выполнить *отрицание* высказывания p. Ну что же, отрицаем столбец «пэ» – единицы превращаем в нули, а нули – в единицы:

p	q	$\neg p$
1	1	0
1	0	0
0	1	1
0	0	1

На втором шаге смотрим на столбцы $\neg p$ и q и применяем к ним *операцию ИЛИ*. Немного забегая вперёд, скажу, что дизъюнкция перестановочна *($\neg p \vee q$ и $q \vee \neg p$ – это одно и то же)*, и поэтому столбцы $q, \neg p$ можно анализировать в привычном порядке – слева направо. При выполнении логического сложения удобно использовать следующее прикладное рассуждение: *«Если два нуля – ставим ноль, если хотя бы одна единица – единицу»*:

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$
1	1	0	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	1

Таблица истинности построена. А теперь вспомним старую-добрую импликацию:

p	q	$p \to q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

…внимательно-внимательно… смотрим на итоговые колонки…. В алгебре высказываний такие формулы называются **равносильными** или **тождественными**:

$p \to q \equiv \neg p \vee q$

(три горизонтальные чёрточки – это значок тождества)

Желающие могут вложить в импликацию содержательный смысл *(например, «Если идёт дождь, то на улице сыро»)* и самостоятельно проанализировать равносильное утверждение $\neg p \vee q$.

Сформулируем общее определение: две формулы называются **равносильными (тождественными)**, если они принимают одинаковые значения при любом наборе значений, входящих в эти формулы переменных *(элементарных высказываний)*. Также говорят, что *«формулы равносильны, если совпадают их таблицы истинности»*, но мне не очень нравится эта фраза.

Задание 1

Составить таблицу истинности для формулы $(p \to q) \& (q \to p)$ и убедиться в справедливости знакомого вам тождества $p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \& (q \to p)$.

Ещё раз повторим порядок решения задачи:

1) Так как в формулу входят две переменные, то всего будет 4 возможных набора нулей и единиц. Записываем их в оговорённом выше порядке.

2) Импликации «слабее» конъюнкции, но они располагаются в скобках. Заполняем столбец $p \to q$, при этом удобно использовать следующее прикладное рассуждение: *«если из единицы следует ноль, то ставим ноль, во всех других случаях – единицу»*. Далее заполняем столбец для импликации $q \to p$, и при этом, **внимание!** – столбцы p и q следует анализировать «справа налево»!

3) И на завершающем этапе заполняем итоговый столбец $(p \to q)\,\&\,(q \to p)$. А здесь удобно рассуждать так: *«если в столбцах $p \to q$ и $q \to p$ две единицы, то ставим единицу, во всех остальных случаях – ноль»*.

И, наконец, сверяемся с таблицей истинности **эквиваленции** $p \leftrightarrow q$.

Основные равносильности алгебры высказываний

С двумя из них мы только что познакомились, но ими дело, понятно, не ограничивается. Тождеств довольно много и я перечислю самые важные и самые известные из них:

Коммутативность конъюнкции и коммутативность дизъюнкции

Коммутативность – это перестановочность:
$p\,\&\,q \equiv q\,\&\,p, \qquad p \vee q \equiv q \vee p$

Знакомые с 1-го класса правила: *«От перестановки множителей (слагаемых) произведение (сумма) не меняется»*. Но при всей кажущейся элементарности этого свойства, справедливо оно далеко не всегда, в частности, некоммутативным является **умножение матриц** *(в общем случае их переставлять нельзя)*, а **векторное произведение векторов** – антикоммутативно *(перестановка векторов влечёт за собой смену знака)*.

И, кроме того, здесь я снова хочу подчеркнуть формализм математической логики. Так, например, фразы *«Студент сдал экзамен и выпил»* и *«Студент выпил и сдал экзамен»* различны с содержательной точки зрения, но неразличимы с позиций формальной истинности. …Таких студентов знает каждый из нас, и из этических соображений мы не будет озвучивать конкретных имён =)

Ассоциативность логического умножения и сложения

Или, если «по-школьному» – сочетательное свойство:
$p\,\&\,(q\,\&\,r) \equiv (p\,\&\,q)\,\&\,r, \qquad p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$

Дистрибутивные свойства

$p \,\&\, (q \vee r) \equiv (p \,\&\, q) \vee (p \,\&\, r), \qquad p \vee (q \,\&\, r) \equiv (p \vee q) \,\&\, (p \vee r)$

Обратите внимание, что во 2-м случае будет некорректно говорить о «раскрытии скобок», в известном смысле здесь «фикция» – ведь их можно убрать вообще: $p \vee q \,\&\, r$, т.к. умножение – это более сильная операция.

И опять же – эти, казалось бы, «банальные» свойства выполняются далеко не во всех алгебраических системах, и, более того, требуют доказательства *(о которых мы очень скоро поговорим)*. К слову, второй дистрибутивный закон несправедлив даже в нашей «обычной» алгебре. И в самом деле: $2 + (3 \cdot 5) \neq (2 + 3) \cdot (2 + 5)$

Закон идемпотентности

$p \,\&\, p \equiv p, \qquad p \vee p \equiv p$

Прямо какой-то принцип здоровой психики: «я и я – это я», «я или я – это тоже я» =)

И тут же несколько похожих тождеств:

$p \,\&\, 0 \equiv 0, \qquad p \,\&\, 1 \equiv p$

$p \vee 0 \equiv p, \qquad p \vee 1 \equiv 1$

Закон двойного отрицания

$\neg\neg p \equiv p$

Ну а здесь уже напрашивается пример с русским языком – все прекрасно знают, что две частицы «не» означают «да». А для того, чтобы усилить эмоциональную окраску отрицания нередко используют три «не»:
$\neg\neg\neg p \equiv \neg(\neg\neg p) \equiv \neg p$ – даже с крохотным доказательством получилось!

Законы поглощения

$p \,\&\, (p \vee q) \equiv p, \qquad p \vee (p \,\&\, q) \equiv p$ – «а был ли мальчик?» =)

В правом тождестве скобки можно опустить.

Законы де Моргана

$\neg(p \,\&\, q) \equiv \neg p \vee \neg q, \qquad \neg(p \vee q) \equiv \neg p \,\&\, \neg q$

Предположим, что строгий Преподаватель *(имя которого вам тоже известно:))* ставит экзамен, если p – *Студент ответил на 1-й вопрос* **и** q – *Студент ответил на 2-й вопрос*. Тогда высказывание $\neg(p \,\&\, q)$, гласящее о том, что *Студент* ***не*** *сдал экзамен*, будет равносильно утверждению $\neg p \vee \neg q$ – *Студент* ***не*** *ответил на 1-й вопрос* ***или*** *на 2-й вопрос*.

Как уже отмечалось выше, равносильности подлежат доказательству, которое стандартно осуществляется с помощью таблиц истинности. В действительности мы уже доказали равносильности, выражающие импликацию и эквиваленцию, и сейчас настало время закрепить технику решения данной задачи.

Докажем тождество $p \,\&\, 1 \equiv p$. Поскольку в него входит единственное высказывание p, то «на входе» возможно всего лишь два варианта: единица либо ноль. Далее приписываем единичный столбец и применяем к ним *правило И*:

p	1	$p \,\&\, 1$
1	1	1
0	1	0

В результате «на выходе» получена формула, истинность которой совпадает с истинностью высказывания p. Равносильность $p \,\&\, 1 \equiv p$ доказана.

Да, это доказательство является примитивным *(а кто-то скажет, что и «тупым»)*, но типичный Преподаватель по матлогике вытрясет за него душу. Поэтому даже к таким простым вещам не стоит относиться пренебрежительно.

Теперь убедимся, например, в справедливости закона де Моргана $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \,\&\, \neg q$.

Сначала составим таблицу истинности для левой части. Поскольку дизъюнкция находится в скобках, то в первую очередь выполняем именно её, после чего отрицаем столбец $p \vee q$:

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$
1	1	1	0
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	0	1

Далее составим таблицу истинности для правой части $\neg p \,\&\, \neg q$. Здесь тоже всё прозрачно – в первую очередь проводим более «сильные» отрицания, затем применяем к столбцам $\neg p, \neg q$ *правило И*:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \,\&\, \neg q$
1	1	0	0	0
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

Результаты совпали, таким образом, тождество $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \,\&\, \neg q$ доказано.

Любую равносильность $A \equiv B$ можно представить в виде *тождественно истинной формулы* $A \leftrightarrow B \equiv 1$. Это значит, что ПРИ ЛЮБОМ исходном наборе нулей и единиц «на выходе» получается строго единица. И этому есть очень простое объяснение: так как таблицы истинности A и B совпадают, то, разумеется, они эквивалентны. Соединим, например, эквиваленцией левую и правую часть только что доказанного тождества де Моргана:

$\neg(p \vee q)$	$\neg p \,\&\, \neg q$	$\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \,\&\, \neg q$
0	0	1
0	0	1
0	0	1
1	1	1

Или, если компактнее: $\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \,\&\, \neg q \equiv 1$

Задание 2

Доказать следующие равносильности:

а) $p \vee p \equiv p$;

б) $p \,\&\, (p \vee q) \equiv p$

Краткое решение в конце урока. Не ленимся! Постарайтесь не просто составить таблицы истинности, но ещё и **чётко** сформулировать выводы.

Продолжаем знакомиться с законами логики!

Да, совершенно верно – мы с ними уже вовсю работаем:

Формула, которая принимает значение *Истина* при любом наборе значений входящих в неё переменных, называется **тождественно истинной формулой** или **законом логики**.

В силу обоснованного ранее перехода от равносильности $A \equiv B$ к тождественно истинной формуле $A \leftrightarrow B \equiv 1$, все перечисленные выше тождества представляют собой законы логики.

Формула, которая принимает значение *Ложь* при любом наборе значений входящих в неё переменных, называется **тождественно ложной формулой** или **противоречием**.

Фирменный пример противоречия от древних греков:
$p \,\&\, \neg p \equiv 0$ – никакое высказывание не может быть истинным и ложным одновременно.

Доказательство тривиально:

p	$\neg p$	$p \,\&\, \neg p$
1	0	0
0	1	0

«На выходе» получены исключительно нули, следовательно, формула действительно *тождественна ложна*.

Однако и любое противоречие – это тоже закон логики, в частности: $p \,\&\, \neg p \leftrightarrow 0 \equiv 1$

Нельзя объять столь обширную тему в одной-единственной статье, и поэтому я ограничусь ещё лишь несколькими законами:

Закон исключённого третьего

$p \vee \neg p \equiv 1$ – в классической логике любое высказывание истинно или ложно и третьего не дано. «Быть или не быть» – вот в чём вопрос.

Самостоятельно составьте табличку истинности и убедитесь в том, что это *тождественно истинная* формула.

Закон контрапозиции

$(p \to q) \to (\neg q \to \neg p) \equiv 1$

Этот закон активно муссировался, когда мы обсуждали суть **необходимого условия**, вспоминаем: *«Если во время дождя на улице сыро, то из этого следует, что если на улице сухо, то дождя точно не было»*.

Также из данного закона следует, что если справедливой является *прямая* **теорема** $|p \Rightarrow q| = 1$, то обязательно истинным будет и утверждение $|\neg q \Rightarrow \neg p| = 1$, которое иногда называют *противоположной* теоремой.

Если истинна *обратная* теорема $|q \Rightarrow p| = 1$, то в силу закона контрапозиции $(q \to p) \to (\neg p \to \neg q) \equiv 1$, справедлива и теорема, *противоположная обратной*: $|\neg p \Rightarrow \neg q| = 1$

И снова вернёмся к нашим содержательным примерам: для высказываний p *– число делится на 4*, q *– число делится на 2* справедливы *прямая* и *противоположная* теоремы, но ложны *обратная* и *противоположная обратной* теоремы. Для «взрослой» же формулировки теоремы Пифагора истинны все 4 «направления».

Закон силлогизма

$$(p \to q) \& (q \to r) \to (p \to r) \equiv 1$$

Тоже классика жанра: *«Все дубы – деревья, все деревья – растения, следовательно, все дубы – растения»*.

Ну и здесь опять хочется отметить формализм математической логики: если наш строгий Преподаватель думает, что некий Студент – есть дуб, то с формальной точки зрения данный Студент, безусловно, растение =) …хотя, если задуматься, то может быть и с неформальной тоже =)

Давайте на этой веселой ноте проведём доказательство. В данную формулу входят уже $n = 3$ элементарных высказывания (p, q, r), а значит, всего будет: $2^n = 2^3 = 8$ различных комбинаций нулей и единиц *(см. три левых столбца таблицы)*. Заодно, кстати, записал вам общую формулу; с точки зрения **комбинаторики**, здесь **размещения с повторениями**.

Составим таблицу истинности для формулы $(p \to q) \& (q \to r) \to (p \to r)$. В соответствии с приоритетом логических операций, придерживаемся следующего алгоритма:

1) выполняем импликации $p \to q$ и $q \to r$. Вообще говоря, можно сразу выполнить и 3-ю импликацию, но с ней удобнее *(и допустимо!)* разобраться чуть позже;

2) к столбцам $p \to q, \quad q \to r$ применяем *правило И*;

3) вот теперь выполняем $p \to r$;

4) и на завершающем шаге применяем импликацию к столбцам $(p \to q) \& (q \to r)$ и $p \to r$.

Не стесняйтесь контролировать процесс указательным и средним пальцем :))

p	q	r	$p \to q$	$q \to r$	$(p \to q) \& (q \to r)$	$p \to r$	$(p \to q) \& (q \to r) \to (p \to r)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

Из последнего столбца, думаю, всё понятно без комментариев:
$(p \to q) \& (q \to r) \to (p \to r) \equiv 1$, что и требовалось доказать.

Задание 3

Выяснить, будет ли являться законом логики следующая формула:
$(p \to \neg q) \vee (p \& r)$

Преобразование логических формул

Помимо своего «логического» назначения, равносильности широко используются для преобразования и упрощения формул. Грубо говоря, одну часть тождества можно менять на другую. Так, например, если в логической формуле вам встретился фрагмент $p \& p$, то по закону идемпотентности вместо него можно (и нужно) записать просто p. Если вы видите $p \vee p \& q$, то по закону поглощения упрощайте запись до p. И так далее.

Кроме того, есть ещё одна важная вещь: тождества справедливы не только для элементарных высказываний, но и для произвольных формул. Так, например:

$A \to B \equiv \neg A \vee B$
$A \& B \equiv B \& A$
$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \& \neg B$, где A, B – любые *(сколь угодно сложные)* формулы.

Преобразуем, например, сложную импликацию $\underbrace{(a \& b \vee c)}_{A} \to \underbrace{\neg a}_{B}$ *(1-е тождество)*:
$(a \& b \vee c) \to \neg a \equiv \neg(a \& b \vee c) \vee \neg a$

Далее применим к скобке «сложный» закон де Моргана, при этом, в силу приоритета операций, именно закон $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \& \neg B$, где $A = a \& b, \quad B = c$:
$\neg(a \& b \vee c) \vee \neg a \equiv (\neg(a \& b) \& \neg c) \vee \neg a$

Скобки можно убрать, т.к. внутри находится более «сильная» конъюнкция:
$\neg(a \& b) \& \neg c \vee \neg a$

Далее напрашивается использовать «простой» закон де Моргана и т.д.

Ну, а с коммутативностью вообще всё просто – даже обозначать ничего не нужно… что-то запал мне в душу закон силлогизма:))
$(p \to q) \& (q \to r) \equiv (q \to r) \& (p \to q)$

Таким образом, закон можно переписать и в более затейливом виде:
$(q \to r) \& (p \to q) \to (p \to r) \equiv 1$

Проговорите вслух логическую цепочку «с дубом, деревом, растением», и вы поймёте, что от перестановки импликаций содержательный смысл закона нисколько не изменился. Разве что формулировка стала оригинальнее.

В качестве тренировки упростим формулу $\neg(p \vee \neg q) \& r \to p \vee r$.

С чего начать? Прежде всего, разобраться с порядком действий: здесь отрицание применено к целой скобке, которая «скреплена» с высказыванием r «чуть более слабой» конъюнкцией. По существу, перед нами логическое произведение двух множителей: $\neg(p \vee \neg q) \& r$. Из двух оставшихся операций низшим приоритетом обладает импликация, и поэтому вся формула имеет следующую структуру: $A \to B$.

Как правило, на первом шаге (шагах) избавляются от эквиваленции и импликации *(если они есть)* и сводят формулу к трём основным логическим операциям. Что тут скажешь…. Логично.

(1) Используем тождество $A \to B \equiv \neg A \vee B$. А нашем случае $A = \neg(p \vee \neg q) \& r, \quad B = p \vee r$.

Затем обычно следуют «разборки» со скобками. Сначала всё решение, затем комментарии. Чтобы не получилось «масло масляное», буду использовать значки «обычного» равенства:

$$\neg(p \vee \neg q) \& r \to p \vee r \stackrel{(1)}{=}$$

$$= \neg(\neg(p \vee \neg q) \& r) \vee p \vee r \stackrel{(2)}{=}$$

$$= (\neg\neg(p \vee \neg q) \vee \neg r) \vee p \vee r \stackrel{(3)}{=}$$

$$= (p \vee \neg q) \vee \neg r \vee p \vee r \stackrel{(4)}{=}$$

$$= p \vee \neg q \vee p \vee \neg r \vee r \stackrel{(5)}{=}$$

$$= p \vee p \vee \neg q \vee r \vee \neg r \stackrel{(6)}{=}$$

$$= p \vee \neg q \vee 1 \stackrel{(7)}{=} p \vee 1 = 1$$

(2) К внешним скобкам применяем закон де Моргана $\neg(A \& B) \equiv \neg A \vee \neg B$, где $A = \neg(p \vee \neg q), \quad B = r$.

(3) К внутренним скобкам применяем закон двойного отрицания $\neg\neg A \equiv A$. Внешние скобки можно убрать, т.к. за её пределами находятся равные по силе операции.

(4) В силу коммутативности дизъюнкции меняем местами $\neg r$ и p. Оставшиеся скобки тоже убираем по озвученной выше причине.

(5) В силу коммутативности дизъюнкции меняем местами $\neg q$ и p, а также $\neg r$ и r.

(6) Используем закон идемпотентности $p \vee p \equiv p$ и закон исключенного третьего $p \vee \neg p \equiv 1$

(7) Дважды используем тождество $A \vee 1 \equiv 1$

Вот оно как…, оказалось, что наша формула – *тожественно истинна*:
$\neg(p \vee \neg q) \,\&\, r \to p \vee r \equiv 1$

Желающие могут составить таблицу истинности и убедиться в справедливости данного факта.

Наверное, все обратили внимание на формализм последних преобразований, но решать лучше именно так! В противном случае с немалой вероятностью гарантированы проблемы с зачётом задания (впрочем, тут от преподавателя зависит).

Математическая логика как наука – формальна, и строго говоря, осуществлять «перескоки» наподобие $\neg r \vee p \vee r = 1$ нежелательно.

Пара задач для закрепления материала:

Задание 4

Выразить эквиваленцию $p \leftrightarrow q$ через отрицание, конъюнкцию, дизъюнкцию и раскрыть скобки

Аккуратно проводим преобразования в соответствии с равносильностями.

Задание 5

Упростить логическую формулу
$\neg(\neg x \,\&\, \neg y) \vee (x \to y) \,\&\, x$

Решения и ответы:

Задание 1 ***Решение****: составим таблицу истинности для формулы* $(p \to q) \,\&\, (q \to p)$*:*

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$(p \to q) \,\&\, (q \to p)$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

Полученный результат совпадает с эквиваленцией высказываний p *и* q*, таким образом:*
$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \,\&\, (q \to p)$

Задание 2 ***Решение****: доказательства проведём с помощью таблиц истинности:*

а) Дважды записываем все варианты истины и лжи высказывания p *и применяем к столбцам операцию ИЛИ:*

p	p	$p \vee p$
1	1	1
0	0	0

Результат $p \vee p$ *совпадает с* p*. Тождество* $p \vee p \equiv p$ *доказано*

б) составим таблицу истинности для левой части тождества
$p \,\&\, (p \vee q) \equiv p$*. Сначала к столбцам* p *и* q *применяем операцию ИЛИ, затем к столбцам* p *и* $p \vee q$ *– операцию И:*

p	q	$p \vee q$	$p \,\&\, (p \vee q)$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	0
0	0	0	0

В результате истинность формулы $p \,\&\, (p \vee q)$ *совпала с истинностью высказывания* p*, таким образом, тождество* $p \,\&\, (p \vee q) \equiv p$ *доказано.*

Задание 3 ***Решение****: составим таблицу истинности:*

p	q	r	$\neg q$	$p \to \neg q$	$p \& r$	$(p \to \neg q) \vee (p \& r)$
1	1	1	0	0	1	1
1	1	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	1	0	1
0	1	0	0	1	0	1
0	0	1	1	1	0	1
0	0	0	1	1	0	1

Вывод: данная формула не является тождественно истинной (законом логики)

Задание 4 ***Решение****:*

$$p \leftrightarrow q =^{(1)}$$

$$= (p \to q) \& (q \to p) =^{(2)}$$

$$= (\neg p \vee q) \& (\neg q \vee p) =^{(3)}$$

$$= \left[(\neg p \vee q) \& \neg q\right] \vee \left[(\neg p \vee q) \& p\right] =^{(4)}$$

$$= \left[\neg q \& (\neg p \vee q)\right] \vee \left[p \& (\neg p \vee q)\right] =^{(5)}$$

$$= (\neg q \& \neg p) \vee (\neg q \& q) \vee (p \& \neg p) \vee (p \& q) =^{(6)}$$

$$= (\neg q \& \neg p) \vee (q \& \neg q) \vee (p \& \neg p) \vee (p \& q) =^{(7)}$$

$$= (\neg q \& \neg p) \vee 0 \vee 0 \vee (p \& q) =^{(8)}$$

$$= (\neg q \& \neg p) \vee (p \& q) =^{(9)}$$

$$= (p \& q) \vee (\neg q \& \neg p) = p \& q \vee \neg q \& \neg p$$

(1) Используем тождество $p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \& (q \to p)$*.*

(2) Дважды применяем тождество $A \to B \equiv \neg A \vee B$ *.*

(3) Используем дистрибутивный закон $A \& (B \vee C) \equiv (A \& B) \vee (A \& C)$*, в данном случае:*

$A = (\neg p \vee q),\ B = \neg q,\ C = p$ *(квадратные скобки можно было не ставить – они не меняют порядок действий, но помогают лучше видеть ситуацию).*
(4) В квадратных скобках используем коммутативность конъюнкции.
(5) Дважды используем тот же самый дистрибутивный закон.
(6) Во второй слева скобке используем коммутативность конъюнкции.
(7) Согласно закону противоречия: $q \,\&\, \neg q \equiv 0,\ p \,\&\, \neg p \equiv 0$*.*
(8) К формуле $\neg q \,\&\, \neg p$ *дважды применяем тождество* $A \vee 0 \equiv A$*.*
(9) А это уже для красоты :)) Скобки, кстати, можно было убрать намного раньше (я их не опускал с целью улучшить восприятие преобразований).

***Примечание**: на 3-м шаге можно было раскрыть скобки по «правилу умножения многочленов» и сразу перейти к шагу № 7, но, строго говоря, это действие ещё нужно обосновать. А вдруг в алгебре логики это правило несправедливо?*

*Задание 5 **Решение**:*

$\neg(\neg x \,\&\, \neg y) \vee (x \to y) \,\&\, x = ^{(1)}$

$= (\neg\neg x \vee \neg\neg y) \vee (\neg x \vee y) \,\&\, x = ^{(2)}$

$= (x \vee y) \vee x \,\&\, (\neg x \vee y) = ^{(3)}$

$= (x \vee y) \vee (x \,\&\, \neg x) \vee (x \,\&\, y) = ^{(4)}$

$= (x \vee y) \vee 0 \vee (x \,\&\, y) = ^{(5)}$

$= x \vee y \vee x \,\&\, y = ^{(6)} x \vee y \vee y \,\&\, x = x \vee y$

(1) Для левой скобки используем закон де Моргана. Во второй скобке – «раскладываем» импликацию.
(2) В первой скобке дважды применяем закон двойного отрицания. В силу коммутативности конъюнкции меняем местам $(\neg x \vee y)$ *и* x*.*
(3) К «иксу» и правой скобке применяем дистрибутивный закон.
(4) Согласно закону противоречия высказывания, средняя скобка тождественно ложна.
(5) К левой скобке применяем тождество $A \vee 0 \equiv A$*. Убираем все скобки, поскольку это не меняет порядок действий.*
(6) Используем коммутативность умножения и закон поглощения $y \vee y \,\&\, x \equiv y$*.*

***Ответ**:* $\neg(\neg x \,\&\, \neg y) \vee (x \to y) \,\&\, x \equiv x \vee y$