

Proyecto 2: Análisis y control a partir de Bode

Escuela de Ingeniería en Electrónica

EL-5408: Control Automático

Prof. Ing. Leonardo Rivas Arce, MSc.

Mariana Ramírez Mora

Área Académica Ing. Mecatrónica

Instituto Tecnológico de Costa Rica

Cartago, Costa Rica

mari15600@estudiantec.cr

2018170702

Alfredo Acuña Chacón

Ing. Electrónica

Instituto Tecnológico de Costa Rica

Cartago, Costa Rica

alfredoaach@estudiantec.cr

2015183035

Manuel Garita Brenes

Ing. Electrónica

Instituto Tecnológico de Costa Rica

San José, Costa Rica

magabretec@estudiantec.cr

200770067

Karina Ulate López

Ing. Electrónica

Instituto Tecnológico de Costa Rica

Cartago, Costa Rica

karihime@estudiantec.cr

2015026965

Resumen—A partir de un diagrama de Bode, se calcula la ecuación de lazo cerrado del sistema propuesto. Además se diseñan compensadores PD, PI y PID a los cuales se les evalúa la estabilidad del sistema para las entradas de rampa y escalón. Además, se discute sobre cuál de los comparadores es el que mejor compensa el sistema siendo el más efectivo el PID.

Index Terms—Diagrama de Bode, Función de transferencia, Compensador, Matlab.

I. INTRODUCCION

El diagrama de Bode, el criterio de Nyquist y la carta de Nichols permiten determinar las características de un sistema en lazo cerrado. Además permiten analizar su comportamiento sin necesidad de conocer inicialmente la función de transferencia del sistema. Con esta herramienta se pueden diseñar varios tipos de controladores (PD, PI, PID, atraso, adelanto, entre otros) una vez determinada la función de transferencia a lazo abierto a partir del diagrama de Bode.

Sabemos que del diagrama se puede obtener los polos, ceros y una ganancia, por lo que el sistema puede ser similar a la figura 1, tomando en cuenta

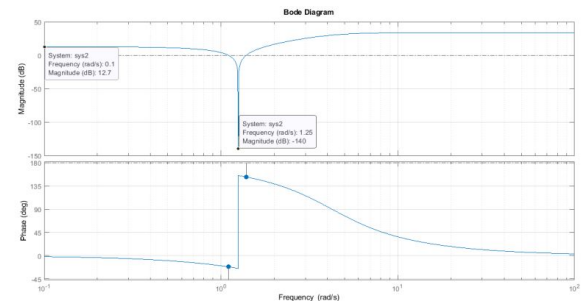


Figura 1. Respuesta en Frecuencia del sistema en análisis.

que el sistema puede tener un cero y un polo complejo:

$$G_1(s) = \frac{K(s^2(A) + S(B) + C)}{s^2(D) + S(E) + F} \quad (1)$$

Con base en la gráfica de la figura 1, podemos obtener el valor de la ganancia de la función, a partir de la parte superior izquierda, esto aplicando $10\log(valor)$. Así es como obtenemos que la función tiene una ganancia de: 41.31519. Luego, examinando el comportamiento en magnitud y fase, se observa que este realiza un "quiebre" que sube

a 60 dB por década, expresando que se encuentra un cero complejo en la frecuencia de corte, la cual brinda la información dada en la muesca del Bode de magnitud. Tiene un valor de $\omega = 1.25$ rad/s.

Con estos datos, se observa que la gráfica pierde su comportamiento cuadrático abruptamente, por lo que se aprecia un polo sencillo en el mismo valor. Al observar la fase, se aprecia un ligero cambio cuando el diagrama corta en 45° , justamente en 8 rad/s, evidenciando la existencia de otro polo sencillo. Por lo tanto, el sistema tiene un comportamiento de segundo orden en el denominador de la función de transferencia, sin embargo, este no es complejo.

II. RESULTADOS

Una vez analizado el problema, y establecido los parámetros de ganancia, polos y orden, se puede obtener la función de transferencia, la cual se expresa en la función 2:

$$G = \frac{43.15s^2 + 8.428s - 6s + 67.42}{1.562s^2 + 14.45s + 15.62} \quad (2)$$

II-A. Función de transferencia de Lazo Abierto y su respectivo error estacionario

Una vez generada la función de transferencia, se procede a obtener mediante la siguiente entrada en Matlab el diagrama de Bode correspondiente a la función de transferencia.

Bode (G)

El diagrama de Bode obtenido se observa en la figura 2.

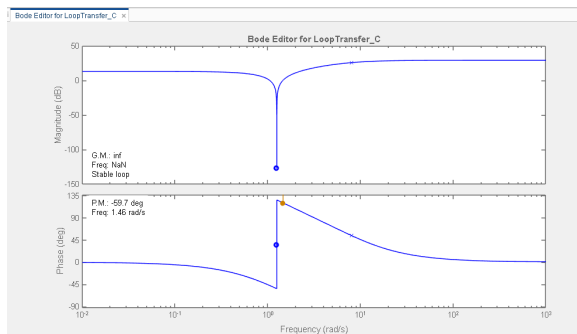


Figura 2. Diagrama de Bode generado a partir de la función 2 en Matlab.

Al comprobar que la función de transferencia es correcta, se procede a obtener el error en lazo abierto a través de la ecuación 3.

$$Kp = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \frac{43.15s^2 + 8.428s + 67.42}{1.562s^2 + 14.45s + 15.62} \quad (3)$$

Con esto se obtiene el valor de Kp, mostrado en la ecuación 4

$$Kp = 4.316 \quad (4)$$

Finalmente, para calcular el porcentaje de error, se emplea la ecuación 5, dando como resultado el error mostrado.

$$e_{st} = \frac{1}{1 + Kp} = 18.81 \% \quad (5)$$

II-B. Función de transferencia de Lazo Cerrado y su Respectivo error estacionario

Para proceder a controlar el sistema, es necesario utilizar la planta en lazo cerrado. Se define $H=1$ y mediante la siguiente entrada en Matlab, se obtiene la función requerida.

H=1;
L=feedback (G, H)

$$L = \frac{43.15s^2 + 8.428s + 67.42}{44.71s^2 + 14.45s + 83.04} \quad (6)$$

Utilizan la siguiente entrada se puede obtener la función 6 factorizada como se observa en la ecuación 7.

zpk (L)

$$L = \frac{0.96507(s^2 + 1.953e-07s + 1.562)}{s^2 + 0.3232s + 1.857} \quad (7)$$

Una vez obtenido L (ecuación 7), mediante la herramienta de sisotool en Matlab es posible obtener el error como los diferentes comportamientos a entradas variadas. Para esto se realiza la siguiente serie de entradas, siendo kpCerrado calculado mediante sisotool.

```
esscerradop=1/(1+
kpCerrado)
esscerradop=
30950000/5607989
ans = 0.5516
```

Finalmente, se obtiene un error del 55.16 %.

II-C. Estabilidad del sistema a través de Nyquist

Estudiando la función de transferencia, teóricamente el análisis de Nyquist correspondiente es el siguiente:

$Z = P + N$ con $N = 0$ de la gráfica polar de Nyquist, $P = 0$ polos en el contorno de Nyquist. Como $Z = 0$, entonces es estable.

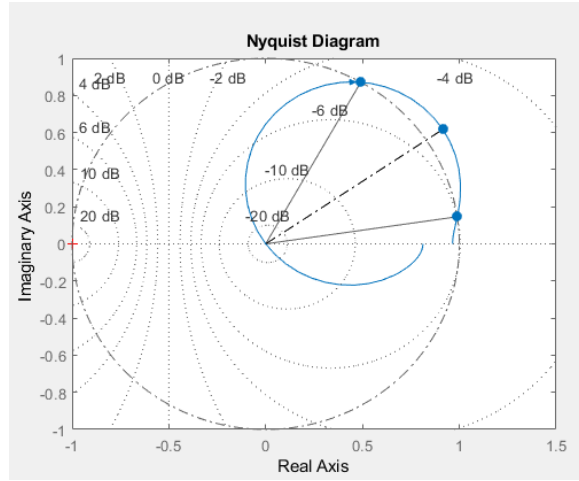


Figura 3. Diagrama de Nyquist.

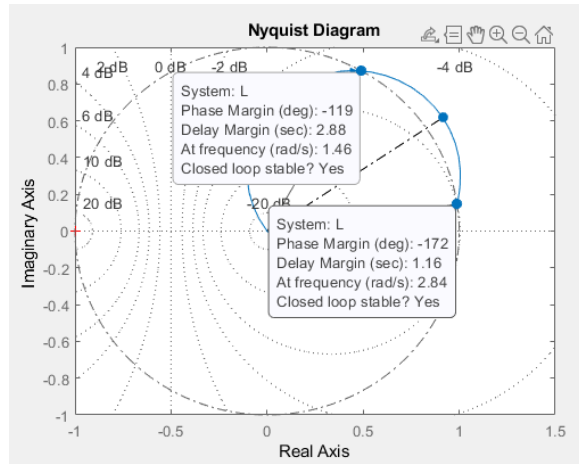


Figura 4. Diagrama de Nyquist.

Con esta información podemos observar el margen existente para no comprometer el sistema, se sabe que es estable, sin embargo, entre esos valores que nos brinda el diagrama.

II-D. Controlador PD

A partir del margen fase brindado por el punto anterior, se procede a calcular el primer compensador, para esto se emplea el K_p calculado previamente. Así como de la tabla de Wg, la cual indica el valor aproximado a usar para la fase solicitada. Mediante las ecuaciones 8,9,10,11,12 y 13 se obtiene los parámetros necesarios para el diseño del compensador PD.

$$K_p = 0.818 \quad (8)$$

$$K_p = \frac{-\pi\zeta}{e\sqrt{1+\zeta^2}} = 0.2 \quad (9)$$

$$\zeta = 0.456 \quad (10)$$

$$MF = \zeta * 100 = 45 \quad (11)$$

$$\omega = \frac{K_p}{K_D} = 1 \text{ rad/s} \quad (12)$$

$$K_D = \frac{K_p}{1} = 0.8118 \quad (13)$$

Con los valores obtenidos en el diseño, se emplea sisotool. Se agrega en la opción de compensadores los ceros, polos y ganancias del compensador. Con esta acción se obtiene el sistema compensado. Para realizar el análisis correspondiente, se importan los valores al workspace. La ecuación 14 corresponde al compensador PD y la ecuación 15 corresponde al compensador en lazo cerrado.

$$PD = 0.8118(s + 1) \quad (14)$$

$$LCpc = \frac{0.78344(s + 1)(s^2 + 1.953e^{-7}s + 1.562)}{s^2 + 0.3232s + 1.857} \quad (15)$$

El sistema cumple con el requisito de error de estado estacionario cero cuando la señal de entrada es un escalón debido a que tiene un polo en el origen. En cuanto al margen de fase, se puede observar fácilmente en el diagrama de Bode elaborado que el margen es de 90° , porque en el momento cuando la gráfica de ganancia está en 0 dB, la gráfica de fase está en 90° y necesita de 90° más para llegar a los 180° .

Una manera más formal de comprobar este margen de fase es a través del diagrama de Nyquist obtenido anteriormente. El margen de fase se define como la cantidad de retardo de fase adicional, la frecuencia de cruce de ganancia, que se necesita

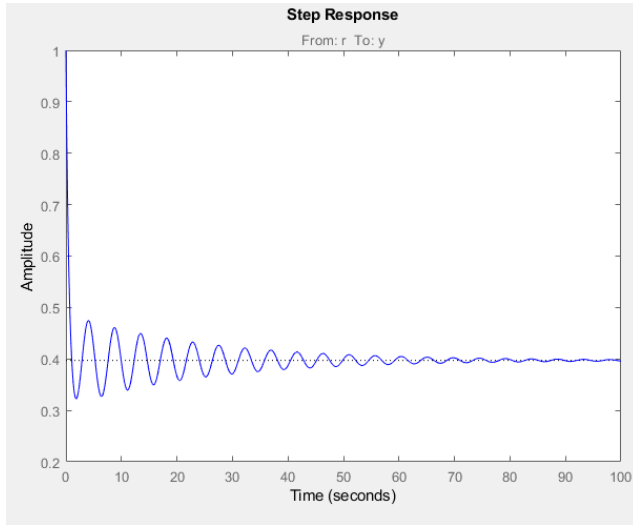


Figura 5. Respuesta al Impulso del Sistema.

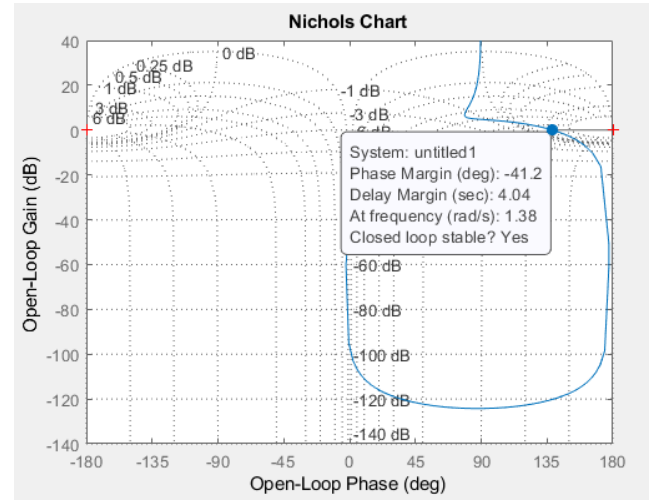


Figura 7. Estabilidad vista a partir de la Grafica de Nichols.

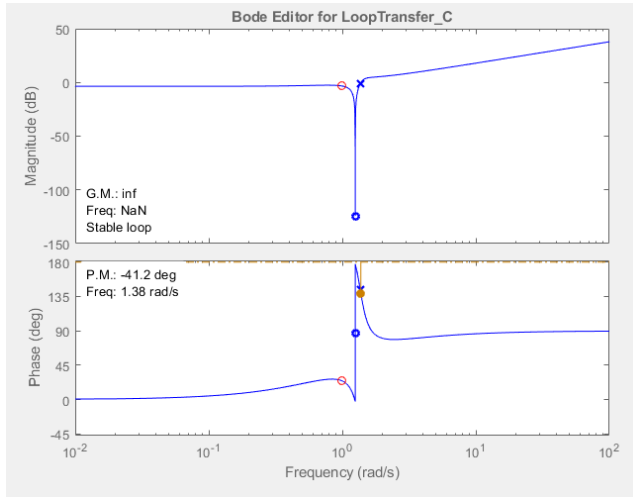


Figura 6. Diagrama de Bode del Sistema Compensado.

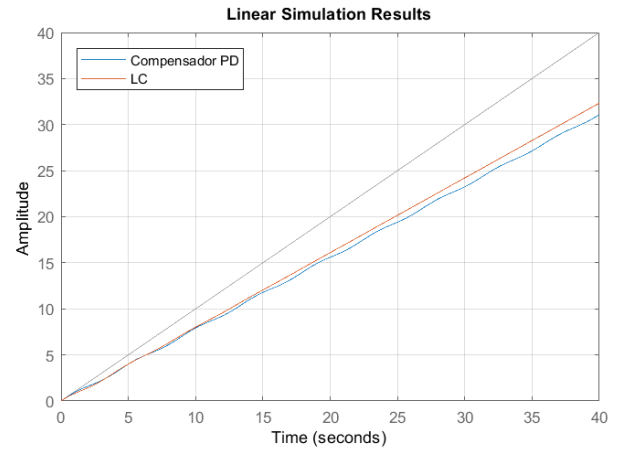


Figura 8. Respuesta ante rampa para el compensador PD

para llevar el sistema al borde la inestabilidad. La frecuencia de cruce de ganancia denota la frecuencia en la que la magnitud de $G(j)H(j)$ es unitaria. El margen de fase se expresa como $MF = 180 +$, con siendo el ángulo formado entre el eje real positivo hasta un vector que va desde el punto de origen hasta el punto de corte entre lugar geométrico de $G(j)H(j)$ y un círculo unitario cuyo centro es el origen. Este ángulo corresponde a 90° (negativo por la orientación), por lo que el margen de fase es $MF = 180 - 90 = 90$, con una frecuencia de cruce de ganancia (cg) de 0,01592 Hz (equivalente a 0,1 rad/s), comprobando lo estipulado por el diagrama del Bode del sistema.

II-E. Controlador PI

En lazo cerrado, el margen de fase con Nyquist indica que se tiene: $172 - 119 = 53$ para trabajar. Esto se evalúa en lazo cerrado y se obtiene el k_p con este valor 0.9591 y por consiguiente el $K_i=0.18$.

Con esto generamos el compensador PI correspondiente a la ecuación 16 y luego de la misma manera que con el PD usando sisotool y la opción de agregar polos, ceros y ganancias lo ingresamos, obteniendo el compensador PI en lazo mostrado en la ecuación 17.

$$PI = \frac{0.18768(s + 1)}{s} \quad (16)$$

$$LC_{pi} = \frac{0.18112(s+1)(s^2 + 1.953e-07s + 1.562)}{s(s^2 + 0.3232s + 1.857)} \quad (17)$$

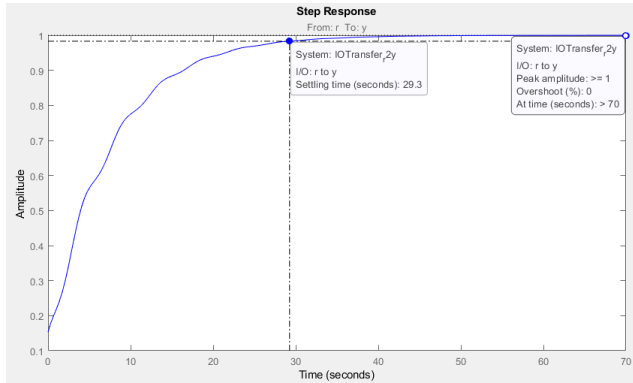


Figura 9. Respuesta al Impulso del Sistema.

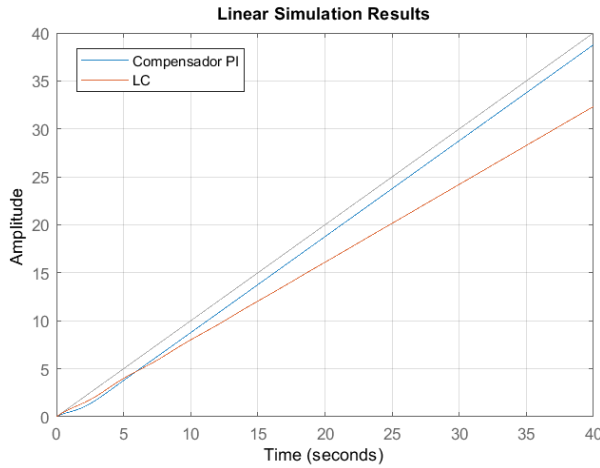


Figura 10. Respuesta ante rampa para el compensador PI

II-F. Controlador PID

Para el diseño del controlador, PID, se parte del hecho de que se tiene el controlador PI y PD, entonces, a partir de diferentes procesos aritméticos con los valores obtenidos previamente, se procede a obtener el controlador, es así como se obtiene el controlador y agregar a la herramienta de sisotool. En la ecuación 18 se observa el controlador PID y en la ecuación 19 el sistema compensado en lazo cerrado.

$$PID = \frac{3.296(s + 0.1917)(s + 1.232)}{s} \quad (18)$$

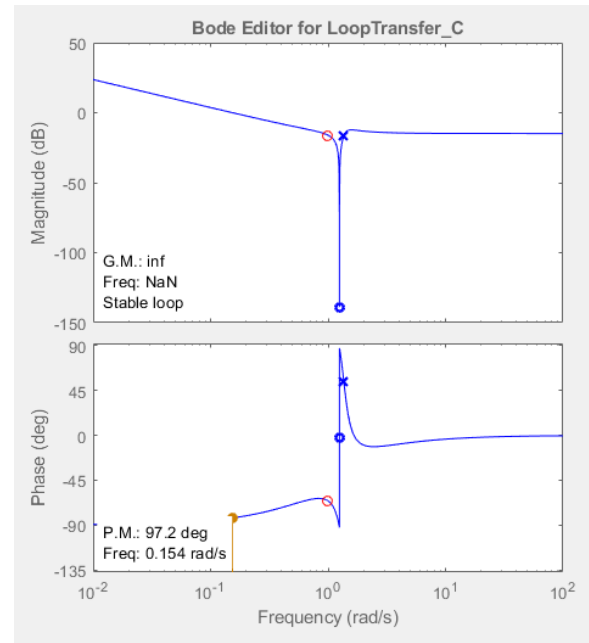


Figura 11. Diagrama de Bode del Sistema Compensado.

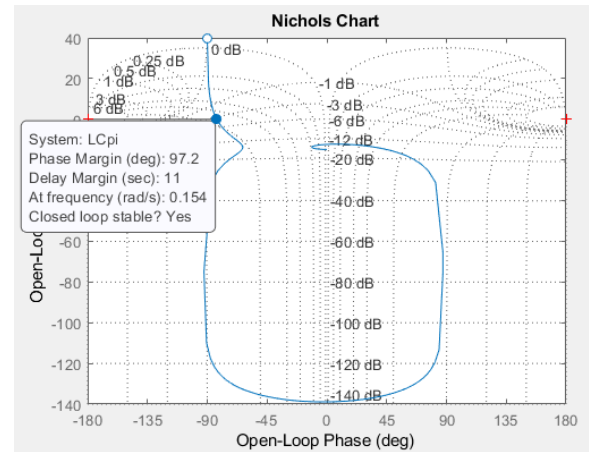


Figura 12. Estabilidad vista a partir de la Grafica de Nichols para controlador PI.

$$PID = \frac{3.1824(s^2 + 0.1917)(s + 1.232)(s^2 + 1.953e-07s + 1.562)}{s(s^2 + 0.3232s + 1.857)} \quad (19)$$

En la figura 13 se observa el diagrama de Bode para un sistema PID compensado. En la figura 14 se aprecia la estabilidad vista a partir de la gráfica de Nichols para el mismo sistema. Luego, en la figura 15, se observa la respuesta a una función rampa para el sistema compensado.

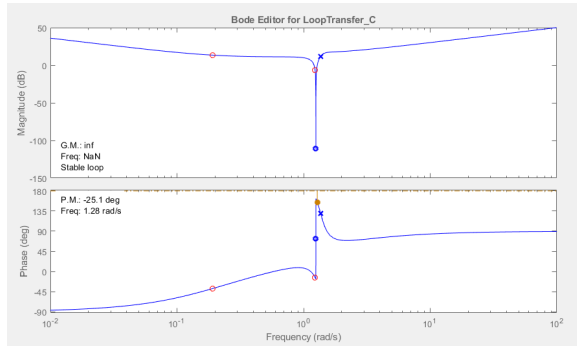


Figura 13. Diagrama de Bode del Sistema PID Compensado.

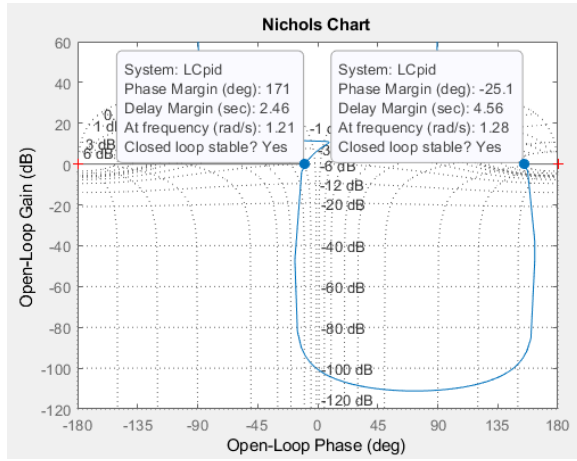


Figura 14. Estabilidad vista a partir de la Gráfica de Nichols para sistema PID.

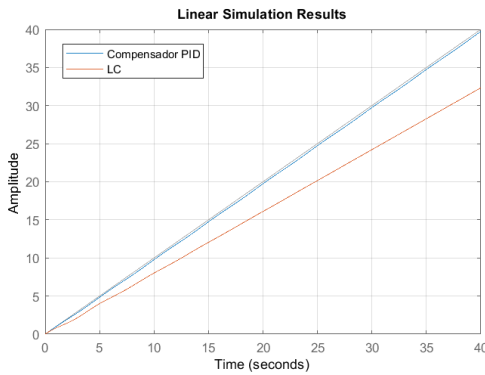


Figura 15. Respuesta ante la rampa para el compensador PID

II-G. Compensador de Adelanto

Se define la función del compensador de adelanto como en la ecuación 20:

$$G_{ad}(s) = K_c \alpha \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} = K_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}} \quad (20)$$

Con

$$0 < \alpha < 1$$

$$K_c \cdot \alpha = K \quad (21)$$

$$G_1(s) = K \cdot G(s) \quad (22)$$

Para obtener un error menor al 3 % ante un entrada rampa, primero, se debe añadir un integrador a la función de $G(s)$. Además, se define la constante de error como

$$K_v = \frac{1}{0.03} = 33.33$$

con lo que

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G_{ad}(s) \cdot G(s) \cdot H(s) < 33.33 \quad (23)$$

Ya que K_v sin el compensador es 4.316, se calcula

$$K < \frac{33.33}{4.316} = 7.722$$

Se obtiene el diagrama de Bode para $G_1(jw)$. Se observa el margen de fase $MF = 37.1^\circ$. Se solicita un margen de fase mayor o igual a 45° , por lo que se deben sumar 8° al ángulo de adelanto para cumplir con la condición, junto con un incremento de 5° para compensar el desplazamiento de la frecuencia de cruce de ganancia. Por lo tanto se determina $\theta = 13^\circ$, con que se calcula:

$$\sin \theta_m = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} = 13^\circ$$

$$\alpha = 0.633$$

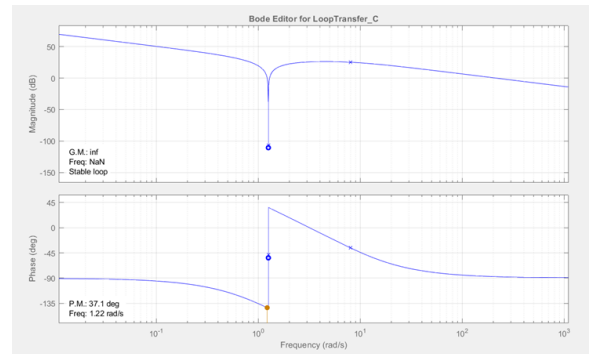


Figura 16. Diagrama de Bode de la función $G_1(jw)$

Se obtiene la magnitud del sistema no compensado como

$$G_1 = -20 \log \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \right) = -1.986$$

A partir de la gráfica se aproxima el valor de la frecuencia ω_m y se calcula

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha}T}$$

$$T = 1.047$$

Se determinan las frecuencias esquinas del compensador de adelanto como

$$\omega = \frac{1}{T} = 0.955$$

$$\omega = \frac{1}{\alpha \cdot T} = 1.508$$

Despejando el valor de K_c

$$K_c = \frac{K}{\alpha} = 12.199$$

Finalmente se obtiene el compensador de adelanto:

$$G_{ad}(s) = 12.199 \frac{s + 0.955}{s + 1.508} \quad (24)$$

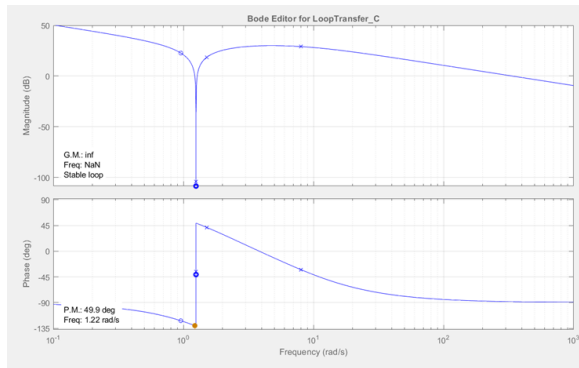


Figura 17. Diagrama de Bode del sistema para compensador de adelanto

Se recalcula la ecuación con la función del compensador de atraso obtenida, con esto se determina un porcentaje de error de aproximadamente 3%.

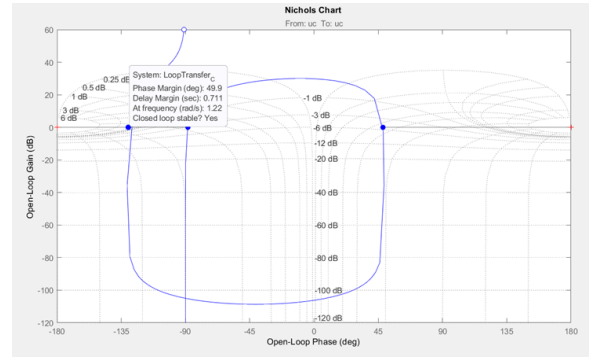


Figura 18. Carta de Nichols para compensador de adelanto.

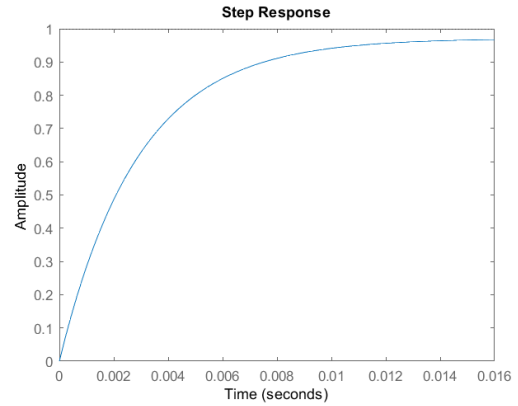


Figura 19. Respuesta ante escalón con compensador de adelanto

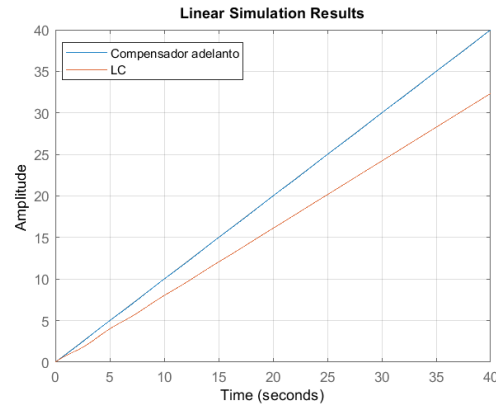


Figura 20. Respuesta ante rampa con compensador de adelanto

II-H. Compensador de Atraso

Se define la función del compensador de atraso como:

$$G_{at}(s) = K_c \beta \frac{Ts + 1}{\beta Ts + 1} = K_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\beta T}} \quad (25)$$

Con

$$\beta < 1$$

$$K_c \cdot \beta = K \quad (26)$$

$$G_1(s) = K \cdot G(s) \quad (27)$$

Se busca que el ángulo de fase de la función sea

$$\theta = -180^\circ + 45^\circ + 12^\circ = -123^\circ$$

Puesto que 45° es el margen de fase requerido y se añaden 5° como compensación al desfase que causa el compensador.

A partir del mismo diagrama de la figura se estima la frecuencia de -123° como 0.67 rad/s , con una magnitud de aproximadamente 30 dB , la cual corresponde a la nueva frecuencia de cruce de ganancia. Por lo que se puede definir una atenuación de -30 dB para reposicionar la curva de magnitud en 0 dB en la frecuencia correspondiente, con esto se calcula

$$-30 = -20 \log(\beta)$$

$$\beta = 31.623$$

Para las frecuencias de esquina se determina $\omega = 1/T$, correspondiente al cero del compensador, con un valor de una década por debajo de la frecuencia de cruce de ganancia definida. Por lo que se obtiene

$$\omega = \frac{1}{T} = 0.067$$

Despejando se determina

$$T = 14.925$$

Y se calcula la frecuencia de esquina correspondiente al polo del compensador como

$$\omega = \frac{1}{\beta \cdot T} = 0.00212$$

Despejando el valor de K_c

$$K_c = \frac{K}{\beta} = 0.244$$

Para la ganancia $K_c = 0.244$ en el compensador de atraso se determinó un porcentaje de error cercano al 3% y un sobreimpulso del 26%, el cual sobrepasa el 20% requerido, por lo tanto se busca

un mejor ajuste que cumpla con la condición, el cual dio como resultado $K_c = 0.0616$ que permitió un sobreimpulso de 17.4%. Sin embargo, esto implica un aumento significativo del porcentaje de error a más del 10%. Se obtiene el compensador de atraso:

$$G_{ad}(s) = 0.0616 \frac{s + 0.067}{s + 0.00212} \quad (28)$$

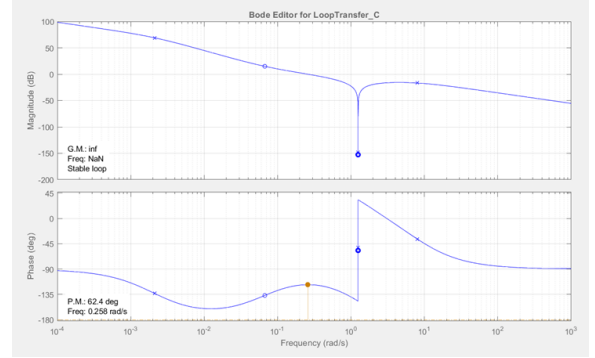


Figura 21. Diagrama de Bode del sistema para compensador de atraso

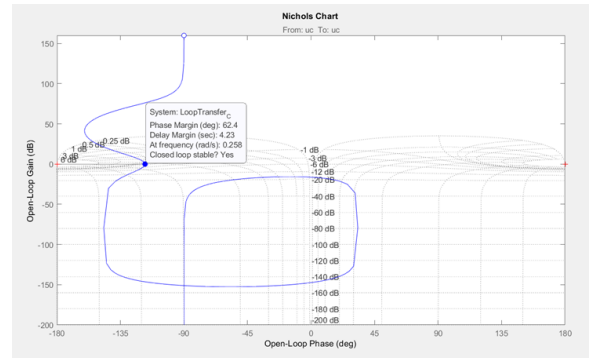


Figura 22. Carta de Nichols para compensador de atraso.

III. ANALISIS DE RESULTADOS

A diferencia del proyecto desarrollado anteriormente, no se usa la herramienta automática para encontrar valores o modificar valores, sin embargo, se quiere observar el comportamiento del sistema agregando los compensadores, en el caso del compensador PD, lo que se logra es disminuir el tiempo y el error, por lo que al aplicarlo se puede apreciar en la gráfica 5 de la respuesta al impulso que esta no tiene el comportamiento esperado. Al aplicar el PI solamente logramos obtener el amortiguamiento que se busca. Al aplicar el PID, este al ser un

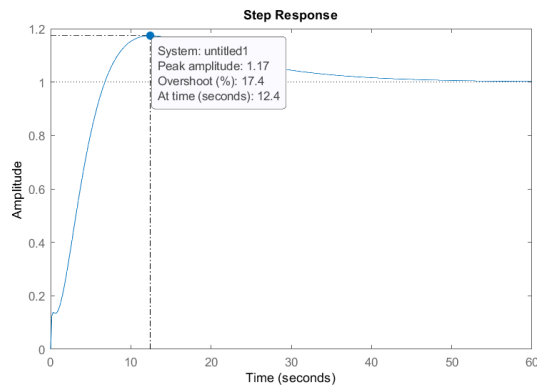


Figura 23. Respuesta ante escalón con compensador de atraso

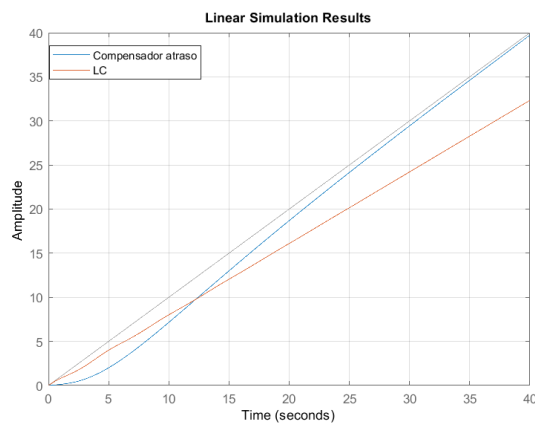


Figura 24. Respuesta ante rampa con compensador de atraso

conjunto de los dos anteriores, tiene un comportamiento esperado junto con una disminución del error, dando como resultado un controlador que integra los requisitos de diseño establecido al inicio. En términos de estabilidad, la mejor opción es el controlador PID.

El controlador de adelanto, al igual que los anteriores, cumplió los requerimientos planteados. Presentó un tiempo de estabilización de 1,1 segundos, eliminó la totalidad del error de estado estacionario. Además, presentó un margen de fase de 62° y un margen de ganancia infinito.

Respecto al sobreimpulso máximo, este fue de 17.4 %, el menor de los cinco controles analizados. Respecto al controlador de atraso, este se caracteriza por ser esencialmente un filtro pasa bajas. Este controlador mejora la respuesta de estado estacionario, reduciendo la ganancia a altas frecuencias sin

reducirlas en bajas frecuencias y además aumenta el tiempo de la respuesta transitoria. Es posible verificar esto al ver que el tiempo estabilización del sistema bajo este control es de unos 4,85 segundos, considerablemente mayor al de otros controladores diseñados.

IV. CONCLUSIONES

Se obtuvo con éxito la función de transferencia a partir de un Diagrama de Bode.

Se realizaron todos los pasos y se comprendió el diseño y realización de Compensadores PD, PI y PID.

Se estudió y aplicó el uso de Matlab como herramienta básica de simulación de sistemas para el control automático.

La carta de Nichols es un útil complemento al diagrama de Bode, se muestra gráficamente los márgenes de fase y ganancia de un sistema, entre otros atributos como el ancho de banda y la frecuencia del pico de resonancia.

Se logró realizar un análisis profundo utilizando la herramienta de sisotool y se verificó como compensar a partir de diferentes valores y opciones la estabilización.

V. REFERENCIAS

- [1] Mathworks.com.
- [2] Ogata, Katsuhiko: Ingenier 1a de Control Moderna, Prentice Hall, Madrid, 4a edición, 2003.
- [3] Dorf y R. H. Bishop. Sistemas de control moderno, Pearson, 10a edición, 2008.