Méthodes itératives

2022–2023

Introduction

On cherche une suite $x^{(p)}$ de $\mathbb{R}^n$ convergeant vers la solution x^* de $A \cdot x = b$

$$\forall x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \qquad x^{(p+1)} = H(x^{(p)})$$

- La matrice A n'est jamais modifiée
- Problème du suivi de la convergence et du choix du test d'arrêt
- La solution obtenue n'est pas exacte
- La matrice doit vérifier des conditions de convergence
- La vitesse de convergence dépend de la valeur des coefficients de la matrice

Familles de méthodes

Algorithmes itératifs de relaxation

Algorithmes associés à une décomposition de A sous la forme $M - N$: Gauss-Seidel, Jacobi, SOR

Méthodes de gradient

Plus grande pente, directions conjuguées, gradient conjugué

Première partie I

Méthodes itératives de relaxation

Algorithme itératif de relaxation associé à une décomposition de A sous une forme $M - N$

Soit $A = M - N$ avec M inversible

$$\begin{aligned} A \cdot x^* = b &\iff (M - N) \cdot x^* = b \\ &\iff M \cdot x^* = N \cdot x^* + b \\ &\iff x^* = M^{-1} \cdot N \cdot x^* + M^{-1} \cdot b \end{aligned}$$

Algorithme itératif de relaxation associé :

$$\begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \\ x^{(p+1)} = M^{-1} \cdot N \cdot x^{(p)} + M^{-1} \cdot b \\ \qquad\quad\; = M^{-1} \cdot (M - A) \cdot x^{(p)} + M^{-1} \cdot b \\ \qquad\quad\; = x^{(p)} + M^{-1} \cdot r^{(p)} \end{cases}$$

avec $r^{(p)} = b - A \cdot x^{(p)}$ le vecteur résidu

Coût d'une itération (en dehors du calcul du résidu) : résolution d'un système de matrice M

Soit la décomposition de $A = D - E - F$ avec :

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ -a_{21} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & \dots & -a_{nn-1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -a_{n-1n} \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Deux variantes

Algorithme de Jacobi : $M = D$ et $N = E + F$

L'itération p consiste à résoudre l'équation :
$D \cdot x^{(p+1)} - (E + F) \cdot x^{(p)} = b$
C.N. d'application : D inversible $i = 1, \ldots, n \; a_{ii} \neq 0$

Algorithme de Gauss-Seidel : $M = D - E$ et $N = F$

L'itération p consiste à résoudre l'équation :
$(D - E) \cdot x^{(p+1)} - F \cdot x^{(p)} = b$
C.N. d'application : $(D - E)$ inversible $\iff$ $i = 1, \ldots, n \; a_{ii} \neq 0$