Gewöhnliche Differentialgleichungen

Jonas Pleyer

6. Mai 2022

Table of Contents

Table of Contents

Grundideen

- Was ist eine Ordinary Differential Equation (ODE)?
- Gewöhnliche Differentialgleichungen (engl. ODEs) kommen in fast allen Bereichen der Wissenschaften/Natur vor
- Beschreibt Änderung einer Variable
- ... welche von sich selbst oder anderen Variablen abhängt

Beispiele

- Corona-Neu-Infizierungungen (Änderung) sind proportional zu der Anzahl der bereits infizierten Menschen

$$\dot{N} = aN$$

$\Rightarrow$ Exponentielles Wachstum $N = N_0 \exp(at)$

- Radioaktiver Zerfall: Menge des zerfallenden Materials (Änderung) ist proportional zur Gesamtmenge

$$\dot{N} = -\lambda N$$

$\Rightarrow$ Exponentieller Zerfall: $N = N_0 \exp(-\lambda t)$

Numerische Lösungsverfahren

1

Lösungen für ODEs

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def RHS(y, t):
    return -0.5*y

if __name__ == "__main__":
    t0 = 0.0
    tend = 10.0
    dt = 1.0
    y0 = 4.0

    t_vals = np.arange(t0, tend, dt)
    y_vals = np.array([y0]*len(t_vals))

    # Hier wird das Eulersche Verfahren zum lösen der ODE verwendet
    for i in range(len(y_vals)-1):
        y_vals[i+1] = y_vals[i] + dt * RHS(t_vals[i], y_vals[i])

    plt.plot(t_vals, y_vals, label="Lösung der Differentialgleichung", marker="o")
    plt.legend()
    plt.show()
```

Lösungen für ODEs

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import odeint

def RHS(y, t):
    return -0.5*y

if __name__ == "__main__":
    t0 = 0.0
    tend = 10.0
    dt = 1.0
    y0 = 4.0

    t_vals = np.arange(t0, tend, dt)
    # Hier wird eine routine von scipy zum lösen der ODE verwendet
    y_vals = odeint(RHS, y0, t_vals)

    plt.plot(t_vals, y_vals, label="Lösung der Differentialgleichung", marker="o")
    plt.legend()
    plt.show()
```

Lösungen für ODEs

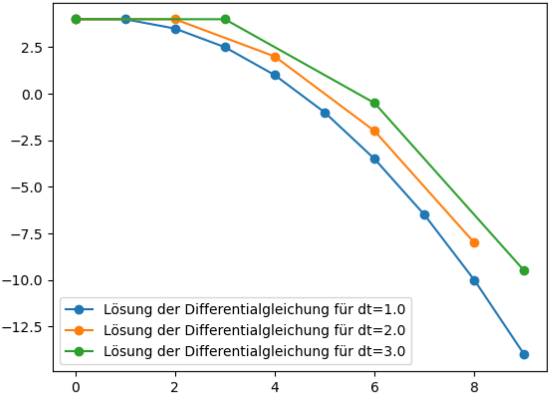

Abbildung: Das Euler-Verfahren löst eine ODE schrittweise mit konstanter Schrittweite.

Table of Contents

Aufgabe 1

- Löse die folgende ODE mit $A(0) = 2$ per Hand

$$\dot{A} = \alpha$$

- Löse die folgende ODE mit $A(0) = N$ per Hand

$$\dot{A} = -\beta A$$

- Welche Verhaltensweisen zeigen die Lösungen?
- Wie verändert sich die Lösung für verschiedene Parameter α, β?
- Welches Biologische System könnten diese ODEs beschreiben?

Aufgabe 2

Gegeben ist die folgende Differentialgleichung

$$\dot{A} = \alpha - \beta A$$

mit $A(0) = 0$.

1. Löse diese Differentialgleichung numerisch mit dem Euler-Verfahren.
2. Welche Eigenschaften haben die parameter α, β?
3. Welche Probleme können auftreten für verschiedene parameter α, β?
4. Welches biologische System könnte dieser Differentialgleichung zugrunde liegen?

Aufgabe 3

Wir betrachten wie eben die Differentialgleichung

$$\dot{A} = \alpha - \beta A$$

diesmal mit zeitabhängigem Parameter α

$$\alpha(t) = \begin{cases} \alpha & 2n < t \leq 2n+1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Wie können wir die Lösung dieser Differentialgleichung berechnen?

Table of Contents

Projekt (Studienleistung)

- Arbeit in Gruppen (2-3 Gruppen)
- Erarbeiten von Model zu biologischem System
- Übersetzen in Computer-Simulation
- Diskussion der Ergebnisse in Vortrag
- Themen werden noch bekannt gegeben