

Bifurkationen und Toggle-Switch

3. Juni 2022

1 Bifurkationen

Aufgabe 1 Grundlagen

Beantworte die folgenden Fragen

- Was ist eine Bifurkation?
- Wann entsteht eine Bifurkation?
- Was ist das mathematische Kriterium für eine Bifurkation?
- Welche Formen von Bifurkationen gibt es?
- Was können Beispiele für Biologische Systeme mit Bifurkationen sein? (2 Stück)

Aufgabe 2 Python erstes Beispiel

Das python-script "Bifurkationen.py" bietet eine erste einfache Möglichkeit, Bifurkationen zu plotten. Es ist noch leicht unvollständig. Verstehe das Skript und vervollständige es. Das Endergebnis sollte dann aussehen wie in Figur 1.

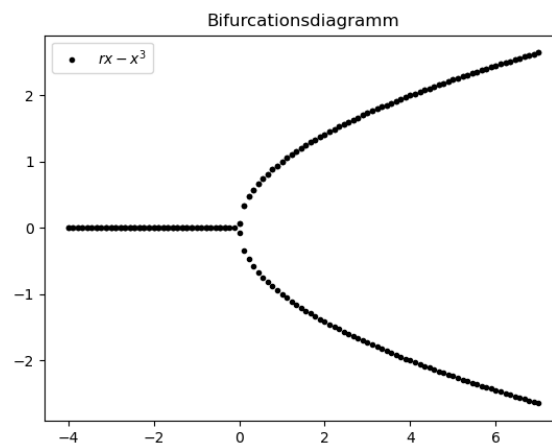


Abbildung 1: Bifurkation geplottet mit python

Aufgabe 3 Auf Papier: Erwartungen an Systeme

Betrachte die folgenden Gleichungen jeweils als einzelstehende Ordinary Differential Equations (ODEs). Welche davon zeigen Bifurkationen? Welche weiteren Verhaltensweisen sind zu erwarten? Wie viele Gleichgewichtszustände gibt es?

$$\dot{x} = -rx^3 + x \quad (1)$$

$$\dot{x} = x - rx^3 \quad (2)$$

$$\dot{x} = ax + bx^2 - rx^3 \quad (3)$$

$$\dot{x} = -(x-r)(x-1+r)^2 - (x-r)^2(x-1+r) \quad (4)$$

$$\dot{x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(1 - e(-(x-r)^2)\right)^2 \left(1 - e(-(x-1+r)^2)\right)^2 \quad (5)$$

$$\dot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x}(x) \quad (6)$$

wobei $g(x)$ gegeben ist durch Diagramme aus Figur 2.

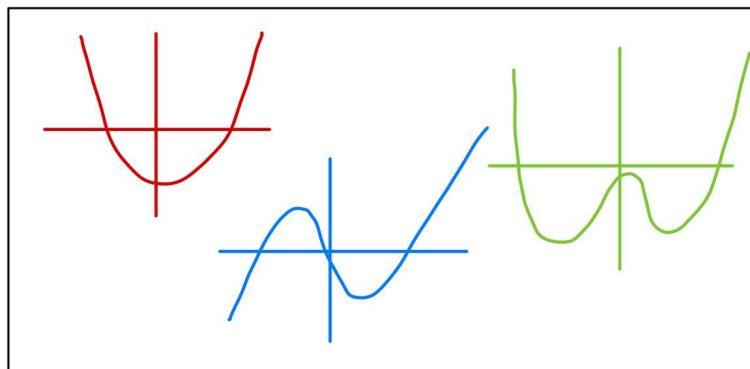


Abbildung 2: Plots für Möglichkeiten von $V(x)$.

Aufgabe 4 Erwartungen überprüfen

Benutze das python-script von zuvor, um die oben beschriebenen Systeme zu plotten und mit deinen Erwartungen zu vergleichen.

Aufgabe 5 Hopf-Bifurkation (Zusatz)

Wie müsste man das vorhergegangene Muster verändern, um eine Hopf-Bifurkation zu visualisieren?
Schreibe ein Python-script für die folgende ODE

$$\dot{x} = \lambda(x + y) + \alpha(x^2 + y^2) \quad (7)$$

$$\dot{y} = x + y + \beta(x^2 + y^2) \quad (8)$$

Für welche Werte von λ, α, β finden wir Bifurkationen, stabile Fixpunkte etc.?

2 Toggle-Switch Model

Aufgabe 6 Grundlagen

Beantworte die folgenden Fragen zum Toggle-Switch model

$$\dot{A} = \frac{a_1}{1 + B^n} - A \quad (9)$$

$$\dot{B} = \frac{a_2}{1 + A^n} - B \quad (10)$$

- Gehört dieses System von ODEs zu einer Reaktion, die wir aufschreiben können?
- Was möchte man mit diesem mathematischen model biologisch simulieren?
- Was ist eine Nullcline? Warum ist sie hilfreich?

Aufgabe 7 Nullclinen

Berechne die Nullclinen von Hand. Schreibe ein Python script, welches die Nullclinen numerisch berechnet und plottet. Vergleiche die Ergebnisse mit deinen Berechnungen von Hand. Was kann man von den plots ablesen? Welche Schlüsse lassen sich ziehen?

Aufgabe 8 Flussdiagramm

Das python script Toggle-Switch-Fluss.py wurde bereits im Vorhinein angelegt. Mache dich mit dem Skript vertraut und versuche zu verstehen, was in den einzelnen Schritten passiert. Finde einen Satz von parametern a_1, a_2, n , sodass ein Schaubild wie das aus Figur 3 zustande kommt. Beantworte die folgenden Fragen

- Was sehen wir auf dem Plot?
- Wie hilft uns das in der Analyse?
- Was können wir nicht sehen?

Benutze dein Ergebnis für die geplotteten nullclinen und füge diese dem plot hinzu. Macht es Sinn, das in einen plot zu kombinieren? Was zeigt uns das resultierende Schaubild?

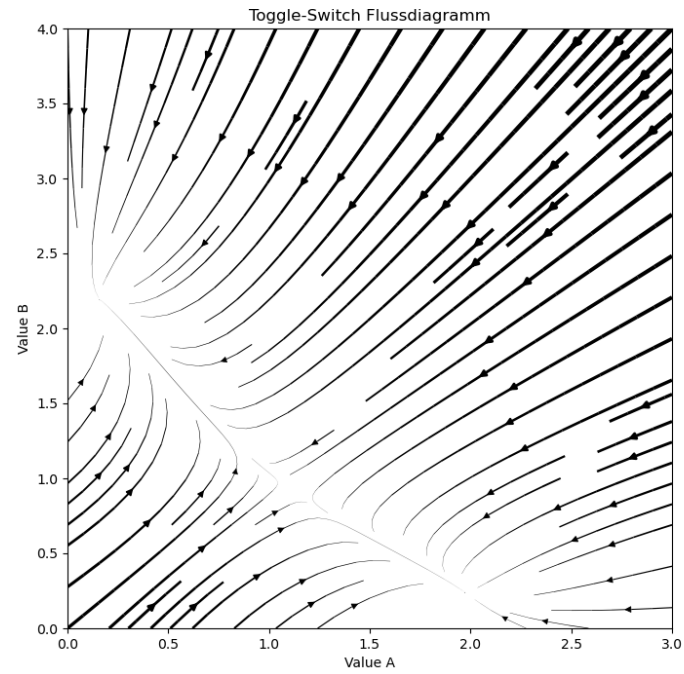


Abbildung 3: Flussdiagramm des Toggle-Switch Models