4_04_2023

martedì 4 aprile 2023 08:46

ULTIMI CONCETTI DI STATICA

RIASSUNTO OPERAZIONI STUDIO STATICA DI UN CORPO/INSIEMI DI CORPI

Operazioni sempre possibili se ci semplificano la vita:

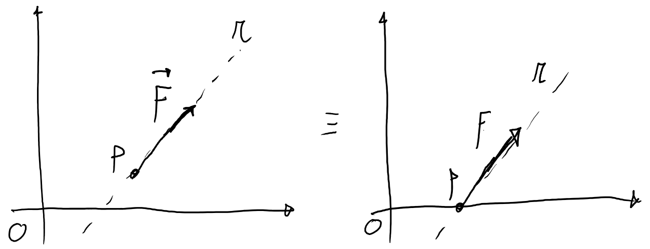
- Sistemi di forze equipollenti/equivalenti:

  2 sistemi sono equipollenti sse $\sum \vec{F}_1 = \sum \vec{F}_2$ e il momento rispetto a un generico polo O deve essere lo stesso

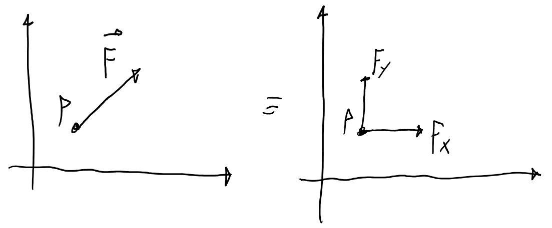
$$\begin{cases} \vec{R}^{(I)} = \vec{R}^{(II)} \\ \vec{M}_O^{(I)} = \vec{M}_O^{(II)} \end{cases}$$

- Per tutte queste proprietà vale il viceversa:

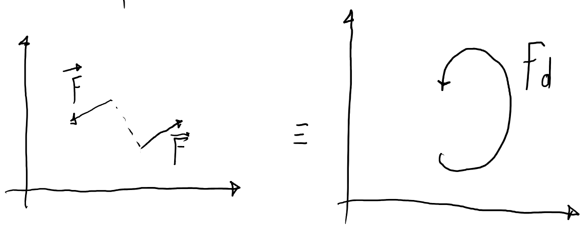
1) Spostare il punto di applicazione della forza $\vec{F}$ lungo la sua retta di applicazione r



2) Scomporre una forza $\vec{F}$ lungo le sue componenti lungo X e Y

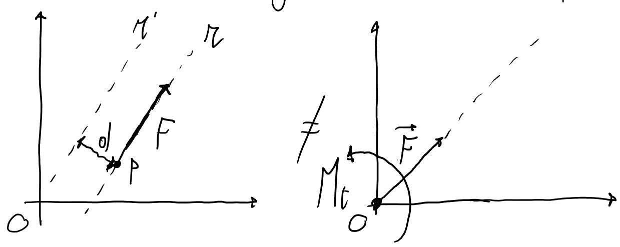


3) Posso sostituire un sistema di forze a risultante nulla con una coppia equivalente



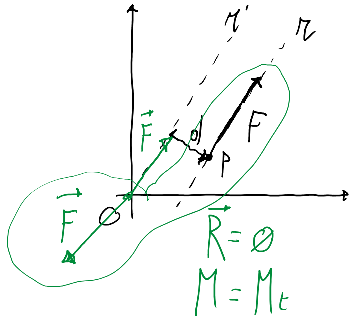
- NON VALE PIÙ IL VICEVERSA

4) Modificare il punto d'applicazione della forza $\vec{F}$ fuori dalla sua retta d'applicazione (Non ottengo un sistema di forze equipollenti)



$M_t = F \cdot d$

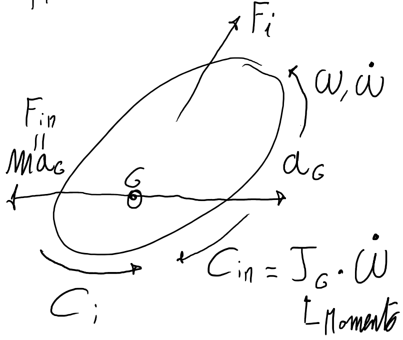
Per rendere il sistema equipollente devo introdurre un Momento di Trasporto equivalente al momento avuto da $\vec{F}$ nel sistema iniziale
Il momento di trasporto nasce da:



DINAMICA DI UN SISTEMA DI CORPI RIGIDI

POSIZIONE DEL BARICENTRO

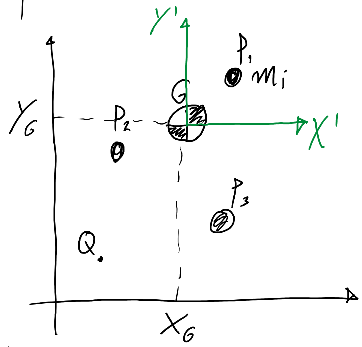
Possiamo pensare che il corpo in ogni istante presenta equilibrio tra ogni forza e ogni coppia di forze



$$\begin{cases} \vec{F}_{IN} = -m\,\vec{a}_G \\ \vec{C}_{IN} = -J\,\dot{\vec{\omega}} \end{cases}$$

Devo calcolare punto d'applicazione di $F_{INERZIA}$ e $C_{INERZIA}$
Per calcolare il baricentro possiamo iniziare a considerare un corpo come un insieme di punti. Il baricentro sarà la media pesata delle posizioni dei punti del sistema.

Per calcolare il baricentro possiamo iniziare a considerare un corpo come un insieme di punti. Il baricentro sarà la media pesata delle posizioni dei punti del sistema.



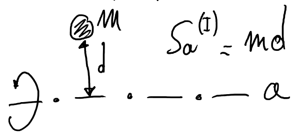
Massa del Punto

$$X_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{m} = \frac{S_y^{(I)}}{m}$$

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

$$Y_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i m_i}{m} = \frac{S_x^{(I)}}{m}$$

Momento Statico del Primo ordine



$S_a^{(I)} = md$

PROPRIETÀ

1) Se poniamo un sistema di riferimento baricentrico $X_G = 0, Y_G = 0$ e dunque annulliamo i momenti statici del primo ordine

2) Il baricentro è il centro delle forze peso

$G \equiv$ centro forze peso

$\Rightarrow$ Il momento delle forze peso rispetto al baricentro si annulla

$$\vec{M}_Q = \sum_{i=1}^{n} (P_i - Q) \wedge m_i g \vec{j}$$ Generico

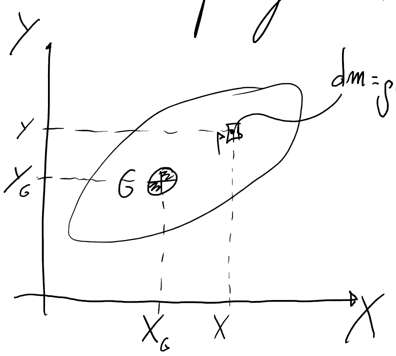
$$\vec{M}_Q = \sum_{i=1}^{n} (P_i - Q) \wedge m_i g \vec{j} = 0 \quad Q?$$

$$\vec{M}_Q = -\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_Q) m_i \overset{\text{costante}}{\cancel{g}} = 0 \quad \frac{1}{g}$$

$$\sum (x_i - x_Q) m_i = 0 \quad \sum_i x_i m_i = \sum_i x_Q m_i$$

$$\sum x_i m_i = m x_Q \Rightarrow x_Q = \frac{\sum_i x_i m_i}{m} \equiv X_G \quad \boxed{CVD}$$

Per passare al corpo rigido devo passare ad un sistema continuo di punti



$dm = \rho(x,y,z) dV$

$$\begin{cases} X_G = \frac{1}{m} \cdot \int_m x \, dm = \frac{S_y^{(I)}}{m} \\ Y_G = \frac{1}{m} \cdot \int_m y \, dm = \frac{S_x^{(I)}}{m} \end{cases}$$

Dunque posso riscrivere X_G e Y_G come:

$$\Big\{ X_G = \frac{1}{m} \int \rho(x,y,z) x \, dV = S_y^{(I)}$$

Dunque posso riscrivere X_G e Y_G come:

$$\begin{cases} X_G = \frac{1}{m}\int_V \rho(x,y,z)\, x\, dV = \frac{S_y^{(I)}}{m} \\ Y_G = \frac{1}{m}\int_V \rho(x,y,z)\, y\, dV = \frac{S_x^{(I)}}{m} \end{cases}$$

Noi faremo sempre riferimento a corpi omogenei, dunque $\rho(x,y,z) = cost$
Inoltre noi considereremo corpi a spessore uniforme, dunque $V = A \cdot h$, h cost.
Area A · h Altezza

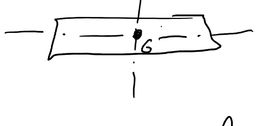
Dunque posso rimanipolare l'equazione delle coordinate di G come:

$$\begin{cases} X_G = \frac{1}{m}\rho h \int_A x\, dA = \frac{1}{A}\int_A x\, dA \\ Y_G = \frac{1}{m}\rho h \int_A y\, dA = \frac{1}{A}\int_A y\, dA \end{cases}$$

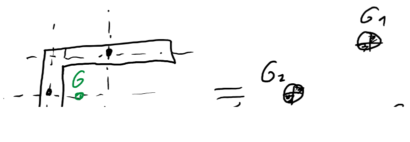
Dunque il baricentro coincide con il baricentro geometrico della Superficie che simula il corpo (Questo porta altre semplificazioni):

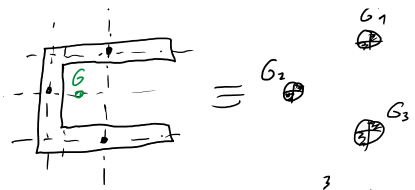
1) Baricentro giace sull'asse di simmetria di un corpo.

2) Se ho un corpo con 2 assi di simmetria il baricentro coincide con l'intersezione dei 2 assi di simmetria



3) Se un corpo rigido è facilmente scomponibile in figure di cui è semplice trovare il baricentro posso trovare il baricentro complessivo considerando il sistema di punti generato dai baricentri



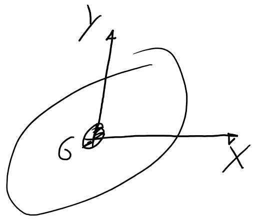


$$m = \sum_i m_i \qquad \begin{cases} X_G = \dfrac{\sum_{i=1}^{3} X_{G_i} m_i}{m} \\ Y_G = \dfrac{\sum_{i=1}^{3} Y_{G_i} m_i}{m} \end{cases}$$

A queste proprietà si sommano quelle precedentemente trovate

4) $G \equiv$ centro delle forze peso

5)

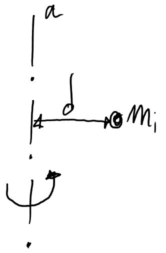


$$S_x^{(I)} = S_y^{(I)} = 0$$

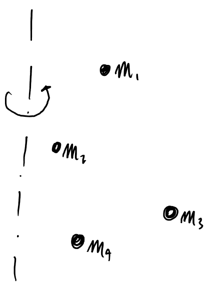
MOMENTO D'INERZIA DEL CORPO

Da un'indicazione su come la massa è distribuita

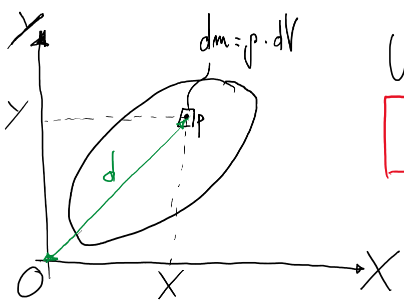
Consideriamo un sistema di punti



$$J_a = m_i d_i^2 = S_a^{(II)} \leftarrow \text{Momento Statico del secondo ordine}$$



$$J_a = \sum_{i=1}^{M} m_i d_i^2 = S_a^{(II)}$$



UNICO MOMENTO D'INERZIA CHE CI INTERESSA (Moto Piano)

$$\boxed{J_O \equiv J_{ZO} = \int_V \rho (x^2+y^2)\, dV} \quad \text{Definizione Generale}$$

$$d^2 = x^2 + y^2 \qquad \rho(x,y,z)$$

Possiamo riferirci al caso di un corpo omogeneo ($\rho = cost$) e a spessore costante ($h = cost$), $dV = h\,dA$

Definizione

Possiamo riferirci al caso di un corpo omogeneo ($\rho = cost$) e a spessore costante ($h = cost$, $dV = h\,dA$)

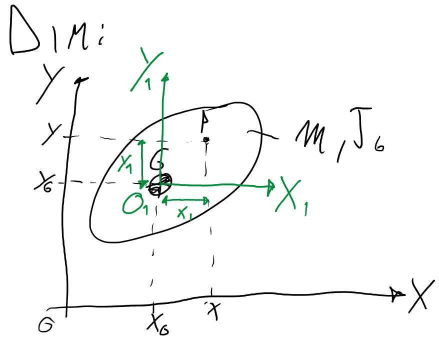
$$\Rightarrow \boxed{J_{z0} = \rho h \int_A (x_2 + y_2)\, dA}$$ Definizione
Con corpo omogeneo e spessore costante

Per rendere il momento di inerzia invariante lo calcolo solo nel polo coincidente col baricentro rendendo il momento d'inerzia una proprietà del corpo.
Per calcolare il momento d'inerzia rispetto a un altro polo uso il momento di trasporto.

TEOREMA DEL TRASPORTO o DI HUYGENS

$$J_0 = J_G + m\,\overline{OG}^2$$

DIM:



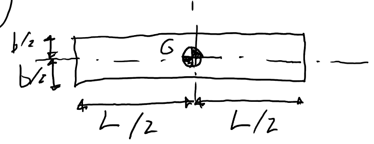
Noti:
$- m, J_G, x_G, y_G$

$$J_0 = \int_V \rho (x^2 + y^2)\, dV$$
$$= \int_V \rho \left[(x_G + x_1)^2 + (y_G + y_1)^2 \right] dV$$
$$= \underbrace{(x_G^2 + y_G^2)}_{\overline{OG}^2} \cdot \underbrace{\int_V \rho\, dV}_{m} + \underbrace{\int_V (x_1^2 + y_1^2) \rho\, dV}_{J_G} + 2x_G \underbrace{\int_V x_1 \rho\, dV}_{S^{(I)}_{y_1} = 0} + 2y_G \underbrace{\int_V y_1 \rho\, dV}_{S^{(I)}_{x_1} = 0}$$

$$\Rightarrow J_o = J_G + m \cdot \overline{OG}^2$$

Ex Calcolo Momento d'inerzia corpo rigido

(1)



Trave omogenea, spessore h

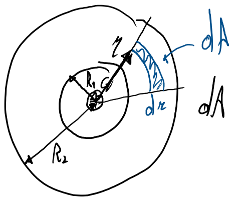
$$J_G = \rho h \int_A (x^2 + y^2)\, dA = \rho h \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-b/2}^{b/2} (x^2 + y^2)\, dx\, dy$$
$$= \rho h \left[\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} x^2\, dx\, dy + \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2\, dx\, dy \right]$$
$$= \rho h b \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} + \rho h L \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-b/2}^{b/2} = \rho h b \left(\frac{L^3}{24} + \frac{L^3}{24} \right) + \rho h L \left(\frac{b^3}{24} + \frac{b^3}{24} \right)$$
$$= \rho \frac{hbL}{12} \cdot (L^2 + b^2)$$

Trave sottile ...

$= \rho \frac{hbL}{12} \cdot (L + b)$

TRAVE SNELLA $b \ll L \Rightarrow J_G \simeq \rho \frac{\overbrace{hbL}^{V_a}}{12} L^2 = \frac{mL^2}{12}$

② CORONA CIRCOLARE



$$J_G = \rho h \int_A \underbrace{(x^2+y^2)}_{r^2} dA = \int_{R_1}^{R_2}\int_0^{2\pi} r^3 dr\, d\alpha = 2\pi \rho h \int_{R_1}^{R_2} r^3 dR$$

$dA = d\alpha\, r\, dr = r\, d\alpha\, dr$

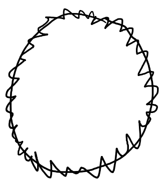
$$= 2\pi \rho h \left[\frac{r^4}{4}\right]_{R_1}^{R_2} = \frac{\pi \rho h}{2}(R_2^4 - R_1^4)$$

$$= \underbrace{\boxed{\frac{\pi \rho h}{2}(R_2^2 - R_1^2)}}_{m}(R_2^2 + R_1^2) = \frac{m}{2}(R_2^2 - R_1^2)$$

Da questo esempio si può dedurre che

$$J_G = m\, r_G^2$$

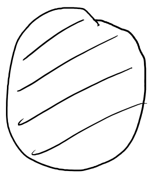
↳ Raggio giratorio di inerzia: indica quanto la massa è distante dal baricentro



$R_1 = R_2 = R$

$J_G = mR^2$

$r_G = R$



$R_1 = 0$

$R_2 = R$

$J_G = \frac{mR^2}{2}$ $\quad r_G = \frac{\sqrt{2}}{2} R \simeq 0{,}7\, R$