2_02_2023

giovedì 2 marzo 2023 16:08

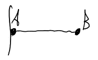
VINCOLI

Si considera il vincolo che lega tutti i corpi del sistema si chiama TELAIO.
Noi considereremo sempre i vincoli elementari (limitano 1σ + GdL)
Teo. Moti Relativi: permette di scindere dei moti nei moti più elementari che lo compongono.

VINCOLI ELEMENTARI

Sopprimono 1σ + GdL del corpo a cui sono applicati
(Vincoli singoli, doppi, tripli)

1) INCASTRO: Vincolo triplo

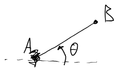


$n_v = 3$ gdv
Impone 3 condizioni:
1) $x_A(t) = 0$
2) $y_A(t) = 0$ $\quad \forall t \Rightarrow$ Equazioni del vincolo
3) $\theta(t) = 0$

$h = 0$ gdl

2) Vincoli doppi

a) Cerniera

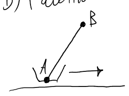


Impedisce il movimento lungo X e Y

$n = 2$ gdv

$h = 1$ gdl : θ

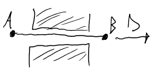
b) Pattino



Impedisce il distacco dalla guida e le rotazioni dalla guida.

2 gdv
1 gdl : s (parallelo alla guida)

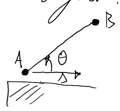
c) Manicotto



Limita il movimento al movimento parallelo all'asse del manicotto

2 gdv
1 gdl : s

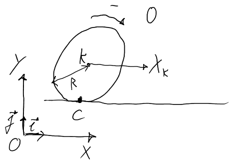
3) Vincolo singolo: CARRELLO + Cerniera



1 gdv
2 gdl : s, θ

TUTTI I VINCOLI POSSONO ESSERE APPLICATI IN QUALSIASI DIREZIONE

CASO PARTICOLARE: DISCO CHE SI MUOVE LUNGO UNA GUIDA PIANA



Applico un vincolo di CONTATTO:

$y_K = R = \text{cost}$, $y_C = 0 = \text{cost} \Rightarrow \begin{cases} v_{y_K} = 0 \\ v_{y_C} = 0 \end{cases} \Rightarrow 1$ gdv

$\hookrightarrow \begin{cases} v_{x_C} = 0 \\ v_C \neq 0 \end{cases} \Leftarrow$ Strisciamento

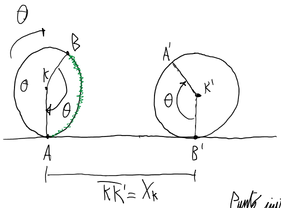
2 gdl : x_K, θ indipendenti

PURO ROTOLAMENTO / ROTOLAMENTO SENZA STRISCIAMENTO

Impongo che $\begin{cases} v_{y_c} = 0 \\ v_{x_c} = 0 \end{cases} \Rightarrow 2\ gdv \Leftrightarrow \vec{v}_c = 0 \Rightarrow C = CIR$

$\downarrow$

1 gdl: x_K (o θ) sono dipendenti



$x_K = \overline{KK'} = \widehat{AB} = R \cdot \theta$

$\Rightarrow \boxed{x_K = R \cdot \theta}$

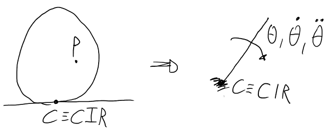
Tutti i punti dell'arco $\widehat{AB}$ entreranno in contatto con la guida diventando in quel momento il CIR

Punto iniziale

Spostamento del disco: $x_K = \bar{x}_K + R\theta$, $y_K = R$ $\Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_{x_K} = R\dot{\theta}\vec{i} \\ \vec{v}_{y_K} = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_K = R\dot{\theta}\vec{i}$

$\Rightarrow \begin{cases} \vec{a}_{x_K} = R\ddot{\theta}\vec{i} \\ \vec{a}_{y_K} = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{a}_K = R\ddot{\theta}\vec{i}$

Dunque il disco si muove parallelamente alla guida

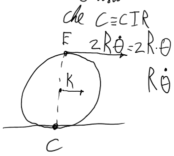


Come se considerassimo il moto del disco come quello di un'asta vincolata in C

Utile per calcolare la velocità di un generico punto P tramite RIVALS

$\vec{\omega} = \dot{\theta}\vec{k}$

$\vec{v}_P = \underbrace{\vec{v}_C}_{=0 \text{ visto che } C \equiv CIR} + \vec{\omega} \wedge (P - C) = \vec{\omega} \wedge (P - C)$



$R\dot{\theta} = R\omega$

VELOCITÀ DI UN PUNTO SUL DIAMETRO RISPETTO A C

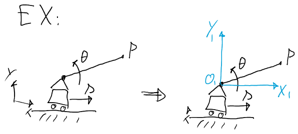
$v_E = 2R\dot{\theta} = 2R\omega$

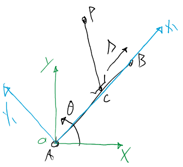
↳ CONDIZIONE DI ATTRITO STATICO (nel punto di contatto non c'è moto relativo)

TEOREMA DEI MOTI RELATIVI

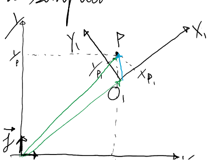
Spesso è conveniente considerare più sistemi di riferimento in moto tra loro per evidenziare moti semplici non evidenti all'osservatore assoluto. Si scelgono con coscienza (Introducono moti di traslazione/rotazione NO rototraslazione)

EX:





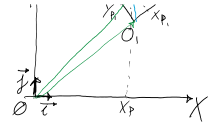
Devo avere qualcosa che ricomponga il moto rototraslatorio dai due moti semplici



Noi conosciamo $\forall t$

$x_{O_1}(t), y_{O_1}(t), \theta(t)$ rispetto al sistema fisso

Vogliamo determinare il legame tra P in xOy



$X_{O_1}(t), Y_{O_1}(t), \theta(t)$ rispetto al sistema fisso

Vogliamo determinare il legame tra P in xOy e P in $x_1O_1y_1$

Posso esprimerlo tramite una relazione vettoriale

$$(P-O)=(O_1-O)+(P-O_1)$$

$$X_P\vec{i}+Y_P\vec{j}=X_{O_1}\vec{i}+Y_{O_1}\vec{j}+X_{P_1}\vec{i}_1+Y_{P_1}\vec{j}_1$$

LEGAME TRA SISTEMA FISSO E SISTEMA MOBILE

$$\frac{d}{dt}(P-O)=\frac{d}{dt}(O_1-O)+\frac{d}{dt}(P-O_1)$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{v}_P=\underbrace{\dot{X}_{O_1}\vec{i}+\dot{Y}_{O_1}\vec{j}}_{\vec{v}_{O_1}}+\dot{X}_{P_1}\vec{i}_1+X_{P_1}\frac{d\vec{i}_1}{dt}+\dot{Y}_{P_1}\vec{j}_1+Y_{P_1}\cdot\frac{d\vec{j}_1}{dt}=\vec{v}_{O_1}+\vec{v}_{rel_P}+\vec{\omega}\wedge(\underbrace{X_{P_1}\vec{i}_1+Y_{P_1}\vec{j}_1}_{(P-O_1)})$$

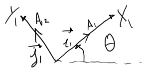
$\vec{v}_{rel_P}$

$$=\underbrace{\vec{v}_{O_1}+\vec{\omega}\wedge(P-O_1)}_{\vec{v}_{tr,P}}+\vec{v}_{rel_P}$$

$\vec{v}_{tr,P}$ ← Velocità di trascinamento (Come se P fosse rigidamente collegato al corpo rigido terna mobile)

IMPORTANTE: $\vec{\omega}$ è la velocità della terna

Calcolo $\frac{d\vec{i}_1}{dt}$ e $\frac{d\vec{j}_1}{dt}$



$|\overline{A_1O_1}|=1$

$|\overline{A_2O_1}|=1$

$$\frac{d}{dt}\left((A_1-O)=(O_1-O)+(A_1-O_1)\right)$$

$$\vec{v}_{A_1}=\vec{v}_{O_1}+\frac{d}{dt}\underbrace{(A_1-O_1)}_{\vec{i}_1}=\vec{v}_{O_1}+\frac{d\vec{i}_1}{dt}$$

Posso calcolare $|\vec{v}_{A_1}|$ anche applicando Rivals al corpo rigido terna mobile

$$\vec{v}_{A_1}=\vec{v}_{O_1}+\vec{\omega}\wedge\overbrace{(A_1-O_1)}^{\vec{i}_1}$$

con $\vec{\omega}=\dot{\theta}\vec{k}$

$$\vec{v}_{A_1}=\vec{v}_{O_1}+\frac{d\vec{i}_1}{dt}=\vec{v}_{O_1}+\vec{\omega}\wedge\vec{i}_1\Longrightarrow\frac{d\vec{i}_1}{dt}=\vec{\omega}\wedge\vec{i}_1$$

$$\frac{d\vec{j}_1}{dt}=\vec{\omega}\wedge\vec{j}_1$$

FORMULE DI POISSON

ENUNCIATO: $\vec{v}_P=\underbrace{\vec{v}_{O_1}+\vec{\omega}\wedge(P-O_1)}_{\vec{v}_{tr,P}}+\vec{v}_{rel_P}$

$$\frac{d}{dt}(P-O_1)=\vec{v}_{rel_P}+\vec{\omega}\wedge(P-O_1)$$

Si annulla solo se la terna trasla oppure se $\vec{v}_{rel}=\emptyset$

$$\vec{a}_P=\underbrace{\vec{a}_{O_1}}_{\frac{d}{dt}\vec{v}_{O_1}}+\dot{\vec{\omega}}\wedge(P-O_1)+\vec{\omega}\wedge\frac{d}{dt}(P-O_1)+\frac{d}{dt}\vec{v}_{rel,P}=\underbrace{\vec{a}_{O_1}+\overbrace{\dot{\vec{\omega}}\wedge(P-O_1)}^{\vec{t}_g}+\overbrace{\vec{\omega}\wedge[\vec{\omega}\wedge(P-O_1)]}^{\vec{n}}}_{\text{T. Rivals per corpo rigido terna mobile}\ \to\ \vec{a}_{tr,P}}+\overbrace{2\vec{\omega}\wedge\vec{v}_{rel_P}}^{\vec{a}_{Co}}+\vec{a}_{rel_P}=\vec{a}_{tr,P}+\vec{a}_{rel,P}+\vec{a}_{Co}$$

← TEO. DI CORIOLIS

(Lega $\vec{v}$ vista dall'osservatore assoluto a quella del sistema mobile)

$$\frac{d}{dt}\vec{v}_{rel,P}=\ddot{X}_{P_1}\vec{i}_1+\ddot{Y}_{P_1}\vec{j}_1+\dot{X}_{P_1}\frac{d\vec{i}_1}{dt}+\dot{Y}_{P_1}\frac{d\vec{j}_1}{dt}=\vec{a}_{rel_P}+\vec{\omega}\wedge(\dot{X}_{P_1}\vec{i}_1+\dot{Y}_{P_1}\vec{j}_1)$$

$$=\vec{a}_{rel_P}+\vec{\omega}\wedge\vec{v}_{rel_P}$$

Teo Rivals ≡ Teo Moti Relativi quando non ci sono moti relativi

Guardare dalle Rec precedenti il caso dell'