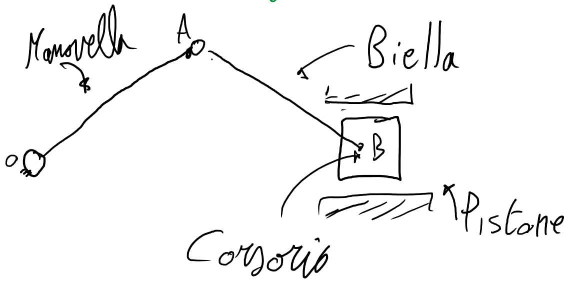
14_03_2023

martedì 14 marzo 2023 09:12

CATENA CINEMATICA CHIUSA

MANOVELLISMO ORDINARIO



Trasforma il moto rotatorio continuo della manovella nel moto alternato rettilineo del pistone e viceversa

Biella possiede un moto rototraslatorio

OA: Manovella

AB: Biella

A: Bottone di manovella

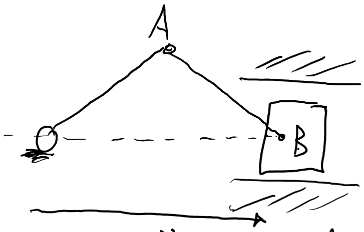
B: Piede di biella

MANOVELLISMO ORDINARIO CENTRATO

Il corsoio si muoverà nella guida con traiettoria passante per O

(Moto traslatorio ha traiettoria su una retta passante per O)

Nel caso contrario si dice Manovellismo Ordinario Deviato (Si usa quando la geometria del sistema non permette di usare quello Centrato)

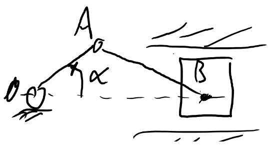


$\vec{c}, \dot{\vec{c}}, \ddot{\vec{c}} \rightarrow$ Voglio trovare il moto del pistone.

Quello che noteremo è che il moto di B ha un andamento armonico.

Posso approssimare il moto di B ad una sinusoide se $\overline{OA} << \overline{AB}$

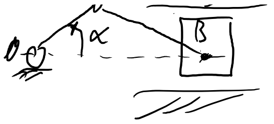
GRADI di LIBERTÀ:



$n_c = 3$

$n_o = 3 \times 3 = 9$

$n_v = 4 \times 2 = 8$ (B: Corsoio, Pattino, Cerniera / O: Cerniera)

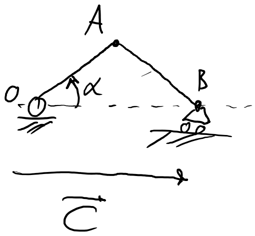


$n_c = 3 \times 3 = 9$

$n_v = 4 \times 2 = 8$ (B: Corsoio, Pattino, Cerniera; O: Cerniera)

$n = 9 - 8 = 1$ gdl (α)

III



$n_c = 3$

$n_o = 2 \times 3 = 6$

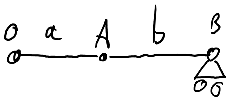
$n_v = 2 \times 2 + 1 \times 1 = 5$ (O: Cerniera; B: Carrello, Cerniera)

$n = 6 - 5 = 1$ gdl (α)

Supponiamo noti $\alpha(t), \dot{\alpha}(t), \ddot{\alpha}(t)$ [Moto Manovella]

Determinare $c(t), \dot{c}(t), \ddot{c}(t)$ [Moto carrello/pistone]

Iniziamo considerando $\alpha = 0$



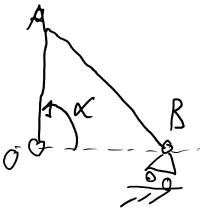
$\overline{OB}$ è massimo $\overline{OB}_{MAX} = C_{MAX} = a + b$

$\Rightarrow$ Ho un'inversione del moto $\rightarrow v_B = 0$

$|a_B|$ è Massima

PUNTO MORTO ESTERNO (PME)

Impongo una rotazione α fino a $\alpha = \frac{\pi}{2}$



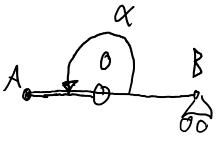
$\alpha = \frac{\pi}{2}$

$a << b$

$v_B \approx v_{B\,MAX}$

$a_B = 0$

Impongo una rotazione $\alpha = \pi$



$\alpha = \pi$

$\overline{OB}_{MIN} = C_{MIN} = b - a$

$v_B = 0$

$|a_B| = MAX$

PUNTO MORTO INTERNO (PMI)

$$\Delta C = C_{MAX} - C_{MIN} = b + a - b + a = 2a$$

Per $\alpha = \frac{3}{2}\pi$ e $\alpha = 2\pi$ si ripetono, rispettivamente, le situazioni $\alpha = \frac{\pi}{2}$ e $\alpha = \pi$

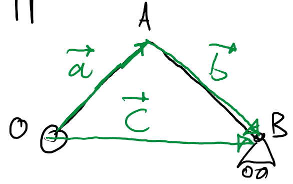
$\alpha = \pi$

C è assimilabile ad una sinusoide se $a << b \Rightarrow \lambda = \frac{a}{b} < 1$

Rapporto caratteristico del Manovellismo

DESCRIZIONE MATEMATICA

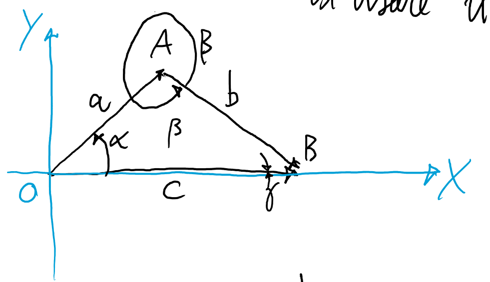
Uso una catena cinematica chiusa, usando l'equazione di chiusura (poligono rappresentato dai corpi del meccanismo)

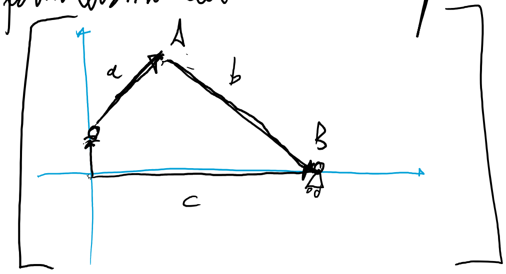


$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ ← Equazione di chiusura

Verso dei vettori DEVE essere coerente con l'equazione scritta

Nel Piano Vado ad usare il formalismo dei numeri complessi





$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

$c e^{i\gamma} = a e^{i\alpha} + b e^{i\beta}$

$c = a e^{i\alpha} + b e^{i\beta}$

Proietto su assi X, Y

a, b cost. e noti

$\gamma = 0$ noto

c incognito, β incognito

α variabile, noto → Userò per determinare c, β

$$\left.\begin{aligned} X&: c = a\cos\alpha + b\cos\beta \\ Y&: 0 = a\sin\alpha + b\sin\beta \end{aligned}\right\}$$ SISTEMA DI EQUAZIONI ALGEBRICHE NON LINEARI

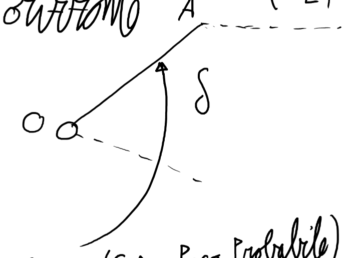
$\Rightarrow \sin\beta = -\frac{a}{b}\sin\alpha = -\lambda\sin\alpha \rightarrow \beta$

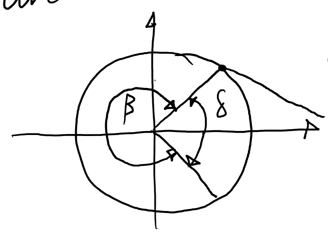
Sostituisco β in $\cos^2\beta + \sin^2\beta = 1 \Rightarrow \cos\beta = \pm\sqrt{1-\sin^2\beta} = +\sqrt{1-\sin^2\beta} = +\sqrt{1+\lambda^2\sin^2\alpha}$

$$\ldots \beta \ldots \beta = 1 \rightarrow \cos\beta = \pm\sqrt{1-\sin^2\beta} = +\sqrt{1-\sin^2\beta} = +\sqrt{1+\lambda^2\sin^2\alpha}$$

Considerando il moto della manovella

Angolo tra biella e orizzonte $\rightarrow \delta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

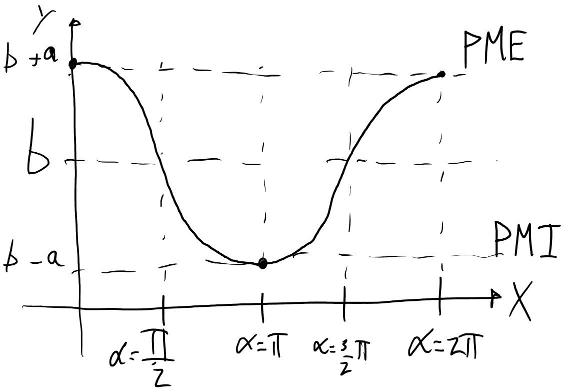




$\cos\beta > 0$ Sempre

$\lambda << 1$ (Caso Poco Probabile)

$$c = a\cos\alpha + b\sqrt{1+\lambda^2\sin^2\alpha} \simeq a\cos\alpha + b$$



VELOCITÀ

Derivo $c = ae^{i\alpha} + be^{i\beta}$

$$\dot{c} = i\dot{\alpha}ae^{i\alpha} + b\cdot i\cdot\dot{\beta}\cdot e^{i\beta} \overset{i=e^{i\frac{\pi}{2}}}{=} a\dot{\alpha}e^{i\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)} + b\dot{\beta}\cdot e^{i\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)}$$

2 equazioni scalari nel piano

$$\begin{cases} \dot{C} = -a\dot{\alpha}\sin\alpha - b\dot{\beta}\sin\beta \\ \emptyset = a\dot{\alpha}\cos\alpha + b\dot{\beta}\cos\beta \end{cases} \rightarrow \begin{matrix}\dot{\beta} \\ \dot{C}\end{matrix}$$

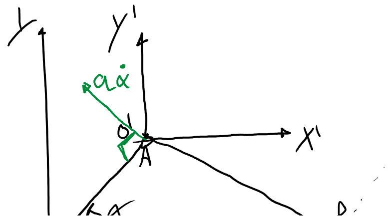
Posso applicare Cramer per risolvere il sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & b\sin\beta \\ 0 & -b\cos\beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{C} \\ \dot{\beta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -a\dot{\alpha}\sin\alpha \\ a\dot{\alpha}\cos\alpha \end{bmatrix}$$

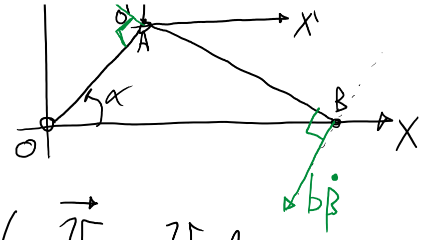
MANIERE ALTERNATIVE:

Uso il teorema dei moti relativi:

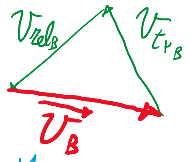
introduco un sistema traslante con A



Rotazione positiva in senso antiorario



$$V_B = \vec{V}_{tr_A} + V_{rel_B}$$



MODALITÀ JACOBIANA DEL MOTO

Jacobiano del moto:

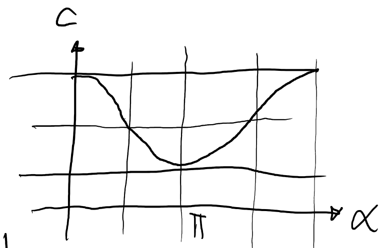
Velocità di un punto del corpo

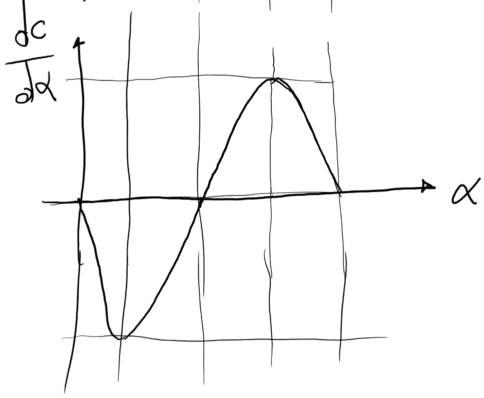
$$\Lambda = \frac{V_B}{\dot\alpha} = \frac{\dot c}{\dot\alpha} = \frac{dc}{d\alpha}\cdot\frac{dt}{dt} = \frac{dc(\alpha)}{d\alpha}$$

Velocità del g.d.l. usato per descrivere il meccanismo

Applicando questa definizione posso riscrivere

$\dot c = \Lambda(\alpha)\,\dot\alpha \Rightarrow$ Se la manovella gira in modo costante $\dot\alpha = \Omega = cost$ ed ottengo la velocità del piede di biella





ACCELERAZIONE

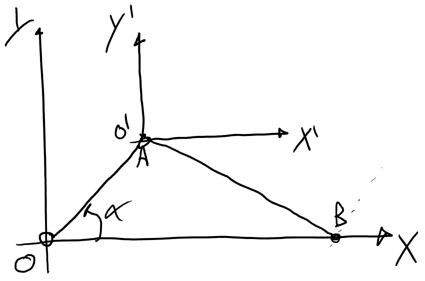
Valgono le stesse considerazioni:

1° METODO

$$\ddot c = a\ddot\alpha e^{i(\alpha+\frac{\pi}{2})} - a\dot\alpha^2 e^{i\alpha} + b\ddot\beta e^{i(\beta+\frac{\pi}{2})} - b\dot\beta^2 e^{i\beta}$$

$$\ddot{C} = a\ddot{\alpha}e^{i\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)} - a\dot{\alpha}^2 e^{i\alpha} + b\ddot{\beta}e^{i\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)} - b\dot{\beta}^2 e^{i\beta}$$

2° METODO (MOTI RELATIVI)



$$\ddot{C} = \underbrace{\overset{\text{tang}}{a\ddot{\alpha}e^{i\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}} - \overset{\text{norm}}{a\dot{\alpha}^2 e^{i\alpha}}}_{\text{Moto TRASLATORIO}} + \underbrace{\overset{\text{tang}}{b\ddot{\beta}e^{i\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)}} - \overset{\text{norm}}{b\dot{\beta}^2 e^{i\beta}}}_{\text{Moto Rotatorio}}$$

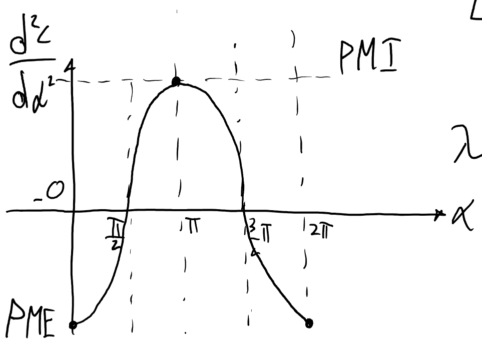
$$a_B = a_{trB} + \vec{a}_{rel\,B} + \cancel{\vec{a}_{co}}$$

$\emptyset$ poiché $x_1 O_1 y_1$ trasla

3° METODO (JACOBIANO)

$$\dot{C} = \Lambda(\alpha)\dot{\alpha} \qquad \Lambda(\alpha) = \frac{dC}{d\alpha}$$

$$\Rightarrow \ddot{C} = \frac{d\Lambda(\alpha)}{dt}\dot{\alpha} + \Lambda(\alpha)\cdot\ddot{\alpha} = \left[\frac{dC}{d\alpha}\right]'\dot{\alpha}^2 + \Lambda\ddot{\alpha} = \frac{d^2C}{d\alpha^2}\dot{\alpha}^2 + \Lambda(\alpha)\ddot{\alpha}$$



$\lambda \ll 1 \Rightarrow$ Appr x Armonica

Se $\dot{\alpha} = cst = \Omega$
$\hookrightarrow \ddot{\alpha} = \emptyset$