

Projeto de Controle com Realimentação de Estados e Observador para Sistema de Levitação Magnética

Guilherme Martins Specht

Bacharelado em Engenharia de Computação, PUCRS

`guilherme.specht@edu.pucrs.br`

12 de junho de 2025

Resumo

Este trabalho tem como objetivo aplicar técnicas de controle moderno no espaço de estados para estabilizar e regular um sistema de levitação magnética. A primeira etapa consiste no desenvolvimento de uma lei de controle por realimentação de estados com tempo de acomodação inferior a 0,5 segundos e erro nulo em regime permanente. Em seguida, é projetado um observador de estados para estimar as variáveis internas com base na saída medida. Ambos os projetos são implementados e simulados no ambiente MATLAB/Simulink. Os resultados demonstram que o controlador proposto é capaz de estabilizar o sistema e rastrear o sinal de referência de forma precisa, mesmo com condições iniciais desfavoráveis, validando a robustez e eficiência da solução proposta.

Palavras-chave: Levitação magnética; Controle no espaço de estados; Realimentação de estados; Observador; Simulação.

1 Introdução

Este trabalho dá continuidade ao estudo de sistemas de levitação magnética iniciado no T3, utilizando agora ferramentas de controle no espaço de estados para projetar uma malha de controle eficiente. Com base no modelo linearizado previamente obtido, propõe-se o desenvolvimento de uma lei de controle por realimentação de estados capaz de estabilizar a planta e regular sua saída para um valor de referência.

O sistema será inicialmente considerado com todos os estados internos disponíveis para medição (posição, velocidade e corrente), o que permite a construção direta da realimentação. Posteriormente, será desenvolvido um observador de estados para estimar as variáveis não medidas, tornando o projeto mais realista do ponto de vista prático.

As técnicas aplicadas incluem:

- Projeto da matriz de ganhos K para realimentação de estados com alocação dos polos desejados;
- Cálculo do parâmetro α para garantir erro nulo em regime permanente frente a uma entrada em degrau;

- Implementação de um observador de estados com alocação adequada dos polos da dinâmica do erro;
- Simulações no MATLAB/Simulink para validação do comportamento do sistema nas diferentes configurações.

Com essa abordagem, espera-se demonstrar na prática a eficácia das técnicas modernas de controle no espaço de estados, promovendo estabilidade, precisão e robustez ao sistema de levitação magnética.

2 Projeto de uma Realimentação de Estados

Nesta primeira etapa, é projetada uma lei de controle para estabilizar o sistema de levitação magnética, assumindo que todas as variáveis de estado da planta ($\Delta p(t)$, $\Delta \dot{p}(t)$, $\Delta i(t)$) são diretamente acessíveis. A estrutura de controle implementada segue o formato:

$$u(t) = -Kx(t) + \alpha r(t)$$

Este processo será dividido em três etapas:

1. Definição dos autovalores desejados para a dinâmica do sistema em malha fechada;
2. Determinação da matriz de ganhos K por alocação de polos;
3. Cálculo do ganho α para rastreamento de referência.

2.1 Especificação dos Autovalores Desejados

Para que o sistema controlado se acomode em aproximadamente $0,5\text{ s}$, utilizamos a seguinte expressão para o polo real dominante:

$$\lambda_d = -\frac{2n+2}{t_a}$$

Com $n = 3$ (ordem do sistema) e $t_a = 0,5\text{ s}$, obtemos:

$$\lambda_d = -\frac{2(3)+2}{0,5} = -\frac{8}{0,5} = -16$$

Assim, o polinômio característico desejado para o sistema em malha fechada é:

$$q(\lambda) = (\lambda + 16)^3 = \lambda^3 + 48\lambda^2 + 768\lambda + 4096$$

2.2 Cálculo da Matriz de Ganhos K

Para posicionar os polos desejados, aplicamos o método da comparação de coeficientes entre o polinômio desejado e o determinante da matriz $\lambda I - A + BK$. Considerando as matrizes do sistema:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -7,5 & 0 \\ 244,75 & -13,9929 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2,5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}$$

A matriz $\lambda I - A + BK$ torna-se:

$$\lambda I - A + BK = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ 2.5k_1 & \lambda + 7.5 + 2.5k_2 & 2.5k_3 \\ -244.75 & -\mathbf{13.9929} & \lambda \end{bmatrix}$$

Calculando o determinante e simplificando, temos:

$$\det(\lambda I - A + BK) = \lambda^3 + (2.5k_2 + 7.5)\lambda^2 + (-34.9821k_3 - 244.75)\lambda + (-34.9821k_1 - 524.633k_2 - 1835.625)$$

Igualando com $q(\lambda) = \lambda^3 + 48\lambda^2 + 768\lambda + 4096$, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2.5k_2 + 7.5 = 48 \\ -34.9821k_3 - 244.75 = 768 \\ -34.9821k_1 - 524.633k_2 - 1835.625 = 4096 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema:

$$k_2 = \frac{48 - 7.5}{2.5} = 16.2$$

$$k_3 = -\frac{768 + 244.75}{34.9821} = -\frac{1012.75}{34.9821} \approx -28.951$$

$$k_1 = -\frac{4096 + 524.633 \cdot 16.2 + 1835.625}{34.9821} = -\frac{4096 + 8499.05 + 1835.625}{34.9821} = -\frac{14430.675}{34.9821} \approx -412.57$$

Logo, a matriz de realimentação de estados corrigida é:

$$K = \begin{bmatrix} -412.57 & 16.2 & -28.951 \end{bmatrix}$$

2.3 Cálculo do Parâmetro α

Para garantir erro nulo em regime permanente frente a entradas do tipo degrau, é necessário calcular o ganho de referência α , segundo a expressão:

$$\alpha = [(C - DK) \cdot (BK - A)^{-1} \cdot B + D]^{-1}$$

Como $D = 0$, temos:

$$\alpha = [C \cdot (BK - A)^{-1} \cdot B]^{-1}$$

Com os seguintes dados do sistema:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -7,5 & 0 \\ 244,75 & -13,9929 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2,5 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} -412,57 & 16,2 & -28,951 \end{bmatrix}$$

Calculamos o produto $B \cdot K$:

$$BK = \begin{bmatrix} 0 \\ 2,5 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot [-412,57 \quad 16,2 \quad -28,951] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1031,425 & 40,5 & -72,3775 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Subtraindo a matriz A :

$$BK - A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1031,425 & 48 & -72,3775 \\ -244,75 & 13,9929 & 0 \end{bmatrix}$$

Calculando a inversa de $BK - A$:

$$(BK - A)^{-1} \approx \begin{bmatrix} 0,3772 & -0,0052 & 0,0179 \\ 6,5985 & -0,0912 & 0,3842 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Multiplicando pela matriz B :

$$(BK - A)^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} 0,3772 & -0,0052 & 0,0179 \\ 6,5985 & -0,0912 & 0,3842 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2,5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,0130 \\ -0,2279 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Multiplicando pela matriz C :

$$C \cdot (BK - A)^{-1} \cdot B = [1 \quad 0 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} -0,0130 \\ -0,2279 \\ 0 \end{bmatrix} = -0,0130$$

Finalmente, o valor de α é:

$$\alpha = \frac{1}{-0,0130} \approx -76,74$$

Este ganho será utilizado para compensar a referência $r(t)$, garantindo rastreamento exato da saída em regime permanente para entradas em degrau.

2.4 Simulação da Lei de Controle no MATLAB/Simulink

A lei de controle projetada foi implementada e simulada no ambiente *MATLAB*/Simulink, utilizando o modelo desenvolvido nas seções anteriores. A simulação foi configurada com os seguintes parâmetros:

- **Tempo total de simulação:** 2 segundos;
- **Condições iniciais:** $\Delta p(0) = 0,005$, $\Delta \dot{p}(0) = 0$, $\Delta i(0) = 0$;
- **Sinal de referência $r(t)$:** inicia em zero e sofre um degrau para 0,01 na metade da simulação (em $t = 1$ segundo).

O modelo foi configurado em Simulink utilizando a estrutura em espaço de estados em malha fechada, combinada com a lei de realimentação de estados implementada previamente. A figura apresenta o diagrama de blocos da implementação no Simulink.

A resposta do sistema ao sinal de referência é ilustrada na figura. Observa-se que o sistema, sob o controle projetado, atinge o valor de referência com precisão, apresentando um comportamento dinâmico estável e adequado.

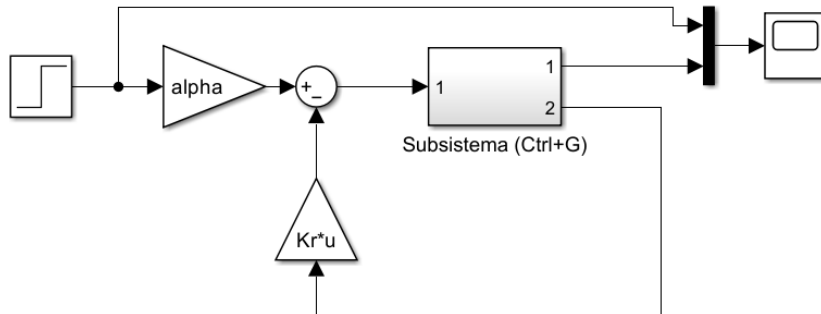


Figura 1: Diagrama de Blocos

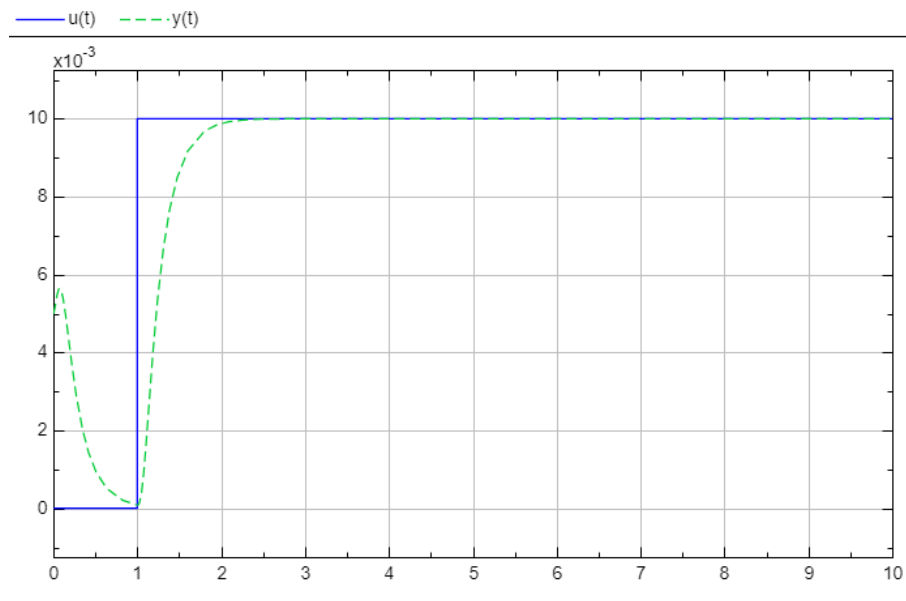


Figura 2: Resposta do sistema controlado ao sinal de referência $r(t)$

Os resultados obtidos mostram que a lei de controle foi eficaz na estabilização da planta de levitação magnética, com o sistema exibindo resposta transitória suave e sem oscilações excessivas. A saída $y(t)$ converge rapidamente para o valor de referência $r(t)$, sem apresentar erro em regime permanente, confirmando o projeto adequado do ganho α .

Além disso, observa-se que o tempo de acomodação está coerente com os polos desajados em malha fechada, e o sistema responde de forma amortecida, validando tanto a realimentação de estados quanto o rastreamento de referência projetado. Esses resultados confirmam a eficácia do modelo desenvolvido e da estratégia de controle implementada.

3 Projeto de um Observador de Estados

Nesta etapa, será considerado um cenário mais realista em que apenas a saída $y(t)$ da planta é sensoreada pelo sistema de controle. No caso do sistema de levitação magnética, isso significa que somente a posição $\Delta p(t)$ está disponível como variável medida. Para lidar com essa limitação, será projetado e implementado um observador de estados que permita estimar os estados internos do sistema.

A lei de controle será modificada para utilizar as estimativas dos estados, assumindo a forma:

$$u(t) = -K\hat{x}(t) + \alpha r(t),$$

onde $\hat{x}(t)$ representa o vetor de estados estimado pelo observador. A dinâmica do observador de estados será dada por:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - \hat{y}(t)), \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t) + Du(t).\end{aligned}$$

O objetivo desta etapa é projetar a matriz de ganhos L do observador, de modo que as estimativas dos estados reais se sincronizem rapidamente. Além disso, o sistema completo será implementado e simulado no MATLAB/Simulink, considerando condições iniciais nulas para o observador.

3.1 Especificação dos Autovalores do Observador

Para obter os autovalores do observador, utilizamos metade do tempo de acomodação da realimentação:

$$t_{obs} = \frac{t_a}{2} = 0.25$$

A expressão para o autovalor real é:

$$\lambda_{obs} = -\frac{2n+2}{t_{obs}} = -\frac{2(3)+2}{0.25} = -\frac{8}{0.25} = -32$$

Assim, o polinômio desejado para o observador será:

$$q_{obs}(\lambda) = (\lambda + 32)^3 = \lambda^3 + 96\lambda^2 + 3072\lambda + 32768$$

3.2 Cálculo da Matriz de Ganhos L

Queremos que os autovalores do observador coincidam com os especificados anteriormente. Para isso, impomos que o polinômio característico da matriz $A - LC$ seja igual ao polinômio desejado:

$$\det(\lambda I - A + LC) = q_{obs}(\lambda) = \lambda^3 + 96\lambda^2 + 3072\lambda + 32768$$

Com os seguintes valores:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -7.5 & 0 \\ 244.75 & -13.9929 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0 \quad 0]$$

Como LC é um produto de uma matriz coluna por uma linha, com $L = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix}$, temos:

$$LC = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & 0 & 0 \\ l_2 & 0 & 0 \\ l_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Logo, a matriz $\lambda I - A + LC$ é:

$$\lambda I - A + LC = \begin{bmatrix} \lambda + l_1 & 0 & -1 \\ l_2 & \lambda + 7.5 & 0 \\ l_3 - 244.75 & 13.9929 & \lambda \end{bmatrix}$$

Expandindo o determinante (utilizando a regra de Sarrus ou co-fatores), obtemos:

$$\det(\lambda I - A + LC) = \lambda^3 + (7.5 + l_1)\lambda^2 + (7.5l_1 + l_3 - 244.75)\lambda + (7.5l_3 - 13.9929l_2 - 1835.625)$$

Igualando com o polinômio desejado:

$$\lambda^3 + 96\lambda^2 + 3072\lambda + 32768$$

obtemos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} l_1 + 7.5 = 96 \\ 7.5l_1 + l_3 - 244.75 = 3072 \\ 7.5l_3 - 13.9929l_2 - 1835.625 = 32768 \end{cases}$$

Resolvendo:

1. Primeira equação:

$$l_1 = 96 - 7.5 = 88.5$$

2. Segunda equação:

$$7.5 \cdot 88.5 + l_3 - 244.75 = 3072 \Rightarrow 663.75 + l_3 - 244.75 = 3072 \Rightarrow l_3 = 3072 - 419 = 2653$$

3. Terceira equação:

$$\begin{aligned} 7.5 \cdot 2653 - 13.9929l_2 - 1835.625 &= 32768 \Rightarrow 19897.5 - 13.9929l_2 - 1835.625 = 32768 \\ -13.9929l_2 &= 32768 - 19897.5 + 1835.625 = 14706.125 \Rightarrow l_2 = -\frac{14706.125}{13.9929} \approx -1051.0 \end{aligned}$$

Portanto, a matriz de ganhos do observador é:

$$L = \begin{bmatrix} 88.5 \\ -1051.0 \\ 2653.0 \end{bmatrix}$$

3.3 Simulação do Sistema Completo com Observador de Estados

O sistema completo de controle, agora incorporando o observador de estados previamente projetado, foi implementado e simulado no ambiente MATLAB/Simulink. O objetivo da simulação é verificar a integração entre a planta e o observador, avaliando a capacidade de estimar corretamente os estados do sistema. Para isso, foram considerados dois cenários distintos:

1. **Cenário 1:** As condições iniciais do observador $\hat{x}(0)$ são iguais às condições iniciais reais da planta $x(0)$, conforme especificado na Etapa I:

$$x(0) = \begin{bmatrix} 0.005 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{x}(0) = x(0).$$

2. **Cenário 2:** O observador é inicializado com todos os estados nulos:

$$\hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 0.005 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

No segundo cenário, além da resposta do sistema, foi gerado o gráfico do erro entre os estados reais $x(t)$ e os estados estimados $\hat{x}(t)$, com o intuito de analisar a convergência do observador.

A figura 3 apresenta o diagrama de blocos da implementação completa no Simulink, enquanto a figura 4 mostra a resposta do sistema juntamente com os erros de estimativa dos estados, considerando o Cenário 2.

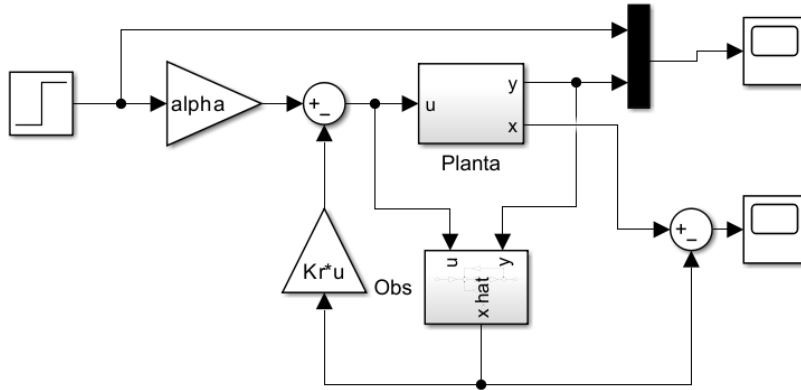


Figura 3: Diagrama de Blocos

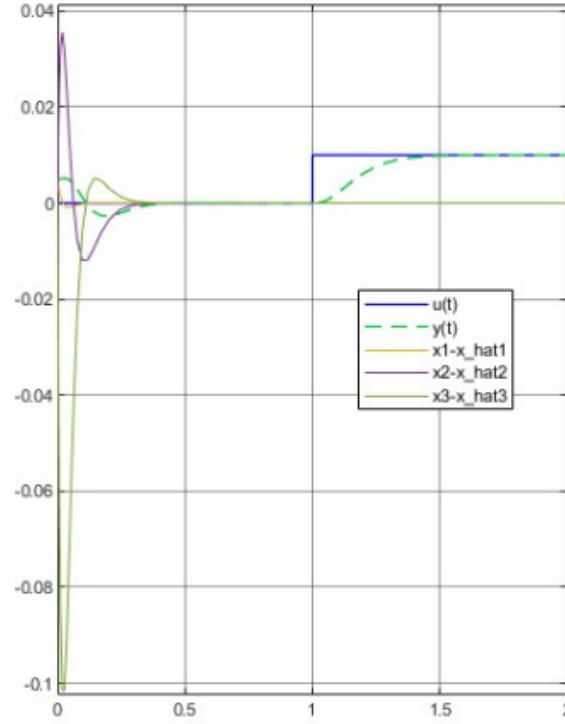


Figura 4: Resposta do sistema e erro entre os estados reais $x(t)$ e estimados $\hat{x}(t)$ no Cenário 2.

Os resultados obtidos na simulação indicam que a resposta do sistema ao degrau de referência se manteve estável e alinhada com as expectativas, apresentando comportamento transitório adequado e tempo de acomodação compatível com o especificado na etapa de projeto. A presença do observador não gerou impacto negativo perceptível no desempenho global do sistema.

Quando o observador foi inicializado com condições diferentes da planta, observou-se que as estimativas dos estados convergiram rapidamente para os valores reais. O erro entre o vetor de estados reais $x(t)$ e o vetor estimado $\hat{x}(t)$ apresentou comportamento exponencialmente decrescente, como ilustrado na figura, validando o projeto da matriz de ganhos L mesmo em cenários com incertezas iniciais.

A implementação de um observador de estados traz benefícios significativos, especialmente em aplicações nas quais não é viável medir diretamente todas as variáveis de estado. Essa abordagem permite reduzir a dependência de sensores, tornando o sistema mais econômico, robusto e confiável. Além disso, o uso do observador possibilita estimar variáveis críticas à dinâmica do controle com precisão, mesmo sob distúrbios ou incertezas nas condições iniciais, assegurando um desempenho consistente do sistema.