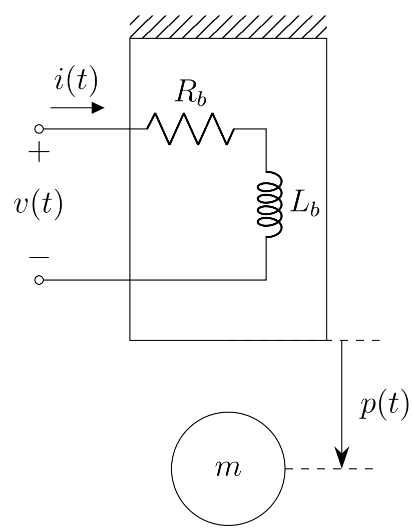
Modelagem de um Sistema de Levitação Magnética no Espaço de Estados (T3)

Nesta atividade vamos trabalhar com a representação e análise de um sistema físico no formato "Espaço de Estados". O processo dinâmico em questão trata-se de um dispositivo de *levitação magnética*, conforme a estrutura detalhada pelo diagrama da Figura 1. Note que o sistema é composto por uma bobina elétrica que produz atração magnética (contrária à força gravitacional) em uma esfera metálica.

Figura 1: Esquemático eletromecânico de um sistema de levitação magnética. O retângulo representa uma bobina/eletroímã, enquanto a esfera denota uma massa metálica.



No prática, pode-se encontrar processos similares empregados para levitação de trens, o que reduz significativamente o atrito com os trilhos, permitindo ao veículo atingir incríveis velocidades. Tais meios de transporte que utilizam levitação magnética são popularmente denominados *maglevs*, como o exemplo demonstrado na Figura 2.

Figura 2: Em 2021, foi inaugurado o *maglev* CRRC 600, considerado o veículo de transporte terrestre mais rápido do mundo, capaz de atingir 600 km/h.

Um dos desafios em se trabalhar com sistemas de levitação magnética é a instabilidade da sua dinâmica natural. Para assegurar a estabilidade, é indispensável implementar-se um sistema de controle em malha-fechada minuciosamente projetado. No presente trabalho, entretanto, vamos apenas focar na modelagem e análise preliminar desta planta seguindo o formalismo do Espaço de Estados. A subsequente etapa de projeto de controle para este processo será pauta do próximo trabalho (T4).

A partir de uma modelagem física elementar do sistema eletromecânico demonstrado pela Figura 1, podemos estabelecer as seguintes equações diferenciais:

$$\begin{aligned} R_b\, i(t) + L_b \frac{di(t)}{dt} &= v(t) \ , \\ m \frac{d^2p(t)}{dt^2} &= mg - c\left(\frac{i(t)^2}{p(t)}\right) \ . \end{aligned} \tag{1}$$

Nestas equações, $p(t)$ representa a distância da massa metálica em relação ao eletroímã (em metros), $i(t)$ é a corrente elétrica que flui pela bobina (em ampères) e $v(t)$ é a tensão de controle (em volts) fornecida ao eletroímã. Os demais termos são constantes do sistema, conforme detalhados pela Tabela 1.

Visto que a equação diferencial associada à interação eletromagnética entre a bobina e o objeto metálico é não-linear, seria impossível obter diretamente um modelo linear no Espaço de Estados. Um maneira de contornar este problema é pelo procedimento conhecido como *linearização*, que quando aplicado em (1), resulta nas seguintes relações:

$$\begin{aligned} R_b\,\Delta i(t) + L_b\,\frac{d\,\Delta i(t)}{dt} &= \Delta v(t)\ , \\ m\,\frac{d^2\Delta p(t)}{dt^2} &= c\left(\frac{i_0}{p_0}\right)^2 \Delta p(t) - 2c\left(\frac{i_0}{p_0}\right)\Delta i(t)\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Aqui, $\Delta p(t)$, $\Delta i(t)$ e $\Delta v(t)$ representam a diferença das respectivas variáveis $p(t)$, $i(t)$ e $v(t)$ em relação aos seus valores nominais (p_0, i_0 e v_0) que servem de ponto base para a linearização. Para que tal ponto nominal de operação seja uma condição de equilíbrio, temos que considerar adicionalmente as seguintes restrições:

$$i_0 = \sqrt{\frac{mgp_0}{c}}\ , \quad v_0 = R_b i_0\ . \tag{3}$$

Tabela 1: Parâmetros do sistema de levitação magnética. Para obter os valores aleatórios, cada grupo deve executar o comando `[m,g,c,Rb,Lb,p0]=getvaluesT3(seed)` no `MATLAB`, inserindo no campo `seed` a matrícula de um dos integrantes.

Parâmetro	Descrição	Unidade (SI)
m	massa do objeto metálico	kg
g	aceleração da gravidade	m/s^2
c	constante eletromagnética da bobina	–
R_b	resistência elétrica da bobina	Ω
L_b	indutância elétrica da bobina	H
p_0	distância nominal de levitação	m

É fundamental ressaltar que as equações linearizadas em (2) tendem a perder a acurácia em relação ao sistema original (1) na medida a variáveis se afastam do ponto nominal, algo natural em todo modelo obtido por meio de linearização. No entanto, o intuito final desta modelagem é projetar um sistema de controle que mantenha o sistema estabilizado em tal ponto nominal, isto é, de forma que $\Delta p(t)$, $\Delta i(t)$ e $\Delta v(t)$ fiquem estabilizados entorno de zero. Assim, estaremos indiretamente garantindo que o sistema vai operar na região em que o modelo linearizado é válido.

Na sequência são apresentadas as etapas requisitadas neste trabalho. Para avaliação, seu grupo deverá elaborar um relatório contendo todos os desenvolvimentos e manipulações algébricas realizadas, bem como discussões sobre os resultados obtidos.

1. (3 pontos) Com base nas equações diferenciais linearizadas apresentadas em (2), organize o modelo do sistema no padrão do Espaço de Estados conforme

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t) \\ y(t) = C\,x(t) + D\,u(t) \end{cases},$$

   indicando claramente as suas matrizes A, B, C e D. Considere $\Delta v(t)$ (*delta* de tensão) como a **entrada de controle** $u(t)$ do sistema e $\Delta p(t)$ (*delta* de posição) como a **saída sensoreada** $y(t)$ do processo. Como **vetor de estados** $x(t)$, considere os sinais $\Delta p(t)$ (*delta* de posição), $\Delta \dot{p}(t)$ (*delta* de velocidade) e $\Delta i(t)$ (*delta* de corrente) na seguinte ordem:

$$\underset{(\text{Caso } c = 0.1)}{x(t) = \begin{bmatrix} \Delta p(t) \\ \Delta \dot{p}(t) \\ \Delta i(t) \end{bmatrix}} \quad \underset{(\text{Caso } c = 0.2)}{x(t) = \begin{bmatrix} \Delta \dot{p}(t) \\ \Delta p(t) \\ \Delta i(t) \end{bmatrix}} \quad \underset{(\text{Caso } c = 0.3)}{x(t) = \begin{bmatrix} \Delta p(t) \\ \Delta i(t) \\ \Delta \dot{p}(t) \end{bmatrix}} \quad \underset{(\text{Caso } c = 0.4)}{x(t) = \begin{bmatrix} \Delta i(t) \\ \Delta \dot{p}(t) \\ \Delta p(t) \end{bmatrix}}.$$

2. (2 pontos) No ambiente `Simulink` do software `MATLAB`, programe a simulação em malha-aberta do seu sistema de duas formas diferentes:

   (a) Utilizando o bloco "`State-Space`" já disponível na biblioteca do `Simulink`;

   (b) Utilizando apenas blocos elementares de integração (`Integrator`), soma/subtração (`Sum`) e ganho (`Gain`).

   Para o sinal de entrada, considere uma constante de valor unitário. Como condições iniciais, defina $\Delta p(0) = 0.005$, $\Delta \dot{p}(0) = 0$ e $\Delta i(0) = 0$.

Comprove que a resposta $y(t)$ gerada é idêntica para ambas as implementações (a) e (b). *Por se tratar de uma planta naturalmente instável, recomenda-se rodar a simulação por um curto período de tempo, como um ou dois décimos de segundo apenas.*

3. (2 pontos) Determine analiticamente os autovalores do sistema e, baseado nisso, analise a estabilidade interna da planta. *Para verificar se os autovalores calculados manualmente estão corretos, recomenda-se utilizar a função* `eig` *do* `MATLAB`.

4. (3 pontos) Calcule analiticamente o determinante das matrizes de controlabilidade e observabilidade do sistema. Com base nestas informações, é possível afirmar que esta planta é totalmente controlável e observável? *Para verificar se as matrizes de controlabilidade e observabilidade obtidas manualmente estão corretas, indica-se utilizar as respectivas funções* `ctrb` *e* `obsv` *do* `MATLAB`*. Já para verificar se os determinantes calculados manualmente estão corretos, indica-se utilizar a função* `det`.

Importante:

- *As funções* `eig`, `det`, `ctrb`, `obsv` *devem ser utilizadas meramente para conferência das respostas e portanto não servem como justificativa de desenvolvimento.*
- *Após realizar o Etapa 1 do trabalho, verifique com o professor se a solução encontrada está correta, evitando assim propagar um eventual equívoco para as próximas etapas.*