Modelagem de um Sistema de Levitação Magnética no Espaço de Estados

Guilherme Martins Specht
Bacharelado em Engenharia de Computação, PUCRS
guilherme.specht@edu.pucrs.br

20 de maio de 2025

Resumo

Este trabalho apresenta a modelagem e análise de um sistema de levitação magnética com base na representação no espaço de estados. A partir das equações diferenciais não lineares que descrevem a dinâmica do sistema eletromecânico, foi realizada a linearização em torno de um ponto de equilíbrio, possibilitando a obtenção de um modelo linear adequado para análise. As matrizes do sistema foram determinadas e utilizadas na simulação em malha aberta no ambiente Simulink, por meio de duas abordagens distintas: utilizando o bloco "State-Space"e apenas blocos elementares. Os resultados obtidos evidenciam o comportamento instável da planta, confirmado também pela análise dos autovalores da matriz dinâmica. Além disso, foram calculadas as matrizes de controlabilidade e observabilidade, cujos determinantes indicam que o sistema é totalmente controlável e observável. Essas conclusões oferecem uma base sólida para futuras etapas de projeto de controladores que visem a estabilização do sistema.

Palavras-chave: Levitação magnética; Espaço de estados; Linearização; Controlabilidade; Observabilidade.

1 Introdução

Este trabalho tem como objetivo a modelagem e análise de um sistema de levitação magnética por meio da representação no *Espaço de Estados*, com ênfase nas etapas de linearização e organização das equações diferenciais que descrevem o sistema. A planta em estudo, representada na figura, consiste em uma bobina elétrica que exerce força magnética oposta à força gravitacional sobre uma esfera metálica, resultando em um sistema intrinsecamente instável.

Para viabilizar a análise, aplicou-se o procedimento de linearização, permitindo reescrever as equações diferenciais do sistema em torno de um ponto de equilíbrio. Esse ponto nominal, definido por condições estáveis, possibilita uma aproximação linear da dinâmica, viabilizando a modelagem no formato de *Espaço de Estados*. Os parâmetros físicos utilizados foram obtidos por meio da função `getvaluesT3`, utilizando a matrícula `20102977` como *seed*, conforme descrito na Tabela 1.

Tabela 1: Parâmetros do sistema

Parâmetro	**Descrição**	**Valor**
m	Massa do objeto metálico (kg)	1.5
g	Aceleração da gravidade (m/s^2)	9.70
c	Constante eletromagnética da bobina	0.3
R_b	Resistência elétrica da bobina (Ω)	3
L_b	Indutância da bobina (H)	0.4
p_0	Distância nominal de levitação (m)	0.04

Com base nesses parâmetros, foi possível modelar o sistema por meio das equações linearizadas, expressas em termos das variáveis de estado, resultando na formulação completa no espaço de estados.

As equações diferenciais linearizadas do sistema são dadas por:

$$R_b \cdot \Delta i(t) + L_b \cdot \frac{d\Delta i(t)}{dt} = \Delta v(t) \tag{1}$$

$$m \cdot \frac{d^2\Delta p(t)}{dt^2} = c\left(\frac{i_0}{p_0}\right)^2 \Delta p(t) - 2c\left(\frac{i_0}{p_0}\right)\Delta i(t) \tag{2}$$

As expressões para i_0 e v_0, que representam os valores de equilíbrio da corrente e da tensão, respectivamente, são dadas por:

$$i_0 = \sqrt{\frac{mgp_0}{c}}, \quad v_0 = R_b \cdot i_0 \tag{3}$$

2 Organização do Modelo no Espaço de Estados

Neste trabalho, vamos considerar $\Delta v(t)$ (delta de tensão) como a entrada de controle $u(t)$ do sistema e $\Delta p(t)$ (delta de posição) como a saída sensoreada $y(t)$ do processo. Trabalharemos então as equações do sistema a fim de obtermos o modelo no padrão Espaço de Estados:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

Para o vetor de estados, foi definido para o caso em que $c = 0.3$ como:

$$x(t) = \begin{bmatrix} \Delta p(t) \\ \Delta i(t) \\ \Delta \dot{p}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

e para o vetor de derivadas:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \Delta \dot{p}(t) \\ \Delta \dot{i}(t) \\ \Delta \ddot{p}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix}$$

Desta forma, podemos identificar os termos nas equações diferenciais linearizadas conforme abaixo:

$$\underbrace{R_b \cdot \Delta i(t)}_{x_2} + \underbrace{L_b \cdot \frac{d\Delta i(t)}{dt}}_{\dot{x}_2} = \underbrace{\Delta v(t)}_{u(t)}$$

$$m \cdot \underbrace{\frac{d^2 \Delta p(t)}{dt^2}}_{\dot{x}_3} = c\left(\frac{i_0}{p_0}\right)^2 \underbrace{\Delta p(t)}_{x_1} - 2c\left(\frac{i_0}{p_0}\right) \underbrace{\Delta i(t)}_{x_2}$$

Substituindo:

$$R_b \cdot x_2(t) + L_b \cdot \dot{x}_2(t) = u(t)$$

$$m \cdot \dot{x}_3(t) = c\left(\frac{i_0}{p_0}\right)^2 x_1(t) - 2c\left(\frac{i_0}{p_0}\right) x_2(t)$$

A partir daí, podemos encontrar as equações das derivadas das variáveis de estado $\dot{x}(t)$ e da saída sensoreada do processo $y(t)$.

2.1 Derivadas das Variáveis de Estado

Para $\dot{x}_1(t)$ relacionamos os vetores:

$$\dot{x}_1(t) = \Delta\dot{p}(t) = x_3(t)$$

Para $\dot{x}_2(t)$ rearranjamos a equação acima:

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{R_b}{L_b} \cdot x_2(t) + \frac{1}{L_b} \cdot u(t)$$

Para $\dot{x}_3(t)$ rearranjamos a equação anterior:

$$\dot{x}_3(t) = \frac{c}{m}\left(\frac{i_0}{p_0}\right)^2 \cdot x_1(t) - \frac{2c}{m}\left(\frac{i_0}{p_0}\right) \cdot x_2(t)$$

2.2 Função de Saída

Como a saída $y(t)$ do sistema corresponde à variação da posição $\Delta p(t)$, a partir da definição de $x(t)$, temos:

$$y(t) = x_1(t)$$

2.2.1 Sistema de Equações no Formato Expandido

Com base nas derivadas obtidas, o sistema de equações diferenciais pode ser escrito da seguinte forma:

$$\dot{x}_1(t) = 0 \cdot x_1(t) + 0 \cdot x_2(t) + 1 \cdot x_3(t) + 0 \cdot u(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = 0 \cdot x_1(t) - \frac{R_b}{L_b} \cdot x_2(t) + 0 \cdot x_3(t) + \frac{1}{L_b} \cdot u(t)$$

$$\dot{x}_3(t) = \frac{c}{m}\left(\frac{i_0}{p_0}\right)^2 \cdot x_1(t) - \frac{2c}{m}\left(\frac{i_0}{p_0}\right) \cdot x_2(t) + 0 \cdot x_3(t) + 0 \cdot u(t)$$

$$y(t) = 1 \cdot x_1(t) + 0 \cdot x_2(t) + 0 \cdot x_3(t) + 0 \cdot u(t)$$

2.3 Obtendo as Matrizes

Com os termos neste formato, podemos relacionar com o padrão do Espaço de Estados e obter as matrizes A, B, C e D:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\dfrac{R_b}{L_b} & 0 \\ \dfrac{c}{m}\left(\dfrac{i_0}{p_0}\right)^2 & -\dfrac{2c}{m}\left(\dfrac{i_0}{p_0}\right) & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{L_b} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Por fim, substituindo i_0 conforme a equação (3) e aplicando os valores obtidos pela função `getvaluesT3`, apresentados na Tabela 1, obtemos as matrizes do modelo conforme abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -7.5 & 0 \\ 244.75 & 13.9929 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2.5 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

3 Simulação do Sistema em Malha Aberta

A simulação do sistema de levitação magnética em malha aberta foi realizada no ambiente Simulink. Considerando a natureza instável da planta, o tempo de simulação foi limitado a 0,2 segundos, com o objetivo de analisar o comportamento inicial da resposta do sistema.

A simulação foi conduzida por meio de duas abordagens distintas:

1. **Bloco "State-Space":** Nesta abordagem, foi utilizado o bloco *State-Space* da biblioteca do Simulink, no qual as matrizes A, B, C e D do modelo foram diretamente inseridas.

2. **Blocos elementares:** A segunda abordagem consistiu na modelagem do sistema apenas com blocos fundamentais, como *Integrator*, *Sum* e *Gain*, replicando a estrutura do modelo no espaço de estados.

3.1 Diagramas de Bloco e Resultados

As figuras abaixo ilustram os diagramas de blocos das duas implementações: a primeira com o bloco *State-Space*, e a segunda com blocos elementares. Em ambas as configurações, o sistema apresentou resposta instável, como era esperado.

Para validar a equivalência entre as abordagens, as saídas das duas simulações foram comparadas. A Figura **??** apresenta o gráfico das respostas, onde observa-se a perfeita sobreposição das curvas. A linha tracejada representa a saída do modelo com o bloco *State-Space*, enquanto a linha contínua refere-se à implementação com blocos elementares. A coincidência entre as respostas confirma que ambas as implementações reproduzem o mesmo comportamento dinâmico.

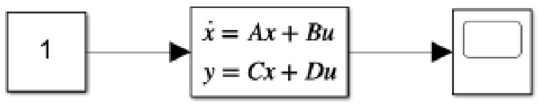

Figura 1: Diagrama de blocos dos sistema com o bloco State-Space.

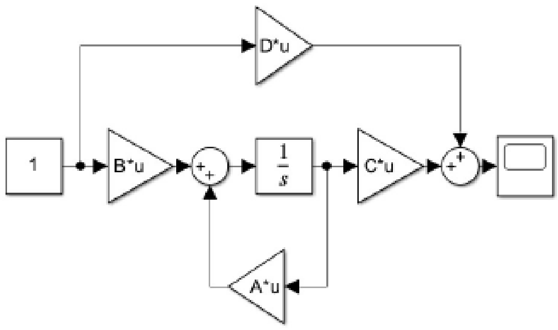

Figura 2: Diagrama de blocos do sistema utilizando somente blocos elementares.

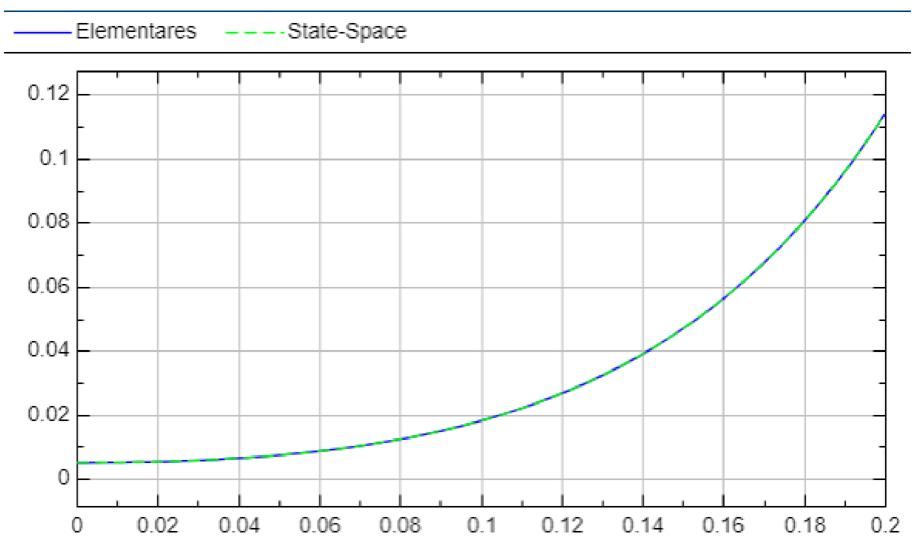

Figura 3: Comparação das respostas do sistema em ambas as implementações.

4 Determinação dos Autovalores e Análise de Estabilidade

Nesta seção, os autovalores da matriz A são determinados com o objetivo de avaliar a estabilidade interna do sistema. Considerando a matriz apresentada anteriormente, os autovalores correspondem às raízes da equação característica, obtida a partir do determinante de $\lambda I - A$, com λ representando o autovalor e I sendo a matriz identidade:

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ 0 & \lambda + 7.5 & 0 \\ -244.75 & -13.9928 & \lambda \end{bmatrix}$$

O determinante é dado por:

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ 0 & \lambda + 7.5 & 0 \\ -244.75 & -13.9928 & \lambda \end{vmatrix}$$

Aplicando a regra de Sarrus:

$$\det(\lambda I - A) = [\lambda^2(\lambda + 7.5)] - [(-1)(\lambda + 7.5)(-244.75)] = (\lambda + 7.5)(\lambda^2 - 244.75)$$

A equação característica é então:

$$(\lambda + 7.5)(\lambda^2 - 244.75) = 0$$

As raízes da equação — ou seja, os autovalores do sistema — são:

$$\lambda_1 = 15.6444, \quad \lambda_2 = -15.6444, \quad \lambda_3 = -7.5$$

4.1 Análise de Estabilidade

A estabilidade de um sistema linear contínuo depende da parte real dos autovalores de sua matriz dinâmica. Para que o sistema seja considerado internamente estável, todos os autovalores devem possuir partes reais estritamente negativas.

Neste caso, como um dos autovalores é positivo ($\lambda_1 = 15.6444$), conclui-se que o sistema é **internamente instável**. Isso significa que qualquer perturbação ou condição inicial não nula fará com que a resposta do sistema cresça indefinidamente ao longo do tempo, afastando-se do ponto de equilíbrio em vez de se aproximar dele.

5 Análise de Controlabilidade e Observabilidade

Nesta seção, avaliamos a controlabilidade e observabilidade do sistema a partir da matriz A e das dimensões do modelo no espaço de estados. Para isso, construímos as matrizes de controlabilidade (Ctrl) e observabilidade (Obs), definidas como:

$$\text{Ctrl} = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix}, \quad \text{Obs} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix}$$

Para que a planta seja completamente controlável e observável, é necessário que os determinantes dessas matrizes sejam diferentes de zero.

5.1 Análise de Controlabilidade

Inicialmente, calculamos $A \cdot B$:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -7.5 & 0 \\ 244.75 & 13.9929 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2.5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -18.75 \\ 34.9821 \end{bmatrix}$$

A seguir, calculamos A^2:

$$A^2 = A{\cdot}A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -7.5 & 0 \\ 244.75 & 13.9929 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -7.5 & 0 \\ 244.75 & 13.9929 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 244.75 & 13.9929 & 0 \\ 0 & 56.25 & 0 \\ 0 & -104.9464 & 244.75 \end{bmatrix}$$

Multiplicando $A^2 \cdot B$:

$$A^2 \cdot B = \begin{bmatrix} 244.75 & 13.9929 & 0 \\ 0 & 56.25 & 0 \\ 0 & -104.9464 & 244.75 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2.5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34.9821 \\ 140.625 \\ -262.366 \end{bmatrix}$$

Portanto, a matriz de controlabilidade é:

$$\text{Ctrl} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 34.9821 \\ 2.5 & -18.75 & 140.625 \\ 0 & 34.9821 & -262.366 \end{bmatrix}$$

Para verificar a controlabilidade, calculamos o determinante:

$$\det(\text{Ctrl}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 34.9821 \\ 2.5 & -18.75 & 140.625 \\ 0 & 34.9821 & -262.366 \end{vmatrix} = (0) + (0) + (34.9821 \cdot 2.5 \cdot 34.9821) \approx 3059.4$$

Como $\det(\text{Ctrl}) \neq 0$, o sistema é totalmente controlável.

5.2 Análise de Observabilidade

Para verificar a observabilidade do sistema, calculamos os produtos $C \cdot A$ e $C \cdot A^2$, onde:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Multiplicando:

$$C \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -7.5 & 0 \\ 244.75 & 13.9929 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

E:

$$C \cdot A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot A^2 = \begin{bmatrix} 244.75 & 13.9929 & 0 \end{bmatrix}$$

Com isso, a matriz de observabilidade fica:

$$\text{Obs} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 244.75 & 13.9929 & 0 \end{bmatrix}$$

Calculando seu determinante:

$$\det(\text{Obs}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 244.75 & 13.9929 & 0 \end{vmatrix} = -13.9929$$

Como $\det(\text{Obs}) \neq 0$, concluímos que o sistema é totalmente observável.

6 Conclusão

A análise do sistema de levitação magnética evidenciou sua complexidade, especialmente em função de sua instabilidade inerente, o que torna sua modelagem e controle mais desafiadores. A utilização da representação no espaço de estados mostrou-se fundamental para organizar as equações diferenciais do sistema e viabilizar a construção de um modelo apropriado para simulação e controle. A simulação em malha aberta revelou claramente o comportamento instável da planta, o que reforça a importância de se projetar um controlador capaz de garantir a estabilidade do sistema. Com base nas análises de controlabilidade e observabilidade, verificou-se que o sistema é totalmente controlável e observável. Isso significa que todas as variáveis de estado podem ser monitoradas e controladas de forma eficiente. Esses resultados fornecem uma base sólida para o desenvolvimento de futuras estratégias de controle, essenciais para alcançar um funcionamento seguro e estável do sistema.