Лекция 10. Введение в теорию графов.

#вшпи #дискретная_математика #теория

Автор конспекта: Гридчин Михаил

Общие понятия

Def. *Графом* назовём совокупность из V - множество объектов (вершин) и E - множество пар объектов (рёбер)

Def. *Ребро* обозначается $e := (u, v) \in E$, где $u, v \in V$. Причём если $(u, v) = (v, u)$, то ребро будем называть неориентированным.

Def. Если $\forall u, v \in V$ считаем, что $(u, v) = (v, u)$, то есть порядок вершин в паре не имеет значения, то будем называть такой граф *неориентированным*. Если $(u, v) \neq (v, u)$, то такой граф будем называть *ориентированным* или *орграфом*.

По умолчанию, если не оговорено обратное, подразумеваются неориентированные графы.

Def. Ребро $(x, x) \in E$ будем называть *петлёй*.
Def. Рёбра $e_1 = (x, y), e_2 = (x, y), e_3 = (x, y), e_1, e_2, e_3 \in E$ в неориентированном графе будем называть кратными *рёбрами*.

Note. В ориентированном графе рёбра $e_1 = (x, y), e_2 = (y, x), e_1, e_2 \in E$ - всегда разные рёбра и потому кратными не считаются.

Def. Граф, в котором есть петли и кратные рёбра будем называть *псевдо мульти графом*.

По умолчанию, если не оговорено обратное, подразумеваются графы без петель и кратных рёбер.

Смежность и инцидентность

Def. *Матрицей смежности* назовём функцию $f : V \times V \to \{0, 1\}$. Если ребро (u, v) существует, то $f(u, v) := 1$, иначе $f(u, v) := 0$. Записывается матрица смежности, как таблица

$V \backslash V$	1	2	3	$\dots$	n
1	0	1	0	$\dots$	0
2	1	0	0	$\dots$	1
3	0	0	0	$\dots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	0
n	0	0	0	$\dots$	0

Note. Для неориентированных графов матрица симметричная относительно главной диагонали ($i = j$).

Def. Две вершины $u, v \in V$ называются *смежными*, если $(u, v) \in E$
Def. Два *ребра смежные*, если имеют общую вершину.

Def. Вершина v и ребро $(u, v) \in E$ называются *инцидентными*. Наряду с матрицей смежности используется также *матрица инцидентности*, функция $f : V \times E \to \{0, 1\}$, где пара если пара $(v, e), v \in V, e \in E$ инцидентная, то $f(v, e) = 1$, иначе $f(v, e) = 0$. Обозначим $|V| =: n$, $|E| =: m$, тогда матрица будет размера $n \times m$.

$V \backslash E$	e_1	e_2	e_3	$\dots$	e_m
v_1	1	1	0	$\dots$	0
v_2	1	0	0	$\dots$	1
v_3	0	1	1	$\dots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	0
v_n	0	0	1	$\dots$	1

Note. В каждом столбце ровно две единицы, а все остальные нули.

Маршруты, пути и простые пути

Def. *Маршрутом* в графе назовём список $(v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_k, e_k, v_{k+1})$, где $v_i \in V$, $e_i = (v_i, v_{i+1}) \in E$.
Def. *Путём* (цепью) в графе назовём маршрут, в котором все рёбра различны.
Def. *Простым путём* в графе назовём путь, в котором все вершины различны, кроме, возможно, первой и последней.
Def. *Маршрут / путь / простой путь замкнут*, если $v_1 = v_{k+1}$
Def. Замкнутый путь - это *цикл*.
Def. Замкнутый простой путь - это *простой цикл*.

Утверждение 1. Если в графе существует цикл, то и существует простой цикл.
□
Поскольку существует цикл, то распишем его. $(v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_{k+1} = v_1)$. Возьмём кратчайший фрагмент этой последовательности $(v_i, e_i, \dots, e_{j-1}, v_j = v_i)$, такой, что начальная и конечные вершины совпадают.

1. В этом кратчайшем фрагменте не менее трёх различных вершин (поскольку нет петель и кратных рёбер)
2. Все вершины кроме начала и конца различны
   Следовательно все рёбра различны, все вершины кроме начальной и конечной различны. Значит, этот фрагмент - простой цикл.
   ■

Утверждение 2. Если между двумя несовпадающими вершинами существует маршрут, то существует и простой путь между этими вершинами.
□
Запишем этот маршрут: $(u = v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, e_j, v_{j+1} = v)$. На каждом шаге добавляем следующую вершину из маршрута в рассматриваемый фрагмент. Пусть стартуем из фрагмента $\varphi = (v_1, e_1, v_2)$. Если в φ появились повторяющиеся вершины, то удалим из фрагмента всё, что между ними, и сам повтор. В любой момент времени список является маршрутом. В конце концов получим список, в котором все вершины уникальны.
■

Связность и компоненты связности

Def. Граф называется *связным*, если $\forall u, v \in V$ существует простой путь (маршрут, простой путь) из u в v.
Def. *Подграф* графа $G = (V, E)$ - это **граф** $G' = (V', E')$: $V' \subseteq V, E' \subseteq E$. Рёбра из E' инцидентны только вершинам из V'.
Def. Пусть граф G не является связным. Максимальные по включению связные подграфы называются *компонентами связности*.
Def. *Степень вершины* v в графе G - это количество рёбер, инцидентных v. Обозначается $\deg(v)$. Для ориентированных графов также различают *входящую степень* вершины и *исходящую степень* вершины. Обозначаются $\operatorname{indeg}(v)$ и $\operatorname{outdeg}(v)$ соответственно.

Def. В **ориентированном** графе G вершины u и v *сильно связаны*, если существует путь $u \to v$ и существует путь $v \to u$.

Def. *Полный граф* - это граф, такой, что $\forall u, v \in V \implies (u, v) \in E, (v, u) \in E$. Обозначается

$$\boxed{K_n \text{ - полный граф на } n \text{ вершинах}}$$

Def. *Двудольный граф* - это граф G, такой, что $V = L \cup R$, где $L \cap R = \varnothing$. При этом $\forall e(v_L, v_R) \in E \implies v_L \in L, v_R \in R$.

Def. *Полный двудольный граф* на долях размера n и m обозначается

$$\boxed{K_{n,m} \text{ - полный двудольный граф}}$$