Лекция 11. Поверхности в пространстве.

#вшпи #аналитическая_геометрия #теория

Автор конспекта: Гридчин Михаил

Поверхности в пространстве

Рассмотрим уравнение поверхности вида $F(x, y) = 0$. Заметим, что $\forall z$ это будет выполнено.

Def. Поверхности вида $F(x, y) = 0$ будем называть *цилиндрическими* (множество прямых, параллельных оси OZ). Прямые, параллельные оси OZ будем называть *образующими цилиндра*.

Пусть $F(x, y, z)$ - некоторая функция

Def. Будем говорить, что F - однородная функция степени $k \in \mathbb{R}$, если $\forall \lambda > 0$ и для любой точки (x, y, z) из области определения выполнено: $F(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^k F(x, y, z)$

Note. Если $M(x, y, z) \in F(x, y, z) = 0$, то все точки, лежащие на прямой OM, лежат также и на поверхности.

Def. Поверхность, состоящая из множества прямых линий, проходящих через одну точку, будем называть *конической*. Эти прямые, проходящие через вершину, будем называть *образующими*, точку будем называть *вершиной*. *Направляющей* линией будем называть кривую, не проходящую через вершину, такую, что каждая образующая пересекает её ровно один раз. Тогда коническая поверхность - это объединение всех прямых, соединяющих вершину с точками направляющей.

Def. *Поверхностью вращения* будем называть поверхность, образованную вращением плоской кривой $F(x, z) = 0$ (лежащей в плоскости $y = 0$) вокруг оси OZ.

При этом каждая точка $M(x_0, 0, z_0)$ кривой L описывает окружность в плоскости $z = z_0$ с центром на оси OZ и радиусом $|x_0|$. Уравнение этой окружности: $x^2 + y^2 = x_0^2, z = z_0$. Следовательно, точка (x, y, z) лежит на поверхности вращения тогда и только тогда, когда $F(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$ в зависимости от знака x_0 и свойств функции F. Если $F(x, z)$ зависит только от $|x|$, или если кривая симметрична относительно оси OZ, то уравнение поверхности вращения можно записать так:

$$F(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$$

Общее уравнение поверхности

Def. Уравнение вида

$$A_{11}x^2 + A_{22}y^2 + A_{33}z^2 + 2A_{12}xy + 2A_{1_3}xz + 2A_{23}yz + 2B_1x + 2B_2y + 2B_3z + C = 0$$

$$\boxed{\sum_{i,j=1}^{3} A_{ij}x_ix_j + \sum_{i=1}^{3} 2B_ix_i + C = 0}$$

Где $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$, а матрица (A_{ij}) - симметричная, называется *уравнением поверхности второго порядка*.
Если хотя бы один из этих коэффициентов отличен от нуля, то такую поверхность будем называть поверхностью второго порядка.

Теорема. Прямая и поверхность второго порядка могут иметь ноль, одну, две или бесконечно много различных точек пересечения. В последнем случае вся прямая лежит на поверхности.
□
Зададим прямую l параметрически:

$$l : \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Подставим в уравнение поверхности второго порядка. Поскольку уравнение - квадратное относительно x, y, z, то после подстановки получим многочлен степени не выше 2 относительно t:

$$P(t) = \alpha t^2 + \beta t + \gamma = 0$$

Количество вещественных корней этого уравнения - это количество точек пересечения прямой с поверхностью. Возможны случаи:

- 0 корней $\to$ 0 точек пересечения
- 1 корень $\to$ 1 точка (касание)
- 2 корня $\to$ 2 точки пересечения
- Бесконечно много решений $\to$ $P(t) \equiv 0$ и подойдёт любое $t \in \mathbb{R} \Rightarrow$ прямая целиком лежит на поверхности.
  ■

Def. Прямая целиком лежащая на поверхности второго порядка называется *прямолинейная образующая*.

Теорема (б/д). Для любой поверхности второго порядка найдётся такая прямоугольная система координат, в которой поверхность будет иметь уравнение одного из 17 типов. Мы рассмотрим лишь наиболее "интересные" из них.

Эллипсоид

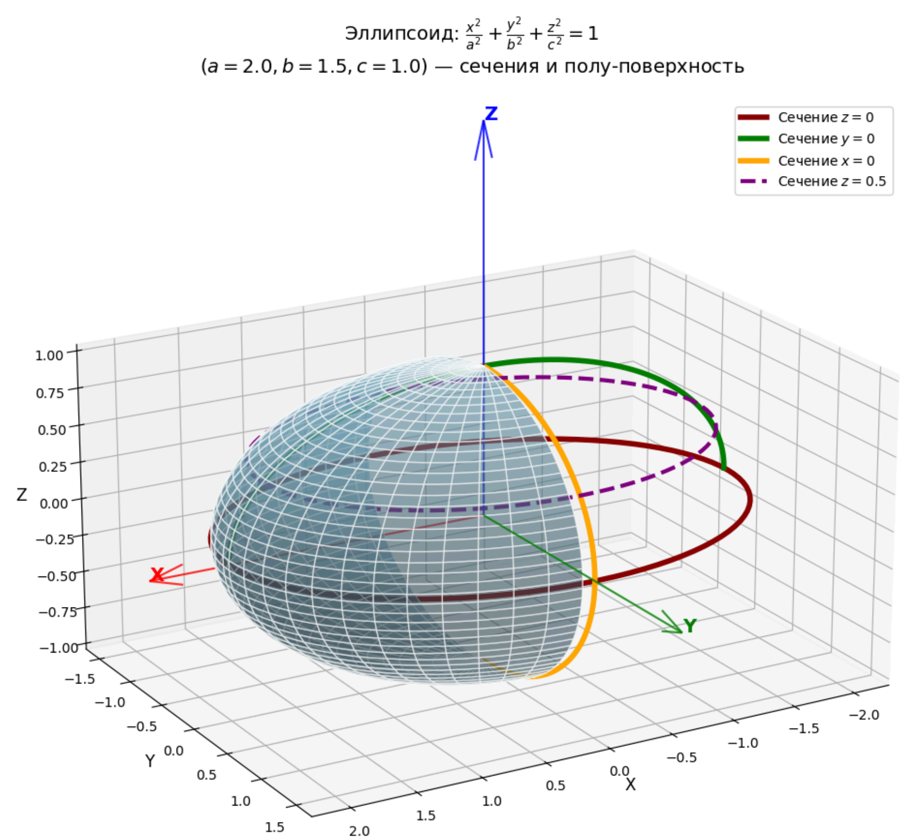
Def. *Эллипсоидом* называется поверхность, которая в некоторой прямоугольной системе координат описывается уравнением:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a, b, c > 0}$$

Свойства. Заметим, что $|x| \le a$, $|y| \le b$, $|z| \le c$, поэтому поверхность ограниченная. Также поверхность симметрична относительно прямых координатных осей, центра координат и координатных плоскостей. Сечение плоскостью - эллипс, точка. Частный случай эллипсоида - сфера, если $a = b = c$. Другой частный случай - $a = b$, тогда это поверхность вращения.

Note. Если $a = b$, то такой эллипсоид является поверхностью вращения эллипса вокруг разных осей. Если $a = b < c$, то такой эллипсоид назовём *вытянутым эллипсоидом вращения*
Если же $a = b > c$, то такой эллипсоид назовём *сжатым эллипсоидом вращения*.

Note. В общем случае эллипсоид $(a \ne b \ne c)$ не является поверхностью вращения.



Эллипсоид.png

Эллиптический параболоид

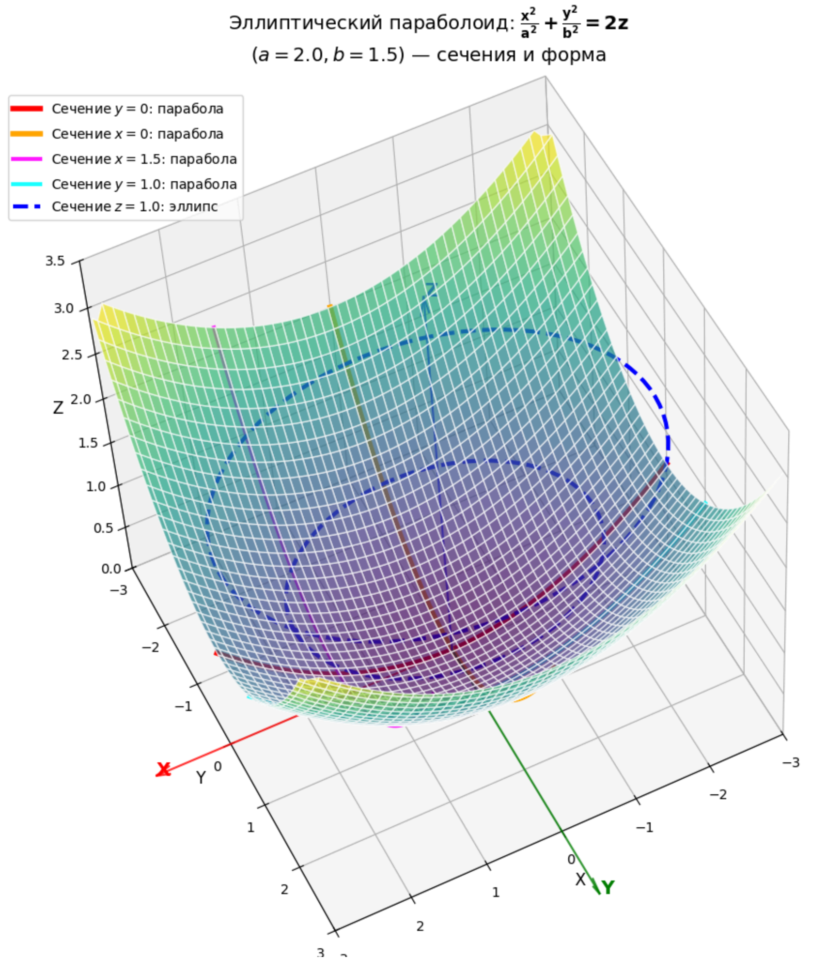
Def. *Эллиптическим параболоидом* называется поверхность, задаваемая в некоторой прямоугольной системе координат уравнением:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z, \quad a, b > 0}$$

Свойства:

- Сечения:
  - При $y = y_0$: парабола в плоскости $y = y_0$.
  - При $x = x_0$: парабола в плоскости $x = x_0$.
  - При $z = 0$: единственная точка $(0, 0, 0)$ - вершина.
  - При $z = h > 0$: эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2h$.
- Поверхность симметрична относительно плоскостей $x = 0$, $y = 0$, а также оси OZ.
- Поверхность неограничена сверху.
  Частный случай: Если $a = b$, то поверхность является параболоидом вращения - получается вращением параболы $\frac{x^2}{a^2} = 2z$ вокруг оси OZ.

Note. В общем случае $(a \neq b)$ поверхность не является поверхностью вращения.



Эллиптический параболоид.png

Гиперболический параболоид

Def. *Гиперболическим параболоидом* называется поверхность, задаваемая в некоторой прямоугольной системе координат уравнением:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z, \quad a, b > 0}$$

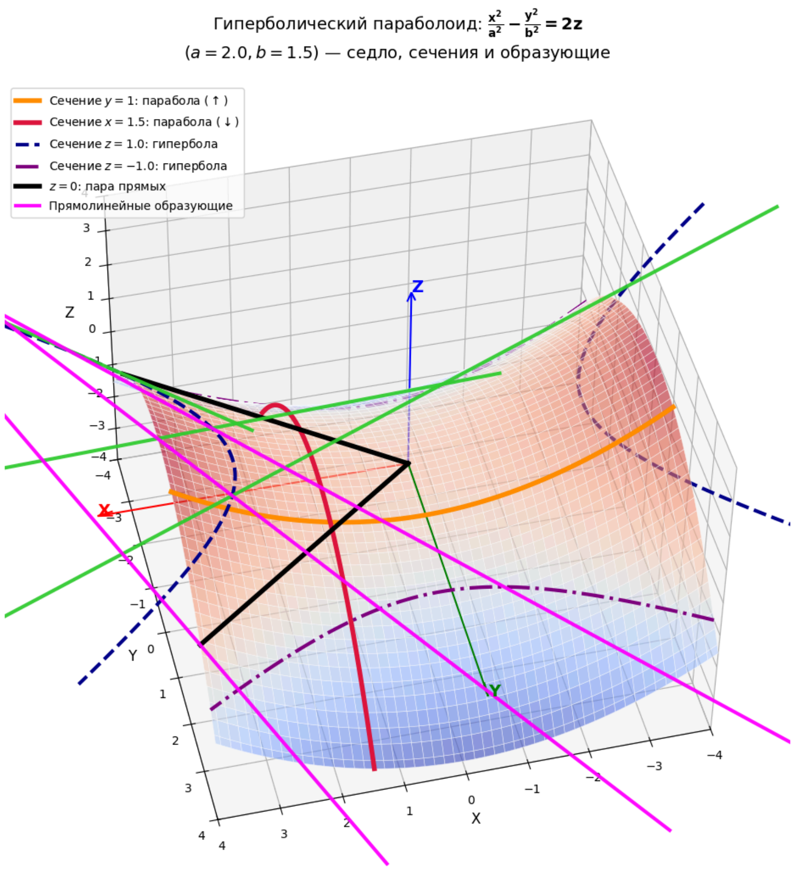
Свойства:

- Сечения:
  - При $x = x_0$:

$$-\frac{y^2}{b^2} - 2z = -\frac{x_0^2}{a^2} \Rightarrow z = \frac{1}{2}(\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2})$$

    - парабола.
  - При $y = y_0$ - парабола.
  - При $z = h$: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2h$ - гипербола.
- При $z = 0$: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \Rightarrow \frac{x}{a} = \pm\frac{y}{b}$ - две пересекающиеся прямые в плоскости $z = 0$.

- Поверхность имеет форму седла - возрастает в одном направлении и убывает в другом.
- Симметрична относительно плоскостей $(y = 0)$ и $(x = 0)$.
- Симметрична относительно относительно оси OZ.
- Не симметрична относительно начала координат.
- Поверхность неограничена ни сверху, ни снизу.



Гиперболический параболоид.png

Утверждение. Через каждую точку гиперболического параболоида проходят **ровно две** прямолинейные образующие - по одной из каждого семейства.
□
Докажем сначала, что две прямолинейные образующие всегда найдутся.
Представим уравнение в следующем виде

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z \iff (\frac{x}{a} - \frac{y}{b})(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}) = 2z$$

Рассмотрим два семейства прямых:
Первое семейство ($\alpha : \beta$ - параметры, не равные 0 одновременно)

$$\begin{cases} \alpha(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}) = \beta \cdot 2 \\ \beta(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}) = \alpha z \end{cases}$$

Второе семейство:

$$\begin{cases} \alpha(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}) = \beta z \\ \beta(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}) = \alpha \cdot 2 \end{cases}$$

Каждая система задаёт прямую в пространстве, как пересечение двух плоскостей.
Все точки, лежащие на таких прямых, удовлетворяют исходному уравнению (легко проверить подстановкой).
Для любой точки (x_0, y_0, z_0) на поверхности можно подобрать α, β, чтобы она лежала на прямой из первого и второго семейства.

Докажем теперь, что не может быть больше двух прямолинейных образующих.

Обозначим гиперболический параболоид G. Пусть $(x_0, y_0, z_0) \in G$, то есть:

$$\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 2z_0$$

Будем искать прямую, проходящую через точку и целиком лежащую на G. Зададим прямую параметрически:

$$l : \begin{cases} x(t) = x_0 + \alpha t \\ y(t) = y_0 + \beta t \\ z(t) = z_0 + \gamma t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Где $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$ - направляющий вектор.
Подставим в уравнение поверхности:

$$\frac{(x_0 + \alpha t)^2}{a^2} - \frac{(y_0 + \beta t)^2}{b^2} = 2(z_0 + \gamma t)$$

Раскроем:

$$\underbrace{(\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2})}_{h} + 2t(\frac{x_0\alpha}{a^2} - \frac{y_0\beta}{b^2} - \gamma) + t^2(\frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2}) = \underbrace{2z_0}_{h}$$

Учитывая, что $h = \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 2z_0$, вычтем $2z_0$ из обеих частей:

$$t^2\underbrace{(\frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2})}_{A} + 2t\underbrace{(\frac{x_0\alpha}{a^2} - \frac{y_0\beta}{b^2} - \gamma)}_{B} = 0$$

Чтобы вся прямая лежала на поверхности, это выражение должно быть тождественно нулю при всех $t \in \mathbb{R}$, то есть:

$$\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2} = 0 & (1) \\ \frac{x_0\alpha}{a^2} - \frac{y_0\beta}{b^2} - \gamma = 0 & (2) \end{cases}$$

Мы ищем направляющий вектор (α, β, γ), определённый с точностью до ненулевого множителя.
Из (1):

$$\frac{\alpha}{a} = \pm\frac{\beta^2}{b} \implies \alpha = \pm\frac{a\beta}{b}$$

Подставляем в (2):

$$\left[\begin{aligned} &\begin{cases} \alpha = \frac{a}{b}\beta \\ \frac{x_0^2}{a^2} \cdot \frac{a}{b}\beta - \frac{y_0}{b^2}\beta = \gamma \Rightarrow \gamma = \beta \cdot \frac{bx_0 - ay_0}{ab^2} \end{cases} \\ &\begin{cases} \alpha = \frac{a}{b}\beta \\ \frac{x_0}{a^2} \cdot (-\frac{a}{b})\beta - \frac{y_0}{b^2}\beta = \gamma \Rightarrow \gamma = -\beta\frac{bx_0 + ay_0}{ab^2} \end{cases} \end{aligned}\right.$$

Таким образом, для любого $\beta \neq 0$ мы получаем два возможных направления:

- Одно - из первого семейства.
- Второе - из второго.

Каждое даёт одну прямую, проходящую через (x_0, y_0, z_0) и лежащую целиком на поверхности, но третьего решения нет. Что и требовалось доказать.
■

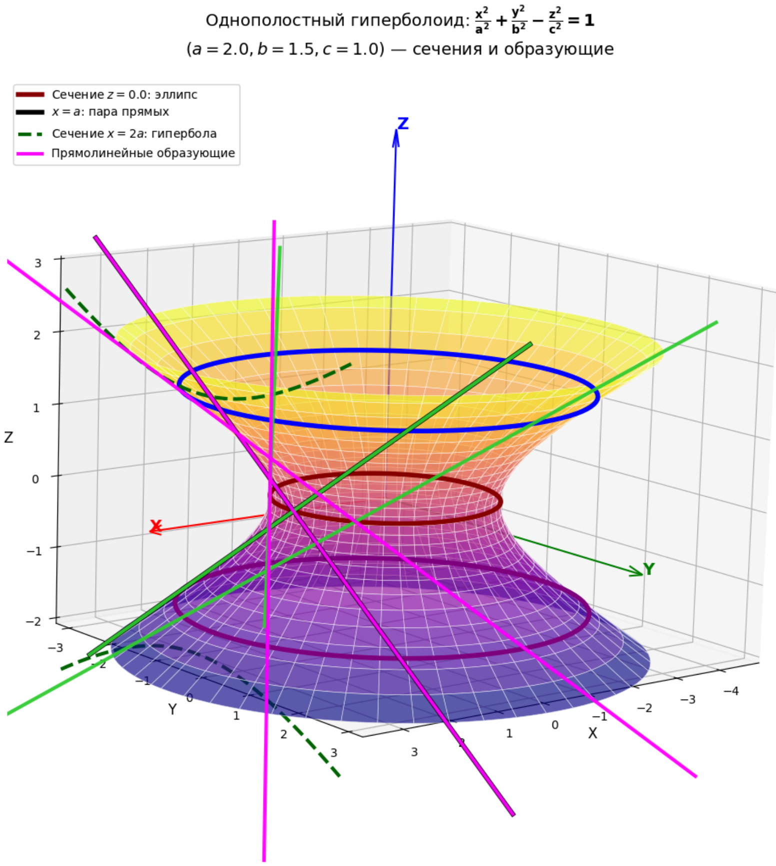
Однополостный гиперболоид

Def. *Однополостным гиперболоидом* называется поверхность, задаваемая в некоторой прямоугольной системе координат уравнением:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a, b, c > 0}$$

Свойства:

- Сечения:
  - При $z = h : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2} > 0$ - эллипс ($\forall h \in \mathbb{R}$).
  - При $x = h$: $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{a^2}$ - гипербола ($|h| < a$), пара прямых ($|h| = a$), пустое множество ($|h| > a$).
  - Аналогично для $y = h$.
- Симметрия относительно всех координатных плоскостей, осей и начала координат.
- Поверхность неограничена.



Однополостный гиперболоид.png

Утверждение. Через каждую точку однополостного гиперболоида проходят две прямолинейные образующие (по одной из каждого семейства).

□

Преобразуем уравнение:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2} \Rightarrow (\frac{x}{a} - \frac{z}{c})(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}) = (1 - \frac{y}{b})(1 + \frac{y}{b})$$

Рассмотрим два семейства прямых:

Первое семейство:

$$\begin{cases} \alpha(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}) = \beta(1 - \frac{y}{b}) \\ \beta(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}) = \alpha(1 + \frac{y}{b}) \end{cases}$$

Второе семейство:

$$\begin{cases} \alpha(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}) = \beta(1 + \frac{y}{b}) \\ \beta(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}) = \alpha(1 - \frac{y}{b}) \end{cases}$$

Каждая система задаёт прямую, лежащую на поверхности.

Через любую точку поверхности проходит ровно одна прямая из каждого семейства.

■

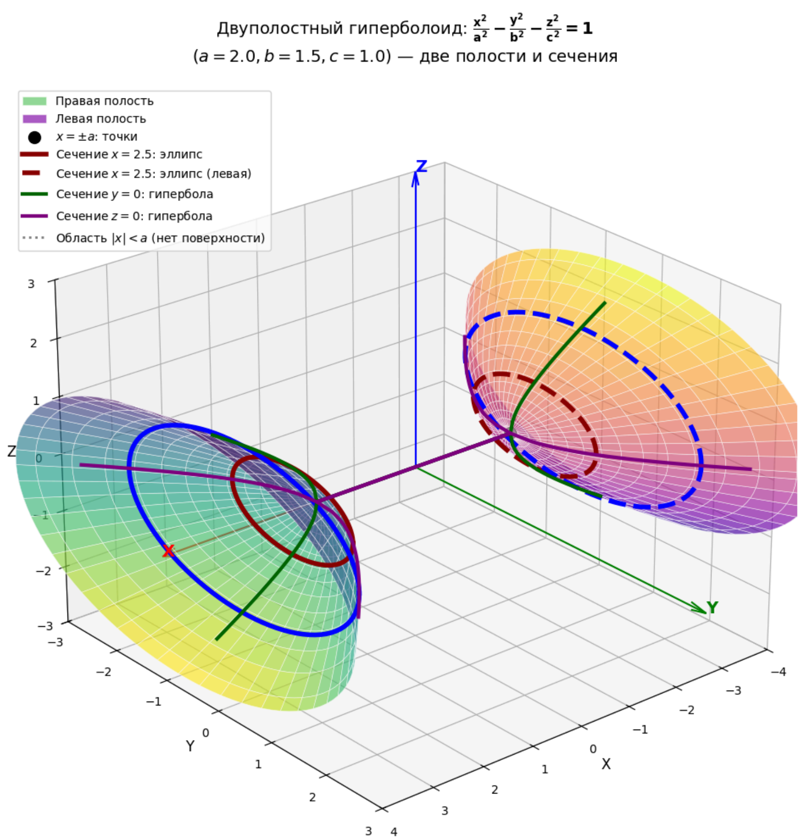
Двуполостный гиперболоид

Def. *Двуполостным гиперболоидом* называется поверхность, задаваемая в некоторой прямоугольной системе координат уравнением:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a, b, c > 0}$$

Свойства:

- Сечения:
  - При $x = h, |h| > a : \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{h^2}{a^2} - 1 > 0$ - эллипс.
  - При $x = \pm a : \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 \Rightarrow y = 0, z = 0$ - единственная точка $(\pm a, 0, 0)$.
  - При $|x| < a$ - пустое множество.
  - При $y = h$ или $z = h$ - гиперболы.
- Симметрия относительно всех координатных плоскостей, осей и начала координат.
- Поверхность неограничена.



Двуполостный гиперболоид.png

Утверждение. двуполостный гиперболоид не содержит ни одной прямой.

☐

Предположим, что существует прямая l, целиком лежащая на поверхности. Рассмотрим плоскость Π, проходящую через начало координат и перпендикулярную оси OX (плоскость $x = 0$).

- Эта плоскость не пересекает поверхность, так как $|x = 0| < a$.
- Любая прямая в пространстве либо параллельна Π, либо пересекает Π.

Возможны два случая:
Случай 1: l параллельна Π. Тогда все точки l имеют одинаковое $x = x_0$. Но сечение $x = x_0$ - либо эллипс (ограниченное множество), либо точка, либо пусто. А прямая - неограниченное множество. Противоречие
Случай 2: l пересекает Π в некоторой точке $M(0, y_M, z_M)$. Но Π не пересекает поверхность, значит, M не принадлежит поверхности, следовательно l не целиком лежит на поверхности. Противоречие.
Следовательно, ни одна прямая не может лежать на двуполостном гиперболоиде.
■

Конус

Def. *Конусом второго порядка* называется поверхность, задаваемая в некоторой прямоугольной системе координат уравнением:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \quad a, b, c > 0}$$

Свойства:

- Точка $(0, 0, 0)$ - *вершина конуса*.
- Если точка (x_0, y_0, z_0) лежит на конусе, то и все точки $(\lambda x_0, \lambda y_0, \lambda z_0)$ при любом $\alpha \in \mathbb{R}$ также лежат на нём (функция однородна степени 2).
  - $\Rightarrow$ Каждая прямая, проходящая через начало координат и точку на конусе, целиком лежит на нём.
  - $\Rightarrow$ Такие прямые называются *прямолинейные образующие*.
- При $z = h \neq 0$:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2}$$

  - эллипс (или окружность, если $a = b$).
- При $x = 0$:

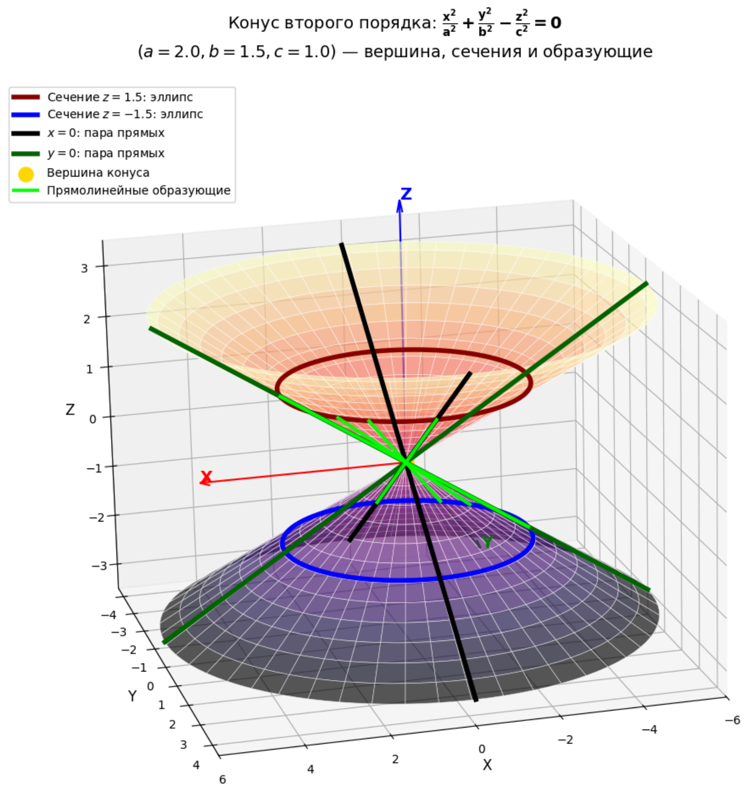
$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \Rightarrow y = \pm\frac{b}{c}z$$

  - пара пересекающихся прямых.
- Аналогично для других координатных плоскостей.

Частный случай. При $a = b$ уравнение принимает вид:

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}=\frac{z^2}{c^2} \implies r=\frac{a}{c}|z|$$

Это конус вращения (поверхность вращения прямой вокруг оси OZ).



Конус второго порядка.png

Цилиндрические поверхности второго порядка

Def. *Цилиндрическая поверхность* - это поверхность, образованная движением прямой (образующей), параллельно фиксированному направлению, вдоль некоторой кривой (направляющей).

Основные типы (в плоскости $z=\text{const}$):

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{1. Параболический цилиндр:} & y^2=2px \\ \text{2. Эллиптический цилиндр:} & \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \\ \text{3. Гиперболический цилиндр:} & \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \end{array}}$$

Note. Сечения плоскостями $z=\text{const}$ - те же кривые