Лекция 7. Деревья поиска II. Декартово дерево. Splay-дерево

#вшпи #аисд #теория

Сливаемые деревья поиска

Split/Merge и остальные операции

Def. **Split** принимает дерево поиска T и ключ x и разделяет на два дерева поиска, в первом все ключи $< x$, во втором $\geq x$.
Def. Операция **Merge** принимает T_1 и T_2. При этом все ключи в $T_1 \leq$ всех ключей в T_2. Она объединяет два дерева в одно дерево T.

Как сделать вставку элемента x в дерево T?

- если x уже есть в T, то алгоритм окончен
- иначе делаем $Split(T, x) \implies \{T_1, T_2\}$
- Возвращаем $Merge(T_1, Merge(Tree(x), T_2))$

Как сделать $Erase$ элемента x из дерева T?

- $Split(T, x) \implies \{T_1, T_2\}$
- удаляем наивно x из T_1 (у него только один ребёнок)
- $return \quad Merge(T_1', T_2)$

Как сделать удаление x быстрее?

- Найдём x в дереве и вместо него запишем результат $Merge$ его детей, если их два, иначе сделаем наивное удаление

Декартово дерево поиска

Def. **Декартовым деревом поиска** называется бинарное дерево, содержащее пары $\{x_i, y_i\}$, при этом это двоичное дерево поиска по ключам и бинарная куча по приоритетам.

Свойство: декартово дерево поиска всегда можно построить единственным образом по данным парам $\{x_i, y_i\}$.

Merge в декартовом дереве деревьев T_1 и T_2, где все ключи T_1 меньше всех rлючей T_2.

- Если $T_1.root.y > T_2.root.y$, то $T.root = T_1.root$

- Значит известно левое поддерево T: $T.root.left$ = $T_1.root.left$
- $T.root.right = Merge(T_1.root.right, T_2)$
- Иначе действуем симметрично

Split

- Если $x > T.root.x$, то известно левое поддерево T_1: $T_1.left = T.left$
- Тогда $\{T_1.right, T_2\} = Split(T.right, x)$
- Иначе действуем симметрично

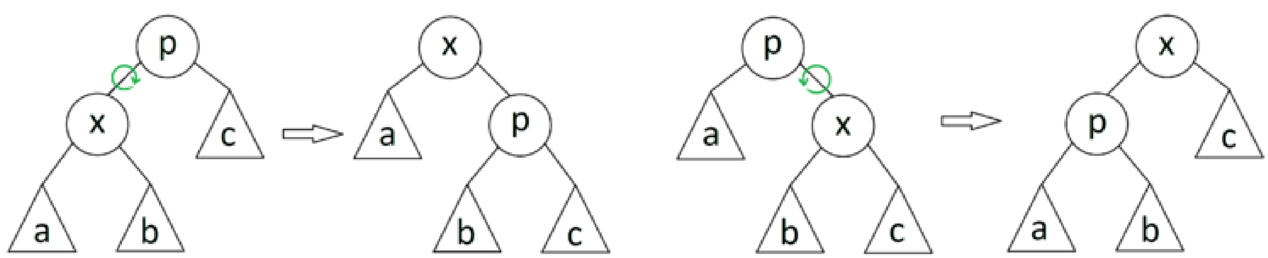
Утверждение. Время работы *Split* и *Merge* $\sim O(h)$. Время работы *Erase*, *Insert* пропорционально максимуму из времени работы *Merge* и *Split*.

Теорема (б/д). В декартовом дереве из N узлов, приоритеты у которого являются случайными величинами с равновероятным равномерным распределением, средняя глубина вершины $O(logN)$
Следствие. Время работы Erase, Insert составляет $O(logN)$ в среднем.

Splay дерево

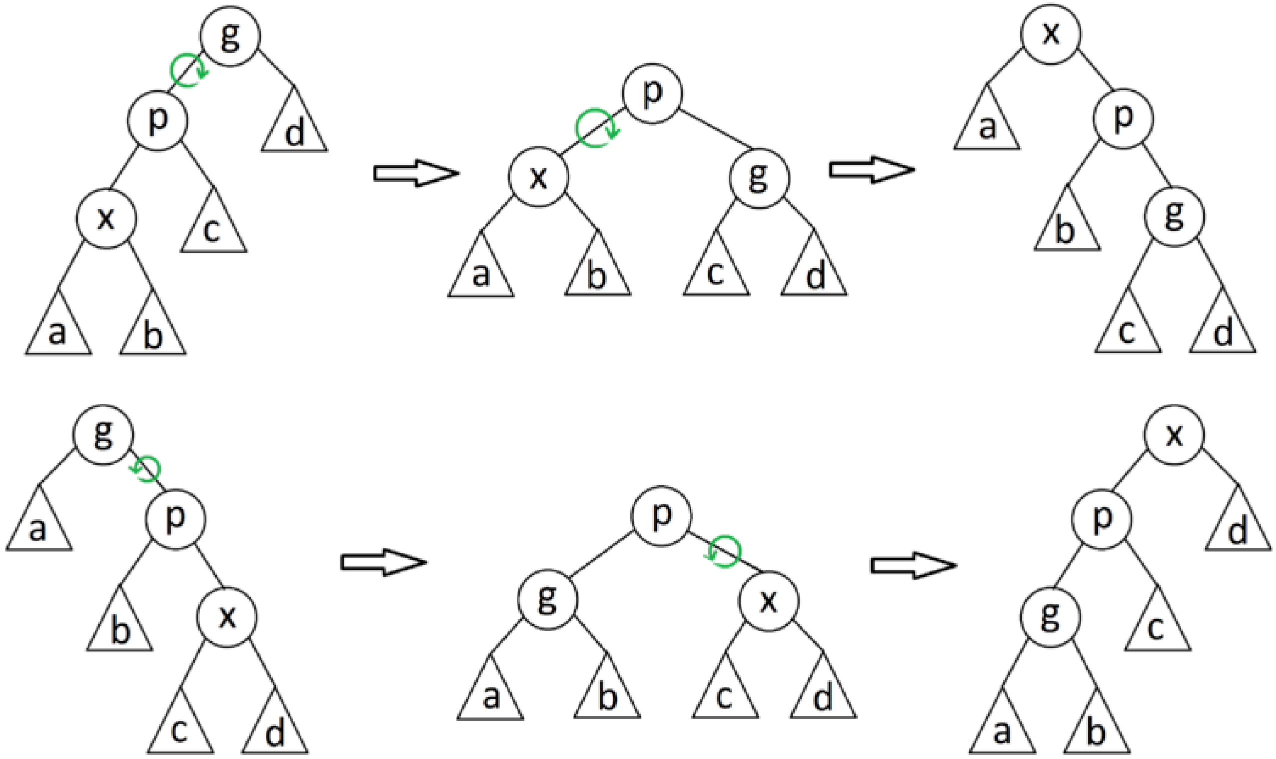
Пусть есть элементы, к которым обращаются с разной частотой. Есть "горячие элементы", к которым чаще обращаются и "холодные элементы", к которым реже обращаются. Хочется хранить "горячие элементы" выше, чтобы доступ к ним был быстрее, чем к "холодным". Можно доказать, что Splay-дерево - это теоретически лучшее дерево поиска. То есть утверждается, что оно теоретически оптимально с точки зрения теории информации.

Def. Операция **zig** применяется только для узлов на глубине 1 и делает поворот вокруг ребра $\{x, p(x)\}$



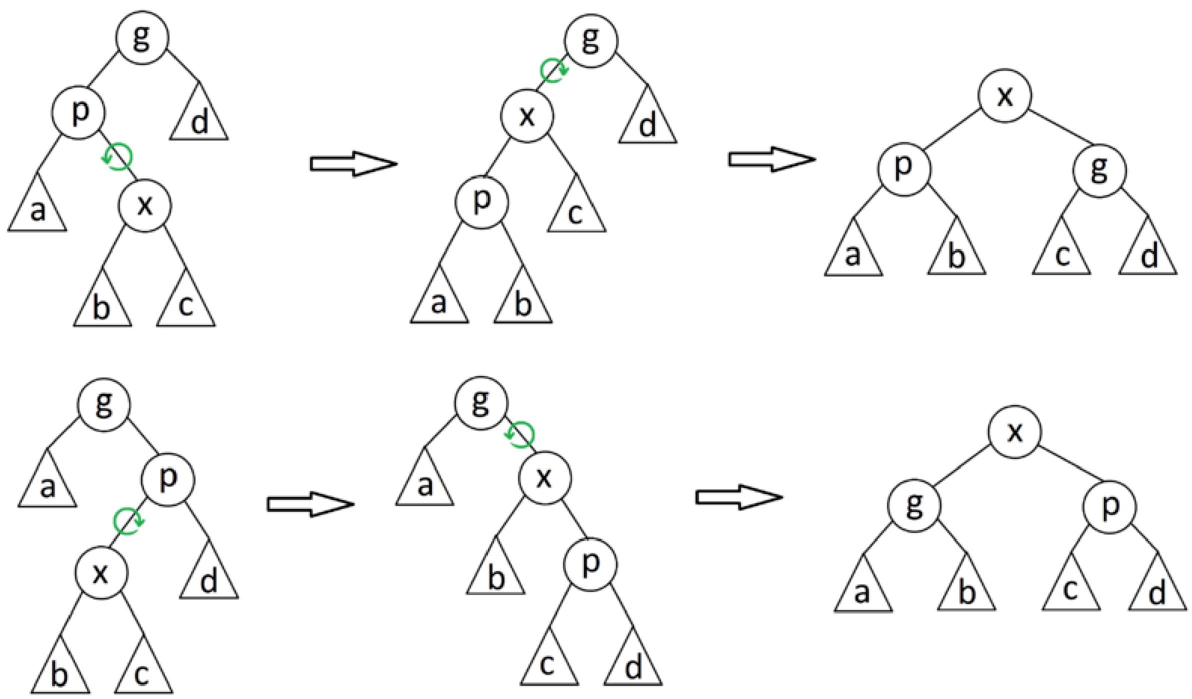
splay-tree zig.png

Def. Операция **zig-zig** применяется, если x - односторонний внук. Выполняется сначала поворот $\{p, g\}$, затем поворот вокруг ребра $\{x, p\}$.



splay-tree zig-zig.png

Def. Операция **zig-zag** применяется, если x - разносторонний внук. Сначала выполняется поворот $\{x, p\}$, затем поворот $\{x, g\}$.



splay-tree zig-zag.png

Def. Операция **Splay(x)** является комбинацией поворотов различного типа, чтобы сделать x корнем дерева. То есть Splay(x) поднимает вершину x в корень дерева, производя при этом повороты *zig, zig-zig, zig-zag*.

Другие операции в Splay-дереве:

$Merge(T_l, T_r)$

- выполняем $Splay(T_l.max)$
- Подвешиваем T_r как правый ребёнок $T_l.max$
  $Split(x)$
- выполним $Splay(lower\_bound(x))$, $lower\_bound$ как в наивной реализации
- Возвращаем $x.left$ и x
  $Find(x)$
- находим узел в этом дереве
- выполняем $Splay(x)$
  $Insert(x)$
- наивно вставляем x
- выполняем $Splay(x)$
  $Erase(x)$
- делаем $Find(x)$
- выполняем $Merge$ от его детей.
- удаляем x

Доказательство времени работы $Splay$

Def. **Рангом вершины x** назовём величину $r(x) = log_2 C(x)$, где $C(x)$ - размер поддерева вершины x включая её. Заметим, что $r(x) \geq 1$.

Def. **Потенциалом Splay-дерева T** назовём величину

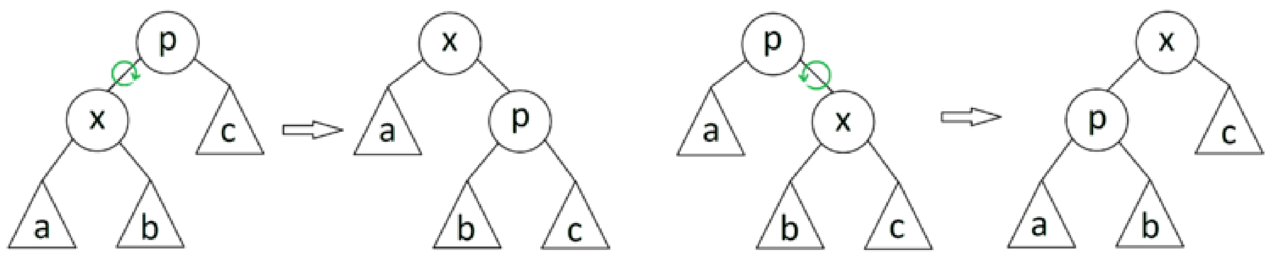
$$\phi(T) := \sum_{v \in T} r(v)$$

Note. далее r и r' - ранги до и после преобразований

Теорема **(время работы Splay)**: Амортизированное время поворотов в $Splay(x)$ с корнем в t не превосходит $3r(t) - 3r(x) + 1$. Амортизированное время работы $Splay(x)$ равно $O(logN)$

Доказательство:

Операция zig



splay-tree zig.png

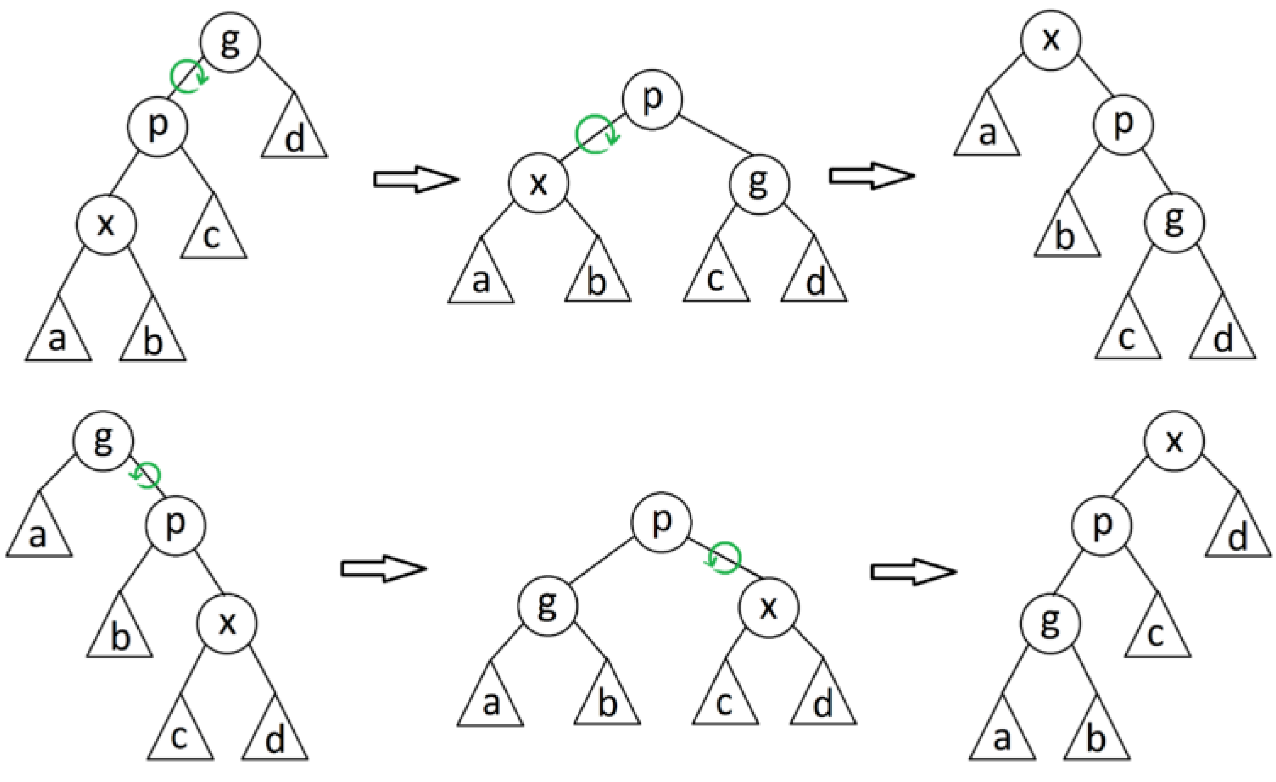
Поскольку выполнен один поворот, то амортизированное время выполнения шага равно

$$T = 1 + r'(x) + r'(p) - r(x) - r(p)$$

$r(p)$ уменьшился, поэтому $T \leq 1 + r'(x) - r(x)$ (т.к. $r'(p) - r(p) \leq 0$)
$r(x)$ увеличился, поэтому $r'(x) - r(x) \geq 0$
Поэтому умножим на 3, не меняя знака

$$T \leq 1 + 3r'(x) - 3r(x) \implies Q.E.D$$

Операция zig-zig



splay-tree zig-zig.png

Выполнено два поворота. Поэтому амортизированное время выполнения шага равно

$$T = 2 + r'(x) + r'(p) + r'(g) - r(x) - r(p) - r(g)$$

Заметим, что $r'(x) = r(g)$. Тогда

$$T = 2 + r'(p) + r'(g) - r(x) - r(p)$$

Далее, так как $r(x) \leq r(p)$, получаем, что $T \leq 2 + r'(p) + r'(g) - 2r(x)$.
$r'(p) \leq r'(x)$, получим, что $T \leq 2 + r'(x) + r'(g) - 2r(x)$.
Хотим доказать, что $T \leq 2 + r'(x) + r'(g) - 2r(x) \leq 3(r'(x) - r(x))$, то есть
$r(x) + r'(g) - 2r'(x) \leq -2$.
Это равносильно

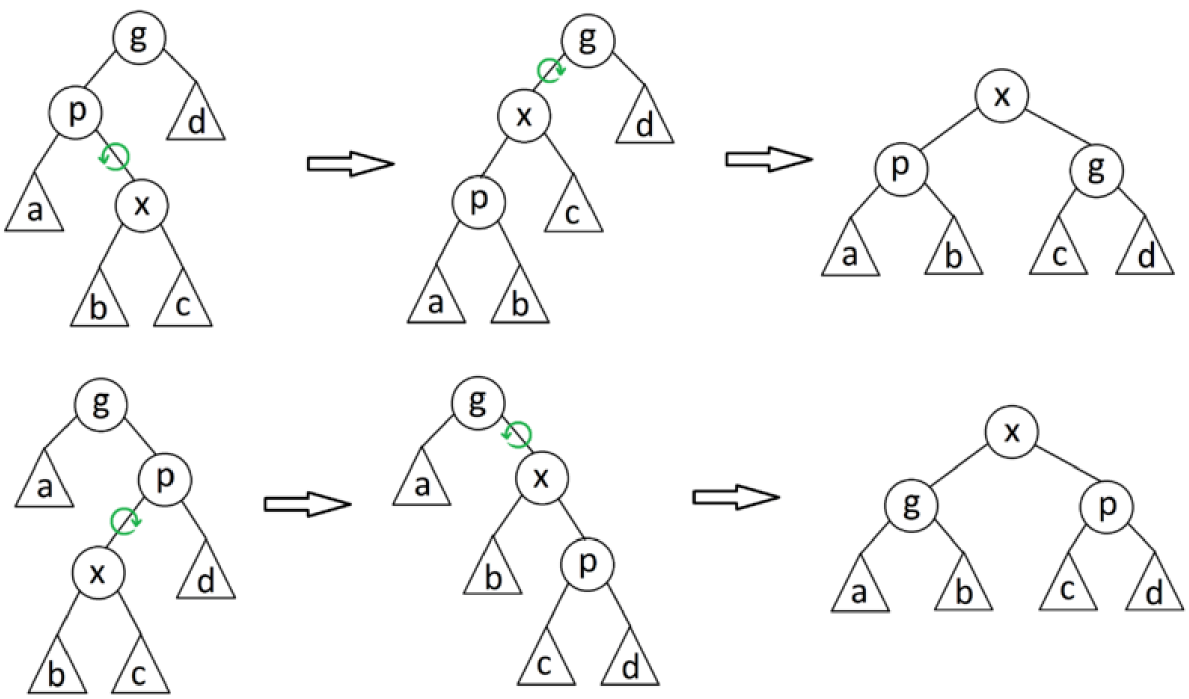
$$(r(x) - r'(x)) + (r'(g) - r'(x)) = log_2 \frac{C(x)}{C'(x)} + log_2 \frac{C'(g)}{C'(x)} = log_2 \frac{C(x)C'(g)}{C'(x)^2} \leq -2$$

Заметим, что

$$\begin{cases} C'(g) + C(x) \leq C'(x) \iff (\frac{C'(g)+C(x)}{2})^2 \leq \frac{C'(x)^2}{4} \\ \sqrt{C'(g)C(x)} \leq \frac{C'(g)+C(x)}{2} \iff C'(g)C(x) \leq (\frac{C'(g)+C(x)}{2})^2 \end{cases} \implies C'(g)C(x) \leq \frac{C'(x)^2}{4}$$

Откуда $\frac{C'(g)C(x)}{C'(x)^2} \leq \frac{1}{4} \iff log_2 \frac{C(x)C'(g)}{C'(x)^2} \leq -2 \implies Q.E.D$.

Операция zig-zag



splay-tree zig-zag.png

Выполнено два поворота, амортизированное время равно

$$T = 2 + r'(x) + r'(p) + r'(g) - r(p) - r(x) - r(g)$$

Заметим, что $r'(x) = r(g)$. Тогда

$$T = 2 + r'(p) + r'(g) - r(x) - r(p)$$

Далее, так как $r(x) \le r(p)$, получаем, что $T \le 2 + r'(p) + r'(g) - 2r(x)$.
Хотим доказать, что $T \le 2 + r'(p) + r'(g) - 2r(x) \le 2(r'(x) - r(x))$, то есть, что $r'(p) + r'(g) - 2r'(x) \le -2$
Это равносильно

$$(r'(p) - r'(x)) + (r'(g) - r'(x)) = log_2 \frac{C'(p)}{C'(x)} + log_2 \frac{C'(g)}{C'(x)} \le -2$$

Заметим, что $C'(p) + C'(g) \le C'(x)$, применение неравенства о средних аналогично операции **zig-zig** $\implies Q.E.D$.

Соединяем

Из рассуждений выше операции **zig-zig** и **zig-zag** удовлетворяет соотношению $T \le 3r'(x) - 3r(x)$.
Пусть ключ x стартует с узла x_0 в дереве и проходит положения $x_1, \ldots, x_k$ до операции **zig**.
Тогда получается, что $x_{k+1} = t$. Откуда время работы $Splay(x)$ равно

$$T(Splay) \le \sum_{i=0}^{k-1} (3r(x_{i+1}) - 3r(x_i)) + T(zig) = 3r(x_k) - 3r(x_0) + T(zig) \le$$
$$\le 3r(t) - 3r(x_0) + 1 = O(logN) \implies Q.E.D$$