Лекция 13. Двудольные графы. Лемма Холла.

#вшпи #дискретная_математика #теория

Автор конспекта: Гридчин Михаил

Def. *Двудольный граф* - это граф G, такой, что $V = L \cup R$, где $L \cap R = \varnothing$. При этом $\forall e(v_L, v_R) \in E \implies v_L \in L, v_R \in R$.

Def. Граф называется *k-раскрашиваемым*, если существует раскраска вершин в k цветов, такая что никакие 2 смежные вершины не имеют одного цвета. Такая раскраска называется *правильной*.

Утверждение. Любое дерево 2-раскрашиваемо.

Теорема. Следующие утверждения эквивалентны.

1. Граф двудольный
2. Граф 2-раскрашиваем
3. В графе нет циклов нечётной длины

$\square$
Заметим, что $1 \iff 2$ тривиально, поскольку это одни и те же условия.
$1 \Rightarrow 3$. Пусть граф двудольный, то есть $V = L \cup R$. Рассмотрим произвольный цикл по вершинам.

$$v_{L_1}, v_{R_1}, v_{L_2}, v_{R_2}, \ldots, v_{R_k}, v_{L_1}$$

Если последняя вершина в цикле из левой доли, то предпоследняя точно из правой доли, а значит, из чередования вершин из разных долей, количество рёбер в цикле чётно.

$3 \Rightarrow 2$. В графе G нет циклов нечётной длины. Возьмём от каждой компоненты связности остовное дерево и раскрасим его в два цвета. Покажем, что это правильная раскраска. Действительно, если бы существовало ребро из G, но из остовных деревьев, соединяющее две вершины одного цвета (в одном и том же дереве!). Но тогда получим, что существует цикл нечётной длины проходящий, через эти две вершины. Противоречие, значит, раскраска правильная. Следовательно, граф 2-раскрашиваем.
$\blacksquare$

Def. *Паросочетание* - это набор несмежных рёбер.

Def. *Вершинное покрытие* $S \subseteq V$ - это подмножество вершин графа $G(V, E)$ такое, что каждое ребро инцидентно по крайней мере одной вершине из S.

Def. Пусть $|L| \le |R|$. Паросочетание называют *совершенным*, если каждая вершина из L инцидентна какому-то ребру из паросочетания.

Лемма Холла (о существовании совершенного паросочетания). В двудольном графе G ($|L| \le |R|, |L| \ge 2$) существует совершенное паросочетание тогда и только тогда, когда $\forall X \subseteq L$ смежно не менее, чем с $|X|$ вершин из правой доли.
Вершину считаем смежными с множеством X, если она смежна по крайней мере с одной вершиной из X.

$\square$
$\Rightarrow$
Если совершенное паросочетание существует, то $\forall X \subseteq L$ ровно $|X|$ вершин из доли R смежно с X по рёбрам паросочетания.
$\Leftarrow$
Пусть выполняется условие о количестве смежных. Если в графе построено паросочетание размера $k < |L|$, то есть паросочетание размера $k+1$. Докажем это утверждение по индукции.
База. Изначально паросочетание пустое, а между L и R есть рёбра. Значит, есть по крайней мере одно ребро. Добавим его, получим паросочетание размера 1.
Шаг. Пусть построено паросочетание размера k. Поскольку $k < |L|$, то в левой доле есть вершина $x \in L$, не участвующая в паросочетании. Ориентируем рёбра из паросочетания из R в L, а остальные наоборот из L в R. Рассмотрим все вершины, достижимые из x (с учётом ориентации рёбер), обозначим это множество H. Обозначим H_L - множество вершин из H, лежащих в левой доле, H_R - множество вершин из H, лежащих в правой доле. Покажем, что в H есть вершина $y \in R$, не участвующая в паросочетании. Действительно, если бы все вершины из H_R участвовали в паросочетании, то по обратным рёбрам из паросочетания каждая вершина дополняет H вершиной своей пары в левой доле. Поэтому, если бы все H_R участвовали в паросочетании, то $|H_L| > |H_R|$, поскольку для каждой вершины из R есть ровно одна вершина из L, да ещё вершина x. Это противоречит условию леммы, поскольку множество H_L смежно только с H_R и при этом $|H_L| > |H_R|$. Следовательно, в H есть вершина $y \in R$, не участвующая в паросочетании. Рассмотрим путь $x \to y$. Заметим, что первое ребро будет строго не из паросочетания, второе строго из паросочетания, третье строго не из паросочетания и так далее. Заметим, что все эти вершины из пути смежны только с рёбрами паросочетания, принадлежащим пути. Для x, y это выполнено, для остальных также тривиально. Исключим из паросочетания рёбра $(v_1, v_2), (v_3, v_4), \ldots, (v_{2k-1}, v_{2k})$ и добавим в него $(x, v_1), (v_2, v_3), \ldots, (v_{2k}, y)$. Заметим, что все вершины из пути по прежнему смежны только с рёбрами паросочетания, принадлежащим пути. И мы показали, что можем увеличить паросочетание на 1. Что и требовалось доказать.
$\blacksquare$