

Лекция 7. Гомоморфизм и изоморфизм.

Циклические группы. Смежные классы

#вспи

#дискретная_математика

#теория

Автор конспекта: Гридчин Михаил

Аккуратнее про группы

Вспомним определение группы

Def. Множество M и операцию \circ на нём (" \circ ": $M \times M \rightarrow M$) называют группой G и пишут $G = (M, \circ)$, если:

0) " \circ " - алгебраическая операция, то есть $\forall a, b \in G(M) \implies a \circ b \in G$.

1. ассоциативность: $\forall a, b, c \in G \implies a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$.

2. нейтральный элемент $\exists! e \in G : \forall a \in G \implies e \circ a = a \circ e = a$. Нетрудно показать, что нейтральный элемент единственный. Действительно,

$$e_1 \circ e_2 = e_1 = e_2 \circ e_1 = e_2 \implies e_1 = e_2.$$

3. обратный элемент. $\forall a \in G \exists! b \in G : a \circ b = b \circ a = e$. Нетрудно показать, что обратный элемент может быть единственным. Действительно,

$$a \circ b = a \circ c = e \quad \text{умножим на } b \text{ слева}$$

$$(b \circ a) \circ b = b = (b \circ a) \circ c = c$$

$$b = c$$

Свойство 1. $(a^n)^m = a^{nm}$ - по определению и по ассоциативности.

Свойство 2. $(a^{-1})^m \circ a^m = e$ по ассоциативности $\implies (a^{-1})^m = (a^m)^{-1} =: a^{-m}$.

Def. $a^0 := e$.

Def. *Порядок конечной группы* - количество элементов $:= |G|$.

Def. *Порядок элемента* $a \in G := \text{ord}(a)$ - это такое наименьшее $m \in \mathbb{N} : a^m = e$.

Свойство 3. В конечных группах существуют порядки всех элементов (они конечны).

□ Операция (\circ) алгебраическая \implies все степени элемента $a \in G$ также лежат в G .

Рассмотрим ряд:

$$a^1 \quad a^2 \quad a^3 \quad \dots \quad a^N, \quad N > |G|$$

Тогда $\exists i, j \in \{1, 2, 3, \dots, N\} : a^i = a^j$ По принципу Дирихле. Тогда $a^{i-j} = e$. ■

Гомоморфизм и изоморфизм

Def. *Гомоморфизм групп* из группы G в группу G' - это такое отображение ϕ

$$\phi : G \rightarrow G', \quad G = (M, \circ), \quad G' = (M', *)$$

Что $\boxed{\forall a, b \in G : \phi(a \circ b) = \phi(a) * \phi(b)}$

Свойство гомоморфизма 1. $\phi(a^{-1}) = (\phi(a))^{-1}, \phi(e) = e'.$

□

$$1. \phi(a \circ e) = \phi(a) * \phi(e) = \phi(a) = \phi(e \circ a) = \phi(e) * \phi(a) \implies \phi(e \circ a) = \phi(a \circ e) = \phi(a).$$

$$2. \phi(a \circ a^{-1}) = \phi(a^{-1} \circ a) = \phi(e) = e' = \phi(a) * \phi(a^{-1}) = \phi(a^{-1}) * \phi(a).$$

■

Свойство гомоморфизма 2. $a^m = e \implies \phi(a^m) = e'$ (из свойства гомоморфизма 1)

$\phi(a)^m = e'$ (по определению гомоморфизма) \implies *порядок элемента $\phi(a)$ является делителем порядка элемента a .*

Def. Сюръективный гомоморфизм из G на G' - гомоморфизм, такой, что

$$\forall b \in G' \exists a \in G : \phi(a) = b \iff \text{Im}(\phi) = \phi(G) = G'$$

Def. Изоморфизм - гомоморфизм, являющийся биекцией. Обозначается: " \cong ".

Свойство Изоморфизма. Изоморфизм - это гомоморфизм из G на G' и одновременно гомоморфизм из G' на G .

Таблицы Кэли.

Построим таблицу Кэли для множества на 4 элементах.

	\circ	e	a	b	c		\circ	e	a	b	c
	e	e	a	b	c		e	e	a	b	c
$A :$	a	a	e	c	b	$B :$	a	a	b	c	e
	b	b	c	e	a		b	b	c	e	a
	c	c	b	a	e		c	c	e	a	b

В таблице A порядок каждого элемента кроме нейтрального равен 2.

В таблице B порядок каждого элемента равен 3.

Для таблицы A например можно взять множество пар по модулю 2 с поэлементным хог-ом (\oplus) ($M = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$). Нейтральный - $(0, 0)$, обратный к $a \in M$ это сам a . Для таблицы B подойдёт например $G(\mathbb{Z}_4, +)$.

Утверждение: группы, задающиеся таблицами Кэли для множества на 4 элементах неизоморфны.

□ По *второму свойству гомоморфизма* порядок элемента $\phi(a)$ должен быть делителем порядка элемента $a, \forall a \in G'$. Но порядки элементов $\phi(a)$ все кроме нейтрального равны 2, а у a порядки все кроме нейтрального равны 3. Как видим, 2 - не делитель 3. ■

Note. Группа порядка 5 всего одна.

Свойства групп

Свойство 4. Если $a^m = e$, то порядок a - делитель m , $m \in \mathbb{N}$.

□ Мы точно знаем, что $\text{ord}(a) \leq m$. Обозначим $n := \text{ord}(a)$. Разделим m на n с остатком:

$$m = nq + r \implies a^m = e = \underbrace{(a^n)^q}_{=e} \circ a^r = a^r$$

Но при этом $0 \leq r < n$ и при этом n - наименьшее натуральное число, при котором $a^n = e \implies r = 0$. ■

Def. Группа G называется *циклической*, если $\exists a \in G$ (порождающий элемент):

$$\forall b \in G \exists m \in \mathbb{Z} : a^m = b$$

Замечание. m в определении именно *целое*, не натуральное, что важно в следующем утверждении.

Утверждение. Группа $(\mathbb{Z}, +)$ - циклическая группа. Действительно, порождающий элемент - 1 или -1 .

Следствие. Порождающий элемент не обязательно единственный.

Пример. Группа $(\mathbb{Z}_m, +)$ - циклическая группа. Порождающий элемент - 1.

Def. Если группа G циклическая и $|G| = m$, то её обозначают C_m .

Теорема. Все циклические группы из m элементов изоморфны между собой.

□ Пусть есть циклические группа C_m и C'_m , неизоморфные между собой:

$$\begin{array}{lllll} C_m : & e & a & a^2 & \dots & a^{m-1} \\ C'_m : & e & b & b^2 & \dots & b^{m-1} \end{array}$$

Все элементы первой и второй групп различны, иначе бы порядки групп были меньше. То есть *порядок порождающего элемента совпадает с порядком группы*. Изоморфизм тривиальный. Сопоставим $\phi(a^i) = b^i$. ■

Следствие. Всякая циклическая группа $C_m \cong (\mathbb{Z}_m, +)$.

Def. Будем говорить, что H - подгруппа группы $G(M, \circ)$ и записывать $H < G$, если

$$\begin{cases} H \subseteq G \\ H - \text{группа относительно } (\circ) \end{cases}$$

Def (эквивалентное определение подгруппы). H - подгруппа G , если:

$$\begin{cases} H \subseteq G \\ \forall a, b \in H \implies a \circ b \in H \\ \forall a \in H \implies a^{-1} \in H \end{cases}$$

Теорема. Приведённые определения подгруппы эквивалентны.

□

Пусть выполнено первое. Тогда второе следует из аксиоматики группы напрямую.

Пусть выполнено второе. Тогда H замкнуто относительно групповой операции (\circ) , а также взятие обратного элемента также не выводит за пределы H из аксиоматики группы.

Отдельно доказывается, что нейтральный элемент также лежит в H . Это следует из единственности e также из аксиоматики группы и из того, что $a \circ a^{-1} = e$.

■

Теорема (критерий подгруппы). H является подгруппой G тогда и только тогда, когда

$$\forall a, b \in H \implies a \circ b^{-1} \in H \text{ и } H \subseteq G.$$

□ В одну сторону очевидно и в другую тоже очевидно.

Слева направо. Если $b \in H$, то и $b^{-1} \in H$, значит $a \circ b^{-1} \in H$.

Справа налево. Если $\forall a, b \in H$ верно, что $a \circ b^{-1} \in H$, тогда

1. возьмём $b = a$. Тогда $e \in H$.

2. возьмём $a = e$. Тогда $b^{-1} \in H$.

3. возьмём $b = b^{-1}$. Тогда $a \circ b^{-1} = a \circ b \in H$. И получили первый пункт эквивалентного определения подгруппы

■

Теорема. Пусть дана произвольная группа G и элемент $a \in G : \text{ord}(a) = n, n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$H := \{a^0, a^1, \dots, a^{n-1}\} < G$$

□ Заметим, что $H \subseteq G$. Тогда применим критерий подгруппы и получим требуемое. ■

Пример. Пример бесконечной группы, у которой есть конечные циклические подгруппы.

Рассмотрим множество всех многочленов с коэффициентами по модулю m . Обозначается $\mathbb{Z}_m[x]$. Причём порядок каждого элемента - делитель m .

Def. Пусть $H < G$. Возьмём $g \in G$. Будем говорить, что gH - *левый смежный класс по подгруппе H с представителем g* , если

$$gH := \{g \circ h \mid h \in H\}$$

Утверждение. Смежные классы не пересекаются или совпадают.

□ Пусть $\exists z \in aH \cap bH \implies \exists h_1 \in H, h_2 \in H : z = a \circ h_1 = b \circ h_2 \implies a = b \circ h_2 \circ h_1^{-1}$, также $\implies \forall t \in aH \rightarrow t = a \circ \underbrace{h_2 \circ h_1^{-1} \circ \tilde{h}}_{\in H} \implies t \in bH$. ■