Лекция 11. Изоморфизм графов. Деревья.

#вшпи #дискретная_математика #теория

Автор конспекта: Гридчин Михаил

Общие понятия

Утверждение

$$\sum_{v \in V} \deg v = 2|E|$$

☐ Действительно, каждое ребро участвует в степени двух вершин. ■

Утверждение

В графе чётное количество вершин с нечётной степенью.

☐ Действительно, из предыдущего утверждения сумма степеней всех вершин чётна, а значит, что эта сумма содержит чётное количество нечётных слагаемых. ■

Изоморфизм графов

Определение

Графы $G_1(V_1, E_1)$ и $G_2(V_2, E_2)$ называются изоморфными, если существует биекция $\varphi : V_1 \to V_2$, для которой выполняется $(v, u) \in E_1 \iff (\varphi(v), \varphi(u)) \in E_2$.

Деревья

Теорема (4 эквивалентных определения дерева)

Следующие определения эквивалентны.
Деревом называется:

1. Связный ациклический граф.
2. Между любыми двумя вершинами существует единственный простой путь.

3. Связный граф, такой, что $|V| = |E| + 1$.
4. Ациклический граф, такой, что $|V| = |E| + 1$.

$\square$
$\boxed{1} \to \boxed{2}$. Докажем от противного, пусть простой путь не единственный. Докажем по индукции.
База. Самый длинный из этих простых путей имеет 2 ребра. $u \to t \to v$. Заметим, что второй маршрут - это либо $u \to v$, либо $u \to z \to v$. Тогда утверждение о существовании цикла тривиально.
Шаг. Пусть для всех $k \leq n$ если между вершинами два простых пути длины не более k, то есть цикл. Рассмотрим две вершины, между которыми два простых пути длины не более $n + 1$.
Два пути: $u \to \ldots \to v$, рассмотрим первую вершину после u в обоих путях. Назовём их t, z. Возможны два случая:

1. $t = z$. Тогда нужно применить предположение индукции к паре t, v.
2. $t \neq z$.
    - Все остальные вершины различны. Тогда два пути образуют цикл.
    - Есть промежуточная вершина w, повторяющаяся в обоих путях. Следовательно, есть простой путь $u \to w$ - фрагмент первого пути, есть простой путь $u \to w$ - фрагмент второго пути. Эти фрагменты различны ($t \neq z$) и имеют длину не более n. Следовательно, по предположению индукции найдётся цикл.

Таким образом, если простой путь не единственный, то существует цикл. Получили требуемое.

$\boxed{2} \to \boxed{3}$. Поскольку существует единственный простой путь, то граф связный. Докажем утверждение по индукции.

Предположение. Пусть для всех графов с не более n вершинами требуемое выполнено.
База. Одно ребро - $1 + 1 = 2$
Шаг. Рассмотрим граф G, удовлетворяющий $\boxed{2}$ с $n + 1$ вершиной. Рассмотрим две вершины $u, v : (u, v) \in G$. Удалим ребро (u, v). Поскольку между u и v был единственный простой путь, то при удалении ребра (u, v) другого пути между u и v быть не может по $\boxed{2}$. Так что граф перестанет быть связным. Не может быть 3 и более компонент связности. Иначе будет отдельно существовать компонента связности, не содержащая ни u, ни v, а значит и при возвращении ребра (u, v) с ними не связанная, что противоречит связности исходного графа. Применим предположение индукции к каждой из двух получившихся компонент связности. В первой компоненте связности

$$|V_1| = |E_1| + 1$$

Во второй компоненте связности

$$|V_2| = |E_2| + 1$$

Тогда всего

$$|V_1| + |V_2| = |E_1| + |E_2| + 2$$

Но при этом по разделению

$$|E| = |E_1| + |E_2| + 1 \implies |V_1| + |V_2| = |V| = |E| + 1$$

Что и требовалось доказать.

$\boxed{3} \to \boxed{4}$. От противного, пусть в графе, для которого выполняется $\boxed{3}$ есть простой цикл. Рассмотрим этот цикл: $v_1 \to v_2 \to \ldots \to v_m \to v_1$. В этом цикле ровно m рёбер. Рассмотрим вершины, не входящие в цикл. Обозначим их $w_1, w_2, \ldots, w_k$, где $k + m = |V|$. Для каждой w_i рассмотрим кратчайший путь до цикла.
Утверждение. Первые рёбра этих путей попарно различны. От противного, пусть нашлись два кратчайших пути от w_i и от w_j, где первые рёбра совпадают:

$$w_i(w_iw_j)\underbrace{w_j(w_jt_1)t_1\ldots v_i}_{l_1 \text{ рёбер}}$$

$$w_j(w_jw_i)\underbrace{w_i(w_iz_1)z_1\ldots v_j}_{l_2 \text{ рёбер}}$$

Эти маршруты - кратчайшие простые пути. Предположим без ограничения общности, $l_1 \geq l_2$. Тогда с одной стороны от w_i к циклу кратчайший путь $l_1 + 1$, с другой стороны из пути от w_j можем выделить путь от w_i до цикла длины $l_2 < l_1 + 1$. Противоречие.

Количество рёбер m - из цикла, а также k попарно различных рёбер по одному от каждого кратчайшего пути. Итого $|E| = m + k = |V|$ рёбер. Противоречие, так как заявлено $|E| = |V| - 1$.

$\boxed{4} \to \boxed{1}$. Пусть выполнено $\boxed{4}$. Рассмотрим такой граф. Обозначим k - количество компонент связности. Рассмотрим каждую из компонент связности отдельно. Это связный ациклический граф, значит выполнен пункт $\boxed{1}$, значит, выполняется $\boxed{3}$, значит, $|V_i| = |E_i| + 1$. Сложим все эти равенства

$$\begin{gathered}|V_1| = |E_1| + 1 \\ |V_2| = |E_2| + 1 \\ \ldots \\ |V_k| = |E_k| + 1\end{gathered}$$

Получим $|V| = |E_1| + \ldots + |E_k| + k$. Следовательно, $k = 1$. Что и требовалось доказать.
■

Определение

Изолированная вершина в графе — вершина степени 0.

Определение

Висячая вершина в дереве — вершина степени 1.