

# Лекция 1. Сочетания, размещения, отображения.

#вшли

#дискретная\_математика

#теория

Автор конспекта: <https://github.com/Ailana06>

## Правило произведения

Если необходимо выбрать пару объектов  $(a, b) : a \in A, b \in B$

Известно следующее:  $a$  можно выбрать из  $A$   $n$  способами, а затем  $b$  выбрать из  $B$  ровно  $m$  способами, тогда пару  $(a, b)$  можно выбрать  $n \cdot m$  способами.

## Правило суммы

Пусть дано  $A \cap B = \emptyset, |A| = n, |B| = m$

Количество способов выбрать элемент из  $A$  или  $B$  равно  $n + m$ .

**Def. Перестановка** (количество перестановок) — биекция конечного множества на себя.

Возьмем произвольное отображение  $f : X \rightarrow Y, |X| = n, |Y| = m$

$X$  - "нумерованные шарики",  $Y$  - "нумерованные ящики"

Взять  $n$  различных шариков разложить по  $n$  различным ящикам по одному в ящик,  $n!$  - количество перестановок

Взять  $n$  различных шариков разложить по  $n$  различным ящикам,  $n^m$  - количество перестановок.

**Def. Сочетание** (количество сочетаний) из  $n$  по  $k$  - выбор  $k$  элементного подмножества и  $n$  элементного множества без учёта порядка (без возвращений).

**Note.** Без учёта прядка, значит: 1, 2, 3 равно 3, 2, 1.

**Note.** Возвращение: "вытащили шарик посмотрели и положили обратно". Пусть  $n$  объектов, будем выбирать по  $n'$  штук (иногда  $n' = n$ ).

**Обозначение.**  $C_n^k = \binom{n}{k}$ .

Вывод формулы  $C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ . Выставим в ряд  $n$  шариков, будем брать  $k$ , а  $n - k$  не будем брать,

**Note.**  $C_n^k = C_n^{n-k}$

**Def. Размещение** - упорядоченный выбор  $k$  элементов из  $n$  (без возвращений), аккуратно достаём и кладём в рядочек.

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \dots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

**Пример.**  $n = \{1, 2, 3, 4\}$ , выбор с возвращением набора 4, 1, 4, 2.

**Def. Размещение с повторениями** — упорядоченный выбор  $k$  элементов из  $n$  с возвращениями.

**Обозначение.**  $\overline{A_n^k}$  - размещение с повторениям.

**Def. Сочетание с повторениями** — выбор  $k$  элементного не упорядоченного набора из  $n$  элементного множества.

**Пример.** Пусть  $n$  видов конфет, ровно  $k$  конфет в детском подарке, нужно посчитать сколькими способами можно собрать такой подарочек. Возьмём 1-ого вида конфет  $k_1$ , 2-го -  $k_2$ , 3-го -  $k_3$ , ...,  $n - k_n$ ;  $k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_n = k$  - представили  $k$  как разложение,  $k_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Суммы закодируем неразличимыми шариками (белыми и чёрными),  $k$  - белых,  $n - 1$  - чёрных (перегородок)

**\*Ответ.**  $\overline{C_n^k} = C_{k+(n-1)}^k = C_{k+(n-1)}^{n-1}$

**Обозначение.**  $\overline{C_k^k}$ .

**Пример.** Пусть есть два вида шариков черные и белые,  $m$  - чёрных и  $t$  - белых. Сколькими способами их можно расставить в ряд. Выбираем из  $m + t$  мест шарик.

**Ответ.**  $C_{m+t}^t$

Пусть отображение  $f : X \rightarrow Y$ .

**Определение. Инъективное отображение**  $x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$ .

**Пример.** В ящике ( $m$  ящиков) не более 1-го шарика ( $n$  шариков), где  $n \leq m$ . Возьмём первый из шариков и кладём в один из ящиков и так далее, получим

$$m \cdot (m-1) \cdot (m-n+1) = \frac{m!}{(m-n)!} = [m]_n$$

**Def. Сюръективное отображение**  $\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y$ .

**Пример.** В терминах шариков и ящиков, значит, что нет пустых ящиков.

Если есть  $n$  - белых шариков,  $n$  - чёрных шариков и мы их как-то переставляем, предположим, что это  $2n$  чисел из низ  $n$  - чётных и  $n$  - не чётных.

**Def. Неразличимые** — такие элементы множества, перестановка которых ни на что не влияет.

Инструменты:

1. Принцип Дирихле:  $n$  кроликов рассажены по  $m$  клетками и  $m < n$ , то хотя бы в одной клетке не менее двух кроликов ( $\lceil \frac{n}{m} \rceil$  - округление вверх).

**Теорема.** Если утверждение зависит от  $n \in \mathbb{N}$  и

1. верно для некоторого  $n = k_0$  (база)
2. из истинности утверждения для  $n = k$ , следует истинность для  $n = k + 1$  (шаг)
3. то утверждение верно для всех  $n \geq k_0, n \in \mathbb{N}$

**Пример.**  $1^2 + 2^2 + 3^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

**Решение.**

- База  $n = 1$   $1^2 = \frac{1 \cdot (1+1) \cdot (2+1)}{6}$  - верно
- Шаг  $n = k$   $1^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$   $n = k + 1$   $1^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$
- $\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(2k^2+k+6k+6)}{6} = \frac{(k+1)(2k^2+4k+3k+6)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$

## Таблица-шпаргалка по основным видам отображений

р - различимо, нр - неразличимо

Положим, что  $|X| = n, |Y| = m$ .

$X, Y$	произвольно	инъективно ( $m \geq n$ )	сюръективно ( $n \geq m$ )	биективно ( $n = m$ )
$X, Y$ - р	$m^n$	$\frac{m!}{(m-n)!}$	$m!S(n, m)$	$m!$
$X$ - нр, $Y$ - р	$C_{n+m-1}^n$	$C_m^n$	$C_{n-1}^{m-1}$	1
$X$ - р, $Y$ - нр	$B_n$	1	$S(n, m)$	1
$X, Y$ - нр	$p(n)$	1	1	1