Лекция 10. Преобразования плоскости. Аффинные преобразования.

#вшпи #аналитическая_геометрия #теория

Автор конспекта: Гридчин Михаил

Отображения и преобразования

Вспомним определение биекции

$f : X \to Y : f(x) = y$. y - образ, x - прообраз

Def. Отображение $f : X \to Y$ назовём *преобразованием*, если $X = Y$.

Def. $f : (x, y) \to (x^*, y^*)$. (**В одной и той же системе координат!**) Преобразование плоскости назовём *линейным*, если в некоторой декартовой системе координат оно задаётся формулами линейного вида:

$$\boxed{\begin{cases} x^* = a_1x + b_1y + c_1 \\ y^* = a_2x + b_2y + c_2 \end{cases}} \quad (1)$$

Def. Взаимно однозначное линейное преобразование назовём *аффинным преобразованием*.

Теорема 1. Линейное преобразование аффинное, тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

□
Действительно, чтобы данная система имела единственное решение, по правилу Крамера получаем требуемое.
■

Вопрос. В любой ли декартовой системе координат преобразование задаётся формулами линейного вида? Ответ в теореме.

Теорема. В любой декартовой системе координат линейное преобразование задаётся формулами вида (1)
□
Возьмём систему координат $O, \vec{e}_1, \vec{e}_2$, в которой преобразование линейно. Перейдём в декартову систему координат $O', \vec{e}_1', \vec{e}_2'$.

$$\begin{cases} lx = \alpha_1 x' + \beta_1 y' + \gamma_1 \\ y = \alpha_2 x' + \beta_2 y' + \gamma_2 \end{cases} \quad (2)$$

$(x, y) \to (x_*, y_*)$
$(x', y') \to (x'^*, y'^*)$

$$\begin{cases} lx'^* = \tilde{\alpha}_1 x^* + \tilde{\beta}_1 y^* + \tilde{\gamma}_1 \\ y'^* = \tilde{\alpha}_2 x^* + \tilde{\beta}_2 y^* + \tilde{\gamma}_2 \end{cases} \quad (3)$$

Подставим x^* и y^*
В (3) подставим (1), в полученные формулы подставим (2). Получим, что x'^* и y'^* - это какое-то линейное выражение относительно x' и y'.
■

Note. Базис не зависит от определителя матрицы, поэтому требуемое будет выполнено в любой системе координат.

Рассмотрим композицию преобразований. По доказательству не вызывает сомнения следующая теорема.

Теорема. Произведение линейных преобразований является линейным, произведение аффинных преобразований является аффинным. (Доказательство аналогичное доказательству предыдущей теоремы, для аффинных нужно только вспомнить, что композиция биекций - биекция).

Теорема (об обратных преобразованиях). Преобразование, обратное аффинному, является аффинным.
□
Нужно лишь доказать, что обратное преобразование линейно, а поскольку оно взаимно однозначное, то оно будет являться тогда аффинным. Из (1) первое умножим на b_2, второе умножим на b_1, получим:

$$-\begin{cases} b_2 x^* = a_1 b_2 x + b_1 b_2 y + b_2 c_1 \\ b_1 y^* = b_1 a_2 x + b_1 b_2 y + b_1 c_2 \end{cases}$$

$$x^* b_2 - y^* b_1 = x \underbrace{(a_1 b_2 - a_2 b_1)}_{\neq 0} + c_1 b_2 - c_2 b_1$$

Следовательно, x выражается однозначно через x^* и y^*.
■

Рассмотрим образ вектора при линейном преобразовании. Некоторый жаргонизм: будем рассматривать, куда перейдут две точки вектора и назовём полученный вектор образом вектора

Пусть $M_1(x_1, y_1) \to M_1^*(x_1^*, y_1^*), M_2(x_2, y_2) \to M_2^*(x_2^*, y_2^*)$.
Исходный вектор $M_2 - M_1(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.

$$\begin{cases} x_1^* = a_1x_1 + b_1y_1 + c_1 \\ y_1^* = a_2x_1 + b_2y_1 + c_2 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x_2^* = a_1x_2 + b_1y_2 + c_1 \\ y_2^* = a_2x_2 + b_2y_2 + c_2 \end{cases}$$
$$x_2^* - x_1^* = a_1(x_2 - x_1) + b_1(y_2 - y_1)$$
$$\alpha := x_2 - x_1$$
$$\beta := y_2 - y_1$$

Получим

$$\overrightarrow{M_1M_2}(\alpha, \beta), \quad \overrightarrow{M_1^*M_2^*}(\alpha^*, \beta^*)$$

То есть *не имеет значения, к какой точке приложен вектор*, важна его разность координат x и y.

$$\begin{cases} \alpha^* = a_1\alpha + b_1\beta \\ \beta^* = a_2\alpha + b_2\beta \end{cases}$$

Теорема. Пусть f - линейное преобразование, тогда
$\forall \vec{a}, \vec{b}, \forall k \in R \implies f(\vec{a} + \vec{b}) = f(\vec{a}) + f(\vec{b}), \quad f(k\vec{a}) = kf(\vec{a})$.
□
Доказательство подстановкой. То есть нужно подставить a_x, a_y, b_x, b_y в полученную раньше формулу.
■

Следствие. $f(\alpha a + \beta b) = \alpha f(a) + \beta f(b)$.

Теорема. При линейном преобразовании набор линейно зависимых векторов переходит в набор линейно зависимых векторов.
□
Если векторы линейно зависимы, то

$$\exists \alpha, \beta : \alpha^2 + \beta^2 \implies \alpha a + \beta b = 0 \implies \alpha f(a) + \beta f(b) = 0$$

■

Теорема. При преобразовании ЛНЗ набор переходит в ЛНЗ набор
□
От противного, если бы $\text{ЛНЗ} \to \text{ЛЗ}$, то получили бы, подействовав обратным преобразованием, что $\text{ЛЗ} \to \text{ЛЗ}$ - противоречие.
■

Геометрический смысл коэффициентов для линейных преобразований.

$$\begin{cases} x^* = a_1x + b_1y + c_1 \\ y^* = a_2x + b_2y + c_2 \end{cases}$$

c_1, c_2 - образ начала координат. То есть, если подставить $O(0, 0)$, то получим $O'(c_1, c_2)$
$f(e_1(1, 0)) = (a_1, a_2)$ - по формуле для векторов

$f(e_2(0,1)) = (b_1, b_2)$ - по формуле для векторов

Теорема. $\forall L, M, N$, не лежащих на одной прямой и $\forall L^*, M^*, N^*$ существует единственное линейное преобразование f, такое, что $f(L) = L^*, f(M) = M^*, f(N) = N^*$, при этом если и только если L^*, M^*, N^* не лежат на одной прямой, то f будет аффинным преобразованием. То есть аффинное преобразование задаётся двумя тройками точек.

□

Точки L, M, N не лежат на одной прямой. Рассмотрим ДСК L, LM, LN. Найдём в этой системе координат координаты точки $L^*(c_1, c_2)$ и векторов $L^*M^*(a_1, a_2)$ и $L^*N^*(b_1, b_2)$. Заметим, что преобразование (1) подходит, а другие нет, так как изменятся координаты какой-то из точек.

Аффинное преобразование

$\iff \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \iff (a_1, a_2) \text{ и } (b_1, b_2) - \text{ЛНЗ} \iff L^*, M^*, N^*$ не лежат на одной прямой.

■

До этого во всех теоремах система координат была одна. Сейчас мы также посмотрим на запись одного аффинного преобразования и давайте

$f(M) = M^*$. Пусть при этом была система координат $O, \vec{e}_1, \vec{e}_2$.

Теорема. f - аффинное преобразование. Точка M^* в системе координат $f(O), f(e_1), f(e_2)$ имеет те же координаты, что и точка M в системе координат O, e_1, e_2.

□

Что означает, что точка M имеет координаты (x, y). Это значит, что $OM = xe_1 + ye_2$.

Подействуем преобразованием f на правую и левую части.

$\overrightarrow{f(O)f(M)} = \overrightarrow{O^*M^*} = xf(\vec{e}_1) + yf(\vec{e}_2)$.

■

Геометрические свойства аффинных преобразований

Мы уже получили, что точка переходит в точку

Теорема. При аффинном преобразовании прямая переходит в прямую.

□

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Пусть прямая задана уравнением $r = r_0 + at$. Пусть M принадлежит прямой.

Выразим OM^*:

$$OM^* = OO^* + O^*M^* = OO^* + f(r_0 + at) = OO^* + f(r_0) + tf(a) = m + tf(a)$$

$a \neq 0 \implies f(a) \neq 0$ из взаимной однозначности. Получили уравнение новой прямой.

■

Теорема. Отрезок переходит в отрезок
□
Заметим, что отрезок - это часть прямой с $t \in [t_l, t_r]$, а прямая переходит в прямую.
■

Теорема. Параллельные прямые переходят в параллельные прямые.
□
из взаимной однозначности если бы нашлась общая точка у новых прямых, то преобразование не было бы биективным.
■

Свойство. При аффинном преобразовании отношение длин отрезков, лежащих на параллельных прямых, сохраняется.
□
Если есть пара точек AB и CD, что $AB = \lambda CD$, то $f(AB) = \lambda f(CD)$.
■

Следствие. Сохраняется отношение. То есть если $C \in AB$, то $AC : CB = A^*C^* : C^*B^*$.

Ранее было доказано, что площадь пар-ма на плоскости равна
$S_{\pm}(\vec{p}, \vec{q}) = (p_1q_2 - p_2q_1)S_{\pm}(e_1, e_2)$
$S_{\pm}(p^*, q^*) = S_{\pm}(f(p), f(q)) = (p_1q_2 - p_2q_1)S_{\pm}(f(e_1), f(e_2))$
$S_{\pm}(f(e_1), f(e_2)) = (a_1b_2 - a_2b_1)S_{\pm}(e_1, e_2)$
$\frac{S^*_{\pm}}{S_{\pm}} = a_1b_2 - a_2b_1 = \Delta$

$$\boxed{\frac{S^*_{\pm}}{S_{\pm}} = |\Delta|}$$

Теорема. Линии второго порядка переходят в линии второго порядка.
□
Рассмотрим уравнение в системе координат $f(O), f(e_1), f(e_2)$. По теореме о том, что образ точки имеет такие же координаты, что си прообраз, получаем, что линия второго порядка перешла сама в себя. А значит, линия второго порядка перешла в линию второго порядка. Более того, она переходит в линию второго порядка того же вида и типа.
■

Теорема. Есть две линии второго порядка одного типа, тогда существует афинное преобразование, переводящее одну линию в другую
□
ШАГ 1. Приведём уравнение к каноническому уравнению.
ШАГ 2. Сделаем последовательность аффинных преобразований, чтобы привести, например, эллипс к уравнению $x^2 + y^2 = 1$
ШАГ 3. Аналогично делаем со второй линией. Затем обратное преобразование к аффинному является аффинным. Значит, мы нашли какую-то последовательность преобразований, переводящую одну линию в другую.
■

Def. Преобразование *ортогонально* $\iff \forall A, B \implies |AB| = |f(A)f(B)|$.
$OM(x, y)$

$OM = xe_1 + ye_2 = xOA + yOB$
$O^*M^* = xO^*A^* + yO^*B^*$
$OM^* = OO^* + O^*M^*$
$x^* = x\cos\phi \mp y\sin\phi + c_1$
$y^* = x\sin\phi \pm y\cos\phi + c_2$

Теорема. Любое ортогональное преобразование может быть разложено в композицию параллельного переноса, поворота и, возможно, осевой симметрии.

Теорема. У аффинных преобразований существует пара перпендикулярных направлений, которые после преобразования будут перпендикулярны.

Def. Назовём эти направления *главными парами* аффинного преобразования.

Теорема (о разложении аффинных преобразований). Любое аффинное преобразование может быть представлено в виде композиции ортогональных преобразований и двух сжатий к взаимно перпендикулярным прямым.

Теорема. Множество аффинных преобразований образуют группу.