Семинар к лекции 13.

#вшпи #аисд

Автор конспекта: Гридчин Михаил

Задача 1

Дана последовательность из круглых скобок. Её надо разбить в конкатенацию правильных скобочных последовательностей. Сколько существует таких разбиений? Время: $O(|S|^2)$

Решение. Поддерживаем скобочный баланс. Если в какой-то момент скобочный баланс равен 0, то мы нашли очередную ПСП. Таким образом, мы находим количество таких нулей и ответ - это 2^k, где k - количество нулей скобочного баланса.
Note. Если в какой-то момент скобочный баланс меньше нуля, то ответ - 0.

Время решения - $O(|S|)$.

Задача 2

Есть тетраэдр $ABCD$. Есть муравей в вершине A. Муравей за минуту проползает вдоль ребра. Сколько путей $A \to \ldots \to A$ ровно за k минут? Муравей никогда не стоит на месте.

Решение. Пусть $\mathrm{dp}[i][A]$ - число путей длины i в A. Тогда сумма чисел в матрице

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{k-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Это ответ.

Задача 3

Число $a_1 \ldots a_n$ гладкое, если $\forall i \implies |a_i - a_{i-1}| \leq k$. При этом $n \leq 10^{10^5}$.

Решение. Рассмотрим матрицу A размера 10×10, где $A_{ij} = I(|i-j| \leq k)$. Базовый вектор $v = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. Пусть $\mathrm{dp}[i][j]$ - количество гладких чисел длины i, заканчивающихся на j. Тогда

$dp[i] = A \cdot dp[i-1]$, $dp[i][j] = \sum dp[i-1][l] * I(|l-j| \le k)$. Значит, ответ:

$$\boxed{\sum_{i=0}^{9} (A^{n-1}v)[i]}$$

Задача 4

Найти максимальную клику в графе. Клика - это полный подграф. Или найти количество независимых множеств.

Решение.
Решение за $O(n^2 2^n)$: перебираем все подмножества вершин (2^n) и в тупую перебираем все пары вершин (n^2), проверяя, что никакие две из них не связаны ребром.
Решение за $O(2^n)$: давайте хранить граф, как маску соседей для каждой вершины и за 2^n перебирать все маски.
Для каждой маски возьмём

$$\text{par} := \text{mask} \oplus (1 << \text{first\_bit})$$

Далее нужно проверить, что $\text{dp}[\text{par}] \neq 0$ и $adj[\text{first\_bit}]\&\text{par} = 0$.

Задача 5

черепашка находится в $(0,0)$. При этом умеет ходить вправо, вверх-вправо, вниз-вправо. Черепашка не может опускаться ниже 0. Помимо этого есть отрезки, параллельные OX, каждый из которых задаётся тройкой (x_{1_i}, x_{2_i}, y_i), пересекать каждый из которых черепашка не может, а также не может быть так, чтобы отрезок был ровно под черепашкой. $b_i \le Y, a_n = k$, где a_i - пара (x_1, x_2), ограничивающая очередной отрезок. Найти количество путей из $(0,0)$ в $(k,0)$ за $O(nY^3 \log k)$.

Решение. Какая-то муть, не судите строго.

Задача 6

Вы - агент. У вас n встреч, i-я встреча имеет вид (l_i, r_i, w_i), где w_i - приятность встречи, w_i прибавляется к настроению после прохождения встречи, а (l_i, r_i) - это диапазон приятности, с каким настроением мы готовы пойти на встречу. Найти $\max$ число встреч. То есть нужно выбрать порядок, в котором проводить встречи, чтобы каждая встреча из выбранных была проведена. Время $O(n2^n)$. Изначальное настроение равно 0.

Решение. Заметим, что если мы посетили маску встреч, то мы знаем настроение по прохождении всех встреч. Тогда $\text{dp}[\text{mask}] = \sum_{e \in mask} w_e$. Тогда

$$\text{dp}[\text{mask}|(1 << u)] = \max(\text{dp}[\text{mask}|(1 << u)], (\text{dp}[\text{mask}] + u))$$

$$\text{если } \mathrm{dp}[\mathrm{mask}] \in [l_u, r_u] \text{ и u не лежит в маске}$$

Задача 7

Пусть

$$\mathrm{dp}[\mathrm{mask}] = \sum_{\mathrm{submask} \subset \mathrm{mask}} \mathrm{dp}[\mathrm{submask}]$$

База: $\mathrm{dp}[1 << u] = a_u$. Требуется пересчитать dp максимально оптимально.

Решение. давайте для каждой маски вычтем каждый значащий бит и просуммируем значения dp по всем полученным подмаскам. Их не более n. Асимптотика решения $O(n2^n)$.

Задача 8

На плоскости n пунктов (x_i, y_i). Вы - курьер. Единовременно вы можете нести не более k грузов. Склад находится в точке $(0, 0)$. Требуется доставить все n грузов, так, чтобы суммарное расстояние было минимально (Евклидова метрика).
$n \leq 15, k \leq 5, |x_i|, |y_i| \leq 10^9$.

Решение. *TODO* (асимптотика решения $O(3^n)$).