Лекция 14. Отношения порядка. Диаграмма Хассе. Ориентированные графы.

#вшпи #дискретная_математика #теория

Автор конспекта: Гридчин Михаил

Отношение эквивалентности

Определение

Отношение эквивалентности $x \sim y$, $x \equiv y$ — это бинарный предикат $\sim: M \times M \to \{\text{True}, \text{False}\}$ (другими словами ($\sim$) задаёт подмножество $S_\sim \subseteq M \times M$), удовлетворяющий следующим аксиомам:

1. $x \sim x$ — рефлексивность
2. $x \sim y \iff y \sim x$ — симметричность
3. $x \sim y, y \sim z \implies x \sim z$ — транзитивность

Отношения частичного порядка

Определение

Отношение частичного порядка — это бинарное отношение, которое удовлетворяет следующим аксиомам. Отношение частичного порядка бывает строгое ($\prec$) и нестрогое ($\preccurlyeq$).

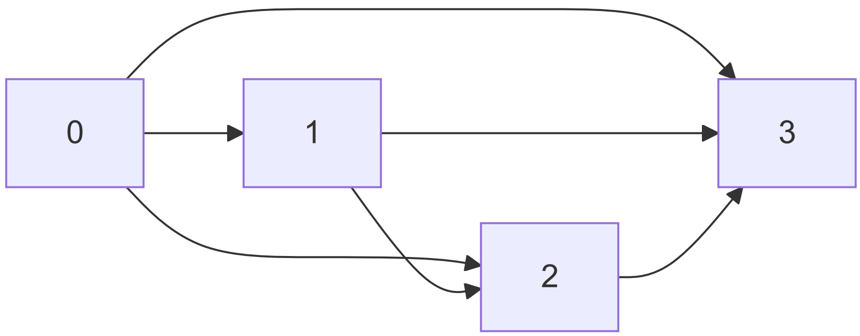
Строгое	**Нестрогое**
1) $x \not\prec x$ — антирефлексивность	1) $x \preccurlyeq x$ — рефлексивность
2) $\forall x, y \Rightarrow ((x \prec y) \land (y \prec x)) = \text{False}$ — антисимметричность	2) $(x \preccurlyeq y) \land (y \preccurlyeq x) \implies x = y$ — антисимметричность
3) $x \prec y, y \prec z \implies x \prec z$ — транзитивность	3) $x \preccurlyeq y, y \preccurlyeq z \implies x \preccurlyeq z$ — транзитивность

Note. Если $\forall x, y : (x \preccurlyeq y) \lor (y \preccurlyeq x)$, то такое отношение частичного порядка называют *линейным порядком*.

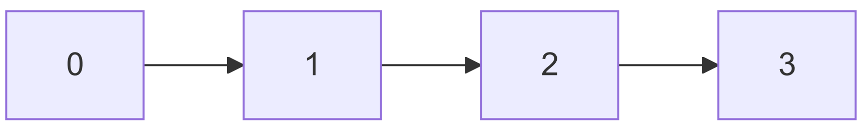
Ориентированный граф частичного порядка. Диаграмма Хассе.

> **Определение**
>
> **Ориентированный граф частичного порядка** $G(V, E)$, $V \leftrightarrow M$
> $(u, v) \in E \iff u \underset{(\preccurlyeq)}{\prec} v$

Пример. Граф частичного порядка для чисел $0, 1, 2, 3$ и порядку над ними из аксиом $\mathbb{N}$:



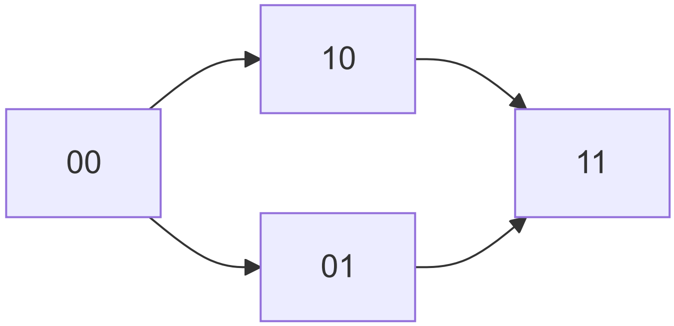
По транзитивности можно было бы оставить



> **Определение (отношение непосредственного следования)**
>
> Пусть дано отношение частичного порядка $(\preccurlyeq)$, $\preccurlyeq_n$. Будем говорить, что y **непосредственно следует** за x, если с одной стороны выполняется $x \preccurlyeq y$ и нет такого z, что $z \neq x, z \neq y$ и $x \preccurlyeq z, z \preccurlyeq y$.

> **Определение**
>
> **Диаграмма Хассе** — это (2 эквивалентных определения):
>
> 1. Граф отношения частичного порядка после транзитивной редукции
> 2. Граф отношения непосредственного следования

Пример (булев кубик порядка 2):



Note. Для нестрогого отношения частичного порядка также есть n петель.

Ориентированные графы

Определение

Между вершинами u и v орграфа G есть отношение **двухсторонней достижимости**, если существует путь (маршрут) $u \rightsquigarrow v$ и путь (маршрут) $v \rightsquigarrow u$.

Упражнение. Покажите, что отношение двусторонней достижимости — это отношение эквивалентности. Доказательство этого факта предлагается провести самостоятельно.

Определение

Классы эквивалентности относительно этого порядка называются **компонентами сильной связности**.

Определение

Ациклический ориентированный граф — это ориентированный граф, в котором нет замкнутых маршрутов положительной длины.

Теорема (эквивалентные определения ациклического орграфа)

Следующие условия эквивалентны (граф без петель):

1. Орграф G ациклический
2. Каждая компонента сильной связности имеет размер 1
3. Существует нумерация вершин такая, что $(u_i, u_j) \in E \Rightarrow i < j$

$\square$
$\boxed{1} \Leftrightarrow \boxed{2}$ почти очевидно
$\boxed{3} \Rightarrow \boxed{1}$
Докажем от противного. Действительно, если бы существовал замкнутый маршрут, то мы бы получили маршрут

$$v_{i_1} \to v_{i_2} \to v_{i_3} \to \ldots \to v_{i_n} = v_{i_1}$$

И при этом

$$i_1 < i_2 < \ldots < i_n = i_1$$

Противоречит антисимметричности и антирефлексивности натуральных чисел
$\boxed{1} \Rightarrow \boxed{3}$
Докажем сначала, что если ориентированный граф ациклический, то в нём есть вершина с нулевой исходящей степенью.

Граф ациклический, значит все пути ограниченной длины. Рассмотрим путь наибольшей длины.

$$v_{i_1} \to v_{i_2} \to \ldots \to v_{i_k}$$

Все v_i различны из ацикличности. Если бы у v_{i_k} исходящая степень была бы не равна нулю, то мы бы могли добавить в этот путь ещё одно ребро и увеличить длину пути.

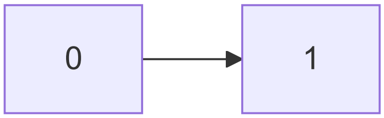
Докажем теперь требуемое по индукции по количеству вершин в графе G.
База. Если $n = 1$, то предположение выполнено.
Шаг. Пусть утверждение выполняется для всех $G(V, E) : |V| \leq n$. Рассмотрим ациклический орграф $G'(V', E') : |V'| = n + 1$. По только что доказанному утверждению в этом графе существует вершина с нулевой исходящей степенью. Сопоставим этой вершине номер $n + 1$ и удалим из рассмотрения. Для оставшегося графа существует требуемая нумерация числами от 1 до n. Что и требовалось доказать.
$\blacksquare$

Note. Граф отношения частичного порядка ациклический, также существует нумерация вершин

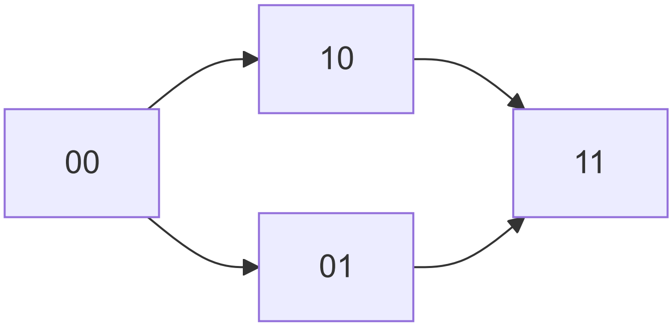
Note. Пусть дано отношение частичного порядка $(M, \prec)$. Рассмотрим граф частичного порядка. Он ациклический. Следовательно, существует нумерация вершин как в условии $\boxed{3}$. Дополним заданное отношение $(\prec)$ до линейного в соответствии с нумерацией и получим линейный порядок на исходном множестве.

Примеры графов частичного порядка

Булев кубик размера 1



Булев кубик размера 2



$a \leq b$ для всех $i \Rightarrow a_i \leq b_i$.

Булев кубик размера 3: