

Лекция 1. Сочетания, размещения, отображения.

#вшпи #дискретная_математика #теория

Автор конспекта: <https://github.com/Ailana06>

Правило произведения

Если необходимо выбрать пару объектов $(a, b) : a \in A, b \in B$

Известно следующее: a можно выбрать из A n способами, а затем b выбрать из B ровно m способами, тогда пару (a, b) можно выбрать $n \cdot m$ способами.

Правило суммы

Пусть дано $A \cap B = \emptyset, |A| = n, |B| = m$

Количество способов выбрать элемент из A или B равно $n + m$.

Def. Перестановка (количество перестановок) — биекция конечного множества на себя.

Возьмем произвольное отображение $f : X \rightarrow Y, |X| = n, |Y| = m$

X - "нумерованные шарики", Y - "нумерованные ящики"

Взять n различных шариков разложить по n различных ящикам по одному в ящик, $n!$ - количество перестановок

Взять n различных шариков разложить по n различных ящикам, n^m - количество перестановок.

Def. Сочетание (количество сочетаний) из n по k - выбор k элементного подмножества из n элементного множества без учёта порядка (без возвращений).

Note. Без учёта порядка, значит: 1, 2, 3 равно 3, 2, 1.

Note. Возвращение: "вытащили шарик посмотрели и положили обратно". Пусть n объектов, будем выбирать по n' штук (иногда $n' = n$).

Обозначение. $C_n^k = \binom{n}{k}$.

Выход формулы $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Выставим в ряд n шариков, будем брать k , а $n - k$ не будем брать,

Note. $C_n^k = C_n^{n-k}$

Def. Размещение - упорядоченный выбор k элементов из n (без возвращений), аккуратно достаём и кладём в рядочек.

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \dots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Пример. $n = \{1, 2, 3, 4\}$, выбор с возвращением набора $4, 1, 4, 2$.

Def. *Размещение с повторениями* — упорядоченный выбор k элементов из n с возвращениями.

Обозначение. $\overline{A_n^k}$ - размещение с повторениям.

Def. *Сочетание с повторениями* — выбор k элементного не упорядоченного набора из n элементного множества.

Пример. Пусть n видов конфет, ровно k конфет в детском подарке, нужно посчитать сколькими способами можно собрать такой подарочек. Возьмём 1-ого вида конфет k_1 , 2-го - k_2 , 3-го - $k_3, \dots, n - k_n$; $k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_n = k$ - представили k как разложение, $k_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Суммы закодируем неразличимыми шариками (белыми и чёрными), k - белых, $n - 1$ - чёрных (перегородок)

***Ответ.** $\overline{C_n^k} = C_{k+(n-1)}^k = C_{k+(n-1)}^{n-1}$

Обозначение. $\overline{C_k^k}$.

Пример. Пусть есть два вида шариков чёрные и белые, m - чёрных и t - белых. Сколькими способами их можно расставить в ряд. Выбираем из $m + t$ мест шарики.

Ответ. C_{m+t}^t

Пусть отображение $f : X \rightarrow Y$.

Определение. *Инъективное отображение* $x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$.

Пример. В ящике (m ящиков) не более 1-го шарика (n шариков), где $n \leq m$. Возьмём первый из шариков и кладём в один из ящиков и так далее, получим

$$m \cdot (m-1) \cdot (m-n+1) = \frac{m!}{(m-n)!} = [m]_n$$

Def. *Сюръективное отображение* $\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y$.

Пример. В терминах шариков и ящиков, значит, что нет пустых ящиков.

Если есть n - белых шариков, n - чёрных шариков и мы их как-то переставляем, предположим, что это $2n$ чисел из них n - чётных и n - не чётных.

Def. *Неразличимые* — такие элементы множества, перестановка которых ни на что не влияет.

Инструменты:

1. Принцип Дирихле: n кроликов рассажены по m клеткам и $m < n$, то хотя бы в одной клетке не менее двух кроликов ($\lceil \frac{n}{m} \rceil$ - округление вверх).

Теорема. Если утверждение зависит от $n \in \mathbb{N}$ и

1. верно для некоторого $n = k_0$ (база)
2. из истинности утверждения для $n = k$, следует истинность для $n = k + 1$ (шаг)
3. то утверждение верно для всех $n \geq k_0$, $n \in \mathbb{N}$

Пример. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Решение.

- **База** $n = 1$ $1^2 = \frac{1 \cdot (1+1)(2+1)}{6}$ - верно
- **Шаг** $n = k$ $1^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ $n = k + 1$ $1^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$
- $\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(2k^2+k+6k+6)}{6} = \frac{(k+1)(2k^2)+4k+3k+k}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$

Таблица-шпаргалка по основным видам отображений

р - различимо, нр - неразличимо

Положим, что $|X| = n$, $|Y| = m$.

X, Y	произвольно	инъективно ($m \geq n$)	сюръективно ($n \geq m$)	биективно ($n = m$)
X, Y - р	m^n	$\frac{m!}{(m-n)!}$	$m!S(n, m)$	$m!$
X - нр, Y - р	C_{n+m-1}^n	C_m^n	C_{n-1}^{m-1}	1
X - р, Y - нр	B_n	1	$S(n, m)$	1
X, Y - нр	$p(n)$	1	1	1