

# Семинар к лекции 9.

#вшпи #аисд #структуры\_данных

Автор конспекта: Гридчин Михаил

Этот конспект является логическим продолжением лекции [Лекция 9. Дерево Фенвика.](#)

## Задача 1

Что умеет дерево Фенвика?

Операция	Может ли?
(+)	да
( $\cdot$ )	необратима относительно 0. Непонятно, см. далее
НОД()	нет, необратим
НОК()	нет, необратим
	нет
&	нет
( $\oplus$ )	да

## Задача 2

Fenwick, операция ( $\cdot$ ):

- $Update(\cdot)$
- $GetProduct([l, r])$

Идея: будем хранить дерево Фенвика на количество нулей на отрезке и обновление в точке.

Теперь, чтобы ответить на запрос  $GetProduct$  будем считать число 0 нейтральным элементом и будем считать, что  $a \cdot 0 = 0 \cdot a = a$ . Тогда если  $GetZeros([l, r]) > 0$ , то ответ 0, иначе  $\frac{GetPrefix([1, r])}{GetPrefix([1, l])}$  и считаем обратное по модулю.

## Задача 3

Fenwick, операция  $getMax$ :

- $Update(delta)$

- $getMax([l, r])$   
не умеем, поскольку  $\max$  - не обратимая операция.  
Попробуем за  $O(\log^2 n)$ .

Нужно ограничение  $\delta \geq 0$  или искать  $\max$  только на префиксе  $[1, r]$ . Тогда точно за  $O(\log n)$  получается. Если же  $\delta < 0$ , то мы можем пересчитать максимум на отрезке длины степени двойки за  $O(\log n)$  через остальные отрезки. Итого асимптотика  $O(\log^2 n)$ .  
На произвольном отрезке  $[l, r]$  искать максимум в дереве Фенвика пока не умеем.

## Задача 4

Fenwick, операция  $+$ :

- $Add(\delta, [l, r])$
- $GetSum([l, r]) = PrefixSum(r) - PrefixSum(l - 1)$

сначала научимся делать  $Get(i)$  в точке. Тогда в разностном массиве ( $diff[i] = a[i] - a[i - 1]$ )  $+$  на отрезке будет  $add(l, \delta), add(r + 1, -\delta)$ . а значение в точке  $get(i) = getPrefix_{diff}(i)$ .

Теперь  $GetSum([l, r])$ . Делать  $push$  сверху вниз не получится, потому что пушить вниз за быстро в дереве Фенвика не умеем.

Рассмотрим массив  $diff$ :

$$diff[i] = a[i] - a[i - 1], \quad a[0] = 0$$

$$a[i] = \sum_{j=1}^i diff[j] \implies$$

$$PrefixSum(r) = \sum_{i=1}^r a_i = \sum_{i=1}^r \left( \underbrace{\sum_{j=1}^i diff[j]}_{\text{индекс 1 встречается } i \text{ раз, индекс 2 встречается } i-1 \text{ и т.д.}} \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^r (r - i + 1) diff[i] = \sum_{i=1}^r \left( \underbrace{r \cdot diff[i]}_{\text{умеем считать}} - (i - 1) \cdot diff[i] \right) =$$

$$= r \sum_{i=1}^r diff[i] - \left( \underbrace{\sum_{i=1}^r ((i - 1) diff[i])}_{\text{построим второго Фенвика на таком массиве}} \right)$$

Заметим, что при обновлении на отрезке что в первом, что во втором Фенвике нужно обновить ровно 2 элемента, так что мы можем считать всё за  $O(\log n)$ . Задача решена.

## Задача 5.

Fenwick 3D, операция (+):

- $Update(x, y, z, \Delta)$
- $GetSum(P_0, P_1)$ , где  $P = (x, y, z)$ .

Хотим выразить через сумму на префиксе  $GetPrefix(x, y, z)$ .

По формуле включений-исключений:

$$\begin{aligned} GetSum(x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2) = & ps(x_2, y_2, z_2) - \\ & -(ps(x_1, y_2, z_2) + ps(x_2, y_1, z_2) + ps(x_2, y_2, z_1)) + \\ & +(ps(x_2, y_1, z_1) + ps(x_1, y_2, z_1) + ps(x_1, y_1, z_2)) - \\ & -ps(x_1, y_1, z_1) \end{aligned}$$

слагаемые, у которых нечётное количество переменных с индексом 2 берём с плюсом, другие с минусом. Всегда получается  $2^d$  слагаемых, где  $d$  - размерность.

## Задача 6 (встречный Фенвик)

Fenwick\*:

- $Update(i, \Delta), \Delta \geq 0$
- $GetMax([l, r])$

Сделаем "развёрнутый Фенвик" наоборот. Пусть к нам приходит запрос на  $[l, r]$ . Сделаем два подъёма по деревьям Фенвика. В обычном дереве будем подниматься от  $r$  к верху, пока отрезки покрывают элементы правее  $l$ , аналогично поднимемся во втором дереве Фенвика от  $l$  к верху, пока отрезки покрывают элементы левее  $r$ . Возьмём максимум из всех значений. Это будет ответом.

**Теорема.** При описанном алгоритме каждый элемент любого исходного отрезка  $[l, r]$  покрывается хотя бы одним из рассмотренных отрезков в каком-то из деревьев.

□ Представим встречное дерево Фенвика  $2^n$  на  $2^n$  и посмотрим на него, как на дерево отрезков ([Лекция 8. Разреженная таблица. Дерево отрезков.](#)). В нём существует отрезок  $[1 \dots 2^n]$ . Оставшуюся часть можно разбить на 2 поддерева, т.е. отрезок  $[1 \dots n]$  разбивается на подотрезки  $[1 \dots \frac{n}{2}]$ ,  $[\frac{n}{2} + 1 \dots n]$ . В итоге получается структура обычного дерева отрезков, для которого известно указанное выше утверждение. ■