Лекция 2. Формулы включения исключения. Биномиальные коэффициенты.

#вшпи #дискретная_математика #теория

Авторы конспекта: https://github.com/Ailana06 и Гридчин Михаил

Пример. A — счётное множество, $2^A = \{s, s \subseteq A\}$ — множество подмножеств A, каждое s можно закодировать последовательностью из 0 и 1, каждой последовательности сопоставим бинарную дробь $s \Leftrightarrow 0110101\ldots \Leftrightarrow 0.0110\ldots \in [0,1]$, таким образом, каждому элементу s сопоставили число и каждому числу s.

Инструменты:

- принцип Дирихле
- математическая индукция
- формула включений-исключений

Формула включений-исключений

Пусть A и B конечные множества, формула включений-исключений:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = (-1)^{1+1} \sum |A_i| + (-1)^{1+2} \sum_{i<j} |A_i \cap B_j|$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Теорема

Для произвольных множеств A, B, C выполнено:

$$C \cap (A \cup B) = (C \cap A) \cup (C \cap B)$$

□
Рассмотрим элемент, который входит в это множество $(A \cup B) \cap C$, он одновременно входит в C и в одно из множеств A или B, может быть в оба. Без ограничения общности он входит в A и C, а значит он входит в $(A \cup C)$.
В обратную сторону. Рассмотрим какой-нибудь элемент из $(B \cap C)$,в такое случае он входит в C, а так же входит в $(A \cup B) \cap C$.
■

Теорема (формула включений-исключений)

Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_N$ - конечные множества. Тогда:

$$|\bigcup_{i=1}^{N} A_i| = \sum_{i=1}^{N} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le N} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le N} |A_i \cap A_j \cap A_k| \ldots$$

То есть

$$\boxed{|\bigcup_{i=1}^{N} A_i| = \sum_{m=1}^{N} (-1)^{m+1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 \ldots < i_m \le N} |\bigcap_{k=1}^{m} A_{i_k}|}$$

□
Докажем по индукции.
База индукции.

$$|A_1 \cup A_2| = (-1)^{1+1} \sum_{1 \le i_1 \le 2} |A_i| + (-1)^{2+1} \sum_{1 \le i < j \le 2} |A_i \cap A_j| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

Шаг. Пусть для $n \le N$ формула выполняется. Рассмотрим два множества:

$$A_{N+1}, \quad B = \bigcup_{i=1}^{N} A_i$$

Очевидно, что поскольку A_{N+1} - это одно число, то $|A_{N+1}| = 1$.
Поскольку для двух множеств выполнено

$$|A_{N+1} \cup B| = |A_{N+1}| + |B| - |A_{N+1} \cap B| \quad (*)$$

По предположению индукции для B выполнено:

$$|B| = |\bigcup_{i=1}^{N} A_i| = \sum_{m=1}^{N} (-1)^{m+1} \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_m \le N} |\bigcap_{k=1}^{m} A_{i_k}|$$

Также из ранее доказанной теоремы пересечение с объединением - это объединение пересечений, то есть

$$A_{N+1} \cap B = A_{N+1} \cap (\bigcup_{i=1}^{N} A_i) = (A_{N+1} \cap A_1) \cup \ldots \cup (A_{N+1} \cap A_N) = \bigcup_{i=1}^{N} (A_i \cap A_{N+1})$$

Это объединение N множеств $C_i = A_i \cap A_{N+1}$. Применим к этому объединению формулу включений-исключений, которую мы уже считаем верной для N множеств по предположению индукции:

$$|B \cap A_{N+1}| = |\bigcup_{i=1}^{N} C_i| = \sum_{m=1}^{N} (-1)^{m+1} \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_m \le N} |\bigcap_{k=1}^{m} C_{i_k}|$$

Но $C_{i_k} = A_{i_k} \cap A_{n+1}$, поэтому:

$$\bigcap_{k=1}^{m} C_{i_k} = \bigcap_{k=1}^{m} (A_{i_k} \cap A_{N+1}) = (\bigcap_{k=1}^{m} A_{i_k}) \cap A_{N+1}$$

Таким образом:

$$|B \cap A_{N+1}| = \sum_{m=1}^{N} (-1)^{m+1} \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_m \le N} |(\bigcap_{k=1}^{m} A_{i_k}) \cap A_{N+1}|$$

Подставим всё в $(*)$:

$$|A_{N+1} \cup B| = |A_{N+1}| + |B| - |B \cap A_{N+1}|$$

$$= \underbrace{\sum_{m=1}^{N} (-1)^{m+1} \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_m \le N} |\bigcap_{k=1}^{m} A_{i_k}|}_{|B|} + |A_{N+1}| - \underbrace{\sum_{m=1}^{N} (-1)^{m+1} \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_m \le N} |(\bigcap_{k=1}^{m} A_{i_k}) \cap A_{n+1}|}_{|B \cap A_{N+1}|}$$

Перепишем последнее слагаемое:

$$-\sum_{m=1}^{N} (-1)^{m+\boxed{1}} (\ldots) = \sum_{m=1}^{N} (-1)^{m+\boxed{2}} (\ldots) = \sum_{m=1}^{N} (-1)^{(m+1)+1} (\ldots)$$

То есть знак стал соответствовать члену порядка $m+1$.

Разобьём итоговую сумму на слагаемые:

Слагаемые без A_{N+1}:
Это просто $|B|$:

$$\sum_{m=1}^{N} (-1)^{m+1} \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_m \le N} |\bigcap_{k=1}^{m} A_{i_k}|$$

Слагаемые, содержащие только A_{N+1}.
Заметим, что это только $|A_{N+1}|$, поскольку в остальных слагаемых помимо A_{N+1} в пересечении присутствует какое-то ещё множество.
Слагаемые, содержащие A_{N+1} и ещё m других множеств:
Они имеют вид:

$$|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_m} \cap A_{N+1}|$$

И входят с коэффициентом $(-1)^{(m+1)+1} = (-1)^{m+2}$. Введём новую переменную: пусть $s = m+1$. Тогда такие слагаемые — это пересечения s множеств, одно из которых — A_{N+1}, а остальные $(s-1)$ выбраны среди первых N множеств.
Все такие слагаемые:

$$\sum_{s=2}^{N+1}(-1)^{s+1}\sum_{i_1<\ldots<i_{s-1}}|\bigcap_{k=1}^{s-1}A_{i_k}\cap A_{N+1}|$$

Объединим всё это и получим требуемое.

$$|B\cup A|=\underbrace{\sum_{m=1}^{N}(-1)^{m+1}\sum_{\substack{\text{подмножества}\\ \text{из первых } N}}|\bigcap A_{i_k}|}_{\text{без } A_{N+1}}+\underbrace{|A_{N+1}|}_{\text{само } A_{N+1}}+\underbrace{\sum_{s=2}^{N+1}(-1)^{s+1}\sum_{i_1<\ldots<i_{s-1}}|\bigcap_{k=1}^{s-1}A_{i_k}\cap A_{N+1}|}_{\text{включают } A_{N+1} \text{ и другие}}$$

Теперь заметим, что все возможные непустые подмножества из $N+1$ множеств можно разделить на два типа:

1. Те, что не содержат A_{N+1} - покрыты первой суммой
2. Те, что содержат A_{N+1} - покрыты второй и третьей суммой.
   Таким образом, вся сумма совпадает с

$$\sum_{m=1}^{N+1}(-1)^{m+1}\sum_{1\le i_1<\ldots<i_m\le N+1}|\bigcap_{k=1}^{m}A_{i_k}|$$

   Что и требовалось доказать.
   ■

Биномиальные и полиномиальные коэффициенты

Теорема (Бином Ньютона)

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^k y^{n-k}$$

Где $C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ — число сочетаний.

■ $(x+y)\cdot(x+y)\cdot\ldots\cdot(x+y)$ - ровно n раз. Давайте пока что когда мы пишем каждое из слагаемых мы не будем менять x и y местами, то есть xyx не будем записываться как x^2y. Тогда при честном перемножении мы будем получать всевозможные цепочки из x и y: $xxyxyy\ldots x$ - всего n штук, таких последовательностей 2^n - вариантов.

Зафиксируем некоторое k, нас интересуют только те у которых k сомножителей x. Наша задача узнать на каком из мест стоит x, из n мест выбрать x на которых x стоят. То есть C_n^k.

Может быть мы можем такими же рассуждениями получить для $(x+y+z)^n$ чего-нибудь. Давайте посмотрим слагаемые $x^{k_1}y^{k_2}z^{k_3}$, $k_1+k_2+k_3=n$. Каждое слагаемые имеет вид $xyzzyzxx\ldots$ - в каждой такой цепочке ровно n элементов. Для того чтобы найти те из них, которые $x^{k_1}y^{k_2}z^{k_3}$ мы сначала выберем k_1 место из всех n на которые поставим x, а потом из оставшихся выберем те на которые поставили y, на все остальные ставим z: $C_n^{k_1}\cdot C_n^{k_2}=\frac{n!}{k_1!k_2!k_3!}$.

В общем виде. Если есть скобка с m переменными $(x_1+x_2+\ldots+x_m)^n$, хотим вычислить коэффициент при $x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdot\ldots\cdot x_m^{k_m}$, при этом $k_1+k_2+\cdots+k_m=n$. Мы каждый раз будем составлять последовательность из m элементов, на каждом из мест стоит один из видов $x: x_1x_3x_2x_5\ldots$. Нас нужно из n мест выбрать k_1 на котором стоит x_1, из оставшихся мест выбрать куда ставить x_2, потом из оставшихся x_3: $C_n^{k_1}\cdot C_{n-k_1}^{k_2}\cdot C_{n-k_1-k_2}^{k_3}\cdot\ldots\cdot C_{n-k_1-k_2-\cdots-k_{m-1}}^{m}=\frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!}$. ■

Другое доказательство.
□ Каждому месту присвоим номер, давайте все их перемешаем и поставим в ряд, то есть $n!$ вариантов выстроим в ряд, просто перестановка чисел от 1 до n: $213547\ 15\ldots$. Первые k_1 счастливчиков, которые оказались в строю, на эти номера мы поставим x_1, следующих k_2 туда поставим x_2, на следующее x_3, ну и так далее. Таким образом по каждой перестановке мы последовательность определим, но тут срабатывает следующее: по перестановке последовательность определяется однозначно, зато каждой последовательности такой, соответствует много перестановок: k_1 - все перемешать, k_2 перемешать, k_3 перемешать и так далее. То есть каждому слагаемому из $(x_1+x_2+\ldots+x_m)^n$ будет соответствовать $k_1!k_2!\ldots k_m!$ - перестановок. А нам нужно взаимно однозначное соответствие, тогда нужно $n!$ поделить на $k_1!k_2!\ldots k_m!$. ■

Пример. $(x_1+x_2+x_3)^4$
Если взять слагаемые $x_1x_2x_3x_2\to 1234$. Давайте переставлять 1234 местами: 4132. $k_1=1$, $k_2=2$, $k_3=1$, первые k_1 будет x_1, эти 13 - x_2, следующие x_3. Для 1234 это будет 1243, а ещё 1423.

Общий вид биномиального коэффициента $C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$.
Общий вид полиномиального коэффициента $\frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!}$

Пример. $(1+x+y)^n$, $n\geq 5$, $x^2y^3\cdot 1^{n-5}$ - коэффициент при разложении сколько будет? Это $\frac{n!}{2!3!(n-5)!}$.

Два приёма обращения с биномиальными коэффициентами.

1. производящие функции

> **Определение**
>
> **Для последовательности $\{a_n\}$ мы можем записать формальный ряд $A(t)=\sum_{i=0}^{\infty}a_it^i$. Представьте себе что нам как-то безумно повезло и мы знаем**

функцию $A(t)$ не только в виде формального ряда, а в виде чего-нибудь. Говорят что $A(t)$ - производящая функция последовательности $\{a_n\}$.

Определение

Финитные последовательности - это когда после какого-то номера всё остальное нули.

Пример. Последовательность $C_n^0 C_n^1 C_n^2 \dots C_n^n, 0, 0, \dots, 0$. Запишем производящую функцию $C_n^0 x^0 + C_n^1 x^1 + \dots + C_n^n x^n + 0 + \dots + 0 = (1+x)^n$. Значит $(1+x)^n$ - это производящая функция для вот этой последовательности.

Пример. $\sum_{n=1}^n C_n^k = 2^n$, подставим 1 в $(1+x)^n$

Пример. $\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k = 0$, подставим -1 в $(1+x)^n$.

Пример. $\sum_{k=0}^n kC_n^k$.
$\left(\sum_{k=0}^n C_n^k x^k\right)' = \sum_{k=0}^n kC_n^k x^{k-1}$
$((1+x)^n)' = n(1+x)^{n-1}$, подставим $x = 1$ и получим $\sum_{k=0}^n kC_n^k = n \cdot 2^{n-1}$

Пример. Блуждание по сетке. Пусть есть робот который умеет делать шаг вверх и шаг в право, он ходит по линиям решётки. Решётка размера $m \times n$. Скольким способами он может найти из точки A (левый нижний угол) в точку B (правый верхний угол).
$C_{m+n}^m = C_{m+n}^n = 1 \cdot C_{m+n-1}^m + 1 \cdot C_{m+n-1}^{m-1}$

Основа треугольника Паскаля $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$

Возьмём на решётки i- ую диагональ, причём $i < m$ и $i < n$. Через каждую такую точку проходит маршрут. Возьмём строку j, причём $j < m$ и $j < n$. Сколькими способами можем дойти из A в c, $m - j$ - по вертикали, $(n - (i - j))$ - по горизонтали. Сколькими способами можем дойти из c в B, j - по вертикали, $(i - j)$ - по горизонтали.

$$C_{m+n}^m = \sum_{j=0}^{i} C_{m+n-i}^{m-j} \cdot C_i^j$$

Вопрос. Почему $(i - j)$?