Лекция 8. Свойства кривых второго порядка

#вшпи #аналитическая_геометрия #теория

Автор конспекта: Гридчин Михаил

Этот конспект сделан из уныния и отчаяния. Сделайте с ним что-нибудь. Пожалуйста.

Эллипс

Определение

Def. Из предыдущей лекции кривая второго порядка называется *эллипсом*, если в какой-то системе координат эта кривая задаётся уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a \geq b > 0$$

Свойства

- Из уравнения напрямую следует, что оно определено для x, y: $|x| \leq a, |y| \leq b \implies$ эллипс - *ограниченная* алгебраическая поверхность.
- Множество решений уравнений *не пустое*, $\forall x \exists y$.
- *Симметрия* относительно осей x и y (если заменить x на $-x$, то значение выражения не изменится - *осевая симметрия* относительно $x = 0$ и аналогично для $y \implies$ *центральная симметрия*)
- Если $a = b \implies$ *окружность* $x^2 + y^2 = a$.
  Пусть далее $a \neq b$. Введём обозначение:

  $$c := \sqrt{a^2 - b^2}$$

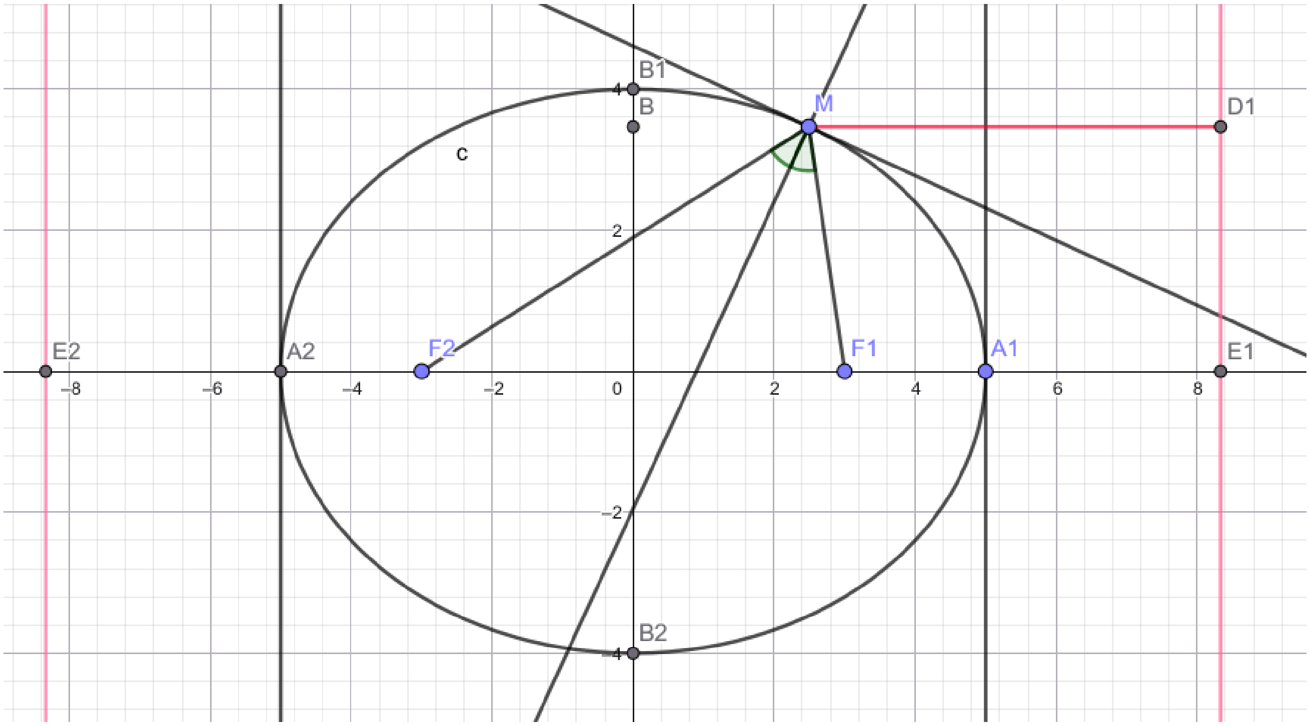
  А также

  $$\epsilon := \frac{c}{a}, \quad \epsilon \text{ - эксцентриситет}, \quad \epsilon = 0 \iff \text{окружность}$$

  Очевидно, $c \geq 0, \quad 0 \leq \epsilon < 1$. Выразим y через x:

  $$y^2 = b^2(1 - \tfrac{x^2}{a^2}) = \tfrac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$
  $$y = \pm\tfrac{b}{a}(a^2 - x^2)$$

  С учётом предыдущих свойств эллипс можно изобразить так:



канонический эллипс.png

(изображён эллипс $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$)

Def. Точки F_1 и F_2 с координатами $(c, 0)$ и $(-c, 0)$ - *фокусы* эллипса
Def. Точки с координатами $(\pm a, 0), (0, \pm b)$ - *вершины* эллипса
Def. Вертикальные прямые с координатами $\pm\frac{a}{\epsilon}$ - *директрисы*.

Найдём ***расстояние от точки $M(x, y)$ до фокусов F_1 и F_2***.

$$MF_1^2 = (x-c)^2 + y^2 = (x-c)^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) = (x-c)^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2$$

$$(c = \epsilon a)$$

$$MF_1^2 = \underbrace{x^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2}_{e^2x^2} - 2x\epsilon a + \underbrace{\epsilon^2 a^2 + b^2}_{a^2} = \epsilon^2 x^2 - 2x\epsilon a + a^2 = (a - \epsilon x)^2$$

Аналогично $MF_2^2 = (a + \epsilon x)^2$. Следовательно, $MF_1 = |a - \epsilon x| = a - \epsilon x$, $MF_2 = |a + \epsilon x| = a + \epsilon x$.
Сумма $\boxed{MF_1 + MF_2 = 2a = const}$.

Найдём ***расстояние от точки M до положительной директрисы***. Оно равно $MD_1 = \frac{a}{\epsilon} - x$. Заметим, что отношение $\frac{MF_1}{MD_1} = \frac{a - \epsilon x}{\frac{a}{\epsilon} - x} = \frac{(a - \epsilon x)\epsilon}{a - \epsilon x} = \epsilon$. Таким образом, $\boxed{\frac{MF_1}{MD_1} = \epsilon}$.
Таким образом, *эллипс* - это геометрическое место точек, отношение расстояния которых от фиксированной точки до фиксированной прямой постоянно и меньше 1.

Уравнение касательной к точке на эллипсе. Пусть дана точка $M(x_0, y_0)$ на эллипсе. Тогда уравнение касательной в точке M к эллипсу равно

$$\boxed{\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1}$$

□ Уравнение касательной задаётся уравнением $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$. Это уравнение не задаёт вертикальную касательную, поэтому проверим отдельно $x_0 = \pm a$. Действительно,

$$\pm \frac{x}{a} = 1 \implies x = \pm a$$

Пусть теперь $x_0 \neq \pm a$. Тогда $y_0 \neq 0$. Продифференцируем по x каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
$$\frac{2x_0}{a^2} + \frac{2y_0 \cdot y'(x_0)}{b^2} = 0$$
$$y'(x_0) = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y_0}$$

Получаем уравнение касательной:

$$y - y_0 = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y_0}(x_0 - x)$$
$$\frac{yy_0 - y^2}{b^2} = \frac{x_0^2 - xx_0}{a^2} \implies \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy0}{b^2} = \underbrace{\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}}_{1\text{, т.к. это канон. элл.}} = 1$$

■

Оптическое свойство эллипса. Все лучи, отправленные из фокуса, придут во второй фокус за одинаковое время (то есть пройденные пути лучей равны).

□ Пусть точка $M(x_0, y_0)$ принадлежит эллипсу. Ранее было показано, что $MF_1 + MF_2 = 2a = const$. Покажем теперь, что угол между MF_1 и нормалью касательной (в точке M), равен углу между MF_2 и нормалью касательной (в точке M). То есть, что луч, выпущенный из одного фокуса, отразившись, придёт в другой фокус. Для этого достаточно показать, что равны косинусы этих углов, потому что оба угла < 90 градусов. Из предыдущего свойства уравнение касательной в точке M равно

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

Поскольку мы работаем уже в ортонормированном базисе в прямоугольной декартовой системе координат, вектор нормали равен $\vec{n}(\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b})$. На этом моменте должен возникнуть логичный вопрос: куда направлен вектор $\vec{n}$? Ответ: не имеет значения, поскольку тогда мы будем работать с тупыми углами до 180 градусов, на которых косинус монотонен. Итак, докажем, что

$$\frac{(\vec{n}, \overrightarrow{MF_1})}{|\vec{n}||MF_1|} = \frac{(\vec{n}, \overrightarrow{MF_2})}{|\vec{n}||MF_2|}$$

$$\frac{(\vec{n}, \overrightarrow{F_1M})}{|\overrightarrow{F_1M}|} = \frac{(\vec{n}, \overrightarrow{F_2M})}{|\overrightarrow{F_2M}|}$$

$$\overrightarrow{F_1M}(x_0 - c, y_0), \quad \overrightarrow{F_2M}(x_0 + c, y_0)$$

$$\vec{n}(\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b})$$

$$\frac{(x_0 - c)\frac{x_0}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}}{a - \epsilon x_0} = \frac{(x_0 + c)\frac{x_0}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}}{a + \epsilon x_0}$$

$$\frac{1 - \epsilon\frac{x_0}{a}}{a - \epsilon x} = \frac{1 + \epsilon\frac{x_0}{a}}{a + \epsilon x_0} = \frac{1}{a}$$

■

Примечание: последнее свойство эллипса используется в аккустике.

Гипербола

Определение

Def. Из предыдущей лекции кривая второго порядка называется *гиперболой*, если в какой-то системе координат эта кривая задаётся уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a, b > 0$$

Свойства

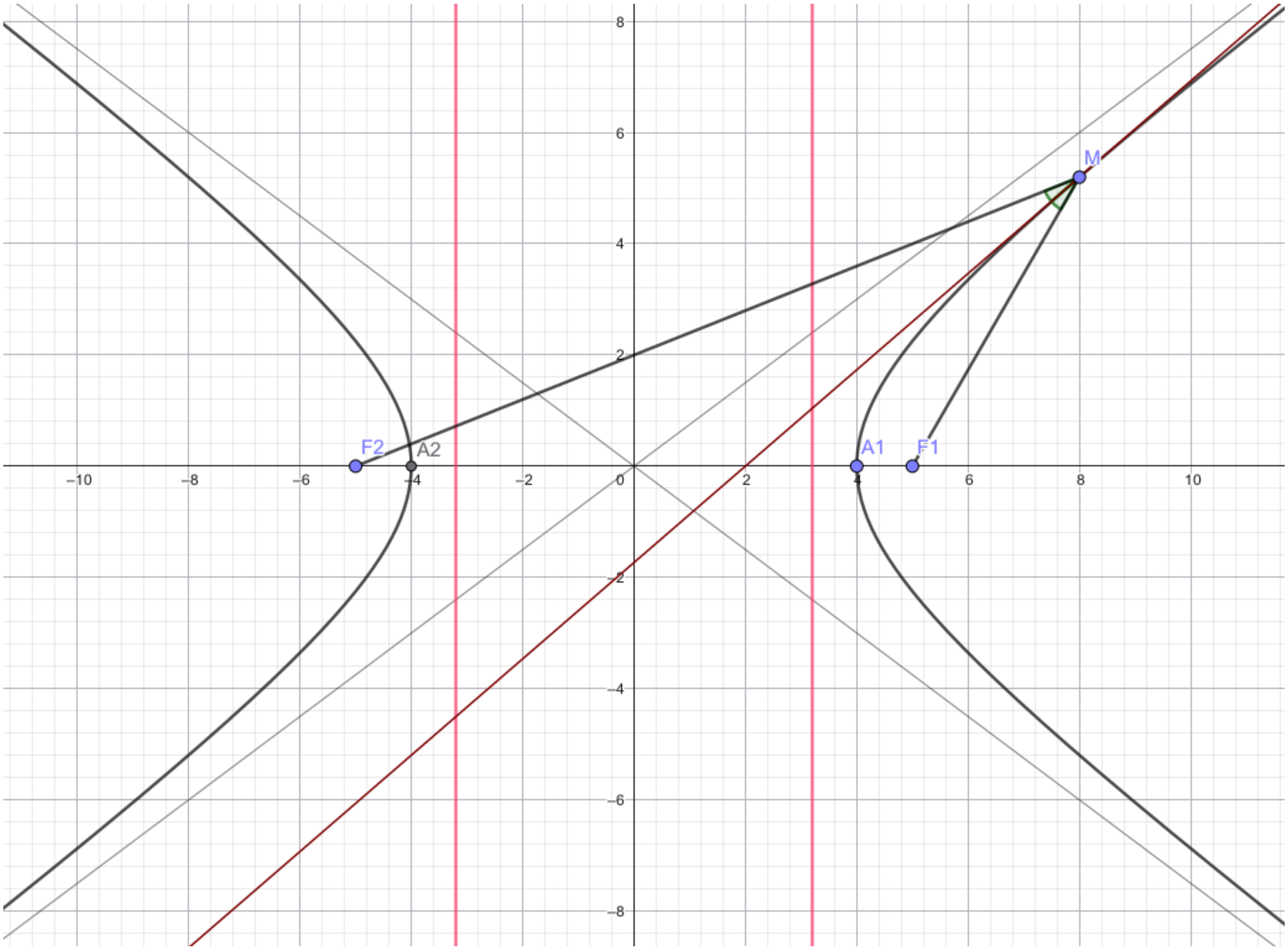
- Из уравнения напрямую следует, что $\forall y \exists x \implies$ гипербола - *неограниченная* алгебраическая поверхность.
- *Симметрия* относительно осей x и y (если заменить x на $-x$, то значение выражения не изменится - *осевая симметрия* относительно $x = 0$ и аналогично для $y \implies$ *центральная симметрия*)
- Функция *определена* только для $x : |x| \geq a$.
- Для данного x выразим $y : y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$.
- Заметим, что $y = \pm\frac{b}{a}x$ - *асимптоты*. Это можно получить, как предел при $x \to \infty$.

Положим c и ϵ как и с эллипсом

$$c := \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{Note: здесь знак "+", а не "-"}$$

$$\epsilon := \frac{c}{a}, \quad \epsilon > 1$$

С учётом предыдущих свойств гиперболу можно изобразить так:



каноническая гипербола.png

(изображена гипербола $\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$)

Def. Точки A_1 и A_2 с координатами $(a, 0)$ и $(-a, 0)$ - *вершины* гиперболы.
Def. Точки F_1 и F_2 с координатами $(c, 0)$ и $(-c, 0)$ - *фокусы* гиперболы.
Def. Вертикальные прямые с координатами $\frac{a}{\epsilon}$ и $-\frac{a}{\epsilon}$ - *директрисы*.

Расстояния от точки $M(x_0, y_0)$ на гиперболе ***до фокусов*** F_1 и F_2 равны:

$$|MF_1| = |a - \epsilon x_0|$$

$$|MF_2| = |a + \epsilon x_0|$$

$$|MF_1 - MF_2| = 2a$$

Доказательство аналогично доказательству свойства для эллипса.

Уравнение касательной к точке на гиперболе. Пусть дана точка $M(x_0, y_0)$ на гиперболе. Тогда уравнение касательной в точке M к гиперболе равно

$$\boxed{\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1}$$

Доказательство аналогично доказательству для эллипса.

Оптическое свойство гиперболы. Для произвольной точки M на гиперболе касательная в точке M делит угол F_1MF_2 пополам. Доказательство аналогично доказательству для эллипса.

Парабола

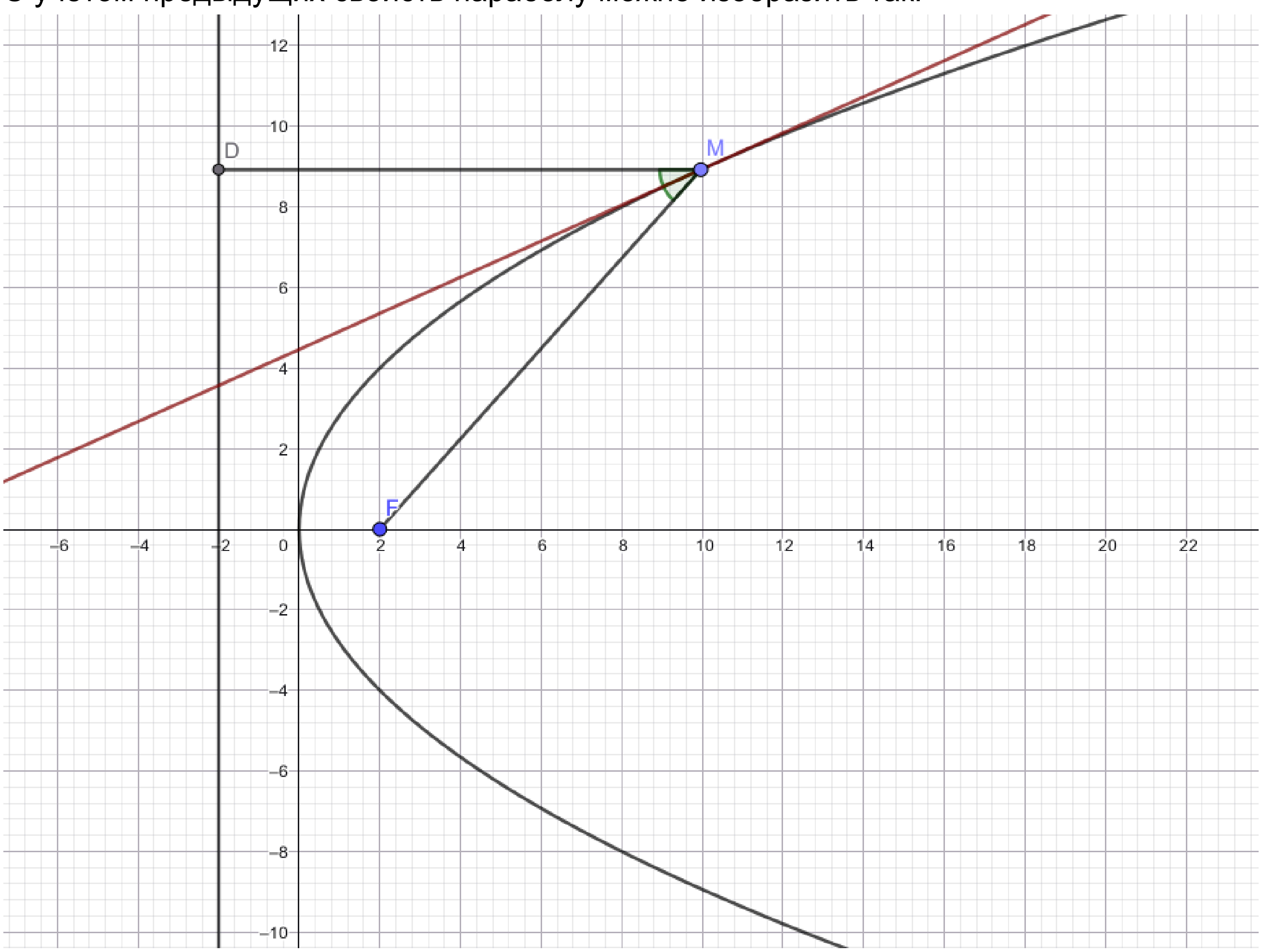
Определение

Def. Из предыдущей лекции кривая второго порядка называется *параболой*, если в какой-то системе координат эта кривая задаётся уравнением

$$y^2 = 2px, \quad p > 0$$

Свойства

- $x \geq 0$
- из уравнения напрямую следует, что $\forall x \geq 0 \exists y \implies$ парабола - *неограниченная* алгебраическая поверхность.
- $y = \pm\sqrt{2px}$
  С учётом предыдущих свойств параболу можно изобразить так:



каноническая парабола.png

(изображена парабола $y^2 = 2 \cdot 4x$)

Def. Точка F с координатами $(\frac{p}{2}, 0)$ - *фокус* параболы
Def. Точка $(0, 0)$ - *вершина* параболы.
Def. Вертикальная прямая с координатой $-\frac{p}{2}$ - *директриса* параболы.

Пусть задана точка $M(x_0, y_0)$ на параболе, тогда:

$$MF = \sqrt{(x_0 - \frac{p}{2})^2 + 2px_0} = \sqrt{x_0^2 + x_0 + \frac{p^2}{4}} = x_0 + \frac{p}{2}$$

$$MD = x_0 + \frac{p}{2}$$

Тогда $MD = MF$. Отсюда *определение*: парабола - это геометрическое место точек, равноудалённых от данной точки и данной прямой.

Оптическое свойство параболы. Выделенные углы равны. То есть касательная в точке M делит угол DMF пополам.