Лекция 3. Рекуррентные соотношения. Числа Стирлинга.

#вшпи #дискретная_математика #теория

Автор конспекта: https://github.com/Ailana06

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ - понятная штука.

В прошлый раз обсуждали треугольник Паскаля: $\begin{array}{c} 1\ 1 \\ 1\ 2\ 1 \\ 1\ 3\ 3\ 1 \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}$

$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$ - отражает свойство треугольника Паскаля, $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Числа Фибоначчи

Последовательность, чтобы получить следующий элемент последовательности нужно сложить два предыдущих:
$0, 1, 1, 2, 3, 5, \ldots$
$F_0, F_1, F_2, \ldots$
$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, у неё порядок 2.

Если есть $\{x_i\}$ $i \in \mathbb{N}$, если $x_{i+k} = x_{n+k-1} \cdot u_1 + x_{n+k-2} \cdot u_2 + \cdots + x_n \cdot u_k$ $(*)$, $u_i \in \mathbb{R}$ - коэффициенты, $u_k \neq 0$. Такое уравнение называется линейное однородное рекуррентное уравнение порядка k.

Пример. $01011\ldots$, n элементов, два "0" не стоят подряд. Назовём последовательность N.

$N_n = N_{n-1} + N_{n-2}$, $N_{n-1} = 1$, $N_{n-2} = 10$. мы уверены что все последовательности и учли каждую один раз.

Характеристическое уравнение для линейного однородного рекуррентного уравнения порядка k.
Характеристический многочлен:
$\lambda^k = u_1\lambda^{k-1} + u_2\lambda^{k-2} + \cdots + u_k\lambda^0$
$X(\lambda) = x^k - u_1\lambda^{k-1} - u_2\lambda^{k-2} - \cdots - u_k$

Утверждение. Если у $X(\lambda)$ есть k различных действительных корней $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, то любая последовательность $\{a_n\}$, удовлетворяющая $(*)$, может быть задана в виде $a_n = \alpha_1\lambda_1^n + \alpha_2\lambda_2^n + \cdots + \alpha_k\lambda_k^n$.

1. Если λ - корень характеристического многочлена, то последовательность $\{b_n\} \cdot b_n = \lambda^n$ удовлетворяет $(*)$.
2. $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ удовлетворяют $(*)$ $c, d \in \mathbb{R}$, то $\{c \cdot a_n + d \cdot b_n\}$ - удовлетворяет $(*)$.
3. Первые k элементов последовательности однозначно задают её всю, при условии что для неё выполняется $(*)$ и могут быть выбраны произвольным образом.
4. $\begin{array}{l} 1, \lambda_1^1, \lambda_1^2, \ldots, \lambda_1^{k-1} \\ 1, \lambda_1^1, \lambda_1^2, \ldots, \lambda_1^{k-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 1, \lambda_k^1, \lambda_k^2, \ldots, \lambda_k^{k-1} \end{array}$, они образуют линейно независимую систему и они образуют базис.
   $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ - этот вектор является линейное комбинацией векторов выше
   $\begin{array}{l} \alpha_1 \cdot (1, \lambda_1^1, \lambda_1^2, \ldots, \lambda_1^{k-1}) \\ \alpha_2 \cdot (1, \lambda_1^1, \lambda_1^2, \ldots, \lambda_1^{k-1}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_k \cdot (1, \lambda_k^1, \lambda_k^2, \ldots, \lambda_k^{k-1}) \end{array}$

Пример. Было $x_{n+2} = 3x_{n+1} + 4x_n$
$\lambda^2 = 3\lambda + 4$, λ - корень
$b_n = \lambda^n$
$\lambda^{n+2} = 3\lambda^{n+1} + 4\lambda^n$

Вернёмся к числам Фибоначчи.

$\lambda^2 = \lambda + 1$
$D = 5$, $\lambda_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
$F_n = \alpha\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$
$0 = F_0 = \alpha + \beta = 0$, $\beta = -\alpha$
$1 = F_1 = \alpha\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + \beta\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = 1$
$\alpha\left(\frac{1-\sqrt{5}-1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1$
$\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$
$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$

Здесь ситуация сложнее: $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$

Числа Стирлинга I рода

Мы ввели
$[x]_n = x(x-1)(x-2)\cdot\ldots\cdot(x-n+1) = \frac{x!}{(x-n)!} = s(n,0) + s(n,1)x + s(n,2)x^2 + \ldots + s(n,n)x^2$

$s(n,k)$ - коэффициент при x^k в $[x]_n$, числа Стирлинга I рода.
$s(n,n) = 1$
$s(n,k) = 0$, при $k > n$
$s(n,0) = 0$
$s(n,1) = (n-1)! \cdot (-1)^{n-1}$

$s(1,1) = 1$
$s(2,1) = s(1,0) - 1 \cdot s(1,1) = -1$, $[x]_2 = x(x-1) = x^2 - x$

$[x]_{n+1} = [x]_n \cdot (x - n)$

$s(n+1,k) = (\ldots + s(n,k-1)x^{k-1} + s(n,k)x^k + \ldots) \cdot (x-n) = s(n,k-1) - n \cdot s(n,k)$

n\k	*0*	*1*	*2*	*3*	
1	*0*	*1*	*0*	*0*	*0*
2	*0*	*-1*	*1*	*0*	*0*
3	*0*			*1*	*0*
4	*0*				*1*

Где можно встретить числа Стирлинга?

Перестановка - биекция. Пусть $\{1, 2, \ldots, n\}$. Тогда
$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & \ldots & \pi_n \end{pmatrix}$ - перестановка, $\pi(3) = \pi_3$

Пример. $\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8 \\ 2\,7\,5\,4\,1\,3\,8\,6 \end{pmatrix} = (1\;2\;7\;8\;6\;3\;5\;1)\,(4)$
$\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 2\,1\,4\,3\,5 \end{pmatrix} = (1,2)\,(3,4)\,(5)$

$|s(n,k)| = c(n,k)$ - количество перестановок из n элементов с k циклами, $c(n,k)$ - не C_n^k.

Числа Стирлинга II рода

Возьмём $|X| = n$, X разбиваем на k непустых подмножеств. Разбиваем, значит,
$B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n = X$, $B_i \cap B_j = \varnothing$, $i \neq j$, $B_i \neq \varnothing$

Note. $B_2 = \{2,3\}$, $B_3 = \{4\}$ и $B_2 = \{4\}$, $B_3 = \{1,3\}$.

Def. Числа Стирлинга II рода - неупорядоченное разбиение n элементного множества на k непустых подмножеств. Обозначение: $S(n,k)$.

$S(n,0) = 0$, $n \geq 1$
$S(0,0) = 1$
$S(n,1) = 1$

Пример. Найти: $S(n+1,k)$
Случай 1. $n+1$ - отдельное подмножество, тогда $S(n,k-1)$
Случай 2. $n+1$ - не отдельное подмножество, тогда $S(n,k) \cdot k$
Итого $S(n+1,k) = S(n,k-1) + S(n,k) \cdot k$.

Обозначение. $P(n, k)$ - разбиение числа на слагаемые.