Лекция 9. Асимптотические направления. Хорда, центр линии второго порядка.

#вшпи #аналитическая_геометрия #теория

Автор конспекта: Гридчин Михаил

Пересечение прямой с линией второго порядка

Запишем ещё раз уравнение линии второго порядка на плоскости:

$$\Gamma := \begin{cases} Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \\ A^2 + B^2 + C^2 > 0 \end{cases}$$

Ранее была доказана теорема о количестве точек пересечения произвольной прямой и линии второго порядка (0, 1, 2 или ∞). Проанализируем подробнее.
Рассмотрим прямую, заданную параметрическим уравнением:

$$l := \begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \, , \quad \vec{a}(\alpha, \beta) \\ \alpha^2 + \beta^2 > 0 \end{cases}$$

Сделаем подстановку x, y в уравнение линии:

$$A(x_0 + \alpha t)^2 + 2B(x_0 + \alpha t)(y_0 + \beta t) + C(y_0 + \beta t)^2 + 2D(x_0 + \alpha t) + 2E(y_0 + \beta t) + F = 0$$

Заметим, что это некоторый многочлен, зависящий от t: $Pt^2 + 2Qt + R = 0$. Понятно, что решениями этого уравнения являются точки, принадлежащие и прямой l и линии Γ.
Найдём значения коэффициентов этого многочлена после раскрытия скобок:

$$\begin{aligned} &P = A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2 \\ &Q = \alpha(Ax_0 + By_0 + D) + \beta(Bx_0 + Cy_0 + E) = x_0(A\alpha + B\beta) + y_0(B\alpha + C\beta) + (D\alpha + E\beta) \\ &R = Ax_0^2 + 2Bx_0y_0 + Cy_0^2 + 2Dx_0 + 2Ey_0 + F \end{aligned}$$

Заметим, что если $P \neq 0$, то решений не больше 2 (квадратное уравнение). Иначе $P = 0$ и уравнение

$$P = A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2 = 0$$

Задаёт или прямую, или тождество, или не имеет решений. То есть имеет не 2 решения.

Note. P зависит от α и β, как $\frac{\alpha}{\beta}$ и не зависит от x_0 и y_0. То есть зависит от направляющего вектора $\vec{a}(\alpha, \beta)$ с точностью до множителя.

Асимптотические направления

Def. *Асимптотическое направление* для линии второго порядка - это направление (α, β), если $P = 0$ и $\alpha^2 + \beta^2 > 0$.

Сколько асимптотических направлений может иметь линия в зависимости от Δ?
(Напоминание: $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$)

Теорема. Если

- $\Delta < 0$, то $\exists\ 2$ асимптотических направления
- $\Delta = 0$, то $\exists\ 1$ асимптотическое направление
- $\Delta > 0$, то $\exists\ 0$ асимптотических направлений

$\square$
Из предыдущих выкладок

$$P = A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2 = 0$$

Разберём два случая
ШАГ 1. Пусть $C \neq 0$. Докажем, что тогда $\alpha \neq 0$. Действительно, если $\alpha = 0$, то, подставляя, получаем:

$$0 + 0 + C\beta^2 = 0$$

Так как $C \neq 0$, то $\beta = 0$. Но тогда $\alpha^2 + \beta^2 = 0$, что противоречит определению асимптотического направления. Тогда $\alpha \neq 0$. Поделим P на α^2:

$$\frac{P}{\alpha^2} = C(\frac{\beta}{\alpha})^2 + 2B(\frac{\beta}{\alpha})^2 + A = 0$$

Получили квадратное уравнение относительно $(\frac{\beta}{\alpha})$. Рассмотрим дискриминант:

$$\frac{D}{4} = B^2 - AC = -\Delta$$

Из этого формулировка теоремы следует напрямую.

ШАГ 2. Пусть $C = 0$. Тогда $\Delta = -B^2$, а также $P = A\alpha^2 + 2B\alpha\beta = \alpha(A\alpha + 2B\beta) = 0$.
Заметим, что если $B = 0 \implies \Delta = 0$, то $A\alpha^2 = 0$. Но тогда:

$$\begin{cases} A^2 + B^2 + C^2 \neq 0 \\ B = 0 \\ C = 0 \end{cases} \implies A \neq 0$$

Но поскольку $A\alpha^2 = 0$, то $\alpha = 0$. Тогда нам подойдёт любое b. Для определённости возьмём 1 А все остальные направления получаются из $(0, 1)$ умножением на константу.

Итого $\Delta = 0$ и одно решение.

Пусть теперь $B \neq 0 \implies \Delta < 0$. Тогда $P = A\alpha^2 + 2B\alpha\beta = 0$ имеет два решения:

$$\left[\begin{array}{l} \alpha = 0 \\ A\alpha + 2B\beta = 0 \implies \beta = -\frac{A\alpha}{2B} \end{array}\right.$$

Итого $\Delta < 0$ и два решения.

■

Утверждение (б/д). Количество асимптотических направлений не меняется при преобразовании и изменении системы координат.

Хорды и их свойства

Def. *Хорда* линии второго порядка - отрезок, концы которого лежат на линии, а остальные точки отрезка на линии не лежат.

Note. А если есть 3 общие точки, то отрезок полностью принадлежит линии второго порядка. (Ранее была доказана теорема о количестве точек пересечения произвольной прямой и линии второго порядка).

Note. Определение можно обобщить на произвольные линии.

Рассмотрим линию второго порядка, у которой существует хорда (эллипс, пара параллельных прямых, гипербола, пара пересекающихся прямых, парабола).

Note. Хорда образуется из пересечения линии второго порядка и линии не асимптотического направления. ($P \neq 0$).

Зафиксируем это направление (α, β). Рассмотрим все хорды с таким направляющим вектором и отметим их середины.

Теорема. Множество середин этих хорд лежит на одной прямой.

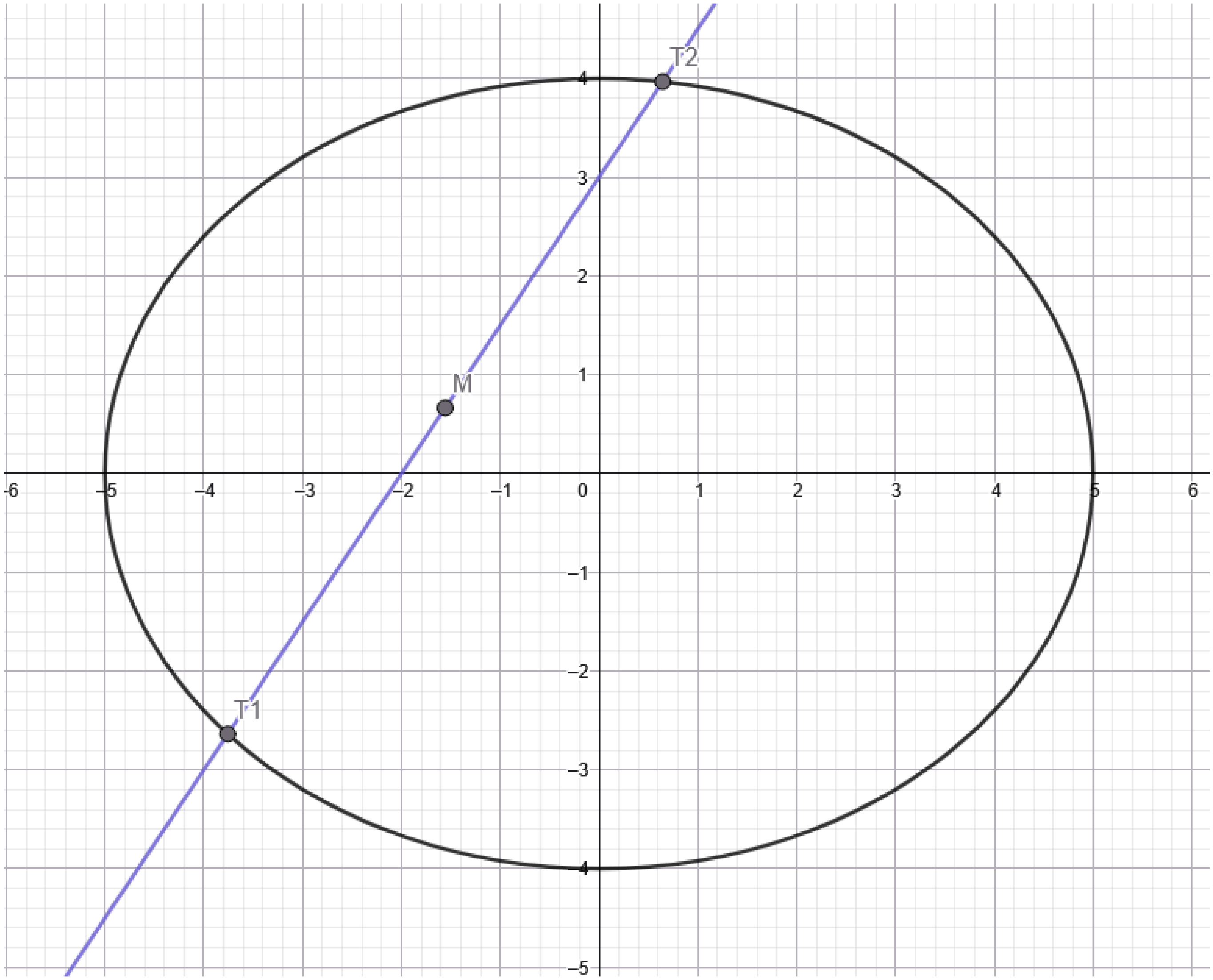
□

Фиксируем направление (α, β). Пусть середина хорды M имеет координаты (x_0, y_0). Тогда прямую, содержащую эту хорду можно задать параметрически:

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases}$$

Пусть хорда пересекает линию в точках T_1 и T_2. Тогда поскольку $|MT_1| = |T_2M|$, то $\overrightarrow{MT_1} = \overrightarrow{T_2M}$. Но тогда если точка T_1 получается подстановкой в уравнение прямой параметра t_T, то точка T_2 получается подстановкой в уравнение прямой параметра $(-t_T)$.

Пример:



середина хорды эллипса.png

(Изображён эллипс $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$ и прямая $3x - 2y + 6 = 0$)

Вспомним то, что писали в самом начале. При подстановке x и y в уравнение линии мы получили многочлен $S(t) = Pt^2 + Qt + R = 0$. В нашем случае $P \neq 0$, а также $S(t) = S(-t)$. Это значит, что $Q = 0$. С другой стороны Q равно:

$$Q = (A\alpha + B\beta)x_0 + (B\alpha + C\beta)y_0 + (D\alpha + E\beta) = 0$$

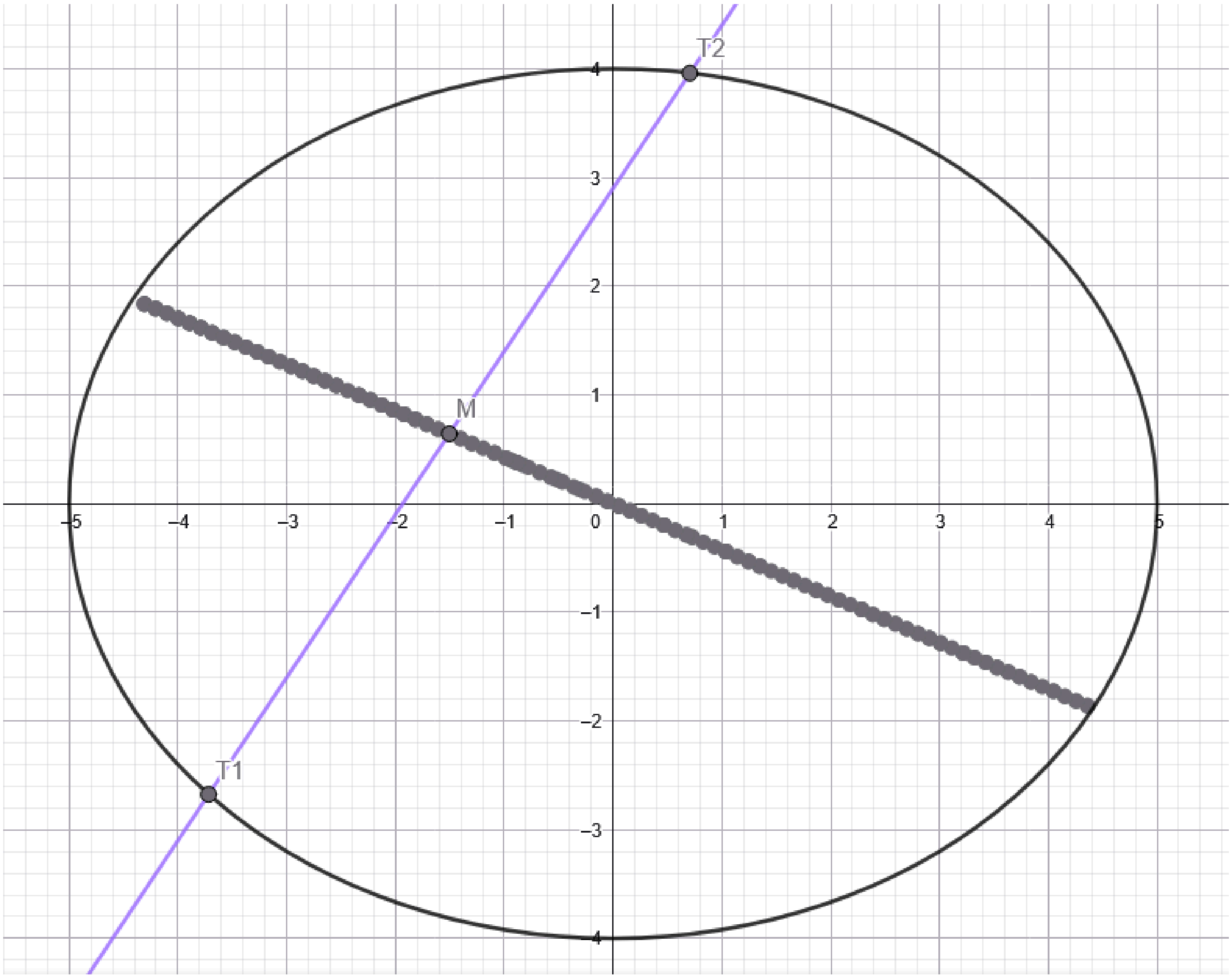
Получили уравнение прямой относительно (x_0, y_0). Докажем, что это именно прямая, а не плоскость (могла бы быть, если бы все коэффициенты были равны 0). Докажем от противного. Действительно, пусть

$$\begin{cases} A\alpha + B\beta = 0 \mid \cdot\alpha \\ B\alpha + C\beta = 0 \mid \cdot\beta \end{cases} \implies -\begin{cases} A\alpha^2 + B\alpha\beta = 0 \\ B\alpha\beta + C\beta^2 = 0 \end{cases} \implies \underbrace{A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2}_{P} = 0 \implies P = 0$$

Получили $P = 0$. Противоречие. То есть все такие пары (x_0, y_0), что $Q = 0$ лежат на прямой. Это и требовалось доказать.

■

Def. Всю эту прямую, на которой лежат середины хорд для фиксированного направляющего вектора (α, β) назовём диаметром линии второго порядка, сопряжённым направлению (α, β)



диаметр эллипса.png

Центр линии второго порядка

Обозначим $\Phi(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$

Def. Точку $O(x_0, y_0)$ назовём центром линии второго порядка, если $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \implies \Phi(x_0 + \alpha, y_0 + \beta) = \Phi(x_0 - \alpha, y_0 - \beta)$.

Получим уравнение центра. Подставим $x = x_0 + \alpha, y = y_0 + \beta$ в $\Phi(x, y)$:

$$A(x_0 + \alpha)^2 + 2B(x_0 + \alpha)(y_0 + \beta) + C(y_0 + \beta)^2 + 2D(x_0 + \alpha) + 2E(y_0 + \beta) + F = \\ = A(x_0 - \alpha)^2 + 2B(x_0 - \alpha)(y_0 - \beta) + C(y_0 - \beta)^2 + 2D(x_0 + \alpha) + 2E(y_0 + \beta) + F$$

Перенесём влево, разделим на 4, сгруппируем и получим:

$$\alpha(Ax_0 + By_0 + D) + \beta(Bx_0 + Cy_0 + E) = 0$$

Поскольку это выполнено $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то верно и в частности для $(1, 0)$ и $(0, 1)$:

$$\boxed{\begin{cases} Ax_0 + By_0 + D = 0 \\ Bx_0 + Cy_0 + E = 0 \end{cases}}$$

Сколько решений у полученного уравнения? Поскольку это система из двух линейных уравнений, то у неё может быть 0, 1 или ∞ решений. Заметим, что поскольку $A^2 + B^2 + C^2 > 0$, то хотя бы одно из уравнений задаёт прямую, значит решение системы - не более, чем прямая. По правилу Крамера система совместна, если $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} \neq 0$. Заметим, что это тот же Δ, что и использовался для классификации линий второго порядка.

Def. Линия назовём *центральной*, если у неё ровно 1 центр.
Из только что полученного центральными линиями являются все линии эллиптического и гиперболического типа, а нецентральными - все линии параболического типа.

Теорема. Пусть линия второго порядка задаёт непустое множество на плоскости и имеет центр. Тогда O - это центр симметрии.
□
Нарисованная на плоскости линия - это все $(x, y) : \Phi(x, y) = 0$. Для центра $O(x_0, y_0)$ выполнено: $\Phi(x_0 + \alpha, y_0 + \beta) = \Phi(x_0 - \alpha, y_0 - \beta) \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Но для нарисованной на плоскости линии верно и более сильное: $\Phi(x_0 + \alpha, y_0 + \beta) = \Phi(x_0 - \alpha, y_0 - \beta) = 0$.
■

Note. Теорема верна и в обратную сторону (б/д).
Note. У эллипса и гиперболы центр - $(0, 0)$ в канонической системе координат.
Note. Центр задаётся функционально. Даже для мнимого эллипса $x^2 + y^2 = -1$ центр - $(0, 0)$.
Note. Чтобы запомнить систему уравнений для нахождения координат эллипса, можно представить это как взятие частной производной сначала по x (получим первое уравнение), потом по y (получим второе уравнение).