Лекция 12. Код Прюфера. Остовные деревья. Теорема Кэли. Эйлеровы и гамильтоновы графы и пути.

#вшпи #дискретная_математика #теория

Автор конспекта: Гридчин Михаил

Код Прюфера

Определение

Пусть дано конечное нумерованное дерево на n вершинах (то есть все вершины пронумерованы и имеют все номера от 1 до n). Кодом Прюфера называется последовательность из $n-2$ чисел (от 1 до n), сопоставленная данному дереву по следующему алгоритму:

1. **Выбрать в дереве лист с наименьшим номером.**
2. **Добавить в последовательность номер вершины, с которой он соединён.**
3. **Удалить из рассмотрения лист вместе с ребром.**
4. **Повторять, пока не останется одно ребро.**

Теорема (б/д)

Декодирование произвольного кода Прюфера существует и единственно. Алгоритм декодирования следующий:
выпишем все номера в список. Первым шагом берём наименьшую по номеру вершину из списка, не присутствующую в коде, соединяем с вершиной под первым номером в коде. Удаляем первый элемент из кода и рассмотренный элемент из списка. Повторяем до тех пор, пока код не опустеет. После этого соединяем два оставшихся элемента.

Теорема

Функция (алгоритм), которая сопоставляет дереву код Прюфера биективна.

$\square$

Докажем биективность в несколько шагов.

Шаг 1. Покажем, что кодирование однозначное, то есть каждому дереву соответствует ровно один код Прюфера. Действительно, из алгоритма не возникает ситуации, когда приходится выбирать одну из нескольких вершин, поскольку все вершины имеют разные номера и выбираются по возрастанию номеров, если на очередном шаге существует несколько листов.

Каждому дереву соответствует ровно один код Прюфера, следовательно, это функция. Обозначим функцию, которая сопоставляет дереву код Прюфера как σ.

Шаг 2. Покажем, что σ сюрьективна. Для этого опишем алгоритм, который последовательности $\{a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}\}, a_i \in 1, 2, \ldots, n, \forall i \in \{1, \ldots, n-2\}$ сопоставляет исходное дерево. Алгоритм декодирования:

1. Выпишем в список все номера от 1 до n по одному разу.
2. Выберем наименьшую по номеру вершину из списка, не присутствующую в коде. Соединим её с вершиной под первым номером в коде.
3. Удалим первый элемент из кода Прюфера и рассмотренную вершину из списка.
4. Повторяем действия 2-3, пока код Прюфера не опустеет.
5. Соединим оставшиеся две вершины в списке ребром.

Почему мы получим исходное дерево после применения этого алгоритма декодирования? Предлагается доказать этот факт по индукции самостоятельно.

Таким образом, σ сюрьективна, поскольку для каждого кода Прюфера мы умеем восстанавливать хотя бы одно дерево, из которого можно получить этот код.

Шаг 3. Докажем инъективность отображения σ из дерева в код по индукции.

> Заметим, что в коде Прюфера каждая вершина встретится ровно $\deg v - 1$ раз (мы записываем вершину ровно столько раз, пока она не станет листом, а это ровно $\deg v - 1$ раз).

Пусть есть два различных дерева $T_1 \neq T_2$. Будем рассматривать $\sigma(T_1)$ и $\sigma(T_2)$.

База. На трёх пронумерованных вершинах существует ровно три различных дерева: в каждом из них одна вершина имеет степень 2 (центр), а две другие — степени 1 (листья). Код Прюфера такого дерева состоит из одного элемента — номера центральной вершины. Поскольку $T_1 \neq T_2$, центры разные, значит, коды разные.

Шаг. Пусть для всех деревьев с количеством вершин не более N утверждение выполнено. То есть из $T_1 \neq T_2$ следует $\sigma(T_1) \neq \sigma(T_2)$. Рассмотрим дерево на $N+1$ вершине. Обозначим наименьший номер листа в T_1 как k_1, наименьший номер листа в T_2 как k_2. Возможны три случая:

1. $k_1 \neq k_2$. Без ограничения общности будем считать, что $k_1 < k_2$. А значит, что вершина с номером k_1 не является листом в T_2 (иначе бы она была выбрана в T_2, поскольку $k_1 < k_2$). Заметим, что $\sigma(T_1)$ не содержит k_1 (так как $\deg k_1 = 1$ в T_1), но код $\sigma(T_2)$ содержит k_1, так как степень вершины $k_1 \geq 2$ в T_2, а значит, она встретится в коде хотя бы один раз. Таким образом, коды различные.
2. $k_1 = k_2 = k$, но смежные с k вершины T_1 и T_2 различны. Тогда $\sigma(T_1) \neq \sigma(T_2)$, поскольку у них отличается первое число (коды Прюфера начинаются с разных чисел).
3. $k_1 = k_2 = k$, смежная вершина с k в T_1 и T_2 одинаковая. Тогда применим один шаг алгоритма. Рассмотрим коды $\sigma(T_1)$ и $\sigma(T_2)$ без первого элемента и T_1 и T_2 без вершины kПрименим предположение индукции и получим $\sigma(T_1) \neq \sigma(T_2)$. Замечание: теперь деревья T_1 и T_2 стали размера N, но числа на вершинах и в коде Прюфера достигают значения $N+1$. Но поскольку в алгоритме нам важно, что между вершинами введён строгий порядок, то это не изменит доказательства.

Таким образом, σ инъективна.

σ инъективна и сюръективна, значит σ биективна.
■

Остовные деревья и теорема Кэли

Определение

Остовное дерево графа G — это подграф, включающий в себя все вершины G и являющийся деревом.

Теорема Кэли (о числе деревьев)

Количество деревьев на n различных (пронумерованных) вершинах равно n^{n-2}.
(Количество остовных деревьев у полного графа на n вершинах равно n^{n-2})

□
Ранее мы доказали, что алгоритм, переводящий дерево в код Прюфера инъективен. Заметим, что мы попутно с этим доказали и теорему Кэли. Действительно, код Прюфера для дерева из n вершин содержит $n - 2$ числа. Каждое из чисел — одно из n номеров вершин дерева. Таким образом, всего возможно n^{n-2} различных кодов Прюфера, следовательно, и различных деревьев.
■

Эйлеровы графы и их свойства

Определение

Граф называется эйлеровым, если существует цикл, проходящий по каждому ребру ровно один раз. При этом граф (связный) / (без изолированных вершин) / (цикл посещает все вершины, но необязательно один раз). Соответствующий цикл называют эйлеровым циклом.

По аналогии вводится понятие **эйлерова пути**.

Теорема

Следующие утверждения эквивалентны:

1. Граф эйлеров.
2. Все степени вершин чётные.
3. Рёбра графа можно разбить на непересекающиеся по рёбрам циклы.

□
$\boxed{1} \Rightarrow \boxed{2}$. Следует из чётности количества рёбер, входящих в путь и смежных с каждой отдельно рассматриваемой вершиной.
$\boxed{2} \Rightarrow \boxed{3}$. Стартуем из произвольной вершины, строим цикл пока он не замкнётся. Следующий шаг всегда можно сделать по чётности степеней. Удалить все рёбра цикла. Повторить.
$\boxed{3} \Rightarrow \boxed{1}$.
Доказательство по индукции по количеству непересекающихся циклов.
База. Если цикл один, то это и есть эйлеров цикл.
Шаг. Пусть для графов, распадающихся на не более n циклов, утверждение верно.

Рассмотрим граф с $n+1$ циклом.
Рассмотрим (и запишем) $n+1$-ый цикл:

$$v_1 e_1 v_2 e_2 \ldots e_{k-1} v_k$$

Удалим его из графа. Новый граф распадается на m компонент связности, для каждой из которых выполнено предположение индукции. Следовательно, для каждой компоненты связности есть эйлеров цикл (рёбра всех циклов разных связности попарно различны). Существует эйлеров цикл, в который входит вершина из $\{v_1, \ldots, v_k\}$, поскольку исходный граф был связным. Возможны несколько случаев:

1. Компонент больше одной. Рассмотрим вершины u и w из разных компонент, связанных в исходном графе путём, следовательно, путь проходил через удалённые рёбра (то есть содержал одно или несколько рёбер из $\{e_1, \ldots, e_{k-1}\}$). Значит, содержал и хотя бы одну из вершин $\{v_1, \ldots, v_k\}$. Рассмотрим первое ребро, выходящее за пределы этой компоненты связности. Оно может соединяться только с вершиной v_i. Для каждой компоненты перечислим цикл, начиная с v_i. Получим цикл, проходящий по каждому ребру ровно один раз.
2. Компонента связности одна, и это эйлеров граф, содержащий все вершины исходного графа.
   ■

Гамильтоновы графы

Определение

Граф называют гамильтоновым, если существует цикл, проходящий по каждой вершине ровно один раз. Соответствующий цикл называют гамильтоновым циклом.

По аналогии вводится понятие **гамильтонова пути**.