# Лекция 7. Алгебраические поверхности. Кривые второго порядка.

#вшпи #теория #аналитическая_геометрия

*Автор конспекта: Гридчин Михаил*

***Def***. Алгебраическая поверхность - это множество точек пространства, которые удовлетворяют уравнению:

$$A_1 x^{\alpha_1} y^{\beta_1} z^{\gamma_1} + A_2 x^{\alpha_2} y^{\beta_2} z^{\gamma_2} + \ldots + A_m x^{\alpha_m} y^{\beta_m} z^{\gamma_m} = 0$$

***Def***. Число $n$ назовём степенью уравнения или порядком алгебраической линии где

$$n := \max_{i=1\ldots m} (\alpha_i + \beta_i + \gamma_i)$$

И называть уравнение поверхностью $n$ порядка или алгебраическим уравнением $n$ порядка

***Def***. $A_1 x^{\alpha_1} y^{\beta_1} + \ldots + A_m x^{\alpha_m} y^{\beta_m} = 0$ - уравнение алгебраической линии на плоскости

***Def***. Число $n$ назовём степенью уравнения алгебраической линии на плоскости и называть эту алгебраическую линию алгебраической линией $n$ порядка, если

$$n := \max_{i=1\ldots m} (\alpha_i + \beta_i)$$

Основные вопросы:

1. $x^2 + y^2 - 1 = 0$ - цилиндр, $x = 0$ - плоскость, $x^2 + y^2 = 0$ - ось $z$ (тоже поверхность), $(x^2 + y^2 - 1)x = 0$ - плоскость $\cup$ цилиндр. $\implies$ не до конца понятно, что собой представляет сама поверхность
2. $\left.\begin{array}{r} x = 0 \\ x^2 = 0 \\ x^3 = 0 \\ \ldots \end{array}\right\}$ с нашей точки зрения это разные алгебраические уравнения и разные поверхности
3. Главный вопрос: может ли быть так, что в одной системе координат уравнение одной и той же поверхности имеет один порядок, а в другой системе координат другой?

***Теорема***. Алгебраическое уравнение не меняет свой порядок при переходе между системами координат.

☐ Пусть даны два базиса: $O, (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ и $O', (\vec{e'_1}, \vec{e'_2}, \vec{e'_3})$. Пусть дано алгебраическое уравнение в первой системе координат

$$p := A_1 x^{\alpha_1} y^{\beta_1} z^{\gamma_1} + \ldots + A_m x^{\alpha_m} y^{\beta_m} z^{\gamma_m} = 0 \quad (*)$$

Пусть координаты $x$, $y$ выражаются через $x'$ и $y'$ как

$$\begin{cases} x = a_1 x' + b_1 y' + c_1 z' + d_1 \\ y = a_2 x' + b_2 y' + c_2 z' + d_2 \\ z = a_3 x' + b_2 y' + c_3 z' + d_3 \end{cases} \quad (**)$$

Подставим $x, y, z$ из этой системы в $(*)$ $(p' :=)$, получим, что $\forall x^{\tilde{\alpha}}, y^{\tilde{\beta}}, z^{\tilde{\gamma}} \to \tilde{\alpha} + \tilde{\beta} + \tilde{\gamma} \leq \max(\alpha + \beta + \gamma) \implies$ степень увеличиться не может $\implies$ порядок уменьшится не может $\implies$ порядок $p \to p' : p' \leq p$. Докажем в обратную сторону, что порядок $p' \to p : p \leq p'$. Действительно, выразим $x', y', z'$ из системы $(**)$ и подставим их в $(*)$. Аналогичными рассуждениями получим, что степень увеличиться не может. В итоге получили

$$\begin{cases} p' \leq p \\ p \leq p' \end{cases} \implies p = p'$$

Заметим, что это и требовалось доказать. ■

***Теорема***. Поверхность $n$ порядка и прямая могут иметь $0, 1, 2, \ldots, n$ или бесконечно много общих точек. Если выполнено последнее, то прямая целиком лежит в поверхности

☐ Пусть дана прямая $l$, зададим её параметрически:

$$l := \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases}$$

И пусть дана поверхность, заданная алгебраическим уравнением $p := A_1 x^{\alpha_1} y^{\beta_1} z^{\gamma_1} + \ldots + A_m x^{\alpha_m} y^{\beta_m} z^{\gamma_m} = 0$. Подставим $x, y, z$ в уравнение поверхности. Получим, что после подстановки каждое слагаемое - многочлен, зависящий от $t$ степени $\leq n \implies$ всё выражение степени $\leq n$. Если в этом многочлене есть ненулевые слагаемые, то корней $\leq n$, иначе получим тождество $0 = 0$, тогда все точки поверхности лежат на этой прямой. ■

***Замечание***. Не может быть, что многочлен $P(x) = 0$ имеет бесконечно много решений, но не всю числовую прямую.

Рассмотрим уравнение линии $2$ порядка на плоскости:

$$\begin{cases} Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \\ A^2 + B^2 + C^2 > 0 \end{cases} \quad (\times)$$

Рассмотрим это уравнение в прямоугольной декартовой системе координат с ортонормированным базисом. Далее будем пользоваться преобразованиями плоскости, меняя систему координат, для того, чтобы получить каноническое уравнение и каноническую систему координат.

***Теорема***. $\forall$ уравнения линии $2$ порядка всегда можно так выбрать прямоугольную декартову систему координат, что эта линия будет иметь одно из следующих $9$ уравнений. Введём обозначение

$$\Delta := \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$$

***Замечание***: коэффициенты $2$ нужны для того, чтобы упростить выкладки.
Тогда

| $\Delta > 0$ | $\Delta < 0$ | $\Delta = 0$ |
|---|---|---|
| Линии эллиптического типа | Линии гиперболического типа | Линии параболического типа |
| Эллипс: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a \geq b > 0$ | Гипербола: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a, b > 0$ | Парабола: $y^2 = 2px, \quad p > 0$ |
| Мнимый эллипс: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1, \quad a, b \neq 0$ | Пара пересекающихся прямых: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0, \quad a, b > 0$ | Пара параллельных прямых: $y^2 = a^2, \quad a > 0$ |
| Вырожденный эллипс: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0, \quad a, b \neq 0$ | | Пара мнимых параллельных прямых: $y^2 = -a^2, \quad a > 0$ |
| | | Пара совпадающих прямых: $y^2 = 0$ |

Все эти уравнения называются каноническими уравнениями кривых второго порядка.

□ Будем работать с $(\times)$.

*ШАГ 1*. Сделаем так, чтобы $B \geq 0, \quad A \geq C$. Для этого заметим, что если $B < 0$, то домножим $(\times)$ на $(-1)$. Что произойдёт с $\Delta$? Поскольку $\Delta := AC - B^2$, то $\Delta$ знака не поменяет. По ходу доказательства будем постоянно следить за тем, чтобы при совершении операций знак $\Delta$ не менялся, и чтобы $\Delta$ не стало равно $0$ или наоборот перестало быть $0$. Теперь, когда $B \geq 0$, сделаем $A \geq C$. Если это ещё не так, то поменяем переменные $x$ и $y$ местами так, чтобы стало $A \geq C$. Знак $\Delta$ также не изменится.

*Замечание*. Оба применённых действия - осевая симметрия.

*ШАГ 2*. Обнулим коэффициент $B$. Покажем, что существует такой угол $\phi$, при повороте на который $B$ обнуляется. Запишем правило поворота ПДСК с ОНБ из $x, y$ в $x', y'$:

$$\begin{cases} x = x'\cos\phi - y'\sin\phi \\ y = x'\sin\phi + y'\cos\phi \end{cases}$$

При подстановке $x', y'$ в $(\times)$ получим новые коэффициенты $A', B', C'$:

$$\begin{aligned} A' &= A\cos^2\phi + 2B\sin\phi\cos\phi + C\sin^2\phi \\ 2B' &= -2A\sin\phi\cos\phi + 2B(\cos^2\phi - \sin^2\phi) + 2C\sin\phi\cos\phi \quad (*) \\ C' &= A\sin^2\phi - 2B\sin\phi\cos\phi + C\cos^2\phi \end{aligned}$$

Заметим два факта. Первый: $\Delta = \Delta'$. Второй: $A' + C' = A + C$
Докажем первый:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A' & B' \\ B' & C' \end{vmatrix}$$

Обозначим

- $c := \cos\phi$
- $s := \sin\phi$
  Рассмотрим $A'C' - B'^2$. Имеем:

  $$\begin{aligned} A' &= Ac^2 + 2Bsc + Cs^2 \\ C' &= As^2 - 2Bsc + Cc^2 \\ B' &= -Asc + B(c^2 - s^2) + Csc \end{aligned}$$

  Получаем:

  $$\begin{gathered} A'C' = (Ac^2 + 2Bsc + Cs^2)(As^2 - 2Bsc + Cc^2) \\ A'C' = A^2c^2s^2 - 2ABc^3s + ACc^4 + 2ABs^3c - 4B^2s^2c^2 + 2BCsc^3 + ACs^4 - 2BCs^3c + C^2s^2c^2 \\ B'^2 = \left[B(c^2 - s^2) + sc(C - A)\right]^2 = B^2(c^2 - s^2)^2 + 2B(c^2 - s^2)sc(C - A) + s^2c^2(C - A)^2 \\ B'^2 = B^2(c^4 - 2c^2s^2 + s^4) + 2Bsc(C - A)(c^2 - s^2) + s^2c^2(C^2 - 2AC + A^2) \\ A'C' - B'^2 = AC(c^4 + s^4 + 2c^2s^2) - B^2(c^4 + s^4 - 2c^2s^2 + 4c^2s^2) \\ c^4 + s^4 + 2c^2s^2 = (c^2 + s^2)^2 = 1 \\ A'C' - B'^2 = AC - B^2 \end{gathered}$$

  Покажем, что $A' + C' = A + C$. Действительно,

  $$\begin{gathered} A' + C' = Ac^2 + 2Bsc + Cs^2 + As^2 - 2Bsc + Cc^2 \\ A' + C' = A(c^2 + s^2) + C(s^2 + c^2) = A + C \\ A' + C' = A + C \end{gathered}$$

  Мы хотим обнулить $B'$, т.е. (см $(*)$)

$$2B' = 0$$
$$2B\cos 2\phi + (C - A)\sin 2\phi = 0$$

Либо $A = C$, тогда $2B\cos 2\phi = 0 \implies \cos 2\phi = 0$ и мы нашли нужный $\phi$.
Либо $A \neq C$, тогда поскольку $\cos 2\phi$ и $\sin 2\phi$ не могут быть равны $0$ одновременно, поделим обе части на неравное нулю. Без ограничения общности пусть это будет $\cos 2\phi$:

$$2B + (C - A)tg2\phi = 0$$
$$tg2\phi = \tfrac{2B}{A-C} \implies \text{необходимое } \phi \text{ найдётся}$$

Заметим, что можно взять $\phi$, а можно $\phi + \frac{\pi}{2}$. От этого значение не изменится $\implies$ можно сделать поворот на углы, отличающиеся на $\frac{\pi}{2}$.

*Замечание*. Мы применили поворот относительно центра координат и доказали, что при этом $\Delta$ не меняет знак.

*ШАГ 3*. Пусть мы достигли уравнения

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad (B = 0)$$

Рассмотрим $\Delta$ и $A + C$. Возможны два случая ($B = 0$):

$$\Delta > 0 \implies A \neq 0, C \neq 0 \quad (AC > 0)$$
$$\Delta < 0 \implies A \neq 0, C \neq 0 \quad (AC < 0)$$

*ШАГ 3.1*. Пусть $\Delta \neq 0$. Выделим полный квадрат относительно х

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = A(x^2 + 2\tfrac{D}{A}x + (\tfrac{D}{A})^2 - (\tfrac{D}{A})^2) + Cy^2 + 2Ey + F =$$
$$= A(x + \tfrac{D}{A})^2 + Cy^2 + 2Ey + F - \tfrac{D^2}{A^2}$$

Сделаем параллельный перенос $x' = x + \frac{D}{A}$, получим

$$Ax'^2 + Cy^2 + 2Ey + F - \frac{D^2}{A^2} = Ax'^2 + Cy^2 + 2Ey + F' \quad (F' := F - \frac{D^2}{A^2})$$

Аналогично выделяем полный квадрат для $y$ и получаем новое уравнение

$$A'x'^2 + B'y'^2 = m \quad (*)$$

В зависимости от $\Delta > 0$ или $\Delta < 0$ - эллиптический или гиперболический тип, подставим, используя:

$$A'x'^2 = \tfrac{x'^2}{signA(\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{|A'|}}})^2}$$
$$B'x'^2 = \tfrac{x'^2}{signB(\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{|B'|}}})^2}$$

В $(*)$ и получим необходимое.

*ШАГ 3.2*. Пусть

$$\Delta = 0 \implies AC = 0 \implies Ax^2 = 0 \implies \left[\begin{aligned} Ax^2 = 0 \\ Cy^2 = 0 \end{aligned}\right.$$

Рассмотрим случай $Ax^2 = 0$, случай $Cy^2 = 0$ доказывается аналогично. Применим выделение полного квадрата, как в шаге 3.1 и сделаем параллельный перенос. Получим:

$$C'y'^2 + D'x + F' = 0$$

Подставим

$$a := -\tfrac{C'}{D'}, \quad b := -\tfrac{F'}{D'}$$
$$x = ay^2 + b$$
$$y^2 = \tfrac{1}{a}(x - b)$$

Получим требуемое ■