Преобразование алгебраической линии второго порядка к каноническому уравнению

#вшпи #аналитическая_геометрия #теория

Автор конспекта: Гридчин Михаил

Этот конспект является следствием из конспекта [Лекция 7. Алгебраические поверхности. Кривые второго порядка.]

Пусть мы имеем линию второго порядка, заданную уравнением

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

Для того, чтобы привести эту линию к каноническому уравнению существует следующий алгоритм действий:

Проверяем центральность линии

Обозначим

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$$

Если $\delta \neq 0$, то линия центральная и нужно сдвинуть начало координат в центр линии. Для этого решаем систему уравнений

$$\begin{cases} Ax_0 + By_0 + D = 0 \\ Bx_0 + Cy_0 + E = 0 \end{cases}$$

Замечание: уравнения получаются дифференцированием уравнения по y и по x соответственно, считая оставшуюся переменную константой

Далее получаем матрицу перехода

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

Подставляем x и y с учётом этой матрицы перехода. Если всё сделали правильно, то пропадут члены $2Dx$ и $2Ey$.

Делаем поворот системы координат

По формуле поворота системы координат получаем

$$\begin{cases} x' = x'' \cos\phi - y'' \sin\phi \\ y' = x'' \sin\phi + y'' \cos\phi \end{cases}$$

Откуда следует, что $tg2\phi = \frac{2B}{A-C}, A \neq C$. Если $A = C$, то
$\cos 2\phi = 0 \implies \phi = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.
Подставляем ϕ, подставляем x' и y' через x'' и y'' и получаем уравнение без члена $2Bxy$.

Если линия не центральная, делаем сдвиг

Выделяем полный квадрат с x' и y', чтобы избавиться от $2Dx'$ и $2Ey'$, получаем уравнение

$$A(x' - x_1)^2 + B(y' - y_1)^2 - F' = 0$$

Делаем замену

$$\begin{cases} x'' = x' - x_1 \\ y'' = y' - y_1 \end{cases}$$

Получаем уравнение $B(y'')^2 + A(x'')^2 - F' = 0$, делаем замену $A(x''')^2 = A((x'')^2 - \frac{F'}{A})$.
Получаем уравнение параболического типа.