Obliczenia naukowe - lab 4

Jakub Musiał 268442

Grudzień 2023

Zadania 1-4: Biblioteka

Problem

Zaimplementować bibiliotekę służącą do wizualizacji interpolacji wielomianowej.

Rozwiązanie

Implementacja biblioteki: `interpolation.jl`
Program testujący: `interpolation_test.jl`

Zadanie 1: Ilorazy różnicowe

Dla danych węzłów $x_i, x_{i+1}, ..., x_j$ oraz znanych dla nich wartości funkcji f definiujemy rekurencyjnie iloraz różnicowy $f[x_i, x_{i+1}, ..., x_j]$:

$$\begin{cases} f[x_i] \leftarrow f(x_i) \\ f[x_i, ..., x_j] \leftarrow \frac{f[x_{i+1}, ..., x_j] - f[x_i, ..., x_{j-1}]}{x_j - x_i} \end{cases} \tag{1}$$

Dla tak zdefiniowanych ilorazów różnicowych funckja powinna zwracać wektor zawierający ilorazy różnicowe $f[x_0], ..., f[x_0, ..., x_n]$ na podstawie zadanych węzłów $x = (x_0, ..., x_n)$ oraz wartości funkcji f w tych węzłach.
Algorytm wyznaczający wektor ilorazów różnicowych opiera się na opisanym powyżej wzorze rekurencyjnym. Żeby jednak uniknąć używania tablicy 2-wymiarowej możemy go zmodyfikować tak, żeby odpowiednio aktualizować wartości ilorazów różnicowych na podstawie wartości wyliczonych w poprzednich iteracjach. Wiemy, że $f[x_0] = f(x_0)$, więc możemy pominąć wyliczanie tej wartości. Pozostałe wartości aktualizujemy, licząc kolejne wartości $f[x_i, ..., x_j]$ wg. schematu:

$$\begin{array}{ccccccc}
f[x_0] & & & & & & \\
& \searrow & & & & & \\
f[x_1] & \rightarrow & f[x_0, x_1] & & & & \\
& \searrow & & \searrow & & & \\
f[x_2] & \rightarrow & f[x_1, x_2] & \rightarrow & f[x_0, x_1, x_2] & & \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\
f[x_n] & \rightarrow & f[x_{n-1}, x_n] & \rightarrow & \dots & \rightarrow & f[x_0, ..., x_n]
\end{array}$$

Algorithm 1 Ilorazy różnicowe

Require: x, f

1: $n \leftarrow length(x)$
2: $\mathrm{fx} \leftarrow f$
3: **for** $i \leftarrow 2$ to n **do** $\triangleright$ $f[x_0] = f(x_0)$: wykonane podczas kopiowania (linia 2)
4:     **for** $j \leftarrow n-1$ down to 1 **do**
5:         $\mathrm{fx}[j] = (\mathrm{fx}[j] - \mathrm{fx}[j-1])/(x[j] - x[j-i+1])$
6: **return** fx

Zadanie 2: Wartość wielomianu interpolacyjnego w postaci Newtona

Funkcja powinna obliczać wartość wielomianu interpolacyjnego w postaci Newtona w czasie liniowym dla zadanej zadanego wektora węzłów $x = (x_0, ..., x_n)$ oraz wektora ilorazów różnicowych $\mathrm{fx} = (f[x_0], ..., f[x_0, ...x_n])$ w punkcie t.
Wartość wielomianu w postaci Newtona w punkcie t jest równa $N_n(t) = \sum_{i=0}^{n}(q_i \cdot \prod_{j=0}^{i-1}(t - x_i))$, gdzie $q_i = f[x_0, ..., x_i]$. Zatem aby ją wyznaczyć możemy wykorzystać uogólniony schemat Hornera:

$$w_n(x) = q_n$$

$$w_i(x) = q_i + (x - x_i) + w_{i+1}(x)$$

Skąd otrzymujemy oczekiwany wynik $N_n(t) = w_0(t)$.

Algorithm 2 Wartość w postaci Newtona

Require: x, fx, t

1: $n \leftarrow length(x)$
2: $\mathrm{nt} \leftarrow \mathrm{fx}[n]$
3: **for** $i \leftarrow n-1$ down to 1 **do**
4:     $\mathrm{nt} \leftarrow \mathrm{fx}[i] + (t - x[i]) * \mathrm{nt}$
5: **return** nt

Zadanie 3: Postać naturalna wielomianu

Na podstawie zadanego wektora węzłów $x = (x_0, ..., x_n)$ oraz wektora ilorazów różnicowych $\mathrm{fx} = (f[x_0], ..., f[x_0, ...x_n])$ funkcja powinna w czasie kwadratowym zwracać wektor $a = (a_0, ..., a_n)$ współczynników wielomianiu w postaci naturalnej:

$$w(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i$$

Wiedząc, że $a_n = f[x_0, ..., x_n]$, możemy wyznaczyć wektor współczynników a, wykonując przejścia odwrotne do tych w schemacie Hornera i tym samym wyznaczając w i-tej iteracji współczynnik przy wyrazie x^i.

Algorithm 3 Postać naturalna

Require: x, fx

$n \leftarrow length(x)$
$a \leftarrow zeros(n)$
for $i \leftarrow n-1$ down to 1 **do**
    $a[i] \leftarrow \mathrm{fx}[i] - x[i] \cdot a[i+1]$
    for $j \leftarrow i+1$ to $n-1$ **do**
        $a[j] \leftarrow a[j] - x[i] \cdot a[j+1]$
return a

Zadanie 4: Wizualizacja interpolacji

Funkcja powinna zinterpolować zadaną funkcję f wielomianem stopnia n na podstawie węzłów z przedziału $[a, b]$ oraz wykonać wykres funkcji f, jak i jej wielomianu interpolacyjnego w zadanym przedziale. Funkcja najpierw wyznacza wektor $x = (x_0, ..., x_n)$ (równo rozmieszczone węzły w przedziale $[a, b]$) oraz dla węzłów x wyznacza wektor ilorazów różnicowych $\mathrm{fx} = (f[x_0], ..., f[x_0, ...x_n])$. Następnie dla pewnej liczby n_{plot} (ponownie równo rozmieszczonych w przedziale $[a, b]$) punktów rysowanych na wykresie wyznacza wartości funkcji f oraz wartości wielomianu interpolacyjnego, wykorzystując funkcję z zadania *3*.

Zadanie 5

Problem

Wywołać funkcją wizualizującą interpolację funkcji dla zadanych przykładów:

- $f(x) = e^x \wedge [a, b] = [0, 1]$
- $f(x) = x^2 \cdot \sin x \wedge [a, b] = [-1, 1]$

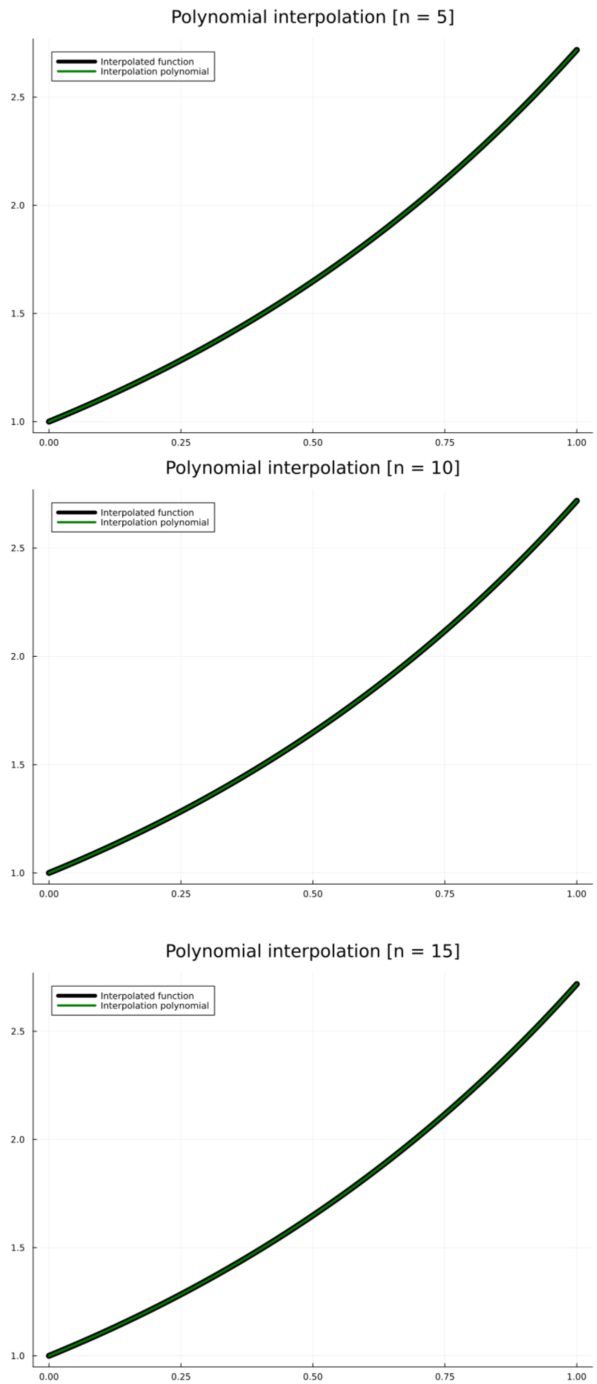
Oraz dla stopni wielomianów interpolacyjnych $n \in \{5, 10, 15\}$.

Rozwiązanie

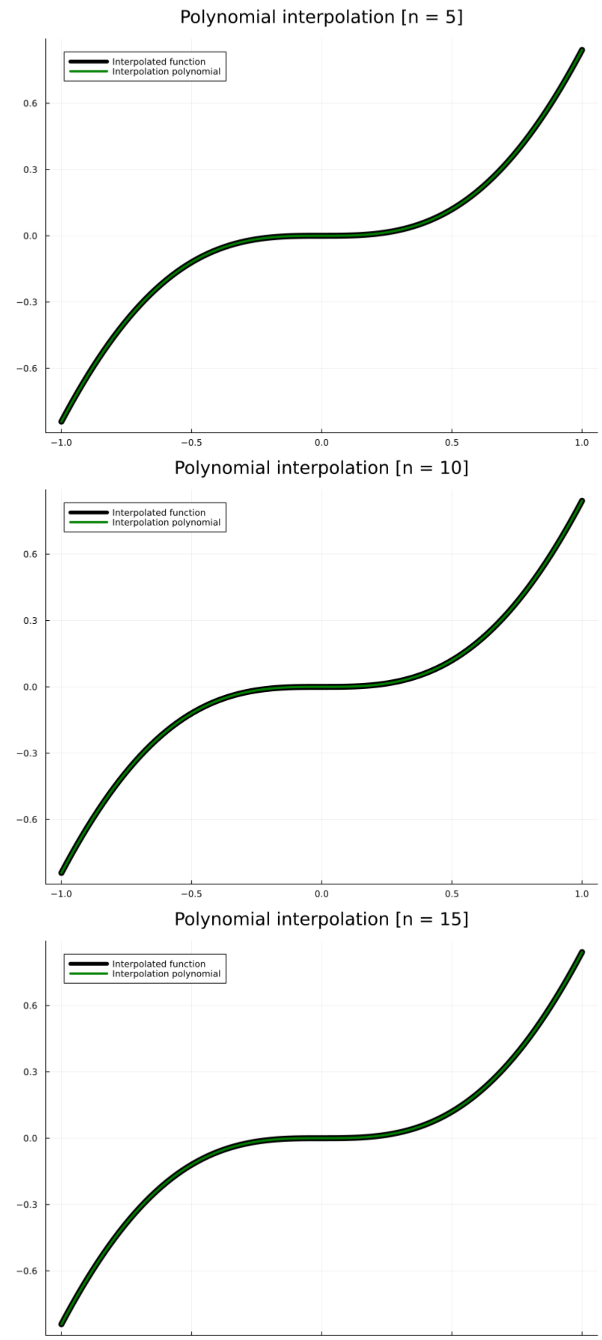
Plik źródłowy: `ex5.jl`

Wyniki i obserwacje

Na podstawie wygenerowanych wykresów możemy zauważyć, że obie badane funkcje na zadanych przedziałach są bardzo dobrze przybliżone za pomocą interpolacji wielomianowej. Dla wszystkich badanych stopni wielomianu interpolacyjnego otrzymane aproksymacje niemal się pokrywają z odpowiadającymi im funkcjami.



(a) Interpolacja funckji $f(x) = e^x$ w przedziale $[0, 1]$



(b) Interpolacja funckji $f(x) = x^2 \cdot \sin x$ w przedziale $[-1, 1]$

Figure 1: Wizualizacja interpolacji funckji z zadania 5

Zadanie 6

Problem

Wywołać funkcją wizualizującą interpolację funkcji dla zadanych przykładów:

- $f(x) = |x| \wedge [a, b] = [-1, 1]$
- $f(x) = \frac{1}{1+x^2} \wedge [a, b] = [-5, 5]$

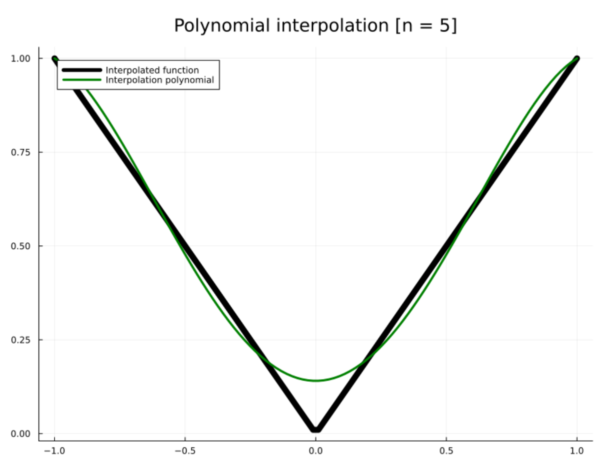
Oraz dla stopni wielomianów interpolacyjnych $n \in \{5, 10, 15\}$.

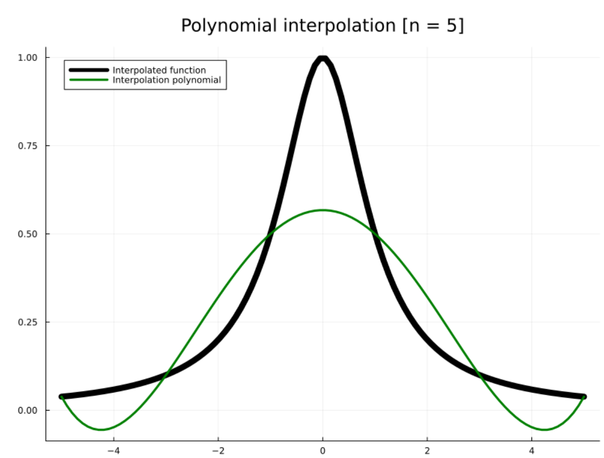
Rozwiązanie

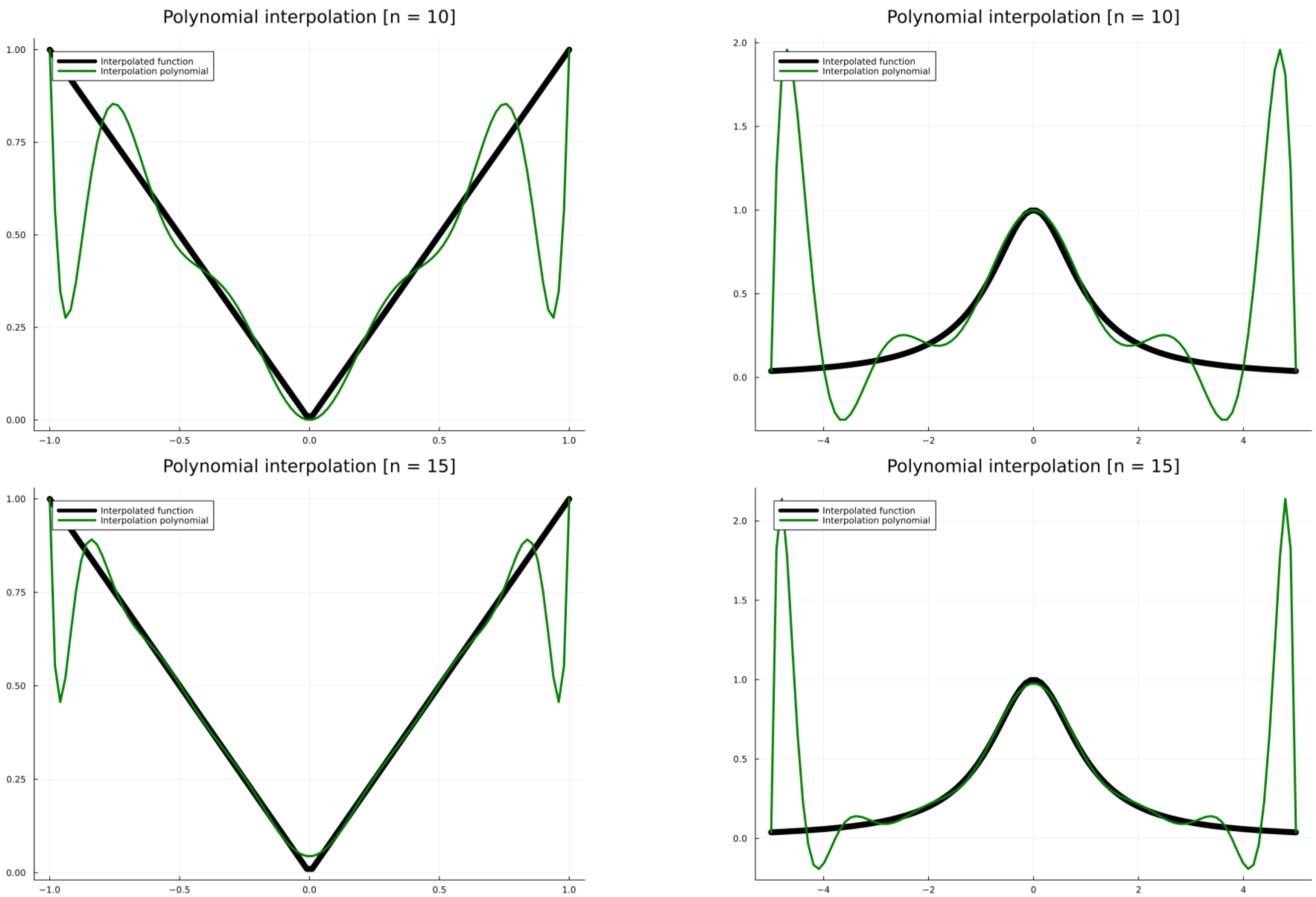
Plik źródłowy: `ex6.jl`

Wyniki i obserwacje

Zauważmy, że funckje badane w tym zadaniu nie dają się tak dobrze interpolować, jak poprzednie przykłady. Występuje tutaj efekt Runge'go, który polega na pogarszaniu jakości interpolacji mimo zwiększania stopnia n wielomianu interpolacyjnego. Pogarszanie to jest szczególnie zauważalne na krańcach zadanego przedziału, na którym funkcja jest interpolowana. Jest to skutek założenia stałej odległości między węzłami. Sposoben na zniwelowanie tego efektu może być zagęszczanie węzłów na końcach przedziałów interpolacji. Dodatkowo efekt ten może występować w sytuacjach, kiedy funkcja odbiega od funkcji gładkiej, jak jest w pierwszej z badanych w tym zadaniu funkcji - $f(x) = |x|$, która nie jest różniczkowalna, więc tym bardziej nie może być gładka.







(a) Interpolacja funckji $f(x) = |x|$

(b) Interpolacja funckji $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Figure 3: Wizualizacja interpolacji funckji z zadania 6