Obliczenia naukowe - lab 3

Jakub Musiał 268442

Listopad 2023

Zadania 1-3: Implementacja metod obliczających przybliżenia pierwiastków

Problem

Zaimplementować funkcje obliczające przybliżenie pierwiastka funkcji f z dokkładnością obliczeń określoną przez δ oraz ε.
Funkcje mają zwracać czwórkę (r, v, it, err), gdzie: r - przybliżenie pierwiastka f, v - wartość $f(r)$, it - liczba iteracji algorytmu, err - sygnalizacja błędu.

Zadanie 1: Metoda biseckcji

Metoda znajduje pierwiastek funkcji f w przedziale $[a, b]$, jeśli jest w tym przedziale ciągła oraz zmienia znak (brak zmiany znaku skutkuje zwróceniem błędu). Metoda w każdej iteracji wyznacza nowe przybliżenie pierwiastka f, obliczając środek $c = \frac{a+b}{2}$ akutalnego przedziału. Jeśli $f(c) \approx 0 \vee |a - b| < \delta$ metoda kończy działanie. W przeciwnym przypadku aktualizowany jest przedział $[a, b]$ - jeśli funkcja zmienia znak w przedziale $[a, c]$, to $b \leftarrow c$, jeśli natomiast funkcja zmienia znak w przedziale $[c, b]$, to $a \leftarrow c$.

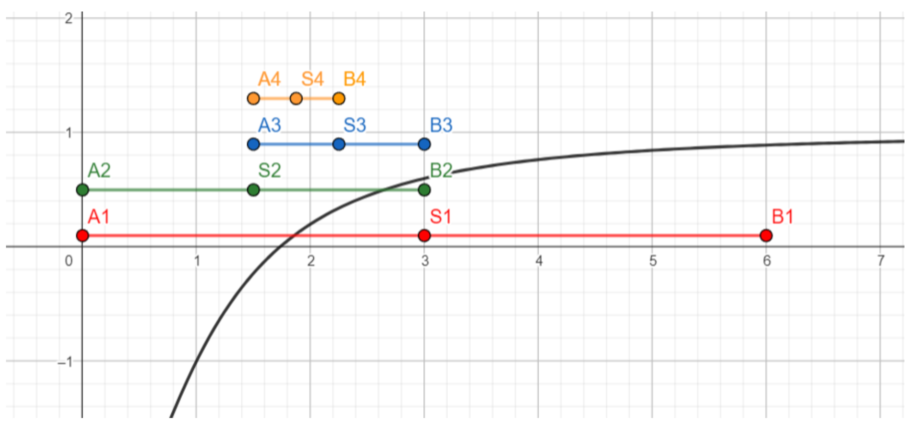

Figure 1: Wizualizacja metody bisekcji

Zadanie 2: Metoda stycznych (Newtona)

Metoda wyznacza kolejne przybliżenia pierwiastka funkcji f jako argumenty punktów przecięcia z osią x stycznych do funkcji f w punktach $(x_n, f(x_n))$, zaczynając od zadanego x_0 oraz znając pochodną f'. Te punkty przecięcia wyznaczane są wg. wzoru $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. Warunkiem końca metody stycznych jest osiągnięcie wymaganej precyji ($|x_{n+1} - x| < \delta \vee |f(x_{n+1})| < \varepsilon$) lub wykonanie maksymalnej liczby iteracji M zadanej jako parametr funkcji.

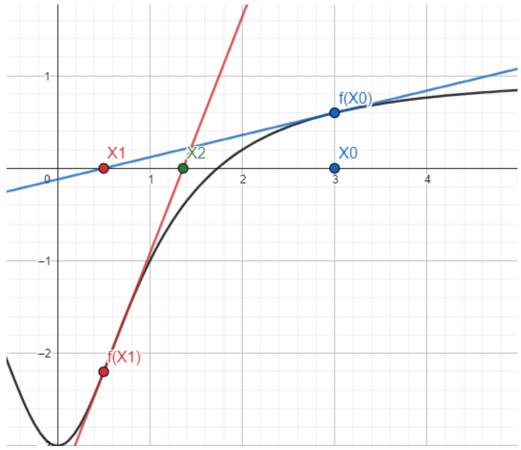

Figure 2: Wizualizacja metody Newtona

Zadanie 3: Metoda siecznych

Metoda wyznacza kolejne przybliżenia pierwiastka funkcji f jako argumenty punktów przecięcia z osią x siecznych funkcji f w punktach $(x_n, f(x_n))$ oraz $(x_{n+1}, f(x_{n+1}))$, zaczynając od zadanych przybliżeń początkowych x_0 i x_1. Kolejne przybliżenia są wyznaczane wg. wzoru $x_{n+1} = x_n - f(x_n) \cdot \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$. Warunek końca metody siecznych jest taki sam, jak w metodzie Newtona - osiągnięcie wymaganej precyzji lub maksymalnej liczby iteracji.

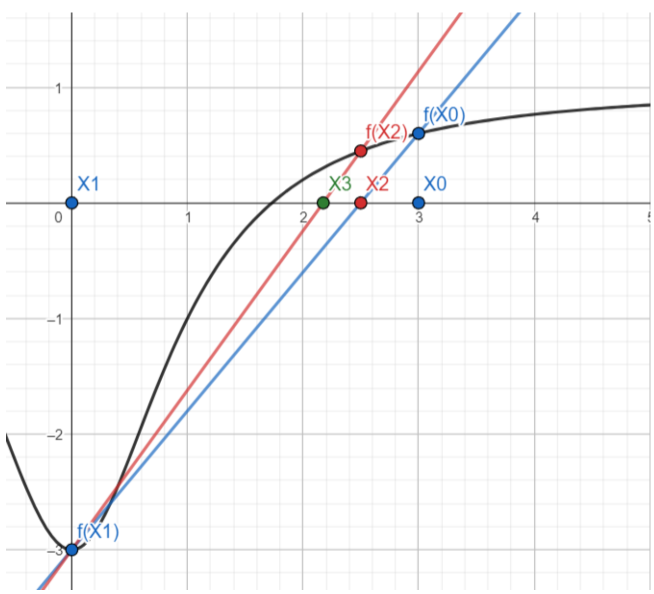

Figure 3: Wizualizacja metody siecznych

Rozwiązanie

Program z rozwiązaniem: `solvers.jl`
Program z testami: `solvers_test.jl`

Pseudokody badanych metod:

Algorithm 1 Metoda bisekcji

Require: $f, a, b, \delta, \varepsilon$
if $sign(f(a)) = sign(f(b))$ **then return** $Error$
$d \leftarrow b - a$
$it \leftarrow 0$
while $true$ **do**
  $it \leftarrow it + 1$
  $d \leftarrow \frac{d}{2}$
  $c \leftarrow a + d$
  if $|d| < \delta$ or $|f(c)| < \varepsilon$ **then return** $(c, f(c), it, NoError)$
  if $sign(f(a)) = sign(f(b))$ **then**
    $a \leftarrow c$
  else
    $b \leftarrow c$

Algorithm 2 Metoda stycznych (Newtona)

Require: $f, f', x_0, \delta, \varepsilon, M$ ▷ M - maksymalna liczba iteracji
if $|f(x_0)| < \varepsilon$ **then return** $Error$
for $it = 1$ to M **do**
  if $|f'(x_0)| < \varepsilon$ **then return** $Error$
  $x_1 \leftarrow x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$
  if $|x_1 - x_0| < \delta$ or $|f(x_1)| < epsilon$ **then return** $(x_1, f(x_1), it, NoError)$
  $x_0 \leftarrow x_1$
return $Error$

Algorithm 3 Metoda siecznych

Require: $f, x_0, x_1, \delta, \varepsilon, M$ ▷ M - maksymalna liczba iteracji
for $it = 1$ to M **do**
  if $|f(x_0)| > |f(x_1)|$ **then**
    $(x_0, x_1) \leftarrow (x_1, x_0)$
  $s \leftarrow \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)}$
  $x_1 \leftarrow x_0$
  $x_0 \leftarrow x_0 - f(a) \cdot s$
  if $|x_1 - x_0| < \delta$ or $f(x_0) < \varepsilon$ **then return** $(x_0, f(x_0), it, NoError)$
return $Error$

Zadanie 4: Wyznaczanie pierwiastków

Problem

Za pomocą zaimplementowanych metod z zadań 1-3 wyznaczyć znaleźć przybliżenie pierwiastka funkcji $f(x) = \sin x - (\frac{x}{2})^2$ dla dokładności obliczeń $\delta = \varepsilon = \frac{1}{2} \cdot 10^{-5}$ oraz dla zadanych danych:

- Metoda bisekcji: $a = 1.5 \wedge b = 2$
- Metoda stycznych: $x_0 = 1.5$
- Metoda siecznych: $x_0 = 1 \wedge x_1 = 2$

Rozwiązanie

Policzmy pochodną funkcji f wymaganą dla metody Newtona:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(\sin x - (\frac{x}{2})^2) = \frac{d}{dx}\sin x - \frac{d}{dx}(\frac{x}{2})^2 = \cos x - \frac{x}{2}$$

Program z rozwiązaniem: `ex4.jl`

Wyniki i obserwacje

Na podstawie *tabeli 1* możemy zauważyć, że wszystkie badane metody zwracają poprawne przybliżenia pierwiastka funkcji f z założoną dokładnością. Można też zauważyć, że metoda Newtona zwróciła wynik w najmniejszej liczbie iteracji $it_n = 4$, natomiast metoda bisekcji potrzebowała $it_b = it_n^2$ iteracji. Metoda stycznych potrzebowała $it_n < it_s = 5 < it_b$ iteracji. Jest to oczekiwany wynik, biorąc pod uwagę wartości współczynników zbieżności α dla badanych metod: $\alpha_n = 2$ (zbieżność kwadratowa), $\alpha_s = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.1618$ oraz $\alpha_b = 1$ (zbieżność liniowa).

Metoda	r	v	it	err
Bisekcji	1.9337539672851562	$-2.7027680138402843e-7$	16	0
Stycznych	1.933753779789742	$-2.2423316314856834e-8$	4	0
Siecznych	1.9337537628211916	$7.706280058528137e-12$	5	0

Table 1: Wyniki badanych metod iteracyjnych dla funkcji $f(x) = \sin x - (\frac{x}{2})^2$

Zadanie 5: Przecięcie funkcji

Problem

Za pomocą metody biseckji znaleźć argument x dla którego funkcje $f_1(x) = 3x$ oraz $f_2(x) = e^x$ się przecinają, zakładając dokładność obliczeń $\delta = \varepsilon = 10^{-4}$

Rozwiązanie

Punkt przecięcia funkcji f_1 oraz f_2 możemy wyznaczyć obliczając pierwiastek funkcji $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$. Wynikiem będzie zatem przybliżenie rozwiązań równania $3x - e^x = 0$. Wiemy, że prawdziwe pierwiastki tego równania leżą w przedziałach $[0, 1]$ ($f(0) = -1 \wedge f(1) = 3 - e \approx 0.28$) oraz $[1, 2]$ ($f(1) = 3 - e \wedge f(2) = 6 - e^2 \approx -1.39$), zatem dla takich przedziałów będziemy wywoływać metodę bisekcji.

Program z rozwiązaniem: `ex5.jl`

Wyniki i obserwacje

Przedział	r	v	it	err
$[0, 1]$	$x_1 = 0.619140625$	$9.066320343276146e - 5$	9	0
$[1, 2]$	$x_2 = 1.5120849609375$	$9.066320343276146e - 5$	13	0

Table 2: Wyniki metody bisekcji dla problemu wyznaczenia punktu przecięcia dwóch funkcji

Widzimy, że metoda nie zwraca sygnału o błędzie oraz otrzymane wyniki spełniają rządane warunki co do dokładności przybliżeń. Możemy zatem określić przybliżenia punktów przecięcia funkcji f_1 i f_2, jako $(x_1, f^*(x_1))$ oraz $(x_2, f^*(x_2))$, gdzie f^* jest dowolną z funkcji f_1, f_2.Metoda ta wymaga jednak wcześniejszej analizy przebiegu funkcji, by móc poprawnie określić parametry startowe a oraz b.

Zadanie 6: Wyznaczanie pierwiastków

Problem

Za pomocą zaimplementowanych metod z zadań 1-3 wyznaczyć znaleźć przybliżenie pierwiastków funkcji $f_1(x) = e^{1-x} - 1$ oraz $f_2(x) = x \cdot e^{-x}$ dla dokładności obliczeń $\delta = \varepsilon = \cdot 10^{-5}$.
Dla każdej metody należy dobrać odpowiednie dane wejściowe oraz sprawdzić, jaki będzie wynik metody Newtona dla funkcji f_1 oraz $x_0 \in (1, \infty]$, a także dla $x_0 > 1$ i $x_0 = 1$ dla funkcji f_2.

Rozwiązanie

Policzmy pochodne funkcji f_1 oraz f_2 wymagane dla metody Newtona:

$$f_1'(x) = \tfrac{d}{dx}(e^{1-x} - 1) = -e^{1-x}$$

$$f_2'(x) = \tfrac{d}{dx}(x \cdot e^{-x}) = x \cdot (-e^{-x}) + e^{-x} = e^{-x} \cdot (1 - x)$$

Program z rozwiązaniem: `ex6.jl`

Wyniki i obserwacje

W *tabelach 3* i *4* widzimy, że dla odpowiednio dobranych parametrów startowych wszystkie badane metody zwracają poprawne przybliżenia (z założoną dokładnością) dla obu funkcji f_1 i f_2. Dodatkowo zauważmy, że najbardziej dokładne przybliżenia zwraca metoda siecznych.

Badając wyniki metody Newtona dla funkcji f_1, możemy zaobserwować, że wybranie wartości $x_0 \in (1, \infty]$ powoduje bardzo szybki wzrost liczby iteracji potrzebnej do osiągnięcia założonej precyzji - dla $x_0 = 6$ potrzebujemy aż 147 iteracji. Wynika to z faktu, że funkcja $g_1(x) = e^{1-x}$ ($f_1(x) = g_1(x) - 1$) bardzo szybko zbiega do 0, zatem styczne do niej w punktach $x_0 \in (1, \infty]$ są "bliskie funkcji stałej" (pochodne są bliskie 0), więc kolejne wartości x_n są bardzo nieznacznie od siebie oddalone.
Dla funkcji f_2 możemy zauważyć, że przyjęcie przybliżenia początkowego $x_0 \geq 1$ skutkuje otrzymaniem niepoprawnych wyników ($\geq\sim$ 14.4), gdzie jedynym pierwiastkiem tej funkcji jest 0. Jest to skutkiem zmiany monotoniczności funkcji w punkcie $x_0 = 1$ - funckja w nieskończoności zbiega do 0. Wyznaczając zatem kolejne przybliżenia pierwiastka funkcji coraz bardziej oddalamy sie od rzeczywistej wartości podobnie jak dla funkcji f_1, w pewnym momencie osiągając wartość $f_2(x_n) \approx 0$, co kończy działanie metody z błędnym wynikiem.

Metoda	Parametry	r	v	it	err
Bisekcji	$a = 0 \wedge b = 3$	1.0000076293945312	$-7.6293654275305656e-6$	17	0
Stycznych	$x_0 = e^{-1}$	0.9999999967966953	$3.2033047325796815e-9$	4	0
Siecznych	$x_1 = 0 \wedge x_2 = 3$	1.0000000003101366	$-3.101365830815439e-10$	7	0

Table 3: Wyniki badanych metod iteracyjnych dla funkcji $f_1(x) = e^{1-x} - 1$

Metoda	Parametry	r	v	it	err
Bisekcji	$a = -1 \wedge b = 2$	$7.629394531248679e-6$	$7.629336323809809e-6$	16	0
Stycznych	$x_0 = e^{-1}$	$-1.8840380756452411e-6$	$-1.8840416252480553e-6$	4	0
Siecznych	$x_1 = -1 \wedge x_2 = 1$	$2.7077871812544315e-13$	$2.7077871812536984e-13$	19	0

Table 4: Wyniki badanych metod iteracyjnych dla funkcji $f_2(x) = x \cdot e^{-x}$

$x0$	r	v	it	err
2	0.9999999810061002	$1.8993900008368314e-8$	5	0
3	0.9999999710783241	$2.892167638712806e-8$	9	0
4	0.9999999995278234	$4.721767421500545e-10$	21	0
5	0.9999996427095682	$3.572904956339329e-7$	54	0
6	0.9999999573590406	$4.264096031825204e-8$	147	0
7	0.0	0.0	256	1
8	0.0	0.0	256	1
9	0.0	0.0	256	1
10	0.0	0.0	256	1

Table 5: Wyniki metody Newtona dla funkcji $f_1(x) = e^{1-x} - 1$ oraz wybranych wartości $x_0 \in (1, \infty]$

$x0$	r	v	it	err
2	14.398662765680003	$8.03641534421721e-6$	10	0
3	14.787436802837927	$5.594878975694858e-6$	10	0
4	14.398662765680003	$8.03641534421721e-6$	9	0
5	15.194283983439147	$3.827247505782993e-6$	9	0
6	14.97432014974184	$4.699833827208111e-6$	8	0
7	14.792276940955892	$5.569686859646652e-6$	7	0
8	14.636807965014	$6.438155219843286e-6$	6	0
9	14.50105208065629	$7.305881300498495e-6$	5	0
10	14.380524159896261	$8.173205649825554e-6$	4	0
11	14.272123938290518	$9.040322779745372e-6$	3	0
12	14.173615857826384	$9.907349924182477e-6$	2	0
13	15.159766454352443	$3.95266121872815e-6$	2	0
14	15.076923076923077	$4.270593381508261e-6$	1	0
15	15.0	$4.588534807527386e-6$	0	0
16	16.0	$1.8005627955081459e-6$	0	0
17	17.0	$7.037894121934784e-7$	0	0
18	18.0	$2.741396354048273e-7$	0	0
19	19.0	$1.0645313231320808e-7$	0	0
20	20.0	$4.122307244877116e-8$	0	0

Table 6: Wyniki metody Newtona dla funkcji $f_1(x) = e^{1-x} - 1$ oraz wybranych wartości $x_0 \geq 1$

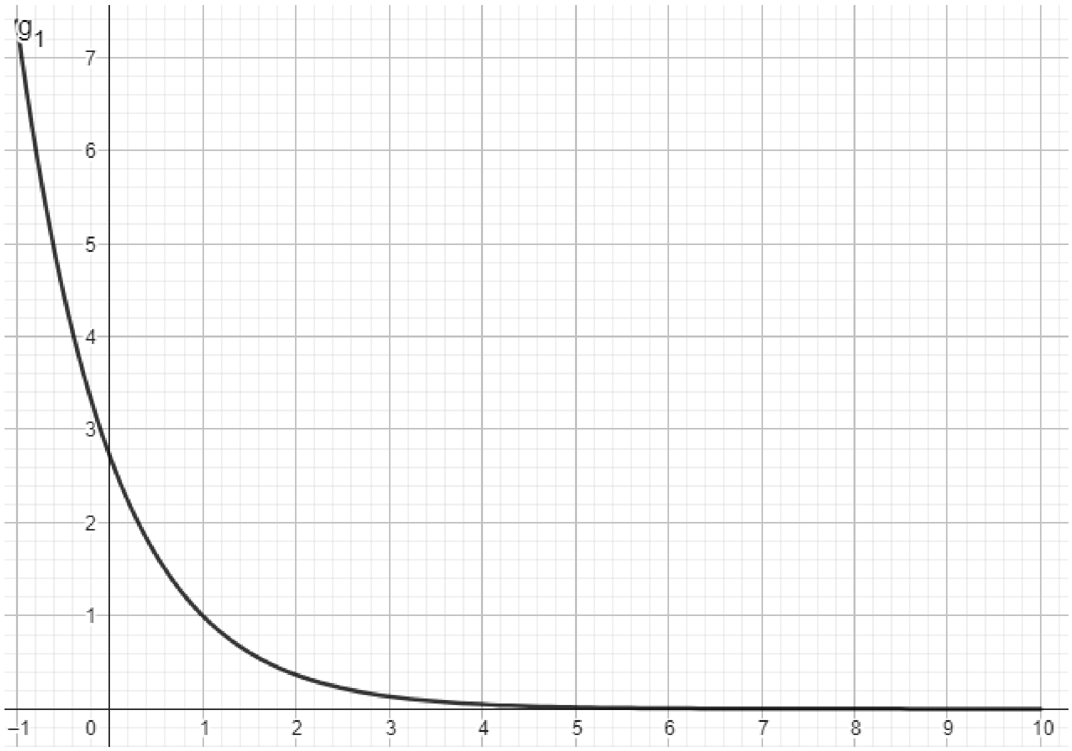

Figure 4: Funkcja $g_1(x) = e^{1-x}$

Figure 5: Funkcja $f_2(x) = x \cdot e^x$