Teoretyczne Podstawy Informatyki
Zadanie Domowe

Jakub Musiał 268442

Maj 2024

Lista 7 - Zadanie 42

Opis zadania

Pokazać, że najmniejszy zbiór funkcji zawierających $I_{n,k}$ oraz zamknięty na operację złożenia, minimum i rekursji prostej (R_s) jest równoważny modelowi funkcji rekurencyjnych (R_μ).

Definiujemy schemat rekursji prostej tworzącej funkcję $f : \mathbb{N}^{m+1} \to \mathbb{N}$ za pomocą funkcji $g : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$ i $h : \mathbb{N}^{m+2} \to \mathbb{N}$ w następujący sposób:

$$f(0, \overline{x}) = g(\overline{x}) \wedge f(n+1, \overline{x}) = h(n, f(n, \overline{x}), \overline{x})$$

lub

$$f(0) = c \wedge f(n+1) = h(nf(n))$$

Gdzie $\overline{x} = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{N}^n$.

Definiujemy klasę funkcji μ-rekurencyjnych (R_μ) jako najmniejszą w sensie zawierania klasę funkcji częściowych o dziedzinach zawartych w iloczynie kartezjańskim zbioru liczb naturalnych i wartościach naturalnych, zawierającą:

- Wszystkie funkcje $I_{n,k}$
- Funkcję charakterystyczną relacji mniejszości $\chi_< : \mathbb{N}^2 \to \{0, 1\}$
- Dodawanie $(+ : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N})$ oraz mnożenie $(\times : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N})$

oraz zamkniętą na operację złożenia i minimum.

Rozwiązanie

Z definicji R_s oraz R_μ wiemy, że obie klasy zaweierają funkcje rzutowania ($I_{n,k}$) oraz są zamknięte na operację złożenia i minimum, zatem pomijając te elementy wspólne pokażemy, że $R_s \equiv R_\mu$.

Pokażmy, że $R_\mu \subseteq R_s$, budując funkcje $+$, $\times$ oraz $\chi_<$ za pomocą rekursji prostej:

- Dodawanie: $+(m,0) = I_{1,1}(m) \wedge +(m,n+1) = S(+(m,n))$
- Mnożenie: $\times(m,0) = 0 \wedge \times(m,n+1) = +((m,n),m)$
- Relacja mniejszości: $\chi_<(m,n) = 1 \dot{-} (n \dot{-} m)$

Gdzie jako funkcje pomocnicze definiujemy:

- Odejmowanie: $\dot{-}(m,0) = m \wedge \dot{-}(m,n+1) = P(\dot{-}(m,n))$
- Poprzednik: $P(0) = 0 \wedge P(n+1) = I_{2,2}(P(n),n)$

Pokażmy, że $R_s \subseteq R_\mu$, budując schemat rekursji prostej za pomocą "narzędzi" dostępnych w modelu R_μ:

$$f(m,\overline{x}) = min_a(lh(a) = m+1 \wedge (a)_0 = g(\overline{x}) \wedge (\forall i < m)((a)_{i+1} = h(i,(a)_i,\overline{x})))$$

Zatem skoro $R_\mu \subseteq R_s$ oraz $R_s \subseteq R_\mu$, to możemy stwierdzić, że $R_s \equiv R_\mu$. $\square$