Экзамен

Осипенко

13 января 2021 г.

1 Основы теории множеств

1.1 Основные понятия теории множеств и способы их задания. Парадокс Рассела. Операции над множествами: объединение, пересечение, разность и симметрическая разность, дополнение. Свойства операций и принцип двойственности (правила Моргана)

Обычно множества записываются в фигурных скобках.Множество может вообще не содержать ни одного элемента. В этом случае его именуют пустым множеством и обозначают как ∅. Чаще всего в математической литературе множества обозначаются с помощью больших букв латинского алфавита.
Под мощностью множества для конечных множеств понимают количество элементов данного множества. Мощность множества A обозначается как |A|.
Если нам известно, что некий объект a принадлежит множеству A, то записывают это так: $a \in A$.
Множество A называют подмножеством множества B, если все элементы множества A являются также элементами множества B. Обозначение: $A \subseteq B$
Универсальное множество (универсум) U обладает тем свойством, что все иные множества, рассматриваемые в данной задаче, являются его подмножествами.
Множества A и B называются равными, если они состоят из одних и тех же элементов. Иными словами, если каждый элемент множества A является также элементом множества B, и каждый элемент множества B является также элементом множества A, то $A = B$.
Если $A \subseteq B$, при этом $A \neq B$, то множество A называют собственным

(строгим) подмножеством множества B. Также говорят, что множество A строго включено в множество B. Записывают это так: $A \subset B$.
Множество всех подмножеств некоего множества A называют булеаном или степенью множества A. Обозначается булеан как P(A) или 2^A. Пусть множество A содержит n элементов. Булеан множества A содержит 2^n элементов, т.е.

$$|P(A)| = 2^n, n = |A|$$

Способы задания множеств:
1)Первый способ – это простое перечисление элементов множества. Естественно, такой способ подходит лишь для конечных множеств.
2)Второй способ – задать множество с помощью так называемого характеристического условия (характеристического предиката) P(x).

$$x|P(X)$$

3)Третий способ – задать множество с помощью так называемой порождающей процедуры. Порождающая процедура описывает, как получить элементы множества из уже известных элементов или неких иных объектов.

Парадокс Рассела:
Пусть K — множество всех множеств, которые не содержат себя в качестве своего элемента. Содержит ли K само себя в качестве элемента? Если да, то, по определению K, оно не должно быть элементом K — противоречие. Если нет — то, по определению K, оно должно быть элементом K — вновь противоречие.(прим. Одному деревенскому брадобрею приказали «брить всякого, кто сам не бреется, и не брить того, кто сам бреется», как он должен поступить с собой?)

Симметрическая разность двух заданных множеств A и B - это такое множество $A \triangle B$, куда входят все те элементы первого множества, которые не входят во второе множество, а, также те элементы второго множества, которые не входят в первое множество.

Законы де Моргана:
Отрицание конъюнкции есть дизъюнкция отрицаний.
Отрицание дизъюнкции есть конъюнкция отрицаний.

1.2 Сравнение множеств. Диаграммы Эйлера-Венна. Разбиения и покрытия: принцип Гейне-Бореля-Лебега – лемма «о конечном подпокрытии». Алгебра подмножеств: булеан и универсум, счетные множества и их свойства. Несчетные множества и множества «мощности континуума». Теорема Кантора.

Леммой Гейне - Бореля: Из всякой бесконечной системы интервалов, покрывающей отрезок числовой прямой, можно выбрать конечную подсистему, также покрывающую этот отрезок.

Алгебра множеств - это непустая система подмножеств некоторого множества X, замкнутая относительно операций дополнения (разности) и объединения (суммы).

Счётное множество есть бесконечное множество, элементы которого возможно занумеровать натуральными числами.
Свойства: -В предположении, что выполнена аксиома выбора, любое бесконечное множество содержит счётное подмножество.
-Непустое подмножество счётного множества не более, чем счётно.
-Не более, чем счётное объединение не более, чем счётных множеств само не более, чем счётно.
-Декартово произведение конечного числа не более, чем счётных множеств само не более, чем счётно.

Несчётное множество - бесконечное множество, не являющееся счётным.
Континуум в теории множеств - мощность множества всех вещественных чисел.

Теорема Кантора — классическое утверждение теории множеств. Доказано Георгом Кантором в 1891 году. Утверждает, что любое множество A менее мощно, чем множество всех его подмножеств 2^A.

1.3 Отношения. Упорядоченные пары. Прямое произведение множеств, бинарные отношения (обратное, дополнение, тождественное, универсальное). Композиция и степень отношений, ядро отношения. Свойства отношений.

Отношение - математическая структура, которая формально определяет свойства различных объектов и их взаимосвязи. Распространёнными примерами отношений в математике являются равенство (=), делимость, подобие, параллельность и многие другие.

Два элемента a и b называются упорядоченной парой, если указано, какой из этих элементов первый, какой второй, при этом $((a, b) = (c, d)) \Leftrightarrow (a = c \wedge b = d)$.

Прямое, или декартово произведение двух множеств - множество, элементами которого являются все возможные упорядоченные пары элементов исходных множеств.

Бинарное отношение - отношения между двумя множествами.
Обратное отношение[уточнить] (отношение, обратное к R) — это двухместное отношение, состоящее из пар элементов (y , x), полученных перестановкой пар элементов (x, y) данного отношения R. Обозначается: R^{-1}. Для данного отношения и обратного ему верно равенство: $(R^{-1})^{-1} = R$.

1.4 Функции: определения, инъекция, сюръекция, биекция. Композиция (суперпозиция или сложная функция), индуцированная функция.

Функция (отображение) - в математике соответствие между элементами двух множеств, установленное по такому правилу, что каждому элементу первого множества соответствует один и только один элемент второго множества.

Отображение (функция) $F : X \to Y$ называется сюръективным (или сюръекцией, или отображением на Y), если каждый элемент множества Y является образом хотя бы одного элемента множества X, то есть $\forall y \in Y \exists x \in X : y = F(x)$.

Отображение (функция) F множества X в множество $Y(F : X \to Y)$ называется инъекцией (или вложением, или взаимно однозначным отображением множества X в множество Y), если разные элементы множества X переводятся в разные элементы множества Y, $\forall x \in X \exists y \in Y : y = F(x)$

Биекция - это отображение (функция), которое является одновременно и сюръективным, и инъективным.

Композиция функций (или суперпозиция функций) - это применение одной функции к результату другой

1.5 Отношения эквивалентности: классы эквивалентности и фактормножества. Ядро функции.

Отношение эквивалентности - бинарное отношение между элементами данного множества, свойства которого сходны со свойствами отношения равенства (симметричности, рефлексивности и транзитивности).

1.6 Отношения порядка: минимальные элементы, частичный и линейный порядок.

Бинарное отношение R на множестве X называется отношением нестрогого частичного порядка (отношением порядка, отношением рефлексивного порядка), если имеют место симметричность, рефлексивность и транзитивность.

1.7 Замыкание отношений: замыкание отношения относительно свойства, транзитивное и рефлексивное транзитивное замыкания. Алгоритм Уоршалла.