Математический анализ

Алла Владимировавна Устюжанова

24 октября 2019 г.

Лекция 1

1 Глава 1. Введение.

1.1 Параграф 1: Множества операции над множествами

Кванторы:

$$\forall \quad \exists$$

Множество – это совокупность каких-либо предметов(элементов).

$$A \quad B, \quad x \in A, \quad x \notin B, \quad A \in B$$

Операции:
1. $A \cup B$ – те множество каждый элемент которого принадлежит хотябы одному из множеств A или B

$$A \cup B = \{x : x \in A \quad or \quad x \in B\}$$

2. $A \cap B$ – это множество каждый элемент которого принадлежит одновременне и A и B

$$A \cap B = \{x : x \in A \quad and \quad x \in B\}$$

3. $A \setminus B$ – (Разность)

$$A \setminus B = \{x : x \in A \quad but \quad x \notin B\}$$

4. $CA \quad \bar{A}$ – (Дополнение)

$$CA = \bar{A} - S \setminus A$$

Виды множеств:
$N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$

1.2 Абсолютная величина

$$|x| = \{x \quad x \geq 0 \quad or \quad -x \quad x \leq 0\}$$

Свойства:

1. Неравенство треугольника

$$|x + y| = |x| + |y|$$

Док-во: пусть $x + y \geq 0 \Rightarrow |x + y| = x + y = |x| + |y|$
Док-во: пусть $x + y < 0 \Rightarrow |x + y| = x + (-y) < |x| + |y|$

2. $|x - y| = |x| - |y|$ если $|x| > |y|$ 3. $|xyz| = |x||y||z|$ 4. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ sgn x = $\{1 \quad x > 0 \quad 0 \quad x = 0\}$

Бином Ньютона:

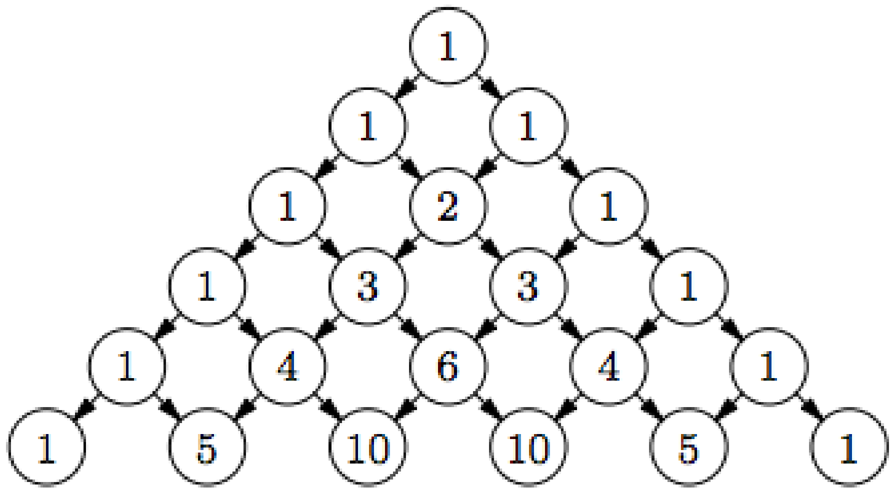
$$(a + b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + ... + b^n$$

$$C_n^k = \frac{n!}{(n - k)!k!}$$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$$

$$0! = 1$$

Треугольник Паскаля:



1.2.1 Упражнения

1. $A = \{1, 2, 3\} \quad B = \{2, 3, 4, 5\} \quad A \cup B?$
2. $A = \{x \in N : \quad 2 < x < 4\} \quad B = \{x \in N : \quad 2 < x < 4\} \quad C = \{x \in N : 2 < x < 4\} \quad B \cup C?, A \cap B \cap C, A \cup B \cup C \quad ?$
3. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)?$
4. $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$
5. $(1 - x)^5 = ?$
6. $\left(\frac{2}{x} + 3\sqrt{x}\right)^4$

2 Глава 2. Предел и непрерывность.

Курс: Мат анализ (фтф:ИВТ)
код слово: предел

2.1 Параграф 1. Предел псоледовательности

Предел – пусть каждому натуральному числу N по некоторому закону поставленно в соответствие действительное число x_n тогда говорят что определена числовая последовательность $\{x\} = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$
Число а называется пределом последовательности $\{x_n\}$ если для всякого

действительного числа $\epsilon > 0$ найдется зависящее от ϵ число такое что выполняется неравенство $|x_n - a| < \epsilon$ для всех натуральных чисел $n > n_0$.

Обозначение:

$$\lim_{n \to 0} x_n = a \quad (x_n \to a \quad n \to \inf)$$

$$\lim_{n \to 0} x_n = a \Leftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 = n_0(\epsilon) : \forall n > n_0 \quad |x_n - a| < \epsilon$$

Пример: $\lim_{n \to 0} \frac{1}{n} = 0$
$|\frac{1}{n}| < \epsilon, \quad \frac{1}{n} < \epsilon, \quad n > \frac{1}{\epsilon}, \quad n_0 = \left[\frac{1}{\epsilon}\right] + 1 \quad \forall \epsilon > 0$
чтд.

Произвольный интервал AB содержащий точку C называется окресностью это точки

$$\cup(C)$$

Эпсилон окресность:

$$\cup(\epsilon) \quad \cup_\epsilon(\epsilon) = \dot{\cup}_\epsilon(\epsilon) \setminus c$$

Число(точка) а является пределом последовательности x_n если для любого эпсилон больше нуля найдется число n_0 такое что все точки x_n с индексами $n > n_0$ попадут в ϵокресность точки а. Вне любой окресности точки а имеется конечная или пустое множество точек x_n.

Лекция 2

Теорема 1: Если последовательность x_nимеет конечный предел, то он единственный.
Док-во: x_n имеет два различных предела а и b.
расмотрим окресность cd, тк $x_n \to a$, то ляляля, тогда в интервале не может содержаться бесконечное число элементов, те последовательность x_n не может стремится к b.

Теорема 2: Если последовательность сходится(имеет прредел), то она ограничена. Опр: если $|x_n| \leq M, \quad M = const$,то x_n наз ограниченной

Теорема 3(придельный переход в неравенствах):
а) Если $x_n \to a, \quad y_n \to b, \quad a < b$, то $\exists n_0^{\forall} n > n_0 \quad x_n < y_n$
б) Если $x_n \to a, \quad y_n \to b, \quad x_n \leq y_n \quad \forall n$, то $a \leq b$

Теорема 4(принціп "двух милиционеров"):
Если $x_n \to a, \quad y_n \to a \quad and \quad x_n \leq z_n \leq y_n \quad \forall n \in N \quad then \quad z_n \to a$

Теорема 5(Арифметические свойства приделов):
1) $\lim_{n \to inf} c = c, \quad c = const$
2) $if \quad \exists \quad ending \quad \lim_{n \to inf} x_n = a, \quad \lim_{n \to inf} y_n = b \quad then$ существуют приделы их суммы, разности , произведения, частного($b \neq 0$):

$$a) \lim_{n \to inf} (x_n \pm y_n) = a + b$$

$$b) \lim_{n \to inf} (x_n y_n) = ab$$

$$c) \lim_{n \to inf} \left(\frac{x_n}{y_n} \right) = \frac{a}{b}, \quad where \quad b \neq 0$$

Определение: x_n называется бесконечно малой если предел последовательности равен 0

Определение: y_n называется бесконечно большой если предел последовательности равен бесконечности

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 : \quad \forall n > n_0 \quad |y_n| > \epsilon$$

Свойства:
1) произведение бесконечно малой на ограниченное является бесконечно малой

2.2 Параграф 2. Предел функции

– Функцией называется закон по которому каждому x из некоторово множества D соответствует единственное значение y из множества E

$$y = f(x)$$

$$f : D \to E$$

где x – независсимая переменная, аргумент
y – зависимая переменная

D – область определения
E – область значения

Определение предела функции

1. по Коши(с помощью окресности):

$$\lim_{x\to 0} f(x) = A \quad \Leftrightarrow \quad \forall \cup_\epsilon (A) \quad \exists \cup_\epsilon (x_0) \quad \forall x \in \cup_\epsilon(x_0) \quad \Rightarrow \quad f(x) \in \cup_\epsilon(A)$$

с помощью неравенства:

$a) x_0, A - ending \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = (A) \Leftrightarrow \quad \forall\epsilon > 0 \quad \exists b > 0 : \quad 0 < |x - x_0| < b \Rightarrow \quad |f(x) - A| < \epsilon$

$b) x_0 - ending, A = +inf \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = +inf \Leftrightarrow \quad \forall\epsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow \quad f(x) > \epsilon$

$c) x_0 - ending, A = -inf \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = -inf \Leftrightarrow \quad \forall\epsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow \quad f(x) < -\epsilon$

$d) x_0 - ending, A = inf \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = inf \Leftrightarrow \quad \forall\epsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 :$
$|x| > \delta \Rightarrow \quad |f(x) - A| < \epsilon$

2) по Гейне(с помощью предела последовательности):

$A = \lim_{x\to x_0} f(x) \Leftrightarrow \quad \forall x_n \to x_0 \quad n \to inf, \quad x_n \neq x_0$

Соответсвующая последовательность значений функции

$f(x_n) \to A \quad n \to inf$

Теорема 1(Арифметические свойства пределов функции):
Пусть существует конечные пределы функции

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A, \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = B$$

тогда предел суммы(разности) равен пределу суммы(разности)
произведения = произведению
частного = частному
ограниченна в некоторых окресностях точки x_0

Теорема 2 (предельный переход в неравенство):

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A, \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = B, \quad \exists \cup (x_0), f(x) < g(x) \quad f(x) \in \cup(x_0)$$

Лекция 3

Введем понятие сложной функции:

$$f : X \to Y \quad y = f(x)$$

$$g : Y \to R \quad g(y)$$

$$h : X \to R \quad h(x) = g(f(x)) = g \circ f$$

Теорема 3(предел сложной функции):
пусть $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0, f(x) \neq y_0, x \neq x_0$, $\exists \lim_{y \to y_0} g(y) = A \Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} h(x) = \lim_{x \to x_0} g(f(x)) = A$

Теорема 4(критерий Коши):
Функция f(x) имеет придел в точке x_0 тогда и только тогда выполнения условия $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \epsilon > 0 : \quad \forall x', x'' : \quad |x' - x_0| < \epsilon$

$$|f(x') - f(x'')| < \epsilon$$

Односторонние пределы

_
Предел с лево($x \to -0$):

$$A = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0) \quad \Leftrightarrow$$

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : x_0 - \delta < x < x_0 \quad \Rightarrow \quad |f(x) - A| < \epsilon$$

Предел с право($x \to +0$):

$$A = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0) \quad \Leftrightarrow$$

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : x_0 < x < x_0 + \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - A| < \epsilon$$

Замечание:
1)Функция имеет предел при $x \to x_0$, когда существуют левый и правый пределы равные между собой.
2)Если $A = \lim_{x \to x_0} f(x)$ то

$$f(x) = A + \alpha(x) \quad \alpha(x) \to 0$$

2.3 Параграф 3. Замечательные пределы

1ый замечательный предел:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

следствие

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\sin \alpha(x)}{\alpha(x)} = 1$$

2ой замечательный предел

$$\lim_{x \to +inf} 1 + \frac{1}{x} = \lim_{x \to -inf} (1 + \frac{1}{x})^x = \lim_{x \to inf} (1 + \frac{1}{x})^x = e \simeq 2.718281828\ldots$$

следствие

$$\lim_{\alpha \to 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$$

2.4 Параграф 4. Непрерывность функции

– Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Функция непрерывна на множестве D если она не прерывна к каждой точке этого множества. Если одно из условий непрерывности не выполняется, то функция не является непрерывной в этой точке.

Точка разрыва – это когда $f(x)$ определена проколотой окресностью этой точки и не является непрерывной в точке x_0

2.4.1 Классификация точек разрыва

a) x_0 называется точкой устранимого разрыва $f(x)$, если существует предел функции при $x \to x_0$(конечный предел), но функция либо не определена в x_0, либо значение предела не совпадает со значением функции
b) x_0 называется точкой разрыва первого рода функции $f(x)$, если $\exists$ют конечные односторонние пределы.
c) x_0 называется точкой разрыва второго рода, если хотябы один из односторонних пределов не существует или является бесконечным.

2.4.2 Основные теоремы о непрерывных функциях

Теорема 1
Сумма, разность, произведение, частное(знаменатель не равен нулю) непрерывных функций также являются непрерывной функцией.

Теорема 2(непрерывность сложной функции)
Пусть сложная функция определена в окресности x_0, пусть функция y = g(x) непрерывна в точке x_0, внешная функция y_0=f(x_0) непрерывная в точке y_0, тогда f(g(x)) непрерывна в x_0

Теорема 3(о промежуточном значении)
Пусть f(x) непрерывна на AB и на его концах принимает значение разных знаков, тогда существует точка 'c' внутри AB, f(c)=0.

Теорема 4(о макс значении Вейерштрасса):
Функция f(x) непрерывная на AB является оганиченной на этом отрезке и приэтом существует точка x1 из AB такая что x1 максимальное значение функции, также есть точка x2 которая является минимальным значением функции.

Следствие теоремы 3: Если $\phi(x)$ непрерывна на AB, то найдется точка 'c' из интервала AB, $\phi(x = c) = C$

Лекция 4

Введем понятие обратной функции:

$$y = f(x) : D \to E$$

если каждому y из множества Y ПОСТАВИТЬ В СООТВЕТСТВИЕ ЗНАЧЕНИЕ x из D то получим обратную функцию.

$$x = f^{-1}(y)$$

Теорема 5(о непрерывности обратной функции)
Пусть $y = f(x)$ непрерывна, строго возрастает(убывает) на [a,b] $f(a) = A, \quad f(b) = B \quad A < B(A > B)$, тогда обратная функция $x = f^{-1}(y)$ определена на [A,B] непрерывно и является возрастающей(убывающей)

Теорема Элементарные функции
$y = kx + b; \quad y = x^x; \quad y = \sin x; y = \ln_a x; \quad y = a^x \ldots$, эти функции непрерывны на всей области определения.

2.5 Параграф 5. Сравнение Ассимптотического поведения функции.

– это поведение функции вблизи некоторой точки.

Пусть $\alpha(x), \beta(x)$ б.м в окресности точки x_0, т.е $\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = \lim_{x \to x_0} \beta(x) = 0$

Определение:
Функция $\alpha(x)$ называтеся бесконечно малой более высокого порядка чем $\beta(x)$ если $\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$

$$\alpha(x) = o(\beta(x))$$

о – 'о' малое(не нуль)

Определение:
Функция $\alpha(x) \quad \beta(x)$ б.м одного порядка если $\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \neq 0 \neq inf$
$\alpha(x) \quad \beta(x)$ назыв эквивалентными б.м огранич при $x \to x_0$ если предел отношения равен 1($\alpha(x) \sim \beta(x) : x \to x_0$)

Теорема
Если $\alpha(x) \sim \alpha_1(x); \beta(x) \sim \beta_1(x)$ то

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$$

Таблица эквивалентных б.м при $x \to x_0$:

$$\sin x \sim x \quad (1)$$
$$\operatorname{tg} x \sim x \quad (2)$$
$$\arcsin x \sim x \quad (3)$$
$$\operatorname{arcctg} x \sim x \quad (4)$$
$$\ln(1+x) \sim x \quad (5)$$
$$\frac{a^x - 1}{\ln a} \sim x \quad (6)$$
$$\frac{(1+x)^a - 1}{a} \sim x \quad (7)$$
$$e^x - 1 \sim x \quad (8)$$

3 Глава. Дифференциальное исчесление функции одной переменной

3.1 Параграф 1. Понятие производной функции

$$y = f(x)$$
$$\Delta x = x - x_0$$
$$x = x_0 + \Delta x$$
$$\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

Производная – производная функции в точки x_0 называется

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{d}{dx} f(x) = f'(x) \quad (9)$$

Левая производная:

$$f'_-(x) = f'(x-0) = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (10)$$

Правая производная:

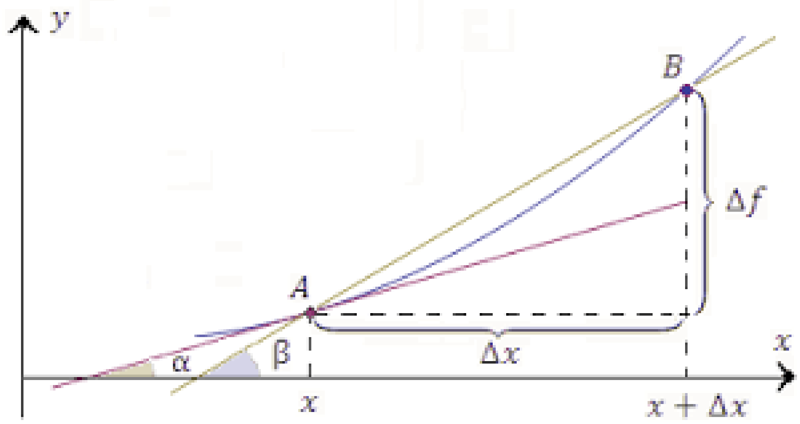
$$f'_+(x) = f'(x+0) = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (11)$$

Связь левой и правой производной

$$\exists f'(x) \Leftrightarrow \exists f'_-(x) = f'_+(x) = f'(x)$$

3.1.1 интерпретации производной

1)Геометрическая:



AB – секущая(при $\Delta x \to 0$ называется касательной)
$\Delta x \to 0 \Rightarrow \beta \to \alpha \Rightarrow \quad \operatorname{tg}\beta \to \operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{tg}\beta = \frac{\Delta y}{\Delta x}; \quad \operatorname{tg}\alpha = f'(x)$
$y_k = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ – уравнение касательной
$y_n = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)} - (x - x_0)$ – уравнение нормали

опр. Функция называется дифференцируемой в точку x_0 если приращение можно представить в виде $y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$, где A незавитсамая переменная($\Delta x \to 0$) .

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$$

Теорема 1(связь между дифференциироваемостью и существованием производной)
Для того чтобу функция $f(x)$ была дифференциируема в точке x_0 необходимо чтобы она имела производную в точке x_0

Теорема 2(связь между диф и непрерывностью)
Если f(x) диф в точке x_0 то она непрерывна в этой точке(обратное не работает)

2)Физическая(мгновенная и средняя скорости):

$$s = f(t) \quad v_m = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

– это скорость изменения функции.

3.2 Основные правила дифференциирования

$$\frac{d}{dx}(c) = 0, c = const \tag{12}$$

$$\frac{d}{dx}(u \pm v) = u' \pm v' \tag{13}$$

$$\frac{d}{dx}(uv) = u'v + uv' \tag{14}$$

$$\frac{d}{dx}cu = cu', c = const \tag{15}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'v - uv'}{v^2} \tag{16}$$

Гиперболические функции:

Гиперболический синус:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Гиперболический косинус:

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Гиперболический тангенс и котангенс:

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \quad \operatorname{cth} x = \frac{1}{\operatorname{th} x}$$

Понятие о частных производных

$$f(x, y)$$

$$f'_x = \frac{\partial f}{\partial x} \quad y = const$$

$$f'_y = \frac{\partial f}{\partial y} \quad x = const$$

3.3 Производная сложной функции

$$\frac{d}{dx}f(u(x)) = u'(x) \cdot f'(u(x)) \tag{17}$$

Производная обратной функции

$$y = f(x), f'(x) \neq 0, \exists x = f^{-1}(y), \Rightarrow x'_y = \frac{1}{y'_x} \tag{18}$$

3.3.1 Производная функции заданной в параметрическом виде

$$x = f(t) \quad and \quad y = g(t) : x' \neq 0 \Rightarrow t = f^{-1}(x) \quad t'_x = \frac{1}{x'_t}$$
$$y = y(x) = y(x(t)) : y'_x = y'_t t'_x = y'_t \frac{1}{x'_t} = \frac{y'_t}{x'_t}$$

3.3.2 Дифференциирование функции заданной неявно

Рассмотрим неявно заданную функцию, т.е когда функця $y = y(x)$ задается равенством вида $F(x, y) = 0$.
Чтобы найти производную функции заданной неявно нужно диф-вать равенство $F(x, y) = 0$ по переменной x при этом y считаем функцией от x.

$$y'_x = \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{F'_x}{F'_y}$$

3.4 Дифференциал функции

$\Delta f = f'(x)\Delta x + o(\Delta x)$

Дифференциал функции –

$$\Delta f = f'(x)\Delta x$$

в дальнейшем: $df = f'(x)dx$
следствие:

$$f'(x) = \frac{df}{dx}$$

св-ва(теже что и у производной)+ свойство инвариантности(сохранения формы):
1)для первого порядка: $y(u(x)) : dy = y'_x dx = y'_x u'_x dx = y'_u du$
Дифференциал первого порядка функции y выражается по одной и тойже

формуле независимо от того будет ли y рассматриватся как функция от независимой переменной x или от зависимой переменной u.

3.4.1 Применение дифференциала в приближенных вычеслениях

При малом Δx : $\quad \Delta y = dy = f'(x)\Delta x = f(x+\Delta x) - f(x) \simeq f(x) + f'(x)\Delta x$

3.5 Производные и дифференциалы высших порядков

Производная от производной функции называется производной второго порядка:

$$\begin{aligned} y'' = (y')' = y^{(2)} \\ ... \\ y^{(n)} \end{aligned}$$

Дифференциалом второго порядка называется дифференциал от дифференциала, рассматривоемого как функция только от переменной x (при постоянном dx):

$$\begin{aligned} d^2y = d(dy) = d(f'(x)dx) = (f'(x)dx)'dx = f''(x)dxdx = f''(x)dx^2 \\ ... \\ d^ny = f^{(n)}(x)(dx)^n \end{aligned}$$

свойства инвариантности дифференциалы высшего порядка не обладает.

3.6 Теоремы о средних значениях

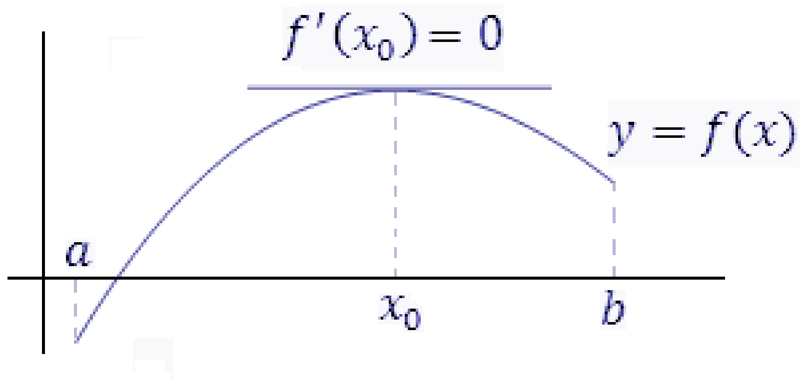
Опр.
$f(x)$ достигает точки $x = c$ локальный максимум(минимум) если существует окресность этой точки в которой выполняется: $f(c) \geq f(x) \quad \forall x \in \cup(c) \quad (f(c) \leq f(x) \quad \forall x \in \cup(c))$, также называется экстремум(extr)

Теорема Ферма(необходимое условие существования extr)
Если $f(x)$ имеет производную в точку c и достигает в этой точке локального экстремума то производная в этой точку равна нулю.

$$f'(c) = 0$$

Теорема Ролля
Если $y = f(x)$ на отрезки AB, дифференцируема на этом же промежутке и значение функции на концах совпадают, то существует точка ξ т.ч $f'(x) = 0$

Геометрический смысл:
Если выполнены условия теоремы, то на графики функции существует точка $(\xi, f(\xi))$ касательная

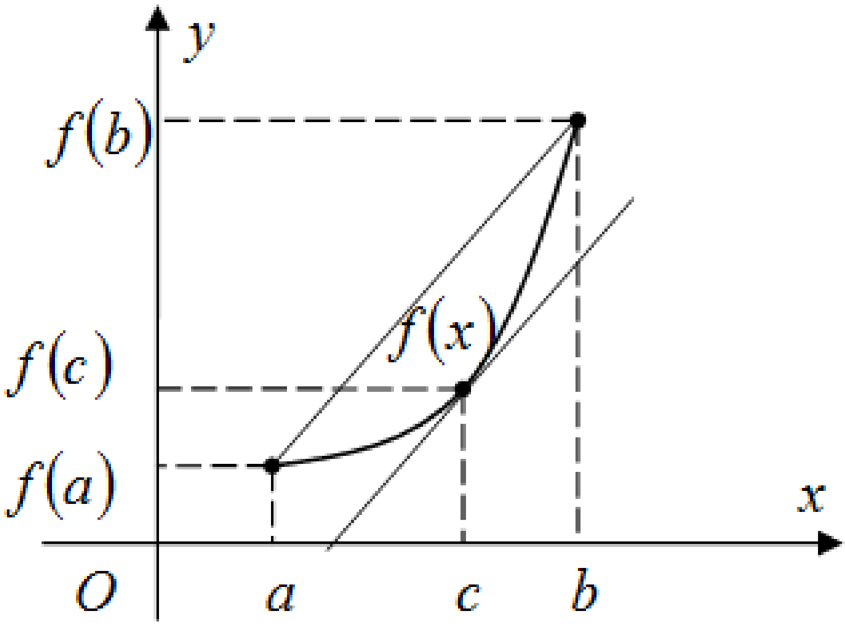


Теорема Коши:
Если f(x),g(x) непрерывны на отрезке AB,f(x) и g(x) дифференцируемы на (a,b),g'(x) $\neq 0$, $\exists \xi \in (a,b)$,

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Теорема Лагранжа
Пусть f(x) непрерывна на AB и дифференциируема на (a,b), тогда существует точка $\xi \in (a,b)$: $\quad f(b) = f(a) = f'(\xi)(b-a)$

Геометрический смысл Т. Лагранжа:



Следствие – $f'(x) = 0 \Rightarrow f(x) = const$

3.7 Параграф. Правила Лопиталя(раскрытие неопределенности)

Пусть выполнены условия:
1)f(x),g(x) дифференциируемы в окресности точки A, за исключением ,быть может, самой точки A.
2)g'(x) $\neq 0$ в окреснoти A
3)$\lim_{x\to A} \frac{f(x)}{g(x)} = \left\{\frac{0}{0}\right\} \quad or \quad \left\{\frac{inf}{inf}\right\}$
4)$\exists \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

Упр. $\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cos(\frac{1}{x})}{\sin x}$

3.8 Параграф. Формула Тейлора.

Задача: представить функцию f(x) в некоторой окресности точки A в виде многочлена относительно разности $x - a$ (разложить по степеням).

Пусть f(x) имеет производную до n-ого порядка включительно,
Опр.

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + r_n(x)$$

Локальная Теорема Тейлора
Если f(x) - непрерывно-дифференцииррованна n раз в окресности A ($f(x), f'(x), \ldots, f^{(n)}(x)$– непрерывно дифференциируема),то $r_n(x) = o((x-a)^n)$, записываем в форме Пеано.

Формы записи остатка по Коши и Лагранжу:

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-a)$$
$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)}(x-a)^{n+1}$$

Замечания(формула Маклорена) – если в формуле Тейлора вместо a взять нуль

$$f(x) = f(0) + f'(0)(x) + \frac{f''(0)}{2!}(x)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x)^n + r_n(x)$$

3.9 Параграф. Признаки монотонности

Опр. $x_1 < x_2, \quad f(x)$ называется возрастающей если $f(x_1) < f(x_2)$, неубывающая $f(x_1) \leq f(x_2)$, убывающей $f(x_1) > f(x_2)$, невозрастающей $f(x_1) \geq f(x_2)$
Во всех случаях функция называется монотонной(в 1 и 3 строго монотонной).

Теорема(Признак монотонности функции)
$f(x)$- дифференцируема на AB и $f'(x) > 0 (f'(x) < 0) : \forall x \in AB$, тогда $f(x)$ возрастает(убывает) на AB.

Правило исследования на возрастание(убывание)

1) находим точки в которых $f'(x) = 0$ или несуществует, эти точки называются критическими точками первого рода, они разбивают область определения на интервалы монотонности
2) исследуем знак производной на каждом интервале
3) определяем, возрастает или убывает

Теорема(Первый достаточный признак существования экстремума)
f(x) непрерывна в некоторой окресности точки x_0 и дифференциируема в каждой её точке за исключением быть может точки x_0. Если при переходе через x_0 производная меняет знак, то точки x_0 точка экстремума.

Теорема(Второй достаточный признак существования экстремума)
Пусть в окресности x_0 $f(x)$ непрерывно дифференцируема $(n+1)$ раз $(f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n)}(x_0) = 0 \quad f^{(n+1)}(x_0) \neq 0\ )$. Тогда если (n+1) нечетное число - в x_0 нет экстремума, четное - есть экстремум, причем если $f^{(n+1)}(x_0) < (>) 0 : x_0 - max(min)$

Упр. Доказать общий случай.

Литература

Кудрявцев А.Д Курс математического анализа
Фихтенгольц Г.М Основы математического анализа
Демидович Б.П Сборник задач и упражнений по математическому анализу