

Математический анализ

Алла Владимировна Устюжанова

21 ноября 2019 г.

(323Л или 407Л для ответов по вопросам в 17:30 по четвергам)

Лекция 1

1 Глава 1. Введение.

1.1 Параграф 1: Множества операции над множествами

Кванторы:

$$\forall \quad \exists$$

Множество – это совокупность каких-либо предметов(элементов).

$$A \subseteq B, \quad x \in A, \quad x \notin B, \quad A \in B$$

Операции:

1. $A \cup B$ – это множество каждый элемент которого принадлежит хотя бы одному из множеств A или B

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ or } x \in B\}$$

2. $A \cap B$ – это множество каждый элемент которого принадлежит одновременно и A и B

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ and } x \in B\}$$

3. $A \setminus B$ – (Разность)

$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ but } x \notin B\}$$

4. $C A = \bar{A}$ – (Дополнение)

$$C A = \bar{A} = S \setminus A$$

Виды множеств:
 $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$

1.2 Абсолютная величина

$$|x| = \{x \quad x \geq 0 \quad or \quad -x \quad x \leq 0\}$$

Свойства:

1. Неравенство треугольника

$$|x + y| = |x| + |y|$$

Док-во: пусть $x + y \geq 0 \Rightarrow |x + y| = x + y = |x| + |y|$

Док-во: пусть $x + y < 0 \Rightarrow |x + y| = x + (-y) < |x| + |y|$

2. $|x - y| = |x| - |y|$ если $|x| > |y|$ 3. $|xyz| = |x||y||z|$ 4. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ $\text{sgn } x =$
 $\{1 \quad x > 0 \quad 0 \quad x = 0\}$

Бином Ньютона:

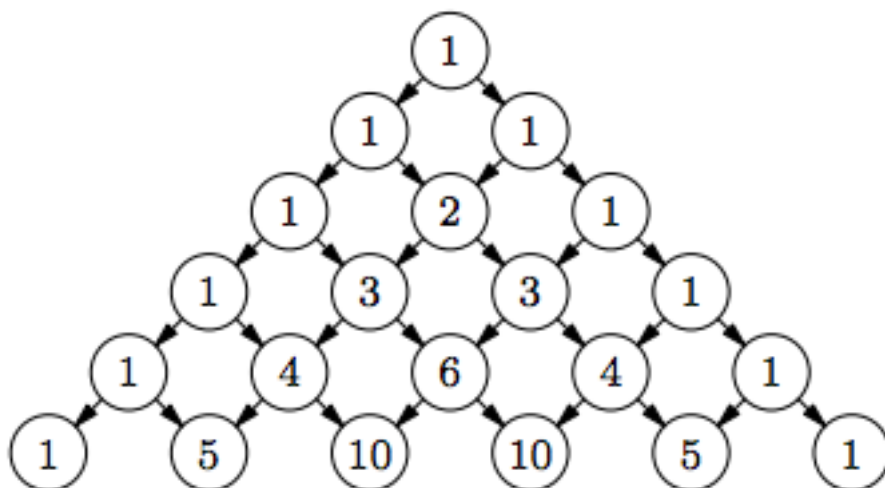
$$(a + b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + b^n$$

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$$

$$0! = 1$$

Треугольник Паскаля:



1.2.1 Упражнения

1. $A = \{1, 2, 3\}$ $B = \{2, 3, 4, 5\}$ $A \cup B$?
2. $A = \{x \in \mathbb{N} : 2 < x < 4\}$ $B = \{x \in \mathbb{N} : 2 < x < 4\}$ $C = \{x \in \mathbb{N} : 2 < x < 4\}$ $B \cup C$?, $A \cap B \cap C$, $A \cup B \cup C$?
3. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$?
4. $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$
5. $(1 - x)^5 = ?$
6. $\left(\frac{2}{x} + 3\sqrt{x}\right)^4$

2 Глава 2. Предел и непрерывность.

Курс: Мат анализ (фтф:ИВТ)
код слово: предел

2.1 Параграф 1. Предел псоледовательности

Предел – пусть каждому натуральному числу N по некоторому закону поставленно в соответствие действительное число x_n тогда говорят что определена числовая последовательность $\{x\} = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$
Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$ если для всякого

действительного числа $\epsilon > 0$ найдется зависящее от ϵ число такое что выполняется неравенство $|x_n - a| < \epsilon$ для всех натуральных чисел $n > n_0$.

Обозначение:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad (x_n \rightarrow a \quad n \rightarrow \infty)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 = n_0(\epsilon) : \forall n > n_0 \quad |x_n - a| < \epsilon$$

Пример: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$
 $|\frac{1}{n}| < \epsilon, \quad \frac{1}{n} < \epsilon, \quad n > \frac{1}{\epsilon}, \quad n_0 = [\frac{1}{\epsilon}] + 1 \quad \forall \epsilon > 0$
 чтд.

Произвольный интервал AB содержащий точку C называется окрестностью этой точки

$$U(C)$$

Эпсилон окрестность:

$$U(\epsilon) \quad U_\epsilon(\epsilon) = \dot{U}_\epsilon(\epsilon) \setminus c$$

Число(точка) a является пределом последовательности x_n если для любого эпсилон больше нуля найдется число n_0 такое что все точки x_n с индексами $n > n_0$ попадут в ϵ окрестность точки a . Вне любой окрестности точки a имеется конечная или пустое множество точек x_n .

Лекция 2

Теорема 1: Если последовательность x_n имеет конечный предел, то он единственный.

Док-во: x_n имеет два различных предела a и b .

рассмотрим окрестность cd , тк $x_n \rightarrow a$, то ляляля, тогда в интервале не может содержаться бесконечное число элементов, те последовательность x_n не может стремиться к b .

Теорема 2: Если последовательность сходится(имеет прредел), то она ограничена. Опр: если $|x_n| \leq M$, $M = const$, то x_n наз ограниченной

Теорема 3(придельный переход в неравенствах):

а) Если $x_n \rightarrow a$, $y_n \rightarrow b$, $a < b$, то $\exists n_0 \forall n > n_0 \quad x_n < y_n$

б) Если $x_n \rightarrow a$, $y_n \rightarrow b$, $x_n \leq y_n \quad \forall n$, то $a \leq b$

Теорема 4(принцип "двух милиционеров"):

Если $x_n \rightarrow a$, $y_n \rightarrow a$ and $x_n \leq z_n \leq y_n \quad \forall n \in N$ then $z_n \rightarrow a$

Теорема 5(Арифметические свойства пределов):

1) $\lim_{n \rightarrow \inf} c = c$, $c = \text{const}$

2) if \exists ending $\lim_{n \rightarrow \inf} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \inf} y_n = b$ then существуют пределы их суммы, разности, произведения, частного($b \neq 0$):

$$a) \lim_{n \rightarrow \inf} (x_n \pm y_n) = a \pm b$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \inf} (x_n y_n) = ab$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \inf} \left(\frac{x_n}{y_n} \right) = \frac{a}{b}, \quad \text{where } b \neq 0$$

Определение: x_n называется бесконечно малой если предел последовательности равен 0

Определение: y_n называется бесконечно большой если предел последовательности равен бесконечности

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 : \quad \forall n > n_0 \quad |y_n| > \epsilon$$

Свойства:

1) произведение бесконечно малой на ограниченное является бесконечно малой

2.2 Параграф 2. Предел функции

– Функцией называется закон по которому каждому x из некоторого множества D соответствует единственное значение y из множества E

$$y = f(x)$$

$$f : D \rightarrow E$$

где x – независимая переменная, аргумент

y – зависимая переменная

D – область определения

E – область значения

Определение предела функции

1. по Коши(с помощью окрестности):

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall U_\epsilon(A) \exists U_\epsilon(x_0) \forall x \in U_\epsilon(x_0) \Rightarrow f(x) \in U_\epsilon(A)$$

с помощью неравенства:

$$a) x_0, A - \text{ending} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = (A) \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists b > 0 : 0 < |x - x_0| < b \Rightarrow |f(x) - A| < \epsilon$$

$$b) x_0 - \text{ending}, A = +\inf \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\inf \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > \epsilon$$

$$c) x_0 - \text{ending}, A = -\inf \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\inf \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -\epsilon$$

$$d) x_0 - \text{ending}, A = \inf \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \inf \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x| > \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \epsilon$$

2) по Гейне(с помощью предела последовательности):

$$A = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \Leftrightarrow \forall x_n \rightarrow x_0 \quad n \rightarrow \inf, \quad x_n \neq x_0$$

Соответствующая последовательность значений функции

$$f(x_n) \rightarrow A \quad n \rightarrow \inf$$

Теорема 1(Арифметические свойства пределов функции):

Пусть существует конечные пределы функции

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$$

тогда предел суммы(разности) равен пределу суммы(разности)

произведения = произведению

частного = частному

ограниченна в некоторых окрестностях точки x_0

Теорема 2 (предельный переход в неравенство):

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B, \quad \exists U(x_0), f(x) < g(x) \quad f(x) \in U(x_0)$$

Лекция 3

Введем понятие сложной функции:

$$f : X \rightarrow Y \quad y = f(x)$$

$$g : Y \rightarrow R \quad g(y)$$

$$h : X \rightarrow R \quad h(x) = g(f(x)) = g \circ f$$

Теорема 3(предел сложной функции):

пусть $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0, f(x) \neq y_0, x \neq x_0, \exists \lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = A \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = A$

Теорема 4(критерий Коши):

Функция $f(x)$ имеет предел в точке x_0 тогда и только тогда выполнения условия $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall x', x'' : \quad |x' - x_0| < \delta$

$$|f(x') - f(x'')| < \epsilon$$

Односторонние пределы

–

Предел с лево($x \rightarrow -0$):

$$A = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0) \quad \Leftrightarrow$$

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : x_0 - \delta < x < x_0 \quad \Rightarrow \quad |f(x) - A| < \epsilon$$

Предел с право($x \rightarrow +0$):

$$A = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0) \quad \Leftrightarrow$$

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : x_0 < x < x_0 + \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - A| < \epsilon$$

Замечание:

1) Функция имеет предел при $x \rightarrow x_0$, когда существуют левый и правый пределы равные между собой.

2) Если $A = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ то

$$f(x) = A + \alpha(x) \quad \alpha(x) \rightarrow 0$$

2.3 Параграф 3. Замечательные пределы

1ый замечательный предел:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

следствие

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin \alpha(x)}{\alpha(x)} = 1$$

2ой замечательный предел

$$\lim_{x \rightarrow +inf} 1 + \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow -inf} (1 + \frac{1}{x})^x = \lim_{x \rightarrow inf} (1 + \frac{1}{x})^x = e \simeq 2.718281828 \dots$$

следствие

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$$

2.4 Параграф 4. Непрерывность функции

– Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 , если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Функция непрерывна на множестве D если она непрерывна к каждой точке этого множества. Если одно из условий непрерывности не выполняется, то функция не является непрерывной в этой точке.

Точка разрыва – это когда $f(x)$ определена проколотой окрестностью этой точки и не является непрерывной в точке x_0

2.4.1 Классификация точек разрыва

а) x_0 называется точкой устранимого разрыва $f(x)$, если существует предел функции при $x \rightarrow x_0$ (конечный предел), но функция либо не определена в x_0 , либо значение предела не совпадает со значением функции

б) x_0 называется точкой разрыва первого рода функции $f(x)$, если \exists ют конечные односторонние пределы.

с) x_0 называется точкой разрыва второго рода, если хотябы один из односторонних пределов не существует или является бесконечным.

2.4.2 Основные теоремы о непрерывных функциях

Теорема 1

Сумма, разность, произведение, частное (знаменатель не равен нулю) непрерывных функций также являются непрерывной функцией.

Теорема 2 (непрерывность сложной функции)

Пусть сложная функция определена в окрестности x_0 , пусть функция $y = g(x)$ непрерывна в точке x_0 , внешняя функция $y_0 = f(x_0)$ непрерывная в точке y_0 , тогда $f(g(x))$ непрерывна в x_0 .

Теорема 3 (о промежуточном значении)

Пусть $f(x)$ непрерывна на AB и на его концах принимает значения разных знаков, тогда существует точка c внутри AB , $f(c) = 0$.

Теорема 4 (о макс значении Вейерштрасса):

Функция $f(x)$ непрерывная на AB является ограниченной на этом отрезке и при этом существует точка x_1 из AB такая что x_1 максимальное значение функции, также есть точка x_2 которая является минимальным значением функции.

Следствие теоремы 3: Если $\phi(x)$ непрерывна на AB , то найдется точка c из интервала AB , $\phi(x = c) = C$

Лекция 4

Введем понятие обратной функции:

$$y = f(x) : D \rightarrow E$$

если каждому y из множества Y ПОСТАВИТЬ В СООТВЕТСТВИЕ ЗНАЧЕНИЕ x из D то получим обратную функцию.

$$x = f^{-1}(y)$$

Теорема 5 (о непрерывности обратной функции)

Пусть $y = f(x)$ непрерывна, строго возрастает (убывает) на $[a, b]$, $f(a) = A$, $f(b) = B$, $A < B$ ($A > B$), тогда обратная функция $x = f^{-1}(y)$ определена на $[A, B]$ непрерывно и является возрастающей (убывающей).

Теорема Элементарные функции

$y = kx + b$; $y = x^x$; $y = \sin x$; $y = \ln_a x$; $y = a^x \dots$, эти функции непрерывны на всей области определения.

2.5 Параграф 5. Сравнение Асимптотического поведения функции.

– это поведение функции вблизи некоторой точки.

Пусть $\alpha(x), \beta(x)$ б.м в окрестности точки x_0 , т.е. $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \beta(x) = 0$

Определение:

Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой более высокого порядка чем $\beta(x)$ если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$

$$\alpha(x) = o(\beta(x))$$

o – 'о' малое (не ноль)

Определение:

Функция $\alpha(x)$ $\beta(x)$ б.м одного порядка если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \neq 0 \neq \inf$
 $\alpha(x)$ $\beta(x)$ назыв эквивалентными б.м огранич при $x \rightarrow x_0$ если предел отношения равен 1 ($\alpha(x) \sim \beta(x) : x \rightarrow x_0$)

Теорема

Если $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$; $\beta(x) \sim \beta_1(x)$ то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$$

Таблица эквивалентных б.м при $x \rightarrow x_0$:

$$\sin x \sim x \quad (1)$$

$$\operatorname{tg} x \sim x \quad (2)$$

$$\arcsin x \sim x \quad (3)$$

$$\operatorname{arcctg} x \sim x \quad (4)$$

$$\ln(1+x) \sim x \quad (5)$$

$$\frac{a^x - 1}{\ln a} \sim x \quad (6)$$

$$\frac{(1+x)^a - 1}{a} \sim x \quad (7)$$

$$e^x - 1 \sim x \quad (8)$$

3 Глава. Дифференциальное исчисление функции одной переменной

3.1 Параграф 1. Понятие производной функции

$$y = f(x)$$

$$\Delta x = x - x_0$$

$$x = x_0 + \Delta x$$

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

Производная – производная функции в точки x_0 называется

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{d}{dx} f(x) = f'(x) \quad (9)$$

Левая производная:

$$f'_-(x) = f'(x-0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (10)$$

Правая производная:

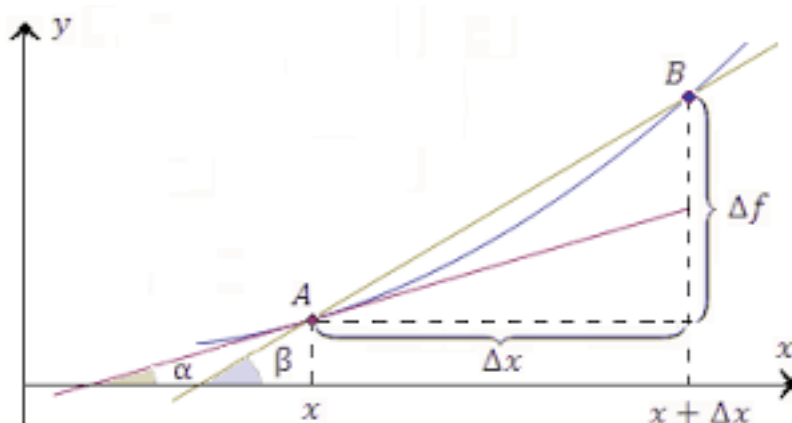
$$f'_+(x) = f'(x+0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (11)$$

Связь левой и правой производной

$$\exists f'(x) \Leftrightarrow \exists f'_-(x) = f'_+(x) = f'(x)$$

3.1.1 интерпретации производной

1) Геометрическая:



AB – секущая (при $\Delta x \rightarrow 0$ называется касательной)

$\Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow \beta \rightarrow \alpha \Rightarrow \operatorname{tg} \beta \rightarrow \operatorname{tg} \alpha$

$\operatorname{tg} \beta = \frac{\Delta y}{\Delta x}; \quad \operatorname{tg} \alpha = f'(x)$

$y_k = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ – уравнение касательной

$y_n = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$ – уравнение нормали

опр. Функция называется дифференцируемой в точку x_0 если приращение можно представить в виде $y = A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$, где A независимая переменная ($\Delta x \rightarrow 0$).

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$$

Теорема 1 (связь между дифференцируемостью и существованием производной)

Для того чтобы функция $f(x)$ была дифференцируема в точке x_0 необходимо чтобы она имела производную в точке x_0

Теорема 2 (связь между диф и непрерывностью)

Если $f(x)$ диф в точке x_0 то она непрерывна в этой точке (обратное не работает)

2) Физическая (мгновенная и средняя скорости):

$$s = f(t) \quad v_m = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

– это скорость изменения функции.

3.2 Основные правила дифференцирования

$$\frac{d}{dx}(c) = 0, c = \text{const} \quad (12)$$

$$\frac{d}{dx}(u \pm v) = u' \pm v' \quad (13)$$

$$\frac{d}{dx}(uv) = u'v + uv' \quad (14)$$

$$\frac{d}{dx}cu = cu', c = \text{const} \quad (15)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (16)$$

Гиперболические функции:

Гиперболический синус:

$$\text{sh } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Гиперболический косинус:

$$\text{ch } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Гиперболический тангенс и котангенс:

$$\text{th } x = \frac{\text{sh } x}{\text{ch } x} \quad \text{cth } x = \frac{1}{\text{th } x}$$

Понятие о частных производных

$$f(x, y)$$

$$f'_x = \frac{\partial f}{\partial x} \quad y = \text{const}$$

$$f'_y = \frac{\partial f}{\partial y} \quad x = \text{const}$$

3.3 Производная сложной функции

$$\frac{d}{dx}f(u(x)) = u'(x) \cdot f'(u(x)) \quad (17)$$

Производная обратной функции

$$y = f(x), f'(x) \neq 0, \exists x = f^{-1}(y), \Rightarrow x'_y = \frac{1}{y'_x} \quad (18)$$

3.3.1 Производная функции заданной в параметрическом виде

$$\begin{aligned} x = f(t) \quad \text{and} \quad y = g(t) : x' \neq 0 &\Rightarrow t = f^{-1}(x) \quad t'_x = \frac{1}{x'_t} \\ y = y(x) = y(x(t)) : y'_x &= y'_t t'_x = y'_t \frac{1}{x'_t} = \frac{y'_t}{x'_t} \end{aligned}$$

3.3.2 Дифференцирование функции заданной неявно

Рассмотрим неявно заданную функцию, т.е. когда функция $y = y(x)$ задается равенством вида $F(x, y) = 0$.

Чтобы найти производную функции заданной неявно нужно диф-вать равенство $F(x, y) = 0$ по переменной x при этом y считаем функцией от x .

$$y'_x = \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{F'_x}{F'_y}$$

3.4 Дифференциал функции

$$\Delta f = f'(x)\Delta x + o(\Delta x)$$

Дифференциал функции –

$$\Delta f = f'(x)\Delta x$$

в дальнейшем: $df = f'(x)dx$
следствие:

$$f'(x) = \frac{df}{dx}$$

св-ва (теже что и у производной) + свойство инвариантности (сохранения формы):

1) для первого порядка: $y(u(x)) : dy = y'_x dx = y'_x u'_x dx = y'_u du$

Дифференциал первого порядка функции y выражается по одной и той же

формуле независимо от того будет ли y рассматриваться как функция от независимой переменной x или от зависимой переменной u .

3.4.1 Применение дифференциала в приближенных вычислениях

При малом Δx : $\Delta y = dy = f'(x)\Delta x = f(x+\Delta x) - f(x) \simeq f(x) + f'(x)\Delta x$

3.5 Производные и дифференциалы высших порядков

Производная от производной функции называется производной второго порядка:

$$y'' = (y')' = y^{(2)} \\ \dots \\ y^{(n)}$$

Дифференциалом второго порядка называется дифференциал от дифференциала, рассматриваемого как функция только от переменной x (при постоянном dx):

$$d^2y = d(dy) = d(f'(x)dx) = (f'(x)dx)'dx = f''(x)dx dx = f''(x)dx^2 \\ \dots \\ d^ny = f^{(n)}(x)(dx)^n$$

свойства инвариантности дифференциалы высшего порядка не обладает.

3.6 Теоремы о средних значениях

Опр.

$f(x)$ достигает точки $x = c$ локальный максимум(минимум) если существует окрестность этой точки в которой выполняется: $f(c) \geq f(x) \quad \forall x \in U(c)$ ($f(c) \leq f(x) \quad \forall x \in U(c)$), также называется экстремум(extr)

Теорема Ферма(необходимое условие существования extr)

Если $f(x)$ имеет производную в точку c и достигает в этой точке локального экстремума то производная в этой точке равна нулю.

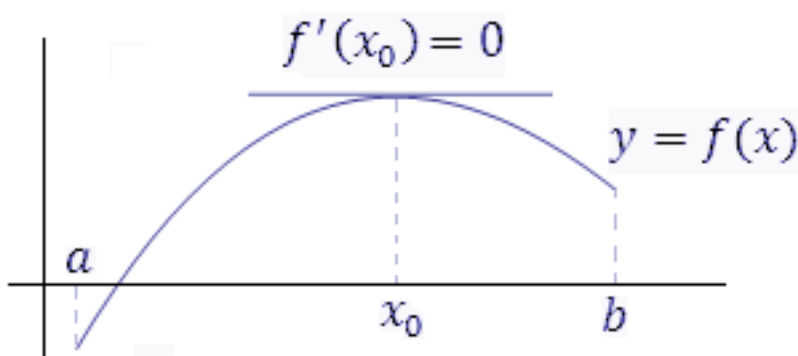
$$f'(c) = 0$$

Теорема Ролля

Если $y = f(x)$ на отрезке АВ, дифференцируема на этом же промежутке и значение функции на концах совпадают, то существует точка ξ т.ч $f'(\xi) = 0$

Геометрический смысл:

Если выполнены условия теоремы, то на графике функции существует точка $(\xi, f(\xi))$ касательная



Теорема Коши:

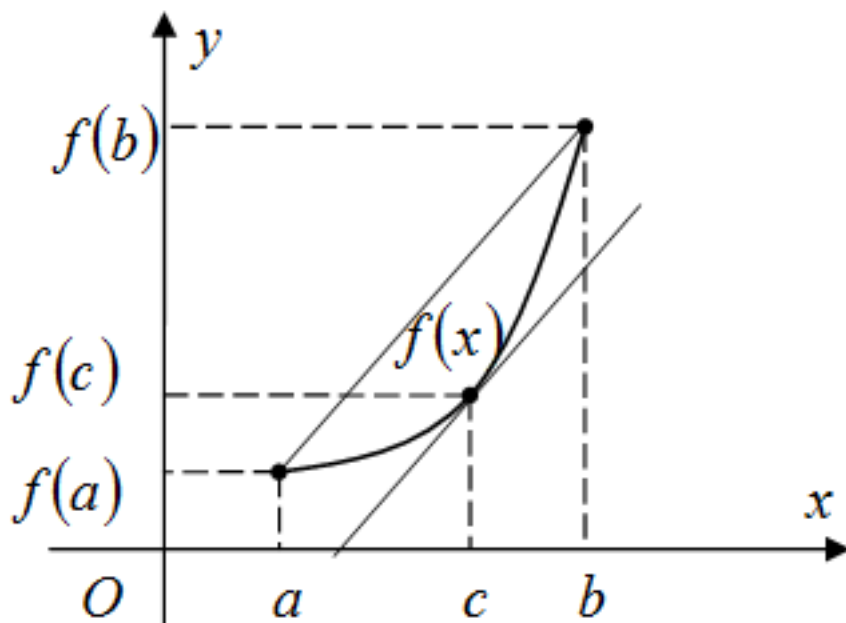
Если $f(x), g(x)$ непрерывны на отрезке АВ, $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы на (a, b) , $g'(x) \neq 0$, $\exists \xi \in (a, b)$,

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Теорема Лагранжа

Пусть $f(x)$ непрерывна на АВ и дифференцируема на (a, b) , тогда существует точка $\xi \in (a, b)$: $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$

Геометрический смысл Т. Лагранжа:



Следствие – $f'(x) = 0 \Rightarrow f(x) = const$

3.7 Параграф. Правила Лопиталя(раскрытие неопределенности)

Пусть выполнены условия:

1) $f(x), g(x)$ дифференцируемы в окрестности точки A , за исключением, быть может, самой точки A .

2) $g'(x) \neq 0$ в окрестности A

3) $\lim_{x \rightarrow A} \frac{f(x)}{g(x)} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} \quad or \quad \left\{ \frac{inf}{inf} \right\}$

4) $\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

Упр. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos(\frac{1}{x})}{\sin x}$

3.8 Параграф. Формула Тейлора.

Задача: представить функцию $f(x)$ в некоторой окрестности точки A в виде многочлена относительно разности $x - a$ (разложить по степеням).

Пусть $f(x)$ имеет производную до n -ого порядка включительно,
Опр.

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + r_n(x)$$

Локальная Теорема Тейлора

Если $f(x)$ - непрерывно-дифференцируема n раз в окрестности A ($f(x), f'(x), \dots, f^{(n)}(x)$ - непрерывно дифференцируема), то $r_n(x) = o((x - a)^n)$, записываем в форме Пеано.

Формы записи остатка по Коши и Лагранжу:

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x - \xi)^n(x - a)$$
$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)}(x - a)^{n+1}$$

Замечания(формула Маклорена) – если в формуле Тейлора вместо a взять нуль

$$f(x) = f(0) + f'(0)(x) + \frac{f''(0)}{2!}(x)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x)^n + r_n(x)$$

3.9 Параграф. Признаки монотонности

Опр. $x_1 < x_2$, $f(x)$ называется возрастающей если $f(x_1) < f(x_2)$, неубывающая $f(x_1) \leq f(x_2)$, убывающей $f(x_1) > f(x_2)$, невозрастающей $f(x_1) \geq f(x_2)$

Во всех случаях функция называется монотонной (в 1 и 3 строго монотонной).

Теорема (Признак монотонности функции)

$f(x)$ - дифференцируема на AB и $f'(x) > 0 (f'(x) < 0) : \forall x \in AB$, тогда $f(x)$ возрастает(убывает) на AB .

Правило исследования на возрастание(убывание)

- 1) находим точки в которых $f'(x) = 0$ или не существует, эти точки называются критическими точками первого рода, они разбивают область определения на интервалы монотонности
- 2) исследуем знак производной на каждом интервале
- 3) определяем, возрастает или убывает

Теорема (Первый достаточный признак существования экстремума)

$f(x)$ непрерывна в некоторой окрестности точки x_0 и дифференцируема в каждой её точке за исключением быть может точки x_0 . Если при переходе через x_0 производная меняет знак, то точки x_0 точка экстремума.

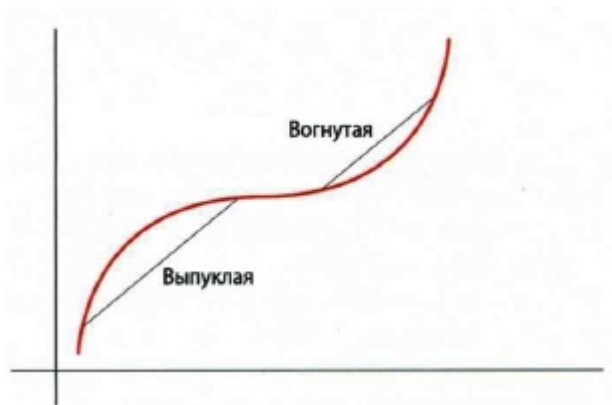
Теорема (Второй достаточный признак существования экстремума)

Пусть в окрестности x_0 $f(x)$ непрерывно дифференцируема $(n + 1)$ раз $(f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n)}(x_0) = 0 \quad f^{(n+1)}(x_0) \neq 0)$. Тогда если $(n+1)$ нечетное число - в x_0 нет экстремума, четное - есть экстремум, причем если $f^{(n+1)}(x_0) < (>) 0 : x_0 - \max(\min)$

Упр. Доказать общий случай.

3.10 Параграф. Выпуклость и вогнутость прямой, точки перегиба

График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется выпуклым(вверх) на интервале AB если графика на этом промежутке расположен ниже касательной, проведенной к графику этой функции в любой точки $x \in (a, b)$, если график расположен выше касательной то его называют вогнутым(выпуклым вниз).



Точка $(x_0, f(x_0))$ графика функции $y = f(x)$ называется точкой перегиба если она разделяет вогнутую и выпуклую части графика.

Теорема(необходимый и достаточный признак выпуклости и вогнутости)

Пусть $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на интервале AB , тогда график функции выпуклый(вогнутый) когда $f''(x) \leq 0 (f''(x) \geq 0) \quad \forall x \in (a, b)$

Теорема(необходимый признак существования точки перегиба)

Если точка x_0 - точка перегиба дважды непрерывно дифференцируемой функции $f(x)$ то $f''(x_0) = 0$

Замечание: функция может иметь точку перегиба и при $x = x_0$ который f'' не существует и поэтому возможными точками перегиба являются точки, в которых вторая производная равна нулю или не существует. Такие точки называются критическими точками второго рода.

Теорема(достаточный признак существования точки перегиба)

Пусть $f(x)$ определена в окрестности критической точки второго рода x_0 и дважды непрерывно дифференцируема хотябы в проколотой окрестности точки x_0 . Если $f''(x)$ меняет знак при переходе x_0 , то точка x_0 - точка перегиба.

3.11 Параграф. Асимптоты графиков функций

Прямая $L : Ax + By + c = 0$ называется асимптотой графика функции $y = f(x)$ если расстояние d от точки $M(x, f(x))$ до прямой стремится к нулю при неограниченном возрастании модуля $|f(x)|$

Если $B = 0 \Rightarrow x = a$ - вертикальная

Если $B \neq 0 \Rightarrow y = kx + b$ - наклонная

Если $k = 0 \Rightarrow y = b$ - горизонтальная

Теорема 1

Прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой когда выполняется хотябы одно из соотношений:

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \pm \infty$$
$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \pm \infty$$

Теорема 2

Прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой $y = f(x)$ когда существуют конечные пределы:

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x}$$
$$b = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} (f(x) - kx)$$

3.12 Параграф. План полного исследования функции и построение ее графика

- 1) найти область определения функции
- 2) является ли функция четной(нечетной), периодической
- 3) асимптоты, точки разрыва
- 4) найти промежутки возрастания, убывания, экстремумы(с помощью производной первого порядка)
- 5) найти промежутки вогнутости, выпуклости, точки перегиба(с помощью производной второго порядка)
- 6) построить график(для уточнения графика нужно найти точки пересечения с осями координат)

(только 8 задание из инд. зад)

4 Глава. Интегрирование функций одной переменной

4.1 Параграф. Неопределенный интеграл и его свойства

Опр. $F(x)$ – называется первообразной для $f(x)$ на (a,b) если $F'(x) = f(x)$.

Замечание: Если $F(x)$ – первообразная для $f(x)$, то $F(x) + c$ – тоже

Теорема 1

Если $F_1(x)$ $F_2(x)$ – первообразные для $f(x)$, то $F_1(x) - F_2(x) = const$

Опр. Множество всех первообразных для $f(x)$ называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$

$$\int (f(x)) dx = F(x) + c$$

Нахождение первообразной называется интегрированием.

Таблица интегралов:

$$\int (x^\alpha) dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad a \neq 1 \quad (19)$$

$$\int \left(\frac{1}{x}\right) dx = \ln |x| + c \quad (20)$$

$$\int (\sin x) dx = -\cos x + c \quad (21)$$

$$\int (\cos x) dx = \sin x + c \quad (22)$$

$$\int \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right) dx = \operatorname{tg} x + c \quad (23)$$

$$\int \left(\frac{1}{\sin^2 x}\right) dx = \operatorname{ctg} x + c \quad (24)$$

$$\int (e^x) dx = e^x + c \quad (25)$$

$$\int (a^x) dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \quad (26)$$

$$\int \left(\frac{1}{1+x^2}\right) dx = \operatorname{arctg} x + c \quad (27)$$

$$\int \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx = \arcsin x + c \quad (28)$$

$$\int \left(\frac{1}{a^2+x^2}\right) dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c \quad (29)$$

$$\int \left(\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\right) dx = \arcsin \frac{x}{a} + c \quad (30)$$

$$\int \left(\frac{1}{a^2-x^2}\right) dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + c \quad (31)$$

$$\dots \quad (32)$$

Основные свойства неопределенного интеграла:

- 1) операция интегрирования является обратной к дифференцированию
- 2) интеграл суммы равен сумме интегралов
- 3) константу можно вынести из под знака интеграла

4.2 Параграф. Формула замены переменной под знаком интеграла

$x = \phi(t)$ - монотонная и имеет непрерывную производную
 $f(x)$ - непрерывна на интервале принадлежащем области значения функции
 $x = \phi(t)$, т.е $f(\phi(t))$ - слож функция:

$$\int (f(x)) dx = \left| \begin{matrix} x = \phi(t) \\ dx = \phi'(t)dt \end{matrix} \right| = \int (f(\phi(t))\phi'(t)) dt$$

4.3 Параграф. Формула интегрирования по частям

Пусть $u(x), f(x)$ - дифференцируемые функции,

$$d(uv) = u dv + v du, \quad \int () d(uv) = uv$$

тогда:

$$\int (u) dv = uv - \int (v) du$$
$$\int (u(x)v'(x)) dx = u(x)v(x) - \int (u'(x)v(x)) dx$$

$P_n(x)$ - многочлен степени n

$$1) P_n(x) \cdot (\sin x; \cos x; e^x; a^x) dx : \quad u = P_n(x) \quad dv = (\sin x; \cos x; e^x; a^x) dx$$

$$2) \int \left(P_n(x) \begin{Bmatrix} \ln x \\ \operatorname{arctg} x \\ \arcsin x \end{Bmatrix} \right) dx : \quad u = \begin{Bmatrix} \ln x \\ \operatorname{arctg} x \\ \arcsin x \end{Bmatrix}$$

4.4 Какое-то кол-во пропущенных параграфов

.....

4.5 Параграф. Интегрирования параметрических функций

$$1) \int (R(\sin x, \cos x)) dx$$

Данный интеграл сводится к интегралу от рациональной дроби с помощью универсальной подстановки

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$$

$$\frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t \quad x = 2 \operatorname{arctg} t$$

$$dx = \frac{1}{1+t^2} dt$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\int (R(\sin x, \cos x)) dx = \int \left(R \left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2} \right) \right) \frac{2}{1+t^2} dt$$

Частные случаи:

а) Если $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, $R(,)$ является нечетной относительно синуса x

$$\Rightarrow t = \cos x$$

б) Если $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, $R(,)$ является нечетной относительно косинуса x

$$\Rightarrow t = \sin x$$

в) Если $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, $R(,)$ является четной

$$\Rightarrow t = \operatorname{tg} x$$

$$2) \int (\sin^{2n} x \cos^{2m} x) dx$$

Применять формулу понижения степени

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin^2 x,$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$3) \int (\sin \alpha \cos \beta) dx$$

При разных углах

$$\sin \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta)x + \sin(\alpha - \beta)x]$$

$$\cos \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta)x + \cos(\alpha - \beta)x]$$

$$\sin \alpha x \sin \beta x = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta)x - \cos(\alpha + \beta)x]$$

4.6 Параграф. Интегрирования иррациональных функций

$$1) \int R \left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+b}}, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+b}} \right) dx$$

Вычисляем наименьшее общее кратное(s) чисел n-m

$$t = \sqrt[s]{\frac{ax+b}{cx+b}}$$

Такая замена приводит к интегралу от рациональной дроби

$$2) a) \int R \left(x, \sqrt{a^2 - x^2} \right) dx$$

Делается замена

$$\begin{aligned} x &= a \sin t \\ \sqrt{a^2 - x^2} &= \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} = \\ &= a \sqrt{1 - \sin^2 t} = a \sqrt{\cos^2 t} \end{aligned}$$

$$b) \int R \left(x, \sqrt{a^2 + x^2} \right) dx$$

Замена

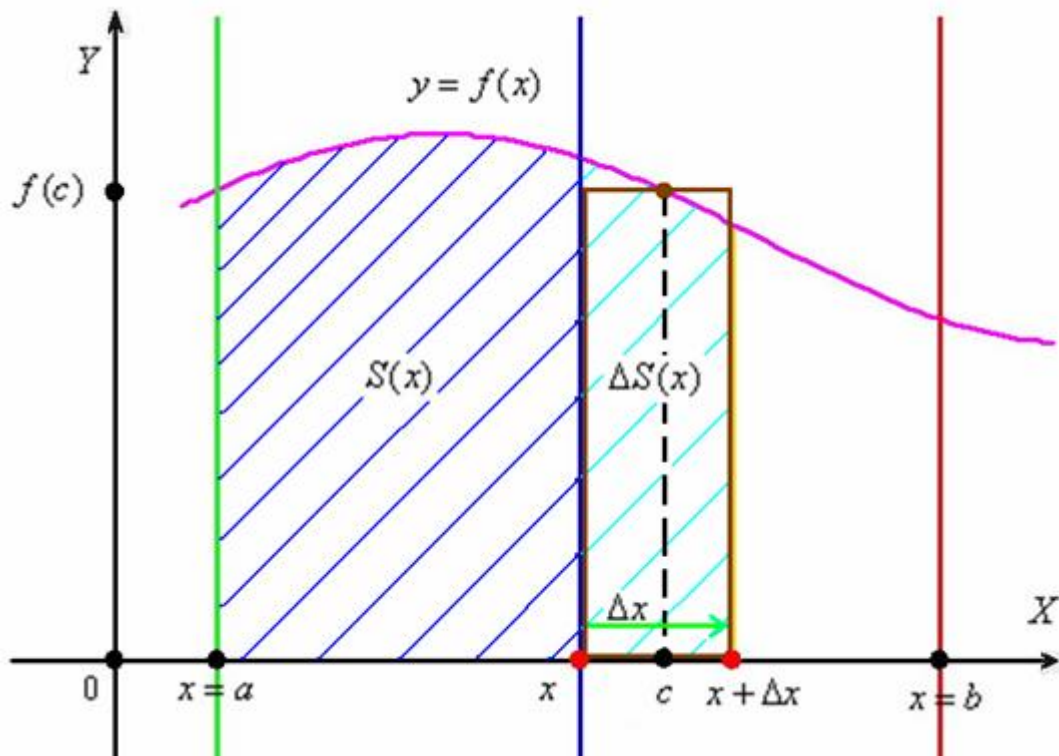
$$\begin{aligned} x &= a \operatorname{tg} t \\ 1 + \operatorname{tg}^2 t &= \frac{1}{\cos^2 t} \end{aligned}$$

$$c) \int R \left(x, \sqrt{x^2 - a^2} \right) dx$$

Замена

$$x = \frac{a}{\sin t}$$

4.7 Параграф. Определенный интеграл



Опр.

$$\lim_{\max \Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x = \int_a^b f(x) dx$$

$f(x)$ называется интегрируемой функцией на данном отрезке

Теорема 1:

всякое интегрируемая на отрезке функция ограничена на этом отрезке (необходимое но недостаточное)

Теорема 2 (Рассы интегрируемых функций)

Всякая непрерывная на отрезке функция интегрируема на этом отрезке
Кусочно-непрерывные функции (функции имеющие на отрезке конечное число точек разрыва первого рода) также являются интегрируемыми

Основные свойства определенного интеграла:

- 1) $\int_a^b dx = b - a$
- 2) $\int_a^a f(x) dx = 0$
- 3) $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$

4)линейность: $\int_a^b (f(x) + \lambda g(x)) dx = \int_a^b (f(x)) dx + \lambda \int_a^b (g(x)) dx$

5)аддитивность: $\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$

6)монотонность: $f(x), g(x) \quad [a, b] \quad f(x) \leq g(x)$

$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$

7)оценка модуля: $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b f(x) dx$

Теорема о среднем(для непрерывных функций):

$f(x)$ непрерывна на АВ: $\exists \xi \in [a, b]$:

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a)$$

Литература

Кудрявцев А.Д Курс математического анализа

Фихтенгольц Г.М Основы математического анализа

Демидович Б.П Сборник задач и упражнений по математическому анализу