Математический анализ

Алла Владимировавна Устюжанова

26 сентября 2019 г.

Лекция 1

1 Глава 1. Введение.

1.1 Параграф 1: Множества операции над множествами

Кванторы:

$$\forall \quad \exists$$

Множество – это совокупность каких-либо предметов(элементов).

$$A \quad B, \quad x \in A, \quad x \notin B, \quad A \in B$$

Операции:
1. $A \cup B$ – те множество каждый элемент которого принадлежит хотябы одному из множеств A или B

$$A \cup B = \{x : x \in A \quad or \quad x \in B\}$$

2. $A \cap B$ – это множество каждый элемент которого принадлежит одновременне и A и B

$$A \cap B = \{x : x \in A \quad and \quad x \in B\}$$

3. $A \setminus B$ – (Разность)

$$A \setminus B = \{x : x \in A \quad but \quad x \notin B\}$$

4. $CA \quad \bar{A}$ – (Дополнение)

$$CA = \bar{A} - S \setminus A$$

Виды множеств:
$N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$

1.2 Абсолютная величина

$$|x| = \{x \quad x \geq 0 \quad or \quad -x \quad x \leq 0\}$$

Свойства:

1. Неравенство треугольника

$$|x + y| = |x| + |y|$$

Док-во: пусть $x + y \geq 0 \Rightarrow |x + y| = x + y = |x| + |y|$
Док-во: пусть $x + y < 0 \Rightarrow |x + y| = x + (-y) < |x| + |y|$

2. $|x - y| = |x| - |y|$ если $|x| > |y|$ 3. $|xyz| = |x||y||z|$ 4. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ sgn x = $\{1 \quad x > 0 \quad 0 \quad x = 0\}$

Бином Ньютона:

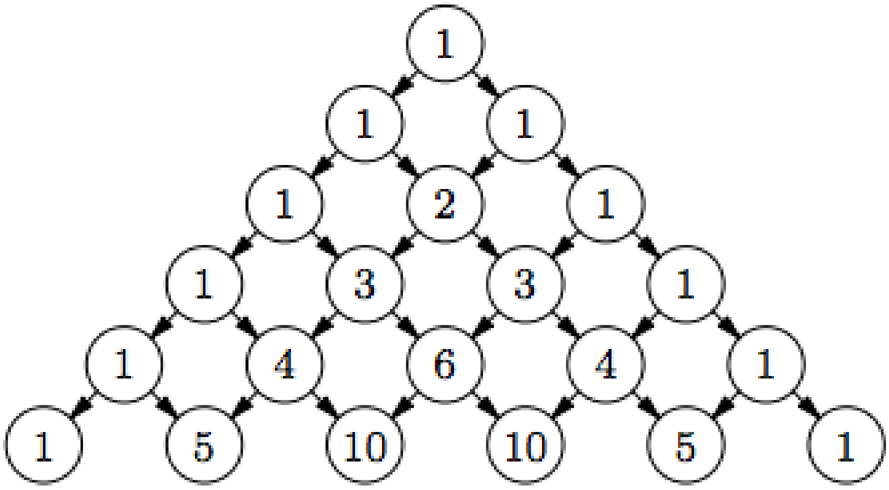
$$(a + b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + ... + b^n$$

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$$

$$0! = 1$$

Треугольник Паскаля:



1.2.1 Упражнения

1. $A = \{1, 2, 3\} \quad B = \{2, 3, 4, 5\} \quad A \cup B?$
2. $A = \{x \in N : \quad 2 < x < 4\} \quad B = \{x \in N : \quad 2 < x < 4\} \quad C = \{x \in N : 2 < x < 4\} \quad B \cup C?, A \cap B \cap C, A \cup B \cup C \quad ?$
3. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)?$
4. $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$
5. $(1 - x)^5 =?$
6. $\left(\frac{2}{x} + 3\sqrt{x}\right)^4$

2 Глава 2. Предел и непрерывность.

Курс: Мат анализ (фтф:ИВТ)
код слово: предел

2.1 Параграф 1. Предел псоледовательности

Предел – пусть каждому натуральному числу N по некоторому закону поставленно в соответствие действительное число x_n тогда говорят что определена числовая последовательность $\{x\} = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$
Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$ если для всякого

действительного числа $\epsilon > 0$ найдется зависящее от ϵ число такое что выполняется неравенство $|x_n - a| < \epsilon$ для всех натуральных чисел $n > n_0$.

Обозначение:

$$\lim_{n \to 0} x_n = a \quad (x_n \to a \quad n \to \inf)$$

$$\lim_{n \to 0} x_n = a \Leftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 = n_0(\epsilon) : \forall n > n_0 \quad |x_n - a| < \epsilon$$

Пример: $\lim_{n \to 0} \frac{1}{n} = 0$
$|\frac{1}{n}| < \epsilon, \quad \frac{1}{n} < \epsilon, \quad n > \frac{1}{\epsilon}, \quad n_0 = \left[\frac{1}{\epsilon}\right] + 1 \quad \forall \epsilon > 0$
чтд.

Произвольный интервал AB содержащий точку C называется окресностью это точки

$$\cup(C)$$

Эпсилон окресность:

$$\cup(\epsilon) \quad \cup_\epsilon(\epsilon) = \cup_\epsilon(\epsilon) \setminus c$$

Число(точка) a является пределом последовательности x_n если для любого эпсилон больше нуля найдется число n_0 такое что все точки x_n с индексами $n > n_0$ попадут в ϵокресность точки a. Вне любой окресности точки a имеется конечная или пустое множество точек x_n.

Лекция 2

Теорема 1: Если последовательность x_nимеет конечный предел, то он единственный.
Док-во: x_n имеет два различных предела a и b.
расмотрим окресность cd, тк $x_n \to a$, то ляляля, тогда в интервале не может содержаться бесконечное число элементов, те последовательность x_n не может стремится к b.

Теорема 2: Если последовательность сходится(имеет прредел), то она ограничена. Опр: если $|x_n| \leq M, \quad M = const$,то x_n наз ограниченной

Теорема 3(придельный переход в неравенствах):
а) Если $x_n \to a, \quad y_n \to b, \quad a < b$, то $\exists n_0^{\forall} n > n_0 \quad x_n < y_n$
б) Если $x_n \to a, \quad y_n \to b, \quad x_n \leq y_n \quad \forall n$, то $a \leq b$

Теорема 4(принціп "двух милиционеров"):
Если $x_n \to a, \quad y_n \to a \quad and \quad x_n \leq z_n \leq y_n \quad \forall n \in N \quad then \quad z_n \to a$

Теорема 5(Арифметические свойства приделов):
1) $\lim_{n \to inf} c = c, \quad c = const$
2) $if \quad \exists \quad ending \quad \lim_{n \to inf} x_n = a, \quad \lim_{n \to inf} y_n = b \quad then$ существуют приделы их суммы, разности , произведения, частного($b \neq 0$):

$$a) \lim_{n \to inf} (x_n \pm y_n) = a + b$$

$$b) \lim_{n \to inf} (x_n y_n) = ab$$

$$c) \lim_{n \to inf} \left(\frac{x_n}{y_n} \right) = \frac{a}{b}, \quad where \quad b \neq 0$$

Определение: x_n называется бесконечно малой если предел последовательности равен 0

Определение: y_n называется бесконечно большой если предел последовательности равен бесконечности

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 : \quad \forall n > n_0 \quad |y_n| > \epsilon$$

Свойства:
1) произведение бесконечно малой на ограниченное является бесконечно малой

2.2 Параграф 2. Предел функции

– Функцией называется закон по которому каждому x из некоторово множества D соответствует единственное значение y из множества E

$$y = f(x)$$

$$f : D \to E$$

где x – независсимая переменная, аргумент
y – зависимая переменная

D – область определения
E – область значения

Определение предела функции
1. по Коши(с помощью окресности):

$$\lim_{x\to 0} f(x) = A \quad \Leftrightarrow \quad \forall \cup_\epsilon (A) \quad \exists \cup_\epsilon (x_0) \quad \forall x \in \cup_\epsilon(x_0) \quad \Rightarrow \quad f(x) \in \cup_\epsilon(A)$$

с помощью неравенства:
$a) x_0, A - ending \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = (A) \Leftrightarrow \quad \forall\epsilon > 0 \quad \exists b > 0 : \quad 0 < |x - x_0| < b \Rightarrow \quad |f(x) - A| < \epsilon$
$b) x_0 - ending, A = +inf \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = +inf \Leftrightarrow \quad \forall\epsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow \quad f(x) > \epsilon$
$c) x_0 - ending, A = -inf \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = -inf \Leftrightarrow \quad \forall\epsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow \quad f(x) < -\epsilon$
$d) x_0 - ending, A = inf \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = inf \Leftrightarrow \quad \forall\epsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 :$
$|x| > \delta \Rightarrow \quad |f(x) - A| < \epsilon$

2) по Гейне(с помощью предела последовательности):
$A = \lim_{x\to x_0} f(x) \Leftrightarrow \quad \forall x_n \to x_0 \quad n \to inf, \quad x_n \neq x_0$
Соответсвующая последовательность значений функции
$f(x_n) \to A \quad n \to inf$

Теорема 1(Арифметические свойства пределов функции):
Пусть существует конечные пределы функции

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A, \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = B$$

тогда предел суммы(разности) равен пределу суммы(разности)
произведения = произведению
частного = частному
ограниченна в некоторых окресностях точки x_0

Теорема 2 (предельный переход в неравенство):

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A, \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = B, \quad \exists \cup (x_0), f(x) < g(x) \quad f(x) \in \cup(x_0)$$

Лекция 3

Введем понятие сложной функции:

$$f : X \to Y \quad y = f(x)$$

$$g : Y \to R \quad g(y)$$

$$h : X \to R \quad h(x) = g(f(x)) = g \circ f$$

Теорема 3(предел сложной функции):
пусть $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0, f(x) \neq y_0, x \neq x_0$, $\exists \lim_{y \to y_0} g(y) = A \Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} h(x) = \lim_{x \to x_0} g(f(x)) = A$

Теорема 4(критерий Коши):
Функция f(x) имеет придел в точке x_0 тогда и только тогда выполнения условия $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \epsilon > 0 : \quad \forall x', x'' : \quad |x' - x_0| < \epsilon$

$$|f(x') - f(x'')| < \epsilon$$

Односторонние пределы

_
Предел с лево($x \to -0$):

$$A = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0) \quad \Leftrightarrow$$

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : x_0 - \delta < x < x_0 \quad \Rightarrow \quad |f(x) - A| < \epsilon$$

Предел с право($x \to +0$):

$$A = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0) \quad \Leftrightarrow$$

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : x_0 < x < x_0 + \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - A| < \epsilon$$

Замечание:
1)Функция имеет предел при $x \to x_0$, когда существуют левый и правый пределы равные между собой.
2)Если $A = \lim_{x \to x_0} f(x)$ то

$$f(x) = A + \alpha(x) \quad \alpha(x) \to 0$$

2.3 Параграф 3. Замечательные пределы

1ый замечательный предел:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

следствие

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)} = 1$$

2ой замечательный предел

$$\lim_{x\to +inf} 1+\frac{1}{x} = \lim_{x\to -inf}(1+\frac{1}{x})^x = \lim_{x\to inf}(1+\frac{1}{x})^x = e \simeq 2.718281828\ldots$$

следствие

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$$

2.4 Параграф 4. Непрерывность функции

– Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Функция непрерывна на множестве D если она не прерывна к каждой точке этого множества. Если одно из условий непрерывности не выполняется, то функция не является непрерывной в этой точке.

Точка разрыва – это когда $f(x)$ определена проколотой окресностью этой точки и не является непрерывной в точке x_0

2.4.1 Классификация точек разрыва

а) x_0 называется точкой устранимого разрыва $f(x)$, если существует предел функции при $x \to x_0$(конечный предел), но функция либо не определена в x_0, либо значение предела не совпадает со значением функции
b) x_0 называется точкой разрыва первого рода функции $f(x)$, если $\exists$ют конечные односторонние пределы.
с) x_0 называется точкой разрыва второго рода, если хотябы один из односторонних пределов не существует или является бесконечным.

2.4.2 Основные теоремы о непрерывных функциях

Теорема 1
Сумма, разность, произведение, частное(знаменатель не равен нулю) непрерывных функций также являются непрерывной функцией.

Теорема 2(непрерывность сложной функции)
Пусть сложная функция определена в окресности x_0, пусть функция y = g(x) непрерывна в точке x_0, внешная функция y_0=f(x_0) непрерывная в точке y_0, тогда f(g(x)) непрерывна в x_0

Теорема 3(о промежуточном значении)
Пусть f(x) непрерывна на AB и на его концах принимает значение разных знаков, тогда существует точка 'c' внутри AB, f(c)=0.

Теорема 4(о макс значении Вейерштрасса):
Функция f(x) непрерывная на AB является оганиченной на этом отрезке и приэтом существует точка x1 из AB такая что x1 максимальное значение функции, также есть точка x2 которая является минимальным значением функции.

Следствие теоремы 3: Если $\phi(x)$ непрерывна на AB, то найдется точка 'c' из интервала AB, $\phi(x = c) = C$

Лекция 4

Введем понятие обратной функции:

$$y = f(x) : D \to E$$

если каждому y из множества Y ПОСТАВИТЬ В СООТВЕТСТВИЕ ЗНАЧЕНИЕ x из D то получим обратную функцию.

$$x = f^{-1}(y)$$

Теорема 5(о непрерывности обратной функции)
Пусть $y = f(x)$ непрерывна, строго возрастает(убывает) на [a,b] $f(a) = A, \quad f(b) = B \quad A < B(A > B)$, тогда обратная функция $x = f^{-1}(y)$ определена на [A,B] непрерывно и является возрастающей(убывающей)

Теорема Элементарные функции
$y = kx + b; \quad y = x^x; \quad y = \sin x; y = \ln_a x; \quad y = a^x \ldots$, эти функции непрерывны на всей области определения.

2.5 Параграф 5. Сравнение Ассимптотического поведения функции.

– это поведение функции вблизи некоторой точки.

Пусть $\alpha(x), \beta(x)$ б.м в окресности точки x_0, т.е $\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = \lim_{x \to x_0} \beta(x) = 0$

Определение:
Функция $\alpha(x)$ называтеся бесконечно малой более высокого порядка чем $\beta(x)$ если $\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$

$$\alpha(x) = o(\beta(x))$$

o – 'o' малое(не нуль)

Определение:
Функция $\alpha(x) \quad \beta(x)$ б.м одного порядка если $\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \neq 0 \neq inf$
$\alpha(x) \quad \beta(x)$ назыв эквивалентными б.м огранич при $x \to x_0$ если предел отношения равен 1($\alpha(x) \sim \beta(x) : x \to x_0$)

Теорема
Если $\alpha(x) \sim \alpha_1(x); \beta(x) \sim \beta_1(x)$ то

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$$

Таблица эквивалентных б.м при $x \to x_0$:

$$\sin x \sim x \tag{1}$$

$$\operatorname{tg} x \sim x \tag{2}$$

$$\arcsin x \sim x \tag{3}$$

$$\operatorname{arcctg} x \sim x \tag{4}$$

$$\ln(1+x) \sim x \tag{5}$$

$$\frac{a^x - 1}{\ln a} \sim x \tag{6}$$

$$\frac{(1+x)^a - 1}{a} \sim x \tag{7}$$

$$e^x - 1 \sim x \tag{8}$$

3 Глава. Дифференциальное исчесление функции одной переменной

3.1 Параграф 1. Понятие производной функции

$$\begin{aligned} y &= f(x) \\ \Delta x &= x - x_0 \\ x &= x_0 + \Delta x \\ \Delta y = f(x) - f(x_0) &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \end{aligned}$$

Производная – производная функции в точки x_0 называется

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{d}{dx} f(x) = f'(x) \tag{9}$$

Левая производная:

$$f'_-(x) = f'(x-0) = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{10}$$

Правая производная:

$$f'_+(x) = f'(x+0) = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{11}$$

Связь левой и правой производной

$$\exists f'(x) \Leftrightarrow \exists f'_-(x) = f'_+(x) = f'(x)$$

3.1.1 интерпретации производной

Геометрическая:

Физическая(мгновенная и средняя скорости):

$$s = f(t) \quad v_m = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

– это скорость изменения функции.

Литература

Кудрявцев А.Д Курс математического анализа
Фихтенгольц Г.М Основы математического анализа
Демидович Б.П Сборник задач и упражнений по математическому анализу