

Алгебра и аналит геометрия

Журавлев Евгений Владимирович

18 декабря 2019 г.

1 Лекция

1.1 Векторы

Вектор(геометрический)– это отрезок у которого указано начало и конец. Точка будет рассматриваться как вектор начало и конец которого совпадает, такой вектор называется нулевым($\vec{0}$). Для не нулевых векторов \vec{AB} .

Векторы называются коллинеарными если они лежат на одной прямой или параллельных прямых. Коллинеарные векторы называются сонаправленными если они направлены в одну сторону и противоположно направленными иначе.

Сонаправленные векторы называются равными если их длины равны. Длиной вектора называется длина отрезка.

Противоположно направленные векторы называются противоположными если их длины равны

$$|\vec{AB}| = |\vec{BA}|$$

$$\vec{a} = -\vec{b}$$

Длина вектора – $|\vec{a}|$

Сложение векторов:

-Правило Треугольника:...

-Правило Параллелограмма:...

-Правило Многоугольника:...

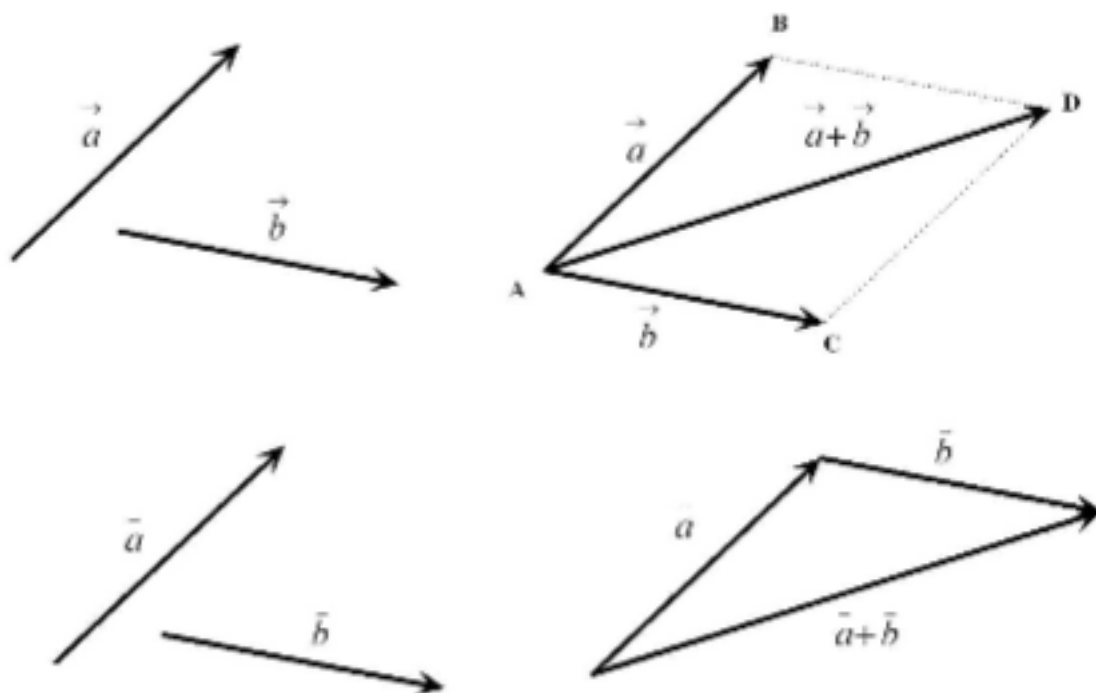
Свойства сложения векторов:

1. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ Называется ассоциативным

2.Существование Нуля $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a} = \vec{0} + \vec{a}$

3.Коммутативность $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

4. $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$



1.2 Произведение вектора и действительного числа

Произведение действительного числа альфа ($\alpha \in R$) и \vec{a} называется вектор, обозначаемый $\alpha\vec{a}$ длина которого равна $|\alpha||\vec{a}|$ а направление определяется следующим образом:

1. Если альфа больше нуля то \vec{a} и $\alpha\vec{a}$ сонаправленны
2. Если альфа меньше нуля то \vec{a} и $\alpha\vec{a}$ противоположно направлены
3. Если альфа равно нулю то $\alpha\vec{a}$ нулевой

Свойства:

1. $\forall \vec{a}, \vec{t} \quad \forall \alpha \in R \quad \alpha(\vec{a} + \vec{t}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{t}$
2. $\forall \vec{a} \quad \forall \alpha, p \in R \quad (\alpha + p)\vec{a} = \alpha\vec{a} + p\vec{a}$
3. $1\vec{a} = \vec{a}$
4. $\forall \vec{a} \quad \forall \alpha, p \in R \quad (\alpha p)\vec{a} = \alpha(p\vec{a})$
5. $-\vec{a} = -1\vec{a}$

Теорема: Ненулевые \vec{a} и \vec{b} коллинеарны тогда и только тогда когда существует действительное число α такое что $\vec{a} = \alpha\vec{b}$ ($\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \exists \alpha \vec{a} = \alpha\vec{b}$).

1.3 Скалярное произведение векторов

Пусть \vec{a} and \vec{b} :

Скалярным произведением векторов называется число $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha$, где альфа между ними. Обозначается '·'.

Свойства:

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
2. $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$
3. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \vec{a} = 0 \quad \vec{b} = 0 \quad or \quad \alpha = \vec{a}\vec{b} = 90^0$
4. $\forall \alpha \in R, \quad \alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$
5. Дистрибутивность $\alpha(\vec{a}\vec{b}) = (\alpha\vec{a})\vec{b}$

Проекция вектора:

Свойства:

1. $a_p + b_p = \vec{a}' + \vec{b}'$
2. $\alpha a_p = \alpha\vec{a}'$
3. $\vec{a}\vec{b} = a_p\vec{b}'$

Докажем дистрибутивность скалярного произведения:
 Два вектора проецируются на ось \vec{c}

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_p + b_p)\vec{c} = (\alpha\vec{c} + \beta\vec{c})\vec{c} = (\alpha + \beta)\vec{c}\vec{c} = \alpha(\vec{c}\vec{c}) + \beta(\vec{c}\vec{c})$$

1.4 Векторное произведение

векторным произведением векторов \vec{a} \vec{b} называется вектор $(\vec{a} * \vec{b})$, длина которого равна произведению длин векторов на синус угла между ними

$$|\vec{a} * \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \alpha$$

а направление определяется по правилу буравчика, т.е. если смотреть из конца вектора на плоскость векторов \vec{a} \vec{b} , то кратчайший поворот от a к b должен осуществляться против часовой стрелки, причем этот вектор перпендикулярен плоскости.

Свойства:

1. $-\vec{a} * \vec{b} = \vec{b} * \vec{a}$
2. $|\vec{a} * \vec{b}| = S_p$
3. $\forall \alpha \in R \quad \alpha(\vec{a} * \vec{b}) = (\alpha\vec{a}) * \vec{b} = (\alpha\vec{b}) * \vec{a}$
4. $(\vec{a} + \vec{b}) * \vec{c} = (\vec{a} * \vec{c} + \vec{b} * \vec{c})$
5. $\vec{a} || \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} * \vec{b} = \vec{0}$

нулевой вектор коллинеанер любому другому вектору.

1.5 Смешанное произведение векторов

Смешанным произведением векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется число $((\vec{a} * \vec{b}) \cdot \vec{c})$,
 $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} * \vec{b}) \cdot \vec{c}$

Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называются компланарными если они лежат в одной плоскости или на параллельных плоскостях. Если компланарные векторы отложит от одной точки то они будут лежать на одной плоскости.

Свойства:

1. Модуль смешанного произведения векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ равен объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. $|\vec{a} * \vec{b} \cdot \vec{c}| = V_{prlp}$
2. Если один из векторов нулевой, то смешанное произведение равно нулю.
3. При компланарности векторов смешанное произведение равно нулю.

4. $(\vec{a} * \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{c} * \vec{b}) \cdot \vec{a}$
5. $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}) = \dots$

1.6 Координаты вектора

Теорема:

пусть \vec{a} \vec{b} не коллинеарные векторы, лежащие в одной плоскости, тогда всякий \vec{v} , лежащий в плоскости векторов \vec{a} \vec{b} единственным образом представим в виде линейной комбинации векторов \vec{a} \vec{b} , т.е. существует действительные числа x, y , они находятся единственным образом.

Теорема

пусть \vec{a} \vec{b} \vec{c} некопланарные векторы. тогда всякий \vec{v} единственным образом представим в виде линейной комбинации векторов \vec{a} \vec{b} \vec{c}

Пусть \vec{a} \vec{b} \vec{c} некопланарные векторы пусть \vec{v} произвольный вектор, тогда существует x, y, z такие что $x =$ числа называются координатами вектора в аффинной системе координат образованной векторами \vec{a} \vec{b} \vec{c} , причем векторы \vec{a} \vec{b} \vec{c} называются базисами аффинной системы координат.

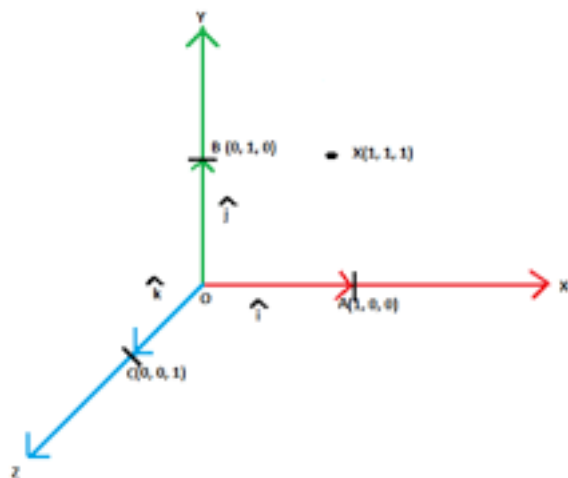
$$\vec{v}(x, y, z)$$

Аналогично рассматривается аффинная система координат на плоскости образованная двумя неколлинеальными векторами. Частным случаем аффинной системы координат является декартова система координат.

Единичные ортогональные векторы:

$$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$$

– базис пространства



1.7 Вычисление скалярного, векторного и смешанных произведений в прямоугольной система координат

Скалярное

$$\begin{aligned}\vec{a} &= (x_1, y_1, z_1) \\ \vec{g} &= (x_2, y_2, z_2) \\ \vec{a} \cdot \vec{g} &= \\ &= (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) \cdot (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) \\ &\dots\end{aligned}$$

Векторное

$$\begin{aligned}\vec{a} &= (x_1, y_1, z_1) \\ \vec{g} &= (x_2, y_2, z_2) \\ \vec{i}^2 &= 0 \quad \vec{j}^2 = 0 \quad \vec{k}^2 = 0 \\ \vec{a} * \vec{g} &= \\ &= (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) * (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) \\ &\dots\end{aligned}$$

2 Система линейных уравнений.

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$(\sum_{n=1, m=1} a_m x_n = b_1) \text{ and } (\sum_{n=1, m=1} a_m x_n = b_2) \text{ and } \dots \text{ and } (\sum_{n=1, m=1} a_m x_n = b_n)$$

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,1} & a_{1,m} & \dots & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,m} & \dots & b_2 \\ & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,m} & \dots & b_n \end{array} \right)$$

– расширенная матрица систем

$$AX = B$$

– матричная запись системы

Если столбец свободных членов нулевой ($b_1 = 0 \dots b_n = 0$), то система называется однородной, иначе неоднородной. Рассмотрим однородную систему

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,1} & a_{1,m} & \dots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,m} & \dots & 0 \\ & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,m} & \dots & 0 \end{array} \right)$$

Если определитель матрицы ($\det(A)$) не равен нулю то в силу правила Крамера система имеет единственное решение оно имеет единственное нулевое решение.

Если определитель равен нулю то система имеет бесконечно много решений, причем множество этих решений образует векторное подпространство внутри пространства F^m (последовательности из m элементов поля F)

Действительно пусть $v_1 = v_2$ решение системы, т.е. $Av_1 = 0 \quad Av_2 = 0$

Пусть $\alpha \in F$

Тогда

$$A(v_1 - v_2) = 0 + 0 = 0$$

т.е. $v_1 + v_2$ – решение системы

Теорема

Пусть $Ax = 0$ система линейных однородных уравнений, m - кол-во переменных, r - это ранг матрицы $A (m \neq r)$, тогда множество решений системы есть конечно-мерное векторное пространство размерности $m - r$

Алгоритм нахождения базиса пространства решений однородной системы
1) находим ранг матрицы системы с помощью элементарных преобразований, при этом преобразуем матрицу так чтобы в ненулевых строках на главной диагонали элементы были ненулевые

$$\begin{pmatrix} + & + & + & + \\ 0 & + & + & + \\ 0 & 0 & + & + \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(трапецевидной формы),

переменные ненулевые коэффициенты которых находятся на главной диагонали мы будем называть базисными (главными) а остальные свободными. Если ранг матрицы находится методом окрмляющих миноров то главные элементы это те коэффициенты которых входят в матрицу наибольшего ненулевого минора

2) Подставляем по очереди вместо одной из свободных переменных единицу а остальные нули. Решаем получившиеся системы и получаем векторы v_1, v_2, \dots, v_{m-r}

3) Записываем ответ в виде $c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_{m-r} v_{m-r}$
где $c_1 + c_2 + \dots + c_{m-r} = \text{const}$

Теорема Кронейкера-Капели

Пусть $Ax = b$ неоднородная система линейных уравнений, тогда $Ax = b$ имеет решения тогда и только тогда когда $\text{ранг } A = \text{ранг матрицы } \bar{A}$.

Теорема

Пусть $Ax = b$ система линейных неоднородных уравнений, m - кол-во переменных, r - ранг матрицы ($m \neq r$).

Пусть v_1, v_2 и тогда ие - базис пространства решения однородной системы $Ax = 0$, тогда всякое решение системы $Ax = b$ имеет вид $c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_{m-r} v_{m-r} + v_{\text{частное}}$

где $c_1 + c_2 + \dots + c_{m-r} = \text{const}$

где $v_{\text{частное}}$ - любое известное решение $Ax = b$

Замечание:
векторы v_1, v_2 и тогда их называют фундаментальной системой решений (ФСР)

Литература

Задачи по линейной алгебре: матрицы определители Журавлев Е.В
!!! (для индивидуальных работ) Сборник типовых заданий и примеров по аналитической геометрии Журавлев Е.В
Векторы Журавлев Е.В Мальцева Е.Ю
Лошкеева В.Д Мальцев Ю.М Высшая алгебра и аналитическая геометрия (изд. 2-е, 2000)
Курош А.Г Курс высшей алгебры
Фаддеев Д.К Лекции по алгебре
Проскуряков И.В Сборник задач по линейной алгебре
Задачи по высшей алгебре Фаддеев Д.К Саминский Д.С
!! Высшая математика в упражнениях и задачах Домков П.Е Попов А.Г Коженикова Т.Я
!! Погорелов А.В Аналитическая геометрия
Александров П.С Аналитическая геометрия
Геометрия. Учебник для 10-11 классов Атанасян