

# Математический анализ

Алла Владимировна Устюжанова

12 сентября 2019 г.

## Лекция 1

### 1 Глава 1. Введение.

#### 1.1 Параграф 1: Множества операции над множествами

Кванторы:

$$\forall \quad \exists$$

Множество – это совокупность каких-либо предметов(элементов).

$$A \cap B, \quad x \in A, \quad x \notin B, \quad A \in B$$

Операции:

1.  $A \cup B$  – те множество каждый элемент которого принадлежит хотябы одному из множеств A или B

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ or } x \in B\}$$

2.  $A \cap B$  – это множество каждый элемент которого принадлежит одновременно и A и B

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ and } x \in B\}$$

3.  $A \setminus B$  – (Разность)

$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ but } x \notin B\}$$

4.  $CA = \bar{A}$  – (Дополнение)

$$CA = \bar{A} = S \setminus A$$

Виды множеств:

$$N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$$

## 1.2 Абсолютная величина

$$|x| = \{x \quad x \geq 0 \quad or \quad -x \quad x \leq 0\}$$

**Свойства:**

1. Неравенство треугольника

$$|x + y| = |x| + |y|$$

Док-во: пусть  $x + y \geq 0 \Rightarrow |x + y| = x + y = |x| + |y|$

Док-во: пусть  $x + y < 0 \Rightarrow |x + y| = x + (-y) < |x| + |y|$

2.  $|x - y| = |x| - |y|$  если  $|x| > |y|$  3.  $|xyz| = |x||y||z|$  4.  $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$   $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

**Бином Ньютона:**

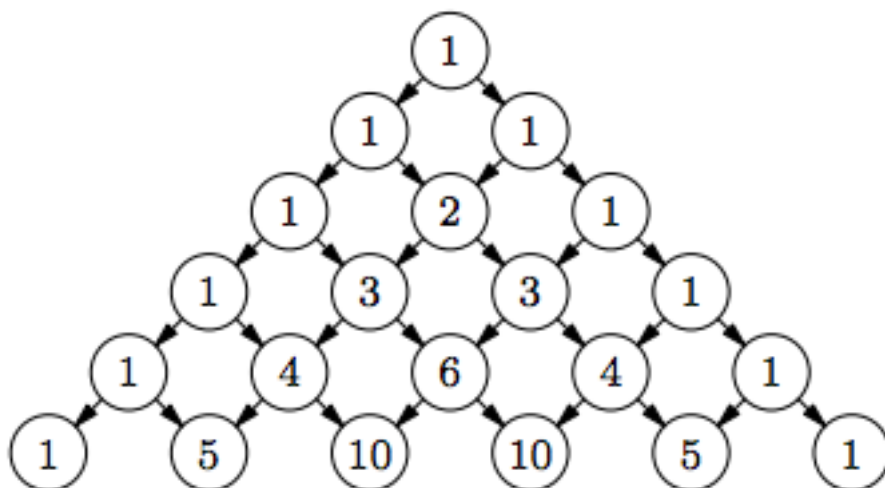
$$(a + b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + b^n$$

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$$

$$0! = 1$$

Треугольник Паскаля:



### 1.2.1 Упражнения

1.  $A = \{1, 2, 3\}$   $B = \{2, 3, 4, 5\}$   $A \cup B$ ?
2.  $A = \{x \in N : 2 < x < 4\}$   $B = \{x \in N : 2 < x < 4\}$   $C = \{x \in N : 2 < x < 4\}$   $B \cup C$ ?,  $A \cap B \cap C$ ,  $A \cup B \cup C$  ?
3.  $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ ?
4.  $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$
5.  $(1 - x)^5 = ?$
6.  $\left(\frac{2}{x} + 3\sqrt{x}\right)^4$

## 2 Глава 2. Предел и непрерывность.

Курс: Мат анализ (фтф:ИВТ)  
код слово: предел

### 2.1 Параграф 1. Предел псоледовательности

Предел – пусть каждому натуральному числу  $N$  по некоторому закону поставленно в соответствие действительное число  $x_n$  тогда говорят что определена числовая последовательность  $\{x\} = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$   
Число  $a$  называется пределом последовательности  $\{x_n\}$  если для всякого

действительного числа  $\epsilon > 0$  найдется зависящее от  $\epsilon$  число такое что выполняется неравенство  $|x_n - a| < \epsilon$  для всех натуральных чисел  $n > n_0$ .

Обозначение:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad (x_n \rightarrow a \quad n \rightarrow \infty)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 = n_0(\epsilon) : \forall n > n_0 \quad |x_n - a| < \epsilon$$

Пример:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$   
 $|\frac{1}{n}| < \epsilon, \quad \frac{1}{n} < \epsilon, \quad n > \frac{1}{\epsilon}, \quad n_0 = \left[\frac{1}{\epsilon}\right] + 1 \quad \forall \epsilon > 0$   
 чтд.

Произвольный интервал  $AB$  содержащий точку  $C$  называется окрестностью этой точки

$$U(C)$$

Эпсилон окрестность:

$$U(\epsilon) \cap U_\epsilon(\epsilon) = U_\epsilon(\epsilon) \setminus c$$

Число(точка)  $a$  является пределом последовательности  $x_n$  если для любого эпсилон больше нуля найдется число  $n_0$  такое что все точки  $x_n$  с индексами  $n > n_0$  попадут в  $\epsilon$ окрестность точки  $a$ . Вне любой окрестности точки  $a$  имеется конечная или пустое множество точек  $x_n$ .

## Лекция 2

Теорема 1: Если последовательность  $x_n$  имеет конечный предел, то он единственный.

Док-во:  $x_n$  имеет два различных предела  $a$  и  $b$ .

рассмотрим окрестность  $cd$ , тк  $x_n \rightarrow a$ , то ляляля, тогда в интервале не может содержаться бесконечное число элементов, те последовательность  $x_n$  не может стремиться к  $b$ .

Теорема 2: Если последовательность сходится(имеет прредел), то она ограничена. Опр: если  $|x_n| \leq M$ ,  $M = const$ , то  $x_n$  наз ограниченной

Теорема 3(придельный переход в неравенствах):

а) Если  $x_n \rightarrow a$ ,  $y_n \rightarrow b$ ,  $a < b$ , то  $\exists n_0 \forall n > n_0 \quad x_n < y_n$

б) Если  $x_n \rightarrow a$ ,  $y_n \rightarrow b$ ,  $x_n \leq y_n \quad \forall n$ , то  $a \leq b$

Теорема 4(принцип "двух милиционеров"):

Если  $x_n \rightarrow a$ ,  $y_n \rightarrow a$  and  $x_n \leq z_n \leq y_n \quad \forall n \in N$  then  $z_n \rightarrow a$

Теорема 5(Арифметические свойства пределов):

1)  $\lim_{n \rightarrow \inf} c = c$ ,  $c = const$

2) if  $\exists$  ending  $\lim_{n \rightarrow \inf} x_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \inf} y_n = b$  then существуют пределы их суммы, разности, произведения, частного( $b \neq 0$ ):

$$a) \lim_{n \rightarrow \inf} (x_n \pm y_n) = a \pm b$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \inf} (x_n y_n) = ab$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \inf} \left( \frac{x_n}{y_n} \right) = \frac{a}{b}, \quad \text{where } b \neq 0$$

Определение:  $x_n$  называется бесконечно малой если предел последовательности равен 0

Определение:  $y_n$  называется бесконечно большой если предел последовательности равен бесконечности

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 : \quad \forall n > n_0 \quad |y_n| > \epsilon$$

Свойства:

1) произведение бесконечно малой на ограниченное является бесконечно малой

## 2.2 Параграф 2. Предел функции

– Функцией называется закон по которому каждому  $x$  из некоторого множества  $D$  соответствует единственное значение  $y$  из множества  $E$

$$y = f(x)$$

$$f : D \rightarrow E$$

где  $x$  – независимая переменная, аргумент

$y$  – зависимая переменная

D – область определения

E – область значения

Определение предела функции

1. по Коши(с помощью окрестности):

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \cup_\epsilon(A) \exists \cup_\epsilon(x_0) \forall x \in \cup_\epsilon(x_0) \Rightarrow f(x) \in \cup_\epsilon(A)$$

с помощью неравенства:

$$a) x_0, A - \text{ending} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = (A) \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists b > 0 : 0 < |x - x_0| < b \Rightarrow |f(x) - A| < \epsilon$$

$$b) x_0 - \text{ending}, A = +inf \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +inf \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > \epsilon$$

$$c) x_0 - \text{ending}, A = -inf \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -inf \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -\epsilon$$

$$d) x_0 - \text{ending}, A = inf \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = inf \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x| > \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \epsilon$$

2) по Гейне(с помощью предела последовательности):

$$A = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \Leftrightarrow \forall x_n \rightarrow x_0 \quad n \rightarrow inf, \quad x_n \neq x_0$$

Соответствующая последовательность значений функции

$$f(x_n) \rightarrow A \quad n \rightarrow inf$$

Теорема 1(Арифметические свойства пределов функции):

Пусть существует конечные пределы функции

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$$

тогда предел суммы(разности) равен пределу суммы(разности)

произведения = произведению

частного = частному

ограниченна в некоторых окрестностях точки  $x_0$

Теорема 2 (предельный переход в неравенство):

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B, \quad \exists \cup(x_0), f(x) < g(x) \quad f(x) \in \cup(x_0)$$

## **Литература**

Кудрявцев А.Д Курс математического анализа

Фихтенгольц Г.М Основы математического анализа

Демидович Б.П Сборник задач и упражнений по математическому анализу