1. Билет 1 - 12 - 23

1. Т. (о равенстве порядка образующего элемента...)

Моноид, в котором все элементы обратимы, — группа

Полугруппу (в частности, группу)$\mathcal{G} = (G, \bullet)$ называют циклической, если $(\exists a \in G)(\forall g \in G)(\exists n \in \mathbb{Z})(g = a^n)$

Элемент a - образующий элемент полугруппы (группы) (как и a^{-1})

$g = a^n = (a^{-1})^{-n}$, то есть $[a] = [a^{-1}]$

Пример: $(\mathbb{Z}, +, 0)$, образующие элементы: 1 и -1

Порядок образующего элемента - наименьшее $n > 0$ для которого $a^n = 1$

Конечная группа - алгебра, носитель - конечное множество

Порядок конечной группы - кол-во элементов в этой группе

Теорема: порядок образующего элемента конечной цикличной группы равен порядку группы

Док-во: Пусть $\mathcal{G} = (G, \bullet, 1)$ - конечная циклическая группа с образующим элементом a и $n > 0$ - порядок этого элемента.

Рассмотрим множество $\{a^0 = 1, a^1, a^2, ..., a^{n-1}\}$, все элементы попарно различны. Допустим противное, пусть $a^k = a^l, 0 < l < k < n,$ тогда $a^{k-l} = a^{k+(-l)} = a^k a^{-l} = a^l a^{-l} = 1$.

Поскольку $k - l < n$, получено противоречие с выбором n как порядка элемента a (ибо найдена степень, меньшая n, при возведении в которую элемента a получается 1).

Докажем, что вся группа исчерпывается множеством $\{1, a, ..., a^{n-1}\}$. Для любого целого m, существуют также целые n, k, такие, что $m = kn + q$,

где q - целое число и $0 \leq q < n$. Тогда $a^m = a^{kn+q} = a^{kn}a^q = (a^n)^k a^q = 1a^q = a^q \in \{1, a, ..., a^{n-1}\}$ и порядок группы равен n.

Также из теоремы следует, что в бесконечной циклической группе не существует такого $n > 0$, что для образующего элемента a группы выполняется равенство $a^n = 1$.

2. Формулы включения, исключения

$A_1, A_2, ..., A_n \neq \varnothing$

$|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n|$

$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$

$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1 \cup (A_2 \cup A_3)| = |A_1| + |A_2 \cup A_2| - |A_1 \cap (A_2 \cup A_3)| =$
$= |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$

Формула включения:

$$|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{i1<i2<....<ik} |A_{i1} \cap ... \cap A_{ik}|$$

Формула исключения:

$$|\bar{A}_1 \cap ... \cap \bar{A}_n| = |\overline{A_1 \cup ... \cup A_n}| = |U| - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{i1<i2<....<ik} |A_{i1} \cap ... \cap A_{ik}|$$

2. Билет 2 - 13 - 24

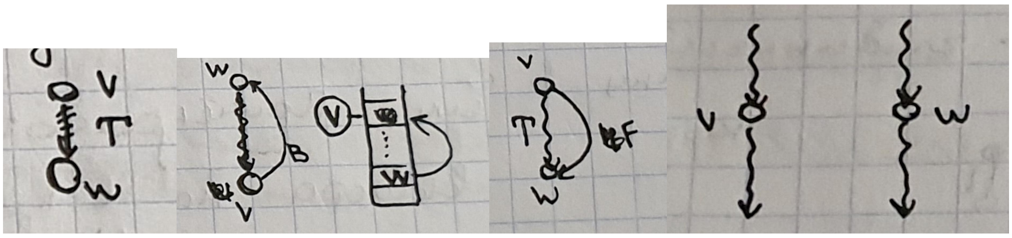
1. Поиск в глубину (орграф). Класс. дуг. Критерий бесконтурности.

1) **Древесные дуги (T)** - ведут от отца к сыну в глубинном остовном лесу
   $D[v] < D[w]$
   $NEW[w] = 1$

2) **Обратные дуги (B)** - ведут от потомка к предку (не обязательно подлинному) в ГОЛ
   $D[v] \geq D[w]$
   $w \in Stack$

3) **Прямые дуги (F)** - ведут от подлинного предка к подлинному потомку (но не от отца к сыну)
   $D[v] < D[w]$

4) **Поперечные дуги (C)** - остальные дуги (связывают две вершины, принадлежащие разным ветвям или деревьям в ГОЛ)
   $D[v] > D[w]$
   $w \notin Stack$



2)

Граф является бесконтурным тогда и только тогда, когда в результате работы алгоритма поиска в глубину множество обратных дуг будет пустым и не зависит от выбора начальных вершин

Вход: орграф $G = (V, E)$
Выход: D[v], $v \in V$, T, B, F, C
1. **T, B, F, C, Stack** := $\varnothing$;
2. count := 1;
3. **for all** $v \in V$ **do** NEW[v] := 1; **end**;
4. **for all** $v \in V$ **while** $(\exists v)$(NEW[v]) **do** DFS(v) **end**;
proc DFS(v):
1. NEW[v] := 0; push(v);
2. D[v] := count; count := count + 1;
3. **for all** w$\in$L[v] (мн-во преемников) **do**
4. **if** NEW[w] **then begin**
5. {v,w}$\to$T;
6. DFS(w); **end**;
7. **if** NEW[w] = 0 **then begin if** D[v] < D[w]
8. {v,w}$\to$F;
9. **else if** D[v] $\geq$ D[w] **and** $w \in$ STACK
10. {v,w}$\to$B; **else** {v,w}$\to$C; **end;**
11. pop(v); **end;**
$O(max\{|V|, |E|\})$ - сложность (по числу ребер)

2. Т. Клини. Синтез КА. !Без Док!

Теорема: Язык, допускаемый КА, регулярен

Конечный автомат — это некоторая абстрактная модель, содержащая конечное число состояний чего-либо: $M = (V, Q, q_0, F, \sigma)$, где $V-$ язык, $Q-$ состояния, q_0- начальное состояние, $F-$ конечные состояния, $\sigma-$ функция перехода

Док-во:

Так как для нахождения языка КА надо решить СЛАУ

$\xi = A\xi + B, B = (b_1, ..., b_n)^T$

$b_j = \begin{Bmatrix} \lambda, \text{если } q_j \in F \\ \oslash, \text{если } q_j \notin F \end{Bmatrix}$

Тогда язык конечного автомата явл. компонентой вектора линейной системы с регулярными коэффициентами

Индукцией по порядку системы докажем, что решение такой системы будет регулярным

Базис: $n = 1$

$x_1 = a_1x_1 + b_1, x_1 = a_1^*b_1$, где a_1^* - итерация рег. соединения регулярна, b_1 - рег. Значит x_1 рег.

$$\begin{Bmatrix} x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + b_1 \\ x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + b_2 \\ ... \\ x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n + b_n \end{Bmatrix}$$

$x1 = a_{11}^*(a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + b_1)$

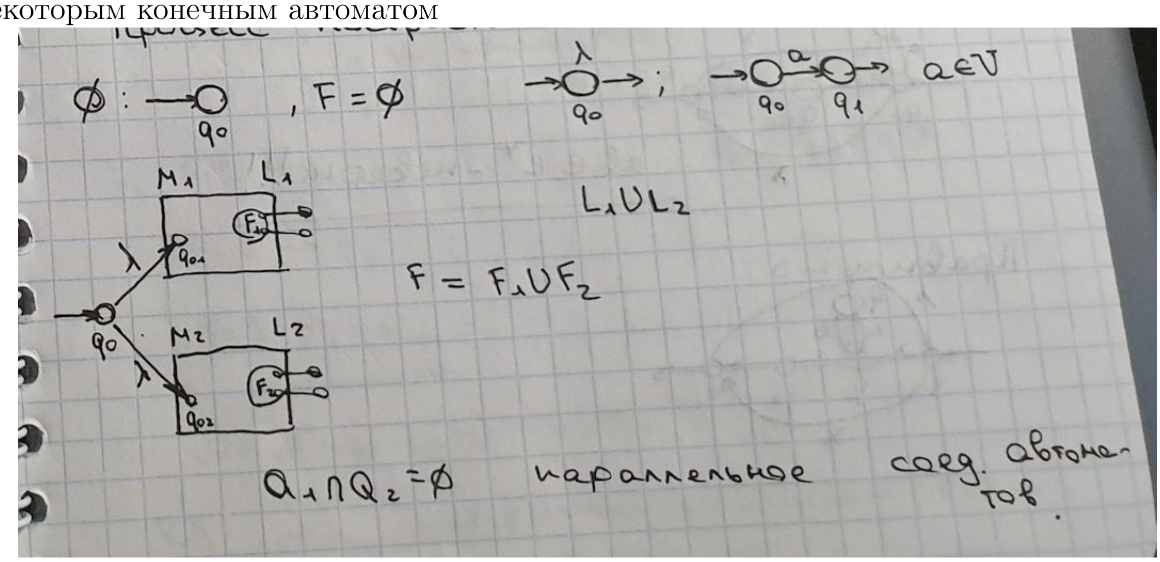
$$\begin{Bmatrix} x_2 = a_{21}a_{11}^*(a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + b_1) + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + b_2 \\ ... \\ x_n = a_{n1}a_{11}^*(a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + b_1) + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n + b_n \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} x_2 = (a_{21}a_{11}^*a_{12} + a_{22})x_2 + ... + (a_{21}a_{11}^*a_{1n} + a_{2n})x_n + a_{21}a_{11}^*b_1 + b_n \\ ... \\ x_n = (a_{n1}a_{11}^*a_{12} + a_{22})x_2 + ... + (a_{n1}a_{11}^*a_{1n} + a_{nn})x_n + a_{n1}a_{11}^*b_1 + b_n \end{Bmatrix}$$

Полученная система порядка n-1 явл. системой с регулярными коэффициентами и по предложению индукции ее решение регулярно, следовательно, и значение x1 **ЧТД**

Имеет место обратная теорема: Для каждого рег языка мб построен КА, допускающий этот язык

Следствие (теорема Клини): Язык рег. тогда и только тогда, когда он допускается некоторым конечным автоматом



3. Билет 3 - 14 - 25

1. ИУМ. Т. (о неподвижной точке)

Упорядоченное множество $(M, \leq)$ называют индуктивно упорядоченным, если:

1) оно содержит наименьший элемент;

2) всякая неубывающая последовательность элементов этого множества имеет точную верхнюю грань

Элемент a множества A называют неподвижной точкой отображения $f : A \to A$, если $f(a) = a$

(**Теорема** о неподвижной точке) Любое непрерывное отображение f индуктивно упорядоченного множества $(M, \leq)$ в себя имеет наименьшую неподвижную точку.

Пусть θ - наименьший элемент А. Построим последовательность $\{\theta, f(\theta), f(f(\theta)), ..., f^n(\theta), ...\}$, где $f^n(x) = f(f^{n-1}(x)), f^0(x) = x$

$\theta \leq f(\theta)$, так как θ - наименьший элемент. Пусть $f^{n-1}(\theta) \leq f^n(\theta), n \geq 1$

В силу монотонности $f : f(f^{n-1}(\theta)) \leq f(f^n(\theta))$, то есть $f^n(\theta) \leq f^{n+1}(\theta)$, то есть $(\forall n \geq 0)(f^n(\theta) \leq f^{n+1}(\theta))$

Положим $a = \underset{n\geq 0}{sup} f^n(\theta)$ Имеем $f(a) = f(\underset{n\geq 0}{sup} f^n(\theta)) =_{\text{непр}} \underset{n\geq 0}{sup}(f(f^n(\theta))) = \underset{n\geq 1}{sup} f^n(\theta) = a$

Докажем, что точка a наименьшая

Пусть b - **неподвижная точка** f, то есть $f(b) = b$. Тогда $\theta \leq b, f(\theta) \leq f(b) = b, ..., f^n(\theta) \leq b$ для любого n. То есть b - верхняя грань $\{f^n(\theta)\}_{n\geq 0}$, и $a \leq b$, так как a - точная верхняя грань $\Rightarrow a$ — наименьшая неподвижная точка

Пример: $x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}; A = [0, 1]$

$0; f(0) = 1/4; f(f(0)) = 3/8; ...; f^n(0) = \frac{2^{n-1}}{2^{n+1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$

2. Поиск в ширину (орграф). Волновой фронт.

Вход: орграф $G = (V, E)$, $\varphi : E \to \mathbb{R}^+$, v_0 - источник

Выход: $M[v]$ - массив меток вершин

(граф задан матрицей)

proc BFS(v_0);

1. M[v_0] := 0; Q := $\varnothing$; (Q - очередь)
2. **for all** ($v \in V \setminus \{v_0\}$) **do** M[$v$] := $+\infty$ **end**
3. $v_0 \to$ Q;
4. **for all** $v \in$ Q **while** (Q $\neq \varnothing$) **do**
5. **for all** w $\in$ L[v] **do**
6. d := min(M[w], M[v] + φ(v,w));
7. **if** d < M[w] **then begin**
8. M[w] := d;
9. **if** w $\notin$ Q then w$\to$ Q; **end** (к п. 5); **end** (к п. 7);
10. Q $\to v$; (v покидает очередь); **end** (к п. 4); **end**;

Волновой фронт: $(\forall e \in E)(\varphi(e) = 1)$

6'. **if** M[w] = $+\infty$ **then begin**

7'. M[w] := M[v]+1;

8'. w$\to$Q;

$O(\sum\limits_{v\in V} k_v dg^+(v))$ - сложность алгоритма, где k_v- кол-во попавших v в очередь

$k_v = 1 : O(|E|)$

4. Билет 4 - 15

1. Кольца. Аддитивная группа. Т. (о тождественности кольца.....)

Кольцо $\mathcal{R} = (R, +, \bullet, 0, 1)$ - алгебра с двумя бинарными и нулярными операциями.

Аксиомы:

1) $a + (b + c) = (a + b) + c$
2) $a + b = b + a$
3) $a + 0 = a$
4) $(\forall a)(\exists a') : (a + a' = 0)$
5) $a(bc) = (ab)c$
6) $a1 = 1a = a$
7) $a(b + c) = ab + ac$

$(b + c)a = ba + ca$

$(R, +, 0)$ - аддитивная (коммутативная) группа по 1-4

$(R, \bullet, 1)$ - мультипликативный моноид по 5-6

связь между сложением и умножением кольца устанавливает 7 (операции дистрибутивны)

$ab = ba$ - коммутативное кольцо (если операция умножения коммутативна)

Пример: $(\mathbb{Z}, +, \bullet, 0, 1)$ - кольцо целых чисел, коммутативно

$(M, +, \bullet, 0, E)$ - кольцо матриц, не коммутативно

$\mathbb{Z}_k = (\{0, 1, ..., k - 1\}, \oplus_k, \odot_k, 0, 1)$ - кольцо вычетов по модулю $k, k \geq 1$ - коммутативно

Теорема: в любом кольце имеют место следующие свойства:

1) $a0 = 0a = 0$ - аннулирующее свойство нуля
2) $a(-b) = (-a)b = -ab$
3) $(b - c)a = ba - ca$ - дистрибутивность правая

$a(b - c) = ab - ac$ - дистрибутивность левая

Доказательство:

1) $a + a0 = a1 + a0 = a(1 + 0) = a \Rightarrow a0 = 0$

$a + 0a = 1a + 0a = (1 + 0)a = a \Rightarrow 0a = 0$

2) $ab + a(-b) = a[b + (-b)] = a0 = 0 \Rightarrow a(-b) = -(ab)$

$ab + (-a)b = [a + (-a)]b = 0b = 0 \Rightarrow (-a)b = -(ab)$

3) $(b - c)a = [b + (-c)]a = ba + (-c)a = ba - ca$

$a(b - c) = a[b + (-c)] = ab + a(-c) = ab - ac$

Следствия:

1) $\forall a : (-a)^{2m} = a^{2m}, m \in \mathbb{Z}$
2) $\forall a : -a = a(-1) = (-1)a$

2. Т. (о детерминизации КА). Удаление лямбда...

Теорема: Для каждого КА мб построен эквивалентный ему детерминированный КА

Док-во: описание алгоритма построения

КА называется детерминированным, если

1) Нет лямбда-переходов

2) $(\forall q \in Q)(\forall a \in V)(|\sigma(q, a)| = 1)$

• если $(\forall q \in Q)(\forall a \in V)(|\sigma(q, a)| \leq 1)$ - КА квазидетерминированный

1) Удаление лямбда-переходов

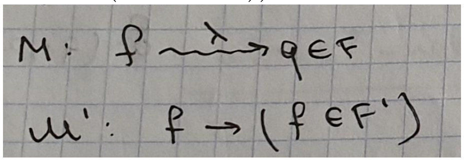
Дано: КА $M = (V, Q, q_0, F, \sigma)$

$V-$ язык, $Q-$ состояния, q_0- начальное состояние, $F-$ конечные состояния, $\sigma-$ функция перехода

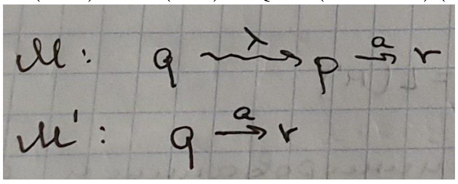
Строим: КА $M' = (V, Q', q_0', F', \sigma')$

$Q' = \{q_0\} \cup \{r : (\exists q \in Q)(q \to_a r), a \in V\}$ (останутся начальная вершина и вершины,у которых хотя бы одна входная дуга не λ)

$q_0' = q_0, F' = (F \cap Q') \cup \{f : (\exists q \in F)(f \Rightarrow_\lambda^* p \to_a q)\}$ (изначальные выходы, если не были удалены вершины и вершины, из которых можно пройти по лямбда-переходам в конечное состояние (на выход))



$\sigma'(q, a) = \sigma(q.a) \cup \{r : (\exists p \in Q)(p \Rightarrow_\lambda^* p \to_a r)$ (все переходы, которые были изначально)



$q \neq r$, но возможно $p = r$ и/или $q = r$ (петля)

2) Детерминизация

Дано: КА $M = (V, Q, q_0, F, \sigma)$ без лямбда-переходов

Строим: КА $M' = (V, Q', q_0', F', \sigma')$

$Q' = 2^Q$ - подмножество мн-ва состояний КА М

$q_0' = \{q_0\}; F' = \{T : T \cap F \neq \oslash\}$

$\sigma'(s, a) = \bigcup\limits_{q \in S} \sigma(q, a)$, $a \in V$

5. Билет 5 - 16

1. Область целостности. Т. (о кон. обл.). Поля вычетов.

Кольцо, где все не нулевые элементы обратимы по умножению, называется телом.
Тело, умножение которого коммутативно, называется полем.
Коммутативное кольцо без делителей нуля называется областью целостности.
Делители нуля: a, b называются делителями нуля,если $a, b \neq 0$, $a * b = b * a = 0$

Теорема: конечная область целостности является полем
Док-во: Пусть $R = (R, +, \bullet, 0, 1)$ - конечная область целостности
Нужно доказать, что $(\forall a \neq 0)(\exists x \neq 0)(ax = 1)$
$f_a : R \setminus \{0\} \to R \setminus \{0\} : f_a(x) = ax, a \neq 0$
$f_a(x) = f_a(y) \Rightarrow ax = ay \Rightarrow a(x - y) = 0 \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y$
f_a- инъекция
(поскольку множество R конечно, то любая его инъекция в себя является биекцией, то есть однозначным отображением, а значит сюръекцией)
При $y = 1, ax = 1,$ то есть $x = a^{-1} \Rightarrow$ каждый не нулевой обратим $\Rightarrow$ поле.
(Кольцо $\mathbb{Z}_p$ вычетов является полем тогда и только тогда, когда p - простое число)
Если $a \in Z_p^*$, то $a^{p-1} = 1$ и $a^{p-2} = a^{-1}$

2. ЛОРС. Т. (о структуре общего решения)

Общий вид ЛОРС:
$x_n + a_1 x_{n-1} + ... + a_k a_{n-k} = 0, a_k \neq 0$ (1)
Теорема:
Если y_n^1 и y_n^2 - решения соотношения (1), то произвольная линейная комбинация этих решений, то есть последовательность $y_n = c_1 y_n^1 + c_2 y_n^2$ - также решение (1)
Док-во:
Подставим решение в соотношение (1):
$c_1 y_n^1 + c_2 y_n^2 + a_1(c_1 y_{n-1}^1 + c_2 y_{n-1}^2) + ... + a_k(c_1 y_{n-k}^1 + c_2 y_{n-k}^2) =$
$= c_1(y_n^1 + c_2 y_n^1 + ...(\equiv 0) + a_k y_{n-k}^1) + c_2(y_n^2 + c_2 y_n^2 + ...(\equiv 0) + a_k y_{n-k}^2) \equiv 0$

Мы пытаемся доказать, что однородная система имеет нетривиальное решение, а соответственно один из членов не должен быть равен нулю

ФСР составляет ЛНЗ систему уравнений
Также в силу **Т.** можно утверждать, что мн-во всех решений соотношения (1) явл. подпространством в пространстве всех числовых последовательностей (в поле комплексных чисел)

6. Билет 6 - 17

1. Непрерывность сложения в замкнутом полукольце...

Полукольцо = идемпотентное полукольцо

Полукольцо называется замкнутым, если

1) любая последовательность элементов имеет точную верхнюю грань по естественному порядку ($a \le b \rightleftharpoons a + b = b$)

2) для любых элемента a и последовательности $\{b_n\}_{n \ge 0}$ имеет место:

$a \cdot sup b_n = sup(a \cdot b_n)$, $sup b_n \cdot a = sup(b_n \cdot a)$

Бесконечная сумма:

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a^n \rightleftharpoons \sup\limits_{n \ge 0} a_n$ - (точная верхняя грань последовательности всех степеней элементов)

$a \cdot \sum b_n = \sum ab_n; (\sum b_n)a = \sum b_n a$

Пример: $B = (\{0, 1\}, +, \bullet, 0, 1)$ - замкнуто, $supB = 1$, если хотя бы 1 член = 1, в противном случае = 0. Итерация любого элемента = 1. $1^* = 1$

$0^* = 0^0 + 0^1 + ... + 0^k + ... = 1 + 0... + 0 + ... = 1$

Свойства бесконечной суммы:

1) $\sum a_n + \sum b_n = \sum(a_n + b_n)$

Док-во: $a_n + b_n + \sum a_n + \sum b_n = (a_n + \sum a_n) + (b_n + \sum b_n) =$

$= \sum a_n + \sum b_n \Rightarrow (\forall n)(a_n + b_n \le \sum a_n + \sum b_n) \Rightarrow \sum a_n + \sum b_n -$ верхняя грань $\{a_n + b_n\}_{n \ge 0}$

Пусть C - верхняя грань $\{a_n + b_n\}_{n \ge 0}$, то есть $(\forall n)(C \ge a_n + b_n \ge a_n, b_n)$, то есть C - верхняя грань $\{a_n\}$ и верхняя грань $\{b_n\}$

$C + \sum a_n + \sum b_n = C + \sum b_n = C \Rightarrow (\forall n)(a_n + b_n \le \sum a_n + \sum b_n)$

Итак, $\sum a_n + \sum b_n = \sum(a_n + b_n)$

2) $a + \sum b_n = \sum(a + b_n)$

Следствие св-ва 1 при $(\forall n)(a_n = a)$ (является постоянной последовательностью)

Значит операция сложения непрерывна

3) $\sum a_n = \sum S_n$, где S_n - частичная сумма, $S_n = a_0 + a_1 + ... + a_n$

4) $a^* \rightleftharpoons \sum\limits_{n=0}^{\infty} a^n$ - итерация (замыкание) элемента a

Теорема: наименьшими решениями уравнений $x = ax + b$ и $x = xa + b$ являются соответственно $x = a^*b$ и $x = ba^*$

Док-во: Так как умножение и сумма непрерывны в замкнутом полукольце, то справедлива **Т.** о неподвижной точке, а значит можно записать sup как бесконечную сумму

$x = \sum\limits_{n \ge 0}^{\infty} f^n(0)$, где 0 - нуль полукольца, $f(x) = ax + b$

Учитывая, что $f^0(0) = 0, f^1(0) = b, f^2(0) = ab + b = (a+1)b, ..., f^n(0) = (a^{n-1} + ... + a + 1)b$

Получаем $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f^n(0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (1 + a + ... + a^{n-1})b$

Используя непрерывность умножения, вынесем b (вправо) за знак бесконечной суммы и получим

$\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1 + a + ... + a^{n-1})\right) b$. Сумма $(1 + a + ... + a^{n-1})$ есть частичная сумма последовательности $\{a_n\}_{n \ge 0}$.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1 + a + ... + a^{n-1}) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a^n = a^*$ (точная верхняя грань частичных сумм = точная верхняя грань последовательности = итерация элемента образующего)

Окончательно получаем $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f^n(0) = a^*b$. Аналогично для $x = xa + b$

2. Т. (о детерминизации КА)

Теорема: Для каждого КА мб построен эквивалентный ему детерминированный КА

Док-во: описание алгоритма построения

КА называется детерминированным, если

1) Нет лямбда-переходов

2) $(\forall q \in Q)(\forall a \in V)(|\sigma(q,a)| = 1)$

• если $(\forall q \in Q)(\forall a \in V)(|\sigma(q,a)| \leq 1)$ - КА квазидетерминированный

1) Удаление лямбда-переходов

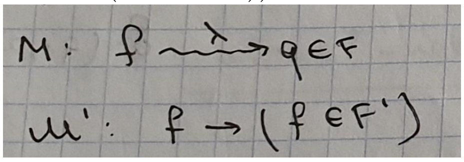
Дано: КА $M = (V, Q, q_0, F, \sigma)$

$V-$ язык, $Q-$ состояния, q_0- начальное состояние, $F-$ конечные состояния, $\sigma-$ функция перехода

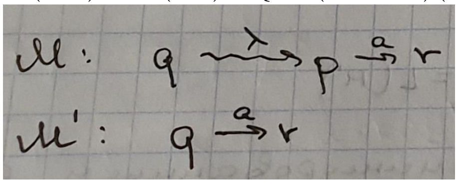
Строим: КА $M' = (V, Q', q_0', F', \sigma')$

$Q' = \{q_0\} \cup \{r : (\exists q \in Q)(q \to_a r), a \in V\}$ (останутся начальная вершина и вершины,у которых хотя бы одна входная дуга не λ)

$q_0' = q_0, F' = (F \cap Q') \cup \{f : (\exists q \in F)(f \Rightarrow_\lambda^* p \to_a q)\}$ (изначальные выходы, если не были удалены вершины и вершины, из которых можно пройти по лямбда-переходам в конечное состояние (на выход))



$\sigma'(q,a) = \sigma(q.a) \cup \{r : (\exists p \in Q)(p \Rightarrow_\lambda^* p \to_a r)$ (все переходы, которые были изначально)



$q \neq r$, но возможно $p = r$ и/или $q = r$ (петля)

2) Детерминизация

Дано: КА $M = (V, Q, q_0, F, \sigma)$ без лямбда-переходов

Строим: КА $M' = (V, Q', q_0', F', \sigma')$

$Q' = 2^Q$ - подмножество мн-ва состояний КА М

$q_0' = \{q_0\}; F' = \{T : T \cap F \neq \oslash\}$

$\sigma'(s,a) = \bigcup\limits_{q \in S} \sigma(q,a)$, $a \in V$

7. Билет 7 - 18

1. Смежные классы. Т. Лагранжа

Пусть $\mathcal{G} = (G, \bullet, 1)$ - группа, а $\mathcal{H} = (H, \bullet, 1)$ ее подгруппа. Левым смежным классом подгруппы $\mathcal{H}$ по элементу $a \in G$ называют множество $aH = \{y : y = ah, h \in H\}$

правым смежным классом классом - множество $Ha = \{y : y = ha, h \in H\}$

Теорема Лагранжа о конечных группах: Порядок конечной группы делится на порядок любой ее подгруппы

Док-во: Левый (правый) смежный класс подгруппы $\mathcal{H}$ группы $\mathcal{G}$ по элементу $a \in \mathcal{G}$: $aH \rightleftharpoons \{ah : h \in H\}$ $(Ha \rightleftharpoons \{ha : h \in H\})$; $(\forall a)(aH = Ha)$

Рассмотрим $\hat{\mathcal{M}}_2^+ = (M_2^+, \bullet, E)$; H $= \begin{Bmatrix} d1 & 0 \\ 0 & d2 \end{Bmatrix}$ $(d1, d2 \neq 0)$; $a = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix} \in M_2^+$

$aH = \left\{ \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d1 & 0 \\ 0 & d2 \end{pmatrix} : d1, d2 \neq 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} d1\beta_{11} & d2\beta_{12} \\ d1\beta_{21} & d2\beta_{22} \end{pmatrix} : d1, d2 \neq 0 \right\}$

$Ha = \left\{ \begin{pmatrix} d1 & 0 \\ 0 & d2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix} : d1, d2 \neq 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} d1\beta_{11} & d1\beta_{12} \\ d2\beta_{21} & d2\beta_{22} \end{pmatrix} : d1, d2 \neq 0 \right\} \neq aH$

если $(\forall a)(aH = Ha)$, то H - норм. делитель(подгруппа)

Лемма 1: $(\forall h \in H)(hH = H)$

Док-во: Пусть $a \in hH \Rightarrow a = hh_1, h_1 \in H \Rightarrow a \in h$ (т.к. H замкнуто), то есть $hH \subseteq H$

$a \in H : a = h(h^{-1}a)$, но $h^{-1} \in H, a \in H \Rightarrow h^{-1}a \in H \Rightarrow a \in hH$

Итак $hH = H$

Лемма 2: $(\forall a, b \in \mathcal{G})(a(bH) = abH)$

Следует из ассоциативности

Лемма 3: Левые смежные классы попарно не пересекаются

Док-во: Пусть $aH \neq bH$, но $aH \cap bH \neq \oslash$, то есть $(\exists x)(x \in aH \cap bH)$ и $x = ah_1$, $x = bh_2$, где h_1 и h_2 - элементы группы H

Рассмотрим $ah_1 = bh_2$

$ah_1h_2^{-1} = b$. Вычислим левый смежный класс

$bH = (ah_1h_2^{-1})H = (ah_1)(h_2^{-1}H) = ah_1H = aH \Rightarrow bH = aH$. Противоречие

Следствие: левые смежные классы образуют разбиение группы

$(\forall a \in G)(a \in aH)$

Лемма 4: Все левые смежные классы находятся между собой во взаимно-однозначном соответствии $(\forall a, b)aH \sim bH$

Док-во: $\varphi : H \to aH$, где $\varphi(h) = ah$, сразу из определения следует, что φ - сюръекция

Если $ah_1 = ah_2$, то $h_1 = h_2$ (закон сокращения в группе), то есть φ - инъекция

Значит φ - биекция

В случае конечной группы $|G| = k|H|$, где k - число левых смежных классов

$k = |G : H|$ - индекс подгруппы H в группе G (это число определяет кол-во смежных классов)

2. Задача о путях. Флойд-Уоршелл-Клини

$G = (V, E)$ - орграф. $\varphi : \mathbb{E} \to \mathbb{S}/\{0\}$ - функция разметки со значениями в нек. идемпотентном полукольце $\mathcal{S} = (S, +, \bullet, 0, 1)$ $(\forall \varepsilon \in \mathbb{E})(\varphi(\varepsilon) \neq 0)$

Если задать орграф матрицей смежности $\mathrm{A} = (a_{ij} = \begin{Bmatrix} 1, v_i, v_j \in E \\ 0, \text{иначе} \end{Bmatrix})$

То задача о достижимости сводиться к вычислению матрицы $\mathrm{C} = (c_{ij} = \begin{Bmatrix} 1, v_i \Rightarrow^* v_j \\ 0, \text{иначе} \end{Bmatrix})$

Если задать орграф матрицей меток дуг $\mathrm{A} = (a_{ij} = \begin{Bmatrix} \varphi(v_i, v_j), (v_i, v_j) \in E \\ 0, \text{иначе} \end{Bmatrix})$

То задача сводится к вычислению матрицы кратчайших расстояний
$\mathrm{C} = (c_{ij} = \begin{Bmatrix} \text{длине кратчайшего пути из } v_i \text{ в } v_j\text{, если } v_i \Rightarrow^* v_j \\ +\infty, \text{иначе} \end{Bmatrix})$

Обе задачи можно решить с помощью алгоритма **Флойда-Уоршелла-Клини**:
В случае задачи о достижимости, в качестве полукольца $\mathcal{S}$ выбирают полукольцо
$\mathcal{B} = ((0, 1), max, min, 0, 1)$, а в случае задачи о поиске кратчайших расстояний:
$\mathbb{R}_+ = ([0, +\infty], min, +, +\infty, 0)$. После этого матрица $\mathrm{C} = \mathrm{A}^*$ находится путём решения системы уравнений:
$\xi = A\xi + \varepsilon_j$, где $\varepsilon_j \in \mathcal{R}^n$ - j-й вектор единичной матрицы в полукольце $\mathcal{B}$ или $\mathcal{R}_+$
Наименьшее решение имеет вид: $\xi = A^*\varepsilon_j$

8. Билет 8 - 19

1. Кратчайшее расстояние в размеченном орграфе (на основе BFS)

Вход: орграф $G = (V, E)$, заданный списками смежности. v_0 - начальная вершина. L - список смежностей.
Выход: $M[v]$ - массив меток вершин

1. **for all** $(v \in V)$ **do** M[v] := $+\infty$ **end**
2. Q:=0
3. $v_0 \to$ Q; M[v_0] = 0
4. **for all** $v \in V$ **while** (Q $\neq \oslash$) **do**
5. **for all** w $\in$ L[v] **do**
6. **if** M[w] = $+\infty$ **then begin**
7. M[w] := m[v] + 1
8. w $\to$ Q
9. **end if**
10. **end for**
11. Q $\to$ v
12. **end for**

2. ЛНРС. Т. (о структуре общ. решения.) Т. (о суперпозиции)

Общий вид ЛОРС:

$x_n + a_1x_{n-1} + ... + a_ka_{n-k} = 0, a_k \neq 0$ (1)

Общий вид ЛНРС:

$x_n + a_1x_{n-1} + ... + a_ka_{n-k} = f(n), n \geq k$ (2)

Теорема:

Общее решение ЛНРС (2) есть сумма произвольного частного решения неоднородного соотношения и общее решение однородного соотношения (1)

$y_n^{\text{он}} = y_n^{\text{чн}} + \sum\limits_{i=1}^{k} c_iy_n^i$, где $(y_n^1, ..., y_n^k)$ - ФСР соотношения (1)

Док-во:

Докажем, что для произвольных начальных условий однозначно определяются константы в выражении

Пусть заданы нормальные условия вида $x_0 = \alpha_0, x_1 = \alpha_1, ..., x_{k-1} = \alpha_{k-1}$.

Система для ЛНРС

$$\left\{\begin{matrix} y_0^{\text{чн}} + \sum\limits_{i=1}^{k} c_iy_0^i = \alpha_0 \\ ... \\ y_{k-1}^{\text{чн}} + \sum\limits_{i=1}^{k} c_iy_{k-1}^i = \alpha_{k-1} \end{matrix}\right\} \text{или} \left\{\begin{matrix} \sum\limits_{i=1}^{k} c_iy_0^i = \alpha_0 - y_0^{\text{чн}} \\ ... \\ \sum\limits_{i=1}^{k} c_iy_{k-1}^i = \alpha_{k-1} - y_{k-1}^{\text{чн}} \end{matrix}\right\} (3)$$

система для ЛОРС

$$\left\{\begin{matrix} \sum\limits_{i=1}^{k} c_iy_0^i = \alpha_0 \\ ... \\ \sum\limits_{i=1}^{k} c_iy_{k-1}^i = \alpha_{k-1} \end{matrix}\right\} (4) \text{ Главный определитель (4): } \triangle = \begin{vmatrix} y_0^1 ... y_0^k \\ ... \\ y_{k-1}^1 ... y_{k-1}^k \end{vmatrix}$$

Главный определитель (3) совпадает с главным определителем (4) и отличен от нуля в силу линейной независимости элементов ФСР.

Значит система имеет единственное решение в виде вектора констант $(c_1, ..., c_k)^T$

Теорема: Принцип суперпозиции

Пусть задана ЛНРС: $x_n + a_1x_{n-1} + ... + a_ka_{n-k} = \sum\limits_{i=1}^{m} g_i(n)$ (3)

Тогда решение соотношения (3) мб представлено в виде суммы:

$y_n = \sum\limits_{i=1}^{m} \varphi_i(n)$, где $\varphi_i(n)$ - решение ЛНРС с правой частью $g_i(n)$

Поиск частного решения неоднородного соотношения мб, в частности произведён методом подбора, когда вид частного решения определён видом правой части

1 случай: $f(n) = a^nP^m(n), m \geq 0$

$y_n^{\text{чн}} = n^sa^nQ^m(n)$, где s - кратность корня a характеристического ур-я $(s \geq 0)$

$s = 0 \Rightarrow a$ не явл корнем, а Q - многочлен m-той степени с неопр. коэф-ами.

a - вещ число

2 случай: $f(n) = r^n(P^m(n)cos(n\varphi) + Q^l(n)sin(n\varphi), m, l \geq 0$

m и l мб $= -\infty$, то есть многочлены отсутствуют, но должно быть хотя бы одно. Не одновременно $= -\infty$

$y_n^{\text{чн}} = n^sr^n(\tilde{P}^N(n)cos(n\varphi) + \tilde{Q}^N(n)sin(n\varphi)$,где $N = max(m, l)$ и s - кратность корня $r(cos\varphi \pm isin\varphi) = re^{\pm i\varphi}$ хар. уравнения, $s \geq 0$

9. Билет 9 - 20

1. Поиск в ширину BFS

Вход: орграф $G = (V, E)$, $\varphi : E \to \mathbb{R}^+$, v_0 - источник

Выход: $M[v]$ - массив меток вершин

(граф задан матрицей)

proc BFS(v_0);

1. M[v_0] := 0; Q := $\oslash$; (Q - очередь)
2. **for all** ($v \in V \setminus \{v_0\}$) **do** M[$v$] := $+\infty$ end
3. $v_0 \to$ Q;
4. **for all** $v \in$ Q **while** (Q $\neq \oslash$) **do**
5. **for all** w $\in$ L[v] **do**
6. d := min(M[w], M[v] + φ(v,w));
7. **if** d < M[w] **then begin**
8. M[w] := d;
9. **if** w $\notin$ Q **then** w$\to$ Q; **end** (к п. 5); **end** (к п. 7);
10. Q $\to v$; (v покидает очередь); **end** (к п. 4); **end**;

$O(\sum\limits_{v \in V} k_v dg^+(v))$ - сложность алгоритма, где k_v- кол-во попавших v в очередь

$k_v = 1 : O(|E|)$

Полученный массив = массив кратчайших расстояний от заданной вершины.

2. Лемма о разрастании

Теорема: Для всех а регулярного языка $L \subseteq V^*$ существует константа k_l такая, что $(\forall x \in L)(|x| \geq k_l) \Rightarrow x = uvw$,

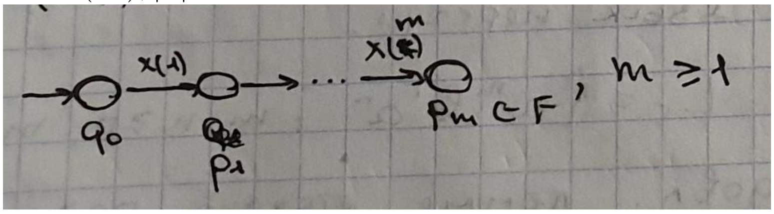
где $0 < |v| \leq k_l$, и $(\forall n \geq 0)(x_n = uv^n w \in L)$

Док-во: Пусть $L \subseteq V^*$ - рег язык, тогда L - язык, допускающий КА. ($L = L(M)$, где $M = (V, Q, qc, F, b)$ - детерм. КА

$V-$ язык, $Q-$ состояния, q_0- начальное состояние, $F-$ конечные состояния, $\sigma-$ функция перехода

Положим $k_l = |Q|$

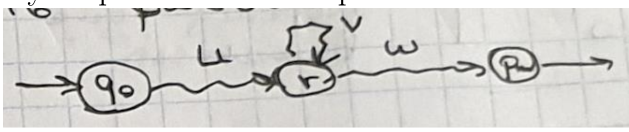
$x \in L(M), |x| \geq k_l$



$x = x(1)...x(m), m \geq 1$

В этом пути число вершин пути $>$ числа всех состояний $\Rightarrow$ какая-то вершина будет повторена

Пусть разбивается на три части



$x = uvw$

$x_0 = uw \in L$ и $(\forall n \geq 1)(x_n = uv^n w \in L)$

$|v| > 0$, так как контур есть путь ненулевой длины, а так как контур - простой путь, то длина цепочки

$|v| \leq |Q| = k_l$

Следствие: В любом бесконечном рег. языке существует последовательность слов, длины кот. образ. возрастают арифм. прогрессию

$x_n = uv^n w$; $x_0, x_1, ..., x_n, ...$; $d = |v|$

10. Билет 10 - 21

1. Задача о путях в размеченном орграфе (1)

$D = (V, E), E \subseteq V^2, \varphi : E \to S \setminus \{0\}$, где $\mathcal{S} = (S, +, \bullet, 0, 1)$ - замкнутое полукольцо.

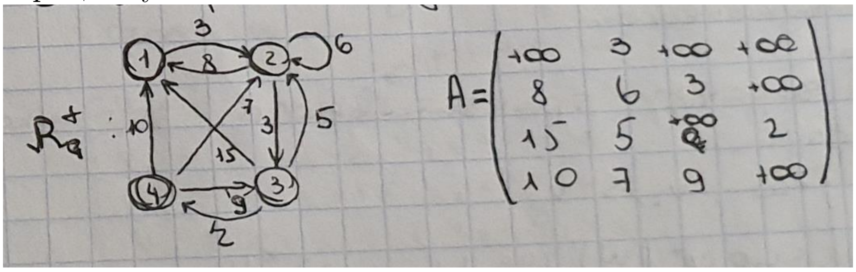
V - мн-во вершин, E - мн-во дуг

Это есть функция разметки. Этот D - орграф, размеченный над полукольцом $\mathcal{S}$

$A = (a_{ij})_{n \times n}$, где $n = |V|$

$a_{ij} \rightleftharpoons \left\{ \begin{matrix} \varphi(v_i, v_j), \text{если } v_i \to v_j \\ 0 \text{ иначе} \end{matrix} \right\}$

Заметим, что любой орграф размечен над булевым полукольцом B, и эта мат. совпадает с матрицей булевых



Распр. ф-ии разметки на пути

Метка пути w

$\varphi^*(w) \rightleftharpoons \left\{ \begin{matrix} 1, \text{ если } |w| = 0 \\ \varphi(e1) * \varphi(e2) * ... * \varphi(e_m), \text{ если } |w| = m; W = u_0 \overset{e1}{\to} u_1 \overset{e2}{\to} ... \overset{em}{\to} u_m \end{matrix} \right\}$

$\varphi^*(2 \to 3 \to 4 \to 1) = 3 + 2 + 10 = 15$

Стоимость прохождения из i-ой в j-ую

По опр. $C(v_i, v_j) \rightleftharpoons \left\{ \begin{matrix} 0, \text{если } v_i \not\Rightarrow^* v_j \\ \sum\limits_{w:vi \Rightarrow *vj} \varphi^*(w), \text{ если } v_i \Rightarrow^* v_j \end{matrix} \right\}$

Матрица стоимостей

$C = (c_{ij})_{n \times n}; C_{ij} \rightleftharpoons (v_i, v_j)$

Сформулируем задачу о путях:

Зная матрицу меток дуг A, найти матрицу стоимостей C

$B : C_{ij} = \left\{ \begin{matrix} 0, \text{ если } v_i \not\Rightarrow^* v_j \\ \sum\limits_{w:vi \Rightarrow *vj} \varphi^*(w), \text{ т.к для каждого пути } w : \varphi^*(w) = 1, \text{ если } v_i \Rightarrow^* v_j \end{matrix} \right\}$

То есть получили матрицу достижимости

B - булево полукольцо

Это для задач транзитивного замыкания графа:

$R^+ : C_{ij} = \left\{ \begin{matrix} +\infty, \text{ если } v_i \not\Rightarrow^* v_j \\ \underset{R^+}{sup} \varphi^*(w), \text{ где } w : v_i \Rightarrow^* v_j \end{matrix} \right\}$

$\underset{R^+}{sup} \varphi^*(w) = \underset{\text{числ}}{inf} \varphi^*(w) = \underset{w:vi \Rightarrow *vj}{min} \varphi^*(w)$, то есть наименьшая числовая метка среди всех таких путей. Матрица кратчайших расстояний.

Теорема:

$C = A^*$

1. Док-во C = A* (как доп вопрос) (2)

Ограниченная стоимость прохождения

P - множество путей в графе. Нетривиальное, то есть не множество всех путей

$C^p_{ij} \rightleftharpoons \sum\limits_{w: v_i \Rightarrow * v_j; w \in p} \varphi^*(w)$ если путей нет, то нуль

$C^p = (C^p_{ij})_{n \times n}$

Лемма: $A^l = C^{(l)} = C^p, p \geq 0$, где $p = \{w : |w| = l\}$

($A^p - p -$ ая степень матрицы меток дуг)

Док-во: методом математической индукции

Индукция по l

Базис: $l = 0; A^0 = E$ (единичная матрица)

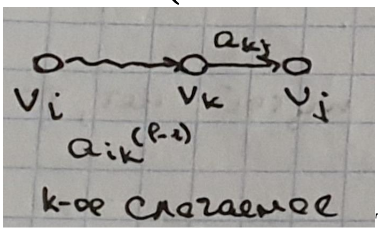
Предположение: $\vee m \leq p - 1$ утверждение верно, $p \geq 1$

Переход: $A^p = A^{p-1}A$

Пусть $A^p = (a^{(p)}_{ij})_{n \times n}$

$a^{(l)}_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{w} a^{(l-1)}_{ik} a_{kj}$, где $a^{(l-1)}_{ik} = C^{l-1} = A^{l-1}$

$$a^{(l-1)}_{ik} a_{kj} = \left\{ \begin{matrix} 0, a^{l-1}_{ik} = 0 \cup a_{kj} = 0, \text{ то есть } v_i \Rightarrow^* v_k(|w| = l-1) \cup v_l \nrightarrow v_j \\ (\sum\limits_{\substack{wivi \Rightarrow^* vk \\ |w| = l-1}} \varphi^*(w)) * a_{kj} = \sum\limits_{\substack{\varphi ivi \Rightarrow^* vk \\ |w| = l-1}} \varphi^*(w) * a_{kj}, \text{ если } v_i \Rightarrow^* v_k(|w| = l-1) \cup v_k \rightarrow v_l \end{matrix} \right\}$$



то есть a_{kj} - фиксированная дуга, а $a^{(l-1)}_{kj} -$ путь опр. длины

если суммы не равны нулю, то это стоимость прохождения из i-той вершины в j-ую по всем путям длины p,

которые кончаются фикс. дугой, ведущей из k-ой в j-ую

если k пробегает мн-во всех вершин графа, мы получим всю сумму по k, то есть стоимость прохождения из i в j

по всем путям длины l. (в частности, мб нулю)

$a^{(l)}_{ij} = \sum\limits_{\substack{w: vi \Rightarrow^* vi \\ |w| = l}} \varphi^*(w)$

$A^* = \sum\limits_{l=0}^{\infty} A^l = \sum\limits_{l=0}^{\infty} C^{(l)} = C$

2. Лемма Бернсайда

$M = \{1, 2, ..., n\}, S_n, |S| = n!$

$G-$подгруппа группы S_n (Группа G действует на мн-ве n)

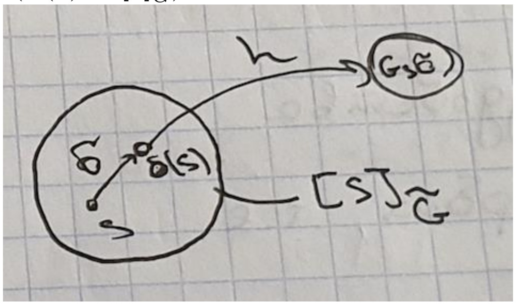
$[S]_{\tilde{G}}$- орбита элемента S

G_s - подгруппа группы G

$G(s, r) \rightleftharpoons \{\sigma : r = \sigma(S)\}$

Утверждение: $|[S]_r| = |C(G_3)| = |G : G_s|$ (Орбита на стабилизатор = автоморфизмы)

Док-во: все вершины, эквивалентные S отобразить во все правые смежные классы по подгрупппе стабилизатора S следующим образом: $h : [s]_{\bar{G}} \to C(G_s)$,где $h(\sigma(s)) \rightleftharpoons G_s\sigma(\sigma(s) \in [s]_{\tilde{G}})$ σ — подстановки подгруппы G



Отображение h корректно, так как любой элемент орбиты S мб представлен в виде $\sigma(s)$ для нек. подстановки σ

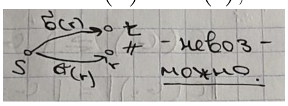
Отображение h - сюрьекция, так как при фиксации любого правого смежного класса он явл. образом элемента $\sigma(s)$

Докажем, что h инъективно

Допустим противное

Пусть $r, t \in [s]_{\tilde{G}}$ и $r \neq t$, и пусть $h(r) = h(\sigma_r(s)) = G_s\sigma_r$,где $r = \sigma_r(s)$, $t = \sigma_r(s)$ (существует подстановка которая приведёт s в r, t)

Если $h(r) = h(t)$,то $G_s\sigma_r = G_s\sigma_t$



чтд: h — инъективно

Тогда в силу утверждения и **Т. Лагранжа**

$|G| = |G_s| \cdot |G : G_s| = |G_s| \cdot w(s)$

Пусть N - число орбит, то есть $N = |M/r|$

$S_1 \in [s_1]_{\tilde{G}}, ..., S_N[s_N]_{\tilde{G}}$

Тогда $N \cdot |G| = w(S_1) \cdot |G_{S_1}| + ... + w(sn) \cdot |G_{S_n}| = \sum\limits_{s \in m} |G_s|$

$N = \frac{1}{|G|} \sum\limits_{s \in m} |G_s| = \frac{1}{|G|} \sum\limits_{\sigma \in G} \psi(\sigma)$,где $\psi(\sigma)$ - число элементов мн-ва M, которое оставляет подстановка σ неподвижной

11. Билет 11 - 22

1. Цикловой индекс. Т. Пойа

G - подгруппа группы S_n,$|S_n| = n!$

Пусть $\sigma \in G$ (группа подстановок) и $\sigma = c_1 c_2 ... c_{k(\sigma)}$, где $k(\sigma)$ - общее число попарно независимых циклов в разложении σ

$t_\sigma = x_1^{m1} x_2^{m2} ... x_n^{mn}$,где mj - число циклов длины j в разложении $\sigma(1 \leq j \leq n)$ с учётом циклов длины лямбда

$mj \geq 0$

$\sum\limits_{j=1}^{n} jmj = n$

Цикловой индекс $P_G(x_1, ..., x_n) = \frac{1}{|G|} \sum\limits_{\sigma \in G} t\sigma$

Теорема Пойа

$Invt(R^S/\tilde{G}) = \sum\limits_{w \in W} \alpha_w w$, где α_w - число попарно неэквивалентных функций разметки w

Основная теорема: $Invt(R^S/\tilde{G}) = P_G(x_1, x_2, ..., x_n)$ $(\forall s = \overline{1, n})(k_s = w_1^s + ... + w_n^s)$

2. Непр. сложения в замкнутом полукольце. Т. (наим. реш)

Полукольцо = идемпотентное полукольцо

Полукольцо называется замкнутым, если

1) любая последовательность элементов имеет точную верхнюю грань о естественному порядку ($a \leq b \rightleftharpoons a + b = b$)

2) для любых элемента a и последовательности $\{b_n\}_{n \geq 0}$ имеет место:

$a \cdot sup b_n = sup(a \cdot b_n)$

$sup b_n \cdot a = sup(b_n \cdot a)$

Бесконечная сумма:

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a^n \rightleftharpoons \underset{n \geq 0}{sup} a_n$ - (точная верхняя грань последовательности всех степеней элементов)

$a \cdot \sum b_n = \sum ab_n; (\sum b_n)a = \sum b_n a$

Пример: $B = (\{0, 1\}, +, \bullet, 0, 1)$ - замкнуто, $supB = 1$, если хотя бы 1 член = 1, в противном случае = 0. Итерация любого элемента = 1. $1^* = 1$

$0^* = 0^0 + 0^1 + ... + 0^k + ... = 1 + 0... + 0 + ... = 1$

Свойства бесконечной суммы:

1) $\sum a_n + \sum b_n = \sum(a_n + b_n)$

Док-во: $a_n + b_n + \sum a_n + \sum b_n = (a_n + \sum a_n) + (b_n + \sum b_n) =$

$= \sum a_n + \sum b_n \Rightarrow (\forall n)(a_n + b_n \leq \sum a_n + \sum b_n) \Rightarrow \sum a_n + \sum b_n -$ верхняя грань $\{a_n + b_n\}_{n \geq 0}$

Пусть C - верхняя грань $\{a_n + b_n\}_{n \geq 0}$, то есть $(\forall n)(C \geq a_n + b_n \geq a_n, b_n)$, то есть C - верхняя грань $\{a_n\}$ и верхняя грань $\{b_n\}$

$C + \sum a_n + \sum b_n = C + \sum b_n = C \Rightarrow (\forall n)(a_n + b_n \leq \sum a_n + \sum b_n)$

Итак, $\sum a_n + \sum b_n = \sum(a_n + b_n)$

2) $a + \sum b_n = \sum(a + b_n)$

Следствие св-ва 1 при $(\forall n)(a_n = a)$ (является постоянной последовательностью)

Значит операция сложения непрерывна

3) $\sum a_n = \sum S_n$, где S_n - частичная сумма, $S_n = a_0 + a_1 + ... + a_n$

4) $a^* \rightleftharpoons \sum\limits_{n=0}^{\infty} a^n$ - итерация (замыкание) элемента a

Теорема: наименьшими решениями уравнений $x = ax + b$ и $x = xa + b$ являются соответственно $x = a^*b$ и $x = ba^*$

Док-во: Используя формулу для вычисления наименьшей неподвижной точки и записывая в случае полукольца sup как бесконечную сумму

$x = \sum\limits_{n \geq 0}^{\infty} f^n(0)$, где 0 - нуль полукольца, $f(x) = ax + b$

Учитывая, что $f^0(0) = 0, f^1(0) = b, f^2(0) = ab + b = (a+1)b, ..., f^n(0) = (a^{n-1} + ... + a + 1)b$

Получаем $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f^n(0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (1 + a + ... + a^{n-1})b$

Используя непрерывность умножения, вынесем b (вправо) за знак бесконечной суммы и получим

$\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1 + a + ... + a^{n-1})\right) b$. Сумма $(1 + a + ... + a^{n-1})$ есть частичная сумма последовательности $\{a_n\}_{n \geq 0}$.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1 + a + ... + a^{n-1}) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a^n = a^*$ (точная верхняя грань частичных сумм = точная верхняя грань последовательности = итерация элемента образующего)

Окончательно получаем $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f^n(0) = a^*b$

Аналогично для $x = xa + b$