Résumé - Analyse II

Sébastien Speierer

6 juin 2013

Table des matières

1 Les équations différentielles

1.1 Par séparation de variable

Une équation différentielle est dite **à variable séparées** si on peut l'écrire sous la forme :

$$y'(x) = \frac{f(x)}{g(y)}$$

on peut alors facilement résoudre en mettant sous la forme :

$$\boxed{\int f(x)dx = \int g(y)dy}$$

1.2 Famille de courbes orthogonales

Pour un famille de courbes donnée, trouver une famille de courbes orthogonales. Illustrons la méthode de résolution par un exemple :

1. Une famille de courbes donnée : $x^2 + 2y(x)^2 = c, c > 0$
2. Convertir en une équation différentielle : $\frac{d}{dx}(x^2 + 2y(x)^2) = 0 = 2x + 4y(x)y'(x) \Rightarrow x + yy' = 0$
3. Pour trouver la famille orthogonale, pour tout point $(x, y(x))$, on remplace $y'(x)$ par $-\frac{1}{y(x)}$. Dans notre cas, on trouve alors la famille orthogonale :
$$x - \frac{y}{y'} = 0$$
4. On résout cette nouvelle équation différentiel en on a trouvé la famille orthogonale de notre famille de départ.

1.3 Équations linéaires du 1^{er} ordre

Une équation linéaire du premier ordre est de la forme :

$$y'(x) + p(x) \cdot y(x) = q(x)$$

et son équation homogène :

$$y'(x) + p(x) \cdot y(x) = 0$$

Il faut d'abord trouver la solution de l'équation homogène qui sera de la forme :

$$\boxed{y_{hom}(x) = Ce^{-P(x)}}$$

et ensuite on peut trouvé une solution particulière :

$$\boxed{y_{part}(x) = (\int q(x) \cdot e^{P(x)}dx) \cdot e^{-P(x)}}$$

Pour finir la solution générale de notre équation linéaire sera :

$$\boxed{y(x) = y_{hom}(x) + y_{part}(x)}$$

1.4 Équations linéaires du 2^e ordre

Une équation linéaire du 2^e ordre est de la forme :

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = q(x)$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $q(x)$ une fonction continue. On lui associe aussi une fonction homogène :

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$$

Pour trouver la solution y_{hom}, on cherche un combinaison linéaire de deux solutions linéairement indépendant y_1 et y_2 tel que $y_{hom} = C_1y_1+C_2y_2$. Pour cela, on calcul le déterminant de $a\lambda^2+b\lambda+c = 0$ que l'on appelle équation caractéristique. On différencie 3 cas :

1. $\mathbf{b^2 - 4ac > 0}$: alors l'équation caractéristique possède deux solutions réelles distinctes :

$$y_{hom} = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x}$$

2. $\mathbf{b^2 - 4ac < 0}$: alors l'équation caractéristique possède deux solutions complexes conjugué :

$$y_{hom} = (C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x))e^{\alpha x} \Leftarrow \alpha = -\frac{b}{2a}, \beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

3. $\mathbf{b^2 - 4ac = 0}$: alors l'équation caractéristique possède une unique solutions :

$$y_{hom} = (C_1 + C_2x)e^{\lambda x} \Leftarrow \lambda = -\frac{b}{2a}$$

1.4.1 Méthode de variation des constantes

Pour trouver une solution particulière, on peut considéré C_1 et C_2 de la solution homogène comme des fonctions de x. Ainsi, il nous suffit de résoudre le système d'équation :

$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0 \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' = \frac{q(x)}{a} \end{cases}$$

1.4.2 Méthode des coefficients indéterminés

Cette méthode peut s'appliquer si le membre de droite $q(x)$ a une forme particulière : fonction polynôme, sinusoïdale, exponentielle,...

y_{part} est une combinaison linéaire de $q(x)$ et ses dérivé multiplié par X où

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si } q(x) \text{ n'est pas solution de l'éq. hom.} \\ x & \text{si } q(x) \text{ est solution et } xq(x) \text{ n'est pas solution de l'éq. hom.} \\ x^2 & \text{si } q(x) \text{ et } xq(x) \text{ sont solutions de l'éq. hom.} \end{cases}$$

1.5 Équations différentielles de Bernoulli

Une équation différentielle de Bernoulli est de la forme :

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x)y^m$$

Pour la résoudre, il faut diviser l'équation par y^m puis faire un changement de variable avec $u(x) = y^{1-m}$. On obtient alors un équation différentielle linéaire du premier ordre.

1.6 Équations différentielles de Riccati

Une équation différentielles de Riccati est de la forme :

$$y'(x) = a(x)y(x)^2 + b(x)y(x) + c(x)$$

Pour la résoudre, il faut connaitre une solution y_1. Ensuite, par un changement de variable $y(x) \to u(x)$ où $y = y_1 + \frac{1}{u}$, on retrouve une équation linéaire du premier ordre.

2 Fonctions à deux variables

Une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ où $D \subset \mathbb{R}^2$ associe à tout couple (x, y) du domaine de définition ou ensemble de départ $D = D(f)$ un et un seul nombre réel, l'image de (x, y) par f notée $f(x, y)$. Soit $p = (x, y)$ un point de $\mathbb{R}^2$. alors la norme de p, notée $\parallel p \parallel$ est définit par $\parallel p \parallel = \sqrt{x^2 + y^2}$.

2.1 Limite et continuité d'une fonction à deux variables

La fonction $f : D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}^2$, admet pour limite t lorsque pour toutes suites $(x_n, y_n), (x_n, y_n) \in D(f) \setminus \{(x_0, y_0)\}$ tendant vers (x_0, y_0), la suite correspondante $(f(x_n, y_n))$ tend vers t. On note :

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = t$$

Pour que la limite existe, il faut quel existe et que cette limite soit la même quelque soit le parcours utilisé pour approcher le point (x_0, y_0).
La fonction $f : D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}^2$ est **continue** en $(x_0, y_0) \in D \Leftrightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$

2.1.1 Passage en coordonnées polaires

Pour la résolution de nombreux problème, il est parfois plus simple que transformer notre fonction en coordonnées polaires. Soit fonction $f : D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}^2$, on définit un nouvelle fonction :

$$\bar{f}(r, \varphi) = f(r \cdot \cos(\varphi), r \cdot \sin(\varphi))$$

Exemple : Soit $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$, on cherche à démontrer que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$. Passons notre fonction en coordonnées polaires : $\bar{f}(r, \varphi) = \frac{r^2 \cos(\varphi)^2 r \sin(\varphi)}{r^2} = r \cos(\varphi)^2 \sin(\varphi)$. On a $\lim_{r\to 0} \bar{f}(r, \varphi) = 0$

2.2 Dérivées partielles

La dérivée partielle d'une fonction de plusieurs variables est la dérivée par rapport à l'une de ses variables, les autres étant gardées constantes. On note $\frac{df}{dx}(x_0, y_0)$ ou $f_x(x_0, y_0)$ la dérivé partielle de f par rapport à la variable x. On a :

$$\frac{df}{dx}(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \quad \text{et} \quad \frac{df}{dy}(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Le vecteur $(\frac{df}{dx}(x_0, y_0), \frac{df}{dy}(x_0, y_0))$ est appelé le **gradient** de la fonction f en (x_0, y_0) et noté $\bigtriangledown f(x_0, y_0)$.
Une dérivée partielle peut se calculer moyennant les techniques exposées pour les dérivées ordinaires : il suffit de considérer comme constantes les variables autres que celle par rapport à laquelle on dérive.
Une fonction peut très bien posséder des dérivées partielles en un point sans pour autant être continue en ce point. Par contre, si une fonction a toutes ses dérivées partielles continues en un point, alors elle est continue en ce point.
Même s'il existe des exemples où les dérivées mixtes sont inégales en certains points, dans la plupart des applications des fonctions de plusieurs variables on travaille sous des hypothèses qui rendent les dérivées partielles **indépendantes de l'ordre dans lequel les dérivations sont faites**.

2.2.1 Équation d'un plan tangent

L'équation d'un plan tangent à la surface $z = f(x, y)$ au point (x_0, y_0, z_0) est donnée par :

$$\boxed{z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)}$$

2.3 Fonctions différentiables

Si f est différentiable en (x_0, y_0), alors f est continue en (x_0, y_0) et les dérivés de la fonction pour chaque variable existent.

$$\text{Différentiablilité} \Leftrightarrow \text{existence d'un plan tangent}$$

2.4 Dérivation des fonctions composées

2.4.1 Dérivées en chaine

1. Soit les fonction $f(x,y), x(t), y(t)$ et $\bar{f}(t) = f(x(t), y(t))$ la fonction composée :

$$\frac{d\bar{f}}{dt} = \frac{df}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{df}{dy} \cdot \frac{dy}{dt}$$

2. Soit les fonction $f(x,y), x(u,v), y(u,v)$ et la fonction composée $\bar{f}(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$:

$$\frac{d\bar{f}}{du} = \frac{df}{dx} \cdot \frac{dx}{du} + \frac{df}{dy} \cdot \frac{dy}{du}$$

2.4.2 Théorème des fonctions implicites

Soit $F(x,y)$ une fonction à deux variables de classe C^1 telle que $F(x_0,y_0) = 0$ et $\frac{dF}{dy}(x_0,y_0) \neq 0$. Alors l'équation $F(x,y) = 0$ définit localement une et une seule fonction implicite $y = f(x)$ de classe C^1 telle que $F(x, f(x)) = 0$ et $y_0 = f(x_0)$ et on a $y' = f'(x) = -\frac{dF/dx}{dF/dy}$

2.5 Changement de coordonnée

2.5.1 Coordonnées polaires

Nous définissons les coordonnées polaires de la manière suivante : $\begin{cases} x = r \cdot \cos(\varphi) \\ y = r \cdot \sin(\varphi) \end{cases}$ On peut définir un fonction $G : \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$:

$$G(r,\varphi) = \begin{pmatrix} G_1(r,\varphi) \\ G_2(r,\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\varphi) \\ r \cdot \sin(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Soit une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to R$ de classe C^2. Alors on définit la fonction $\bar{f} : \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[\to \mathbb{R}$ par :

$$\bar{f}(r,\varphi) = f(x,y) = f(r \cdot \cos(\varphi), r \cdot \sin(\varphi)) = (f \circ G)(r,\varphi)$$

La dérivée d'un changement de coordonnées $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une matrice $n \times n$. Cette matrice s'appelle aussi la **matrice jacobienne** du changement de coordonnées et on l'écrit J_G.
Exemple avec les coordonnées polaires dans $\mathbb{R}^2$:

$$G'(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \frac{dG_1}{dr}(r,\varphi) & \frac{dG_1}{d\varphi}(r,\varphi) \\ \frac{dG_2}{dr}(r,\varphi) & \frac{dG_2}{d\varphi}(r,\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r \cdot \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r \cdot \cos(\varphi) \end{pmatrix} \equiv J_G(r,\varphi)$$

La matrice jacobienne de la fonction inverse est simplement l'inverse de cette matrice :

$$J_{G^{-1}}(x,y) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\frac{1}{r}\sin(\varphi) & \frac{1}{r} \cdot \cos(\varphi) \end{pmatrix} = (J_G(r,\varphi))^{-1}$$

2.5.2 Le laplacien

Le laplacien d'une fonction à deux variables $f(x, y)$ est définit par :

$$\triangle f(x,y) = \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{d^2 f}{dy^2}$$

Plus généralement, on le définit par :

$$\triangle f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{d^2 f}{dx_k^2}(x_1, x_2, ..., x_n)$$

C'est un outil mathématique souvent utilisé en physique, électronique,...

2.6 La dérivée directionnelle

La dérivée directionnelle permet de décrire les variations infinitésimales d'une fonction de plusieurs variables dans une direction particulière.
Le gradient de la fonction f pointe dans la direction de la plus forte croissance de f. Sa longueur $\| \bigtriangledown f \|$ mesure le taux de croissance dans cette direction.
La dérivée de f au point (x_0, y_0) dans la direction du vecteur **unitaire** e ou la dérivée directionnelle de f en (x_0, y_0) dans la direction e est :

$$D_e f(x_0, y_0) = \bigtriangledown f(x_0, y_0) \cdot e$$

2.7 Dérivée d'intégrale dépendant d'un paramètre

Soit l'intégrale $\int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)dx$ pour les fonctions f, a, b. Alors l'intégrale est dérivable par rapport au paramètre t et on a :

$$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)dx = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{df}{dt}(x,t)dx + f(b(t),t)\cdot b'(t) - f(a(t),t)\cdot a'(t)$$

Dans le cas ou les fonction a et b sont des constantes, on a :

$$\frac{d}{dt}\int_{a}^{b} f(x,t)dx = \int_{a}^{b} \frac{df}{dt}(x,t)dx$$

cela montre que l'on peut dérivé partiellement sous le signe intégrale.

2.7.1 Approximation de Taylor

Soit la fonction $f : D \to \mathbb{R}, D \subset R^2$ ouvert, de classe C^1 et soit $(x_0, y_0) \in D$. Alors f possède un développement limité au voisinage de (x_0, y_0) :

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) + o(d)$$

avec $d = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$. Pour obtenir l'approximation linéaire de cette fonction, il suffit d'enlever le $+o(d)$.
Si f est de classe C^2, alors f possède un développement limité au voisinage de (x_0, y_0) :

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) + \frac{1}{2}f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2$$

$$+f_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + \frac{1}{2}f_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2 + o(d^2)$$

2.8 Extremums d'une fonction de deux variables

2.8.1 Point stationnaire

Soit la fonction $f : D \to \mathbb{R}, D \subset R^2$ ouvert et de classe C^2. Un point stationnaire (x_0, y_0) de cette fonction implique :

$$f_x(x_0, y_0) = 0, f_y(x_0, y_0) = 0 \Leftrightarrow \bigtriangledown f(x_0, y_0) = 0$$

On sait qu'un point stationnaire peut être un maximum, minimum (local ou non), un point-selle ou rien de tout ça.

Soit $(x_0, y_0) \in D$ un point stationnaire de f et posons

$$\triangle = det(grad(f)) = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$$

Alors la nature du point stationnaire est donnée par le schéma suivant :

$\triangle(x_0, y_0)$	$f_{xx}(x_0, y_0)$	f admet en (x_0, y_0) un
> 0	> 0	minimum (local)
> 0	< 0	maximum (local)
< 0		point-selle
$= 0$		?

2.8.2 Matrice hessienne

La matrice $\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$ des dérivées partielles secondes de f est appelée **matrice hessienne** de f. Comme f est de classe C^2, il résulte de l'égalité des dérivées partielles secondes mixtes que la hessienne est symétrique. On appelle hessien le déterminant de cette matrice.

2.9 Extremums liés (multiplicateurs de Lagrange)

La méthode permet de trouver des extremums d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sous contraintes (d'autres fonctions). Un méthode simple consiste à éliminé une variable de la fonction "principale" en utilisant la contrainte. Malheureusement cela n'est pas toujours efficace, c'est pourquoi nous introduisons les multiplicateurs de Lagrange.

2.9.1 Multiplicateurs de Lagrange

Soit les fonction $f, g : D \to \mathbb{R}, D \subset R^2$ ouvert, f, g de classe C^1. Si f admet un extremum en $(x_0, y_0) \in D$ sous la contrainte $g(x_0, y_0) = 0$ et si $\bigtriangledown g(x_0, y_0) \neq 0$, alors il existe un $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, tel que la fonction de Lagrange $F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$ soit stationnaire en (x_0, y_0, λ_0), c-à-d : $\bigtriangledown F(x_0, y_0, \lambda_0) = 0$.
Exemple d'application : On veut trouver le volume maximal d'une forme pour une surface donnée "S" :

$$\begin{cases} \textit{(volume)} & V = abc \\ \textit{(surface)} & S = ab + 2ac + 2bc \end{cases}$$

On a alors la fonction de Lagrange : $F(a, b, c, \lambda) = abc - \lambda(ab + 2ac + 2bc - S)$. On calcule les dérivées partielles et on résout le système pour que $\bigtriangledown F(a_0, b_0, c_0, \lambda_0) = 0$

2.10 Intégrales doubles

L'intégrale double $\iint_D f(x,y)dxdy$ donne le volume du cylindre de base D délimité en haut par la surface d'équation $z = f(x,y)$.
La valeur $\frac{1}{aire(D)} \iint_D f(x,y)dxdy$ est la **valeur moyenne** de f sur la région D.

Le calcul des intégrales doubles peut être ramené au calcul successif de deux intégrales simples, d'une intégrale itérée. On effectuera donc une première intégration par rapport à une variable en considérant l'autre variable comme fixe, puis on intégrera ensuite par rapport à la deuxième variable. L'évaluation des intégrales doubles comme intégrales itérées nous permet d'utiliser les primitives.

2.10.1 Intégration sur un rectangle

On intègre sur un rectangle quand le domaine d'intégration est un rectangle :

$$\int_b^a \left(\int_d^c f(x,y)dx \right) dy$$

Dans ce cas là, le résultat est indépendant de l'ordre dans lequel les intégrales sont effectuées.

2.10.2 Intégration sur des domaines plus compliqués

L'intégration sur un domaine dont l'un des bords est la courbe d'une fonction peut se résoudre de la manière suivante :

$$\int_b^a \left(\int_{f_2(x)}^{f_(x)} f(x,y)dy \right) dx = \int_b^a \left[F(x,y)\right]_{y=f_2(x)}^{y=f_1(x)} dx$$

Dans certain cas, il est plus difficile et même nécessaire de procéder à une décomposition en domaine plus simple grâce à la propriété d'additivité de l'intégration double :

$$D, D_1, D_2 \subset \mathbb{R}^2, D = D_1 \cup D_2, D_1 \cap D_2 = \varnothing \rightarrow \iint_D f d\sigma = \iint_{D_1} f d\sigma + \iint_{D_2} f d\sigma$$

2.10.3 Changement de coordonnées

Soit $G : \bar{D} \rightarrow D$ un fonction de changement de coordonnées où $D, \bar{D} \subset \mathbb{R}^2$ avec juste des base différentes. Nous avons :

$$G(r,\varphi) = \begin{pmatrix} G_1(r,\varphi) \\ G_2(r,\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Et les fonctions $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ et $\bar{f} : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$f(x,y) = \bar{f}(r,\varphi)) = f(G(r,\varphi))$$

Alors :

$$\boxed{\int_D f(x,y)dxdy = \int_{\bar{D}} \bar{f}(r,\varphi)|det(J_G(r,\varphi))|drd\varphi}$$

2.11 Intégrales multiples

Les idées du chapitre précédent se généralisent sans problème à des intégrales sur des domaines dans $\mathbb{R}^n$. Les intégrales triples peuvent aussi être évaluées par intégration itérée (intégration sur un cube).

2.11.1 Centre de gravité

Soit la fonction $g : D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}^3$ qui définit la distribution de masse dans un volume. Soit les valeurs :

- $I = \int_D g(x,y,z)dxdydz$ qui représente la masse totale.
- $I_1 = \int_D x \cdot g(x,y,z)dxdydz$
- $I_2 = \int_D y \cdot g(x,y,z)dxdydz$
- $I_3 = \int_D z \cdot g(x,y,z)dxdydz$

Alors le centre de gravité est au point $(\frac{I_1}{I}, \frac{I_2}{I}, \frac{I_3}{I})$

2.11.2 Coordonnées sphériques

Soit $r \in \mathbb{R}_{>0}, \upsilon \in [0,\pi]$ et $\varphi \in [0,2\pi[$. On définit la fonction de changement de coordonnées sphériques par :

$$G_{spher} : \begin{cases} x = r\sin(\upsilon)\cos(\varphi) & = G_1(r,\upsilon,\varphi) \\ y = r\sin(\upsilon)\sin(\varphi) & = G_2(r,\upsilon,\varphi) \\ z = r\cos(\upsilon) & = G_3(r,\upsilon,\varphi) \end{cases}$$

Et donc la matrice jacobienne associé $J_{G_{spher}}$ dont le déterminant est :

$$\boxed{detJ_{G_{spher}}(r,\upsilon,\varphi) = r^2\sin(\upsilon)}$$

2.11.3 Coordonnées cylindriques

Soit $r \in \mathbb{R}_{>0}, \varphi \in [0,2\pi[$. On définit la fonction de changement de coordonnées cylindriques par :

$$G_{cylind} : \begin{cases} x = r\cos(\varphi) & = G_1(r,\varphi,z) \\ y = r\sin(\varphi) & = G_2(r,\varphi,z) \\ z = z & = G_3(r,\upsilon,\varphi) \end{cases}$$

Et donc la matrice jacobienne associé $J_{G_{cylind}}$ dont le déterminant est :

$$\boxed{detJ_{G_{cylind}}(r,\upsilon,\varphi) = r}$$