Universidad Autónoma de Zacatecas

Unidad Académica de Ingeniería Eléctrica

Maestría en Ciencias del Procesamiento de la Información

Transformada de Fourier, Transformada Discreta de Fourier (DFT) y Transformada Rápida de Fourier (FFT)

Materia: Análisis de Señales y Sistemas Lineales

Autor: Cristian Omar Alvarado Rodríguez

Fecha: 30 de Octubre de 2025

Índice

1. Introducción

El análisis de señales constituye uno de los pilares fundamentales dentro de la ingeniería eléctrica, electrónica y de software, ya que permite comprender, procesar y manipular la información contenida en una señal. Entre las herramientas matemáticas más poderosas para este propósito se encuentra la **Transformada de Fourier**, la cual ofrece una forma de representar una señal en términos de sus componentes frecuenciales.

A lo largo de la historia, esta herramienta ha evolucionado desde su versión continua hasta su aplicación digital mediante la **Transformada Discreta de Fourier (DFT)** y la **Transformada Rápida de Fourier (FFT)**. Cada una de estas transformadas cumple un papel esencial en diferentes contextos, desde el procesamiento de audio, imágenes, y comunicaciones, hasta la predicción de señales en minería, biomedicina o inteligencia artificial.

El objetivo de este ensayo es presentar un análisis detallado, pero a la vez comprensible, de las tres principales transformadas de Fourier: la Transformada de Fourier Continua, la Discreta (DFT) y la Rápida (FFT). Además, se discutirán sus fundamentos teóricos, fórmulas, ejemplos prácticos y aplicaciones reales en la ingeniería moderna.

2. Fundamentos de la Transformada de Fourier

2.1. Concepto general

La Transformada de Fourier fue introducida por Jean-Baptiste Joseph Fourier en el siglo XIX. Su principio fundamental radica en que cualquier señal periódica o aperiódica puede expresarse como una suma (o integral) de senos y cosenos de diferentes frecuencias.

En el dominio del tiempo, una señal puede tener una forma complicada; sin embargo, al transformarla al dominio de la frecuencia, se revela su estructura espectral, lo que facilita su análisis y filtrado.

2.2. Fórmula general

La **Transformada de Fourier continua** para una señal $x(t)$ se define como:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}\,dt$$

donde:

- $x(t)$ es la señal en el dominio del tiempo.
- $X(f)$ es la representación de la señal en el dominio de la frecuencia.

- f es la frecuencia en Hz.
- j es la unidad imaginaria.

La transformada inversa de Fourier se expresa como:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} \, df$$

Estas ecuaciones forman un par transformada-inversa que permite convertir una señal del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia y viceversa.

2.3. Interpretación física

En términos prácticos, la transformada de Fourier descompone una señal en un conjunto de ondas senoidales de diferentes frecuencias, amplitudes y fases. Cada componente de frecuencia representa una contribución al comportamiento total de la señal.

Por ejemplo, una señal compleja como el sonido humano puede representarse como una combinación de frecuencias básicas (armónicos), lo cual es clave en el procesamiento de audio y reconocimiento de voz.

2.4. Ejemplo básico

Considere la señal:

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$$

Su transformada de Fourier es:

$$X(f) = \frac{1}{2} \left[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0) \right]$$

Esto indica que la señal tiene dos componentes de frecuencia: $+f_0$ y $-f_0$.

3. Transformada Discreta de Fourier (DFT)

3.1. Motivación

En la práctica, las señales analógicas son muestreadas y representadas de manera digital para ser procesadas por computadoras. La Transformada Discreta de Fourier (DFT) surge como la versión discreta y computacionalmente viable de la Transformada de Fourier continua.

3.2. Definición matemática

Dada una secuencia discreta de longitud N, $x[n]$, la DFT se define como:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1$$

y su transformada inversa es:

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

3.3. Interpretación

Cada $X[k]$ representa la contribución de la frecuencia discreta k en la señal original. Así, la DFT convierte una secuencia temporal en un espectro discreto de frecuencias.

3.4. Ejemplo práctico

Si tenemos una señal discreta:

$$x[n] = \{1, 2, 3, 4\}$$

su DFT de tamaño $N = 4$ se calcula como:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{3} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{4}kn}$$

lo que resulta en:

$$X = \{10, -2 + 2j, -2, -2 - 2j\}$$

3.5. Propiedades importantes

- **Linealidad:** La DFT de una combinación lineal de señales es igual a la combinación lineal de sus DFTs.
- **Desplazamiento temporal:** Un desplazamiento en el tiempo genera un cambio de fase en el dominio de la frecuencia.
- **Convolución:** La convolución en el tiempo equivale a la multiplicación en la frecuencia.
- **Periodicidad:** Tanto la señal como su transformada son periódicas con periodo N.

4. Transformada Rápida de Fourier (FFT)

4.1. Origen y necesidad

Aunque la DFT es una herramienta poderosa, su cálculo directo requiere $O(N^2)$ operaciones, lo cual se vuelve ineficiente para señales largas. En 1965, James Cooley y John Tukey desarrollaron el algoritmo de la **Transformada Rápida de Fourier (FFT)**, que reduce drásticamente la complejidad computacional a $O(N \log N)$.

4.2. Principio del algoritmo

La FFT aprovecha la simetría y periodicidad de los factores exponenciales de la DFT. El método divide la señal original en partes pares e impares, aplicando recursivamente la DFT a cada parte, y luego combinando los resultados.

$$X[k] = E[k] + e^{-j\frac{2\pi k}{N}} O[k]$$

donde $E[k]$ y $O[k]$ son las DFTs de las muestras pares e impares.

4.3. Ejemplo conceptual

Si $N = 8$, el algoritmo FFT divide la señal en 4 pares e impares, calcula la DFT de cada grupo y combina los resultados en solo $8 \log_2 8 = 24$ operaciones en lugar de 64.

4.4. Implementación práctica

En lenguajes como Python, la FFT se implementa fácilmente con librerías como NumPy:

```
import numpy as np
x = [1, 2, 3, 4]
X = np.fft.fft(x)
print(X)
```

4.5. Ventajas

- Alta eficiencia computacional.
- Amplio uso en sistemas en tiempo real.
- Posibilidad de procesar grandes volúmenes de datos.

5. Aplicaciones en la ingeniería y la ciencia

5.1. Procesamiento de audio y voz

La FFT se utiliza para analizar espectros de sonido, eliminar ruido y comprimir audio (como en el formato MP3). También es esencial en el reconocimiento de voz mediante el análisis de frecuencias características.

5.2. Procesamiento de imágenes

En visión computacional, la FFT se aplica al filtrado espacial y a la detección de bordes mediante el análisis de frecuencias espaciales.

5.3. Comunicaciones digitales

Permite modular y demodular señales, optimizar el ancho de banda y mejorar la calidad de transmisión. Es esencial en tecnologías como OFDM, usada en Wi-Fi y 4G/5G.

5.4. Minería e industria

En la minería, se utiliza para analizar vibraciones en maquinaria y detectar fallas. En la industria minera de Zacatecas, por ejemplo, podría aplicarse para monitorear el desgaste en motores eléctricos o predecir variaciones en el consumo energético mediante señales temporales.

6. Conclusiones

La Transformada de Fourier y sus variantes discretas constituyen una de las herramientas más relevantes para el análisis de señales en el dominio de la frecuencia. Su comprensión no solo permite un entendimiento más profundo de los sistemas físicos y digitales, sino que también posibilita el desarrollo de soluciones tecnológicas en campos tan diversos como la minería, la medicina, las telecomunicaciones y la inteligencia artificial.

La DFT introdujo una forma eficiente de aplicar la teoría de Fourier en entornos digitales, mientras que la FFT revolucionó el procesamiento de datos al reducir la complejidad computacional. Ambas transformadas continúan siendo la base de numerosos avances en la ingeniería moderna, reafirmando el legado de Fourier como un pilar del análisis matemático aplicado.

Referencias

[1] A. V. Oppenheim, A. S. Willsky, S. Hamid, *Señales y sistemas*, Pearson Educación, 2010.

[2] R. Bracewell, *The Fourier Transform and Its Applications*, McGraw-Hill, 2000.

[3] Steven W. Smith, *The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing*, California Technical Publishing, 1997.

[4] J. W. Cooley y J. W. Tukey, "An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series," *Mathematics of Computation*, 1965.

[5] R. C. Gonzalez y R. E. Woods, *Digital Image Processing*, Pearson Prentice Hall, 2018.