1º EXAMEN PARCIAL DE ANÁLISIS DE SEÑALES Y SISTEMAS LINEALES
MAESTRÍA EN CIENCIAS DEL PROCESAMIENTO DE LA INFORMACIÓN
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ZACATECAS

Nombre: Cristian Omar Alvarado Rodríguez. **Fecha:** 09/Octubre/2024

1. **Determinar si cada una de las siguientes señales son o no periódicas, en caso afirmativo cuál sería su periodo**

a) $f(t) = e^{j\frac{4\pi t}{3}}$ b) $g[n] = cos\left(\frac{2\pi n}{5}\right) + cos\left(\frac{2\pi n}{7}\right)$ **c)** $g(t) = cos(50\pi t) + sen(15\pi t)$

$\boldsymbol{d})$ $x[n] = sen\left(\frac{6\pi}{7}n + 1\right)$

a)

a) $F(t) = e^{j\frac{4\pi t}{3}}$ → Tiempo Continuo

* Señal Exponencial compleja

$w_0 = \frac{4\pi}{3}$ → Frecuencia angular

$T_0 = \frac{2\pi}{w_0}$ → periodo

$T_0 > 0$ ✓

$$T_0 = \frac{2\pi}{\frac{4\pi}{3}} = 2\pi \cdot \frac{3}{4\pi} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = \boxed{1.5}$$

* Una señal compleja $e^{jw_0 t}$ es periodica si existe un $T > 0$ tal que:

$$w_0 T = 2\pi k \,, \; k \in Z$$

> La señal es periodica con un periodo de $T_0 = 1.5$

b)

b) $g[n] = \cos\left(\frac{2\pi n}{5}\right) + \cos\left(\frac{2\pi n}{7}\right)$ → Tiempo discreto

> Suma de dos señales discretas, El periodo de la Suma es el minimo común múltiplo (mcm) de los periodos.

- Primer componente: $g_1[n] = \cos\left(\frac{2\pi n}{5}\right)$

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{5} \qquad N_1 = 5$$

$$\frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{1}{5}$$

- segundo componente: $g_2[n] = \cos\left(\frac{2\pi n}{7}\right)$

$$\omega_2 = \frac{2\pi}{7}$$

$$\frac{\omega_2}{2\pi} = \frac{1}{7} \qquad N_2 = 7$$

$$N_0 = mcm(N_1, N_2)$$

$$N_0 = mcm(5, 7) = \boxed{35}$$

$$N_0 = 35$$

* La Señal es Periodica con periodo Fundamental $N_0 = 35$

c)

C) $g(t) = \cos(50\pi t) + \text{sen}(15\pi t)$

> Suma de dos señales continuas. El periodo de la suma es:

$$T_0 = \frac{\text{mcm}(T_1, T_2)}{\text{mcm}(T_1, T_2)}$$

• Primer componente: $g_1(t) = \cos(50\pi t)$

$\omega_1 = 50\pi t$

$$T_1 = \frac{2\pi}{50\pi} = \frac{1}{25}$$

• Segundo componente: $g_2(t) = \text{sen}(15\pi t)$

$\omega_2 = 15\pi$

$$T_2 = \frac{2\pi}{15\pi} = \frac{2}{15}$$

Periodo suma: T_0

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{1/25}{2/15} = \frac{1}{25} * \frac{15}{2} = \frac{15}{50} = \frac{3}{10}$$

* Dado que el cociente es racional la suma es periódica. El periodo fundamental es $T_0 = p \cdot T_1 = q \cdot T_2$ donde $\frac{p}{q} = \frac{10}{3}$, $p = 10$, $q = 3$

$$T_0 = 3 \cdot T_2 = 3 \cdot \frac{2}{15} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5} = \boxed{0.4}$$

* La Señal es periodica con periodo fundamental $T_0 = \frac{2}{5} \doteq 0.4$

d)

d) $x[n] = \text{sen}\left(\frac{6\pi}{7}n + 1\right)$

Es una señal discreta tipo $\text{sen}(w_o n + \phi)$, la periodicidad ocurre si:

$\frac{w_o}{2\pi} = \frac{p}{q}$ donde: p, q son enteros:

$W_o = \frac{6\pi}{7} \longrightarrow \frac{w_o}{2\pi} = \frac{3}{7}$

* Es racional entonces es periodica

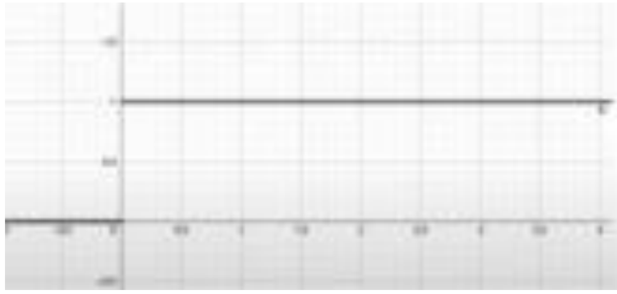
$N_o = \frac{2\pi}{w_o} = \frac{2\pi}{\frac{6\pi}{7}} = \frac{7}{3}$

$\frac{p}{q} = \frac{3}{7}$ → periodo Fundamental

$\boxed{N_o = 7}$

* La señal es periodica con periodo Fundamental $N_o = 7$

2. **Determine la energía o potencia de señal de la figura 1.**



$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } t \geq 0 \\ 0 & \text{para } t < 0 \end{cases}$$

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\, dt = \int_{-\infty}^{0} 0\, dt + \int_{0}^{\infty} 1\, dt = 0 + t \Big|_{0}^{\infty} = \infty - 0 = \infty$$

*No es señal de energia

$$P = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |u(t)|^2 dt = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} u(t)\, dt = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \left[\int_{-T}^{0} 0\, dt + \int_{0^+}^{T} 1\, dt \right]$$

$$= \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} [t] \Big|_{0}^{T} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} = \frac{1}{2}$$

*Es una señal de potencia.

3. Grafique las siguientes relaciones

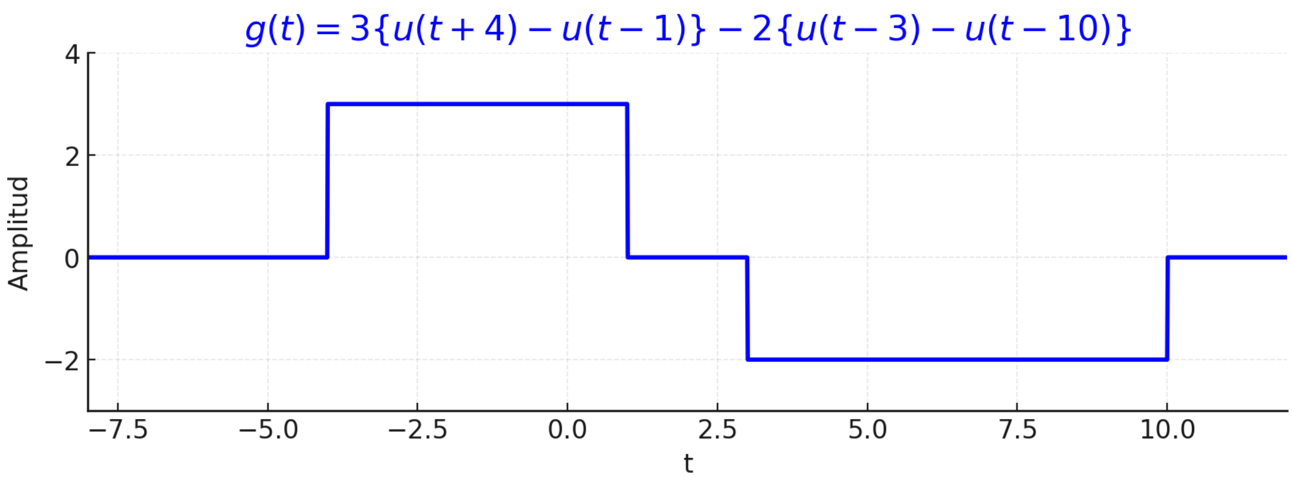
- g(t) = 3{[u(t + 4) – u(t – 1)]} –2{[u(t – 3) – u(t – 10)]}
- p[n] = { u[n + 7] + u[n + 1}] + δ[n + 1] + 2δ[n] + {u[n − 3] + u[n − 5]}

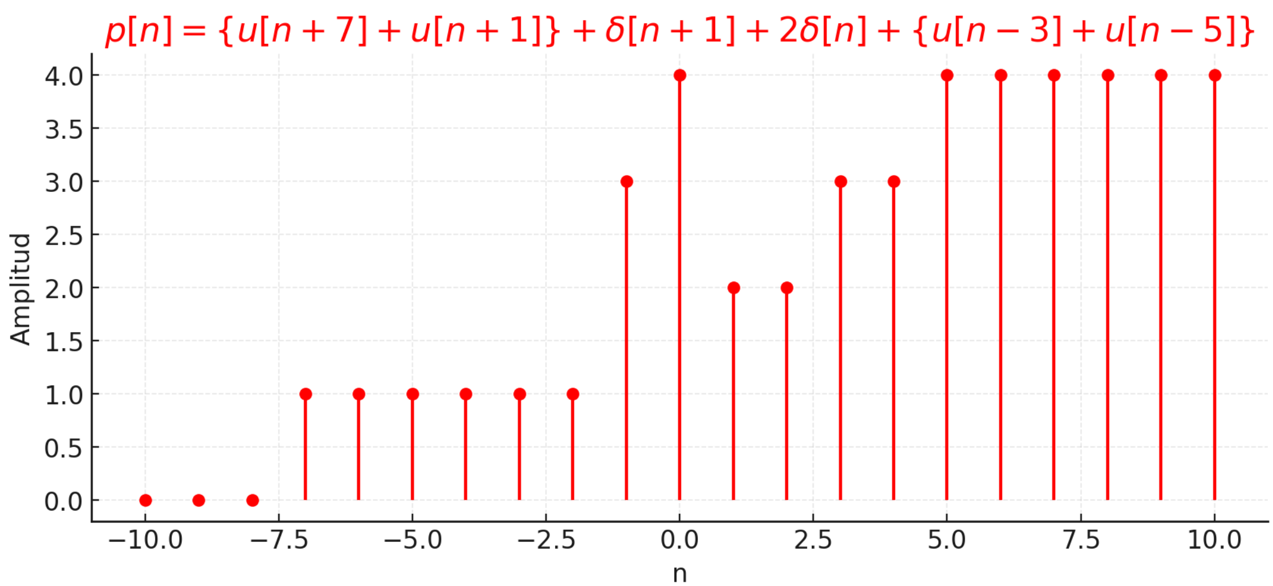
Gráfica azul g(t): representa una señal continúa construida con funciones escalón:

$$g(t) = 3[u(t+4) - u(t-1)] - 2[u(t-3) - u(t-10)]$$

Gráfica roja p[n]: representa una señal discreta con escalones y deltas:

$$p[n] = \{u[n+7] + u[n+1]\} + \delta[n+1] + 2\delta[n] + \{u[n-3] + u[n-5]\}$$





4. **Ejercicios:**

a) Sean las señales x[n] = δ[n + 2] − δ[n + 1] + $\frac{1}{4}$ δ[n] + 2δ[n − 2] y h[n] = 2δ[n + 1] + δ[n] + 2δ[n− 1]. Calcule la suma de convolución y grafique la señal de salida y[n].

b) Sea las señales que se muestran en la figura 2. Calcule la Convolución y obtenga la gráfica de salida y(t) usando el programa que se dejó de tarea. x(t) y h(t) respectivamente.

Figura 2

a) convolución discreta x[n] y h[n]:

Las dos señales son sumas finitas de impulsos (valores no nulos sólo en pocos índices), así que la convolución será una suma finita de productos.

Soportes:

- x[n] no es cero sólo en $n = -2, -1, 0, 2$.

  Valores: x[-2] = 1, x[-1] = -1, x[0] = ¼, x[2] = 2

- h[n] no es cero sólo en n = −1,0,1.

  Valores: h[−1]=2, h[0]=1, h[1]=2.

- La longitud del resultado y [n] será: **Lx+Lh−1=5+3−1 = 7.**
- El rango del índice será: **(−2+−1)=−3 a (2+1) = 3.**

El soporte de $y[n] = x * h$será la suma de soportes: índices entre $(-2) + (-1) = -3$y $2 + 1 = 3$. Es decir $n \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\,[k] \cdot h[n-k]$$

- Para n = 3: $x[-2]h[-1] = 1 * 2 = 2$ → $y[-3] = 2$
- Para n = 2: x[−2]h[0]=1·1=1, x[−1]h[−1] = (−1) * 2=−2. → y[−2] = 1−2 = −1
- Para n = -1: $x[-2]h[1] = 1 \cdot 2 = 2$, x[−1]h[0] = (−1) * 1 = −1, x[0]h[-1] = ¼ * 2 = 0.5 → y[−1] = 2−1 + 0.5 = 1.5
- Para n = 0: x[−1]h[1] = (−1) * 2 = −2, x[0]h[0] = ¼ * 1 = 0.25 → y[0] = − 2 + 0.25 = −1.75
- Para n = 1: ¼ * 2 = 0.5, x[2]h[−1] = 2·2 = 4 → y[1]= 0.5 + 4 = 4.5

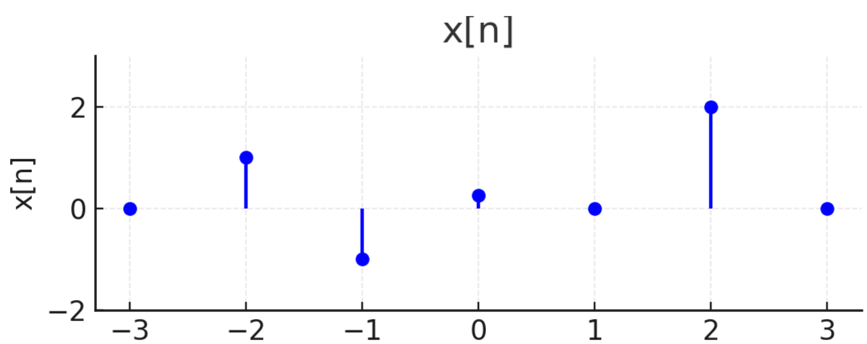
- Para n = 2: x[2]h[0]=2·1 = 2 → y[2] = 2
- Para n = 3: $x[2]h[1] = 2 \cdot 2 = 4$ → y[3] = 4

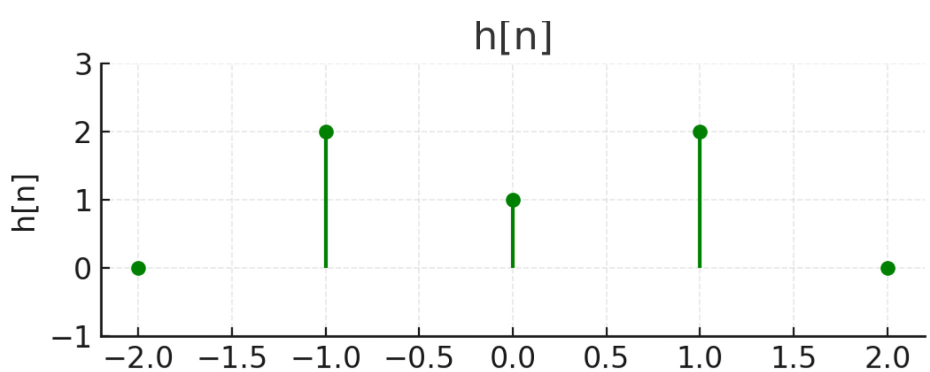
Fuera de esos índices $y[n] = 0$.

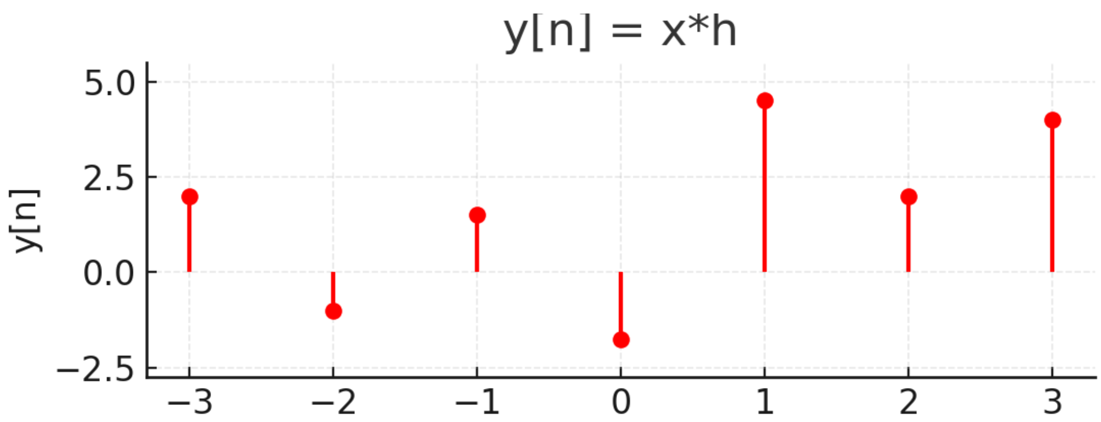
Resultados finales:

$$\begin{aligned} y[-3] &= 2, \\ y[-2] &= -1, \\ y[-1] &= 1.5, \\ y[0] &= -1.75, \\ y[1] &= 4.5, \\ y[2] &= 2, \\ y[3] &= 4, \\ y[n] &= 0 \text{ en otro caso.} \end{aligned}$$

Graficas:

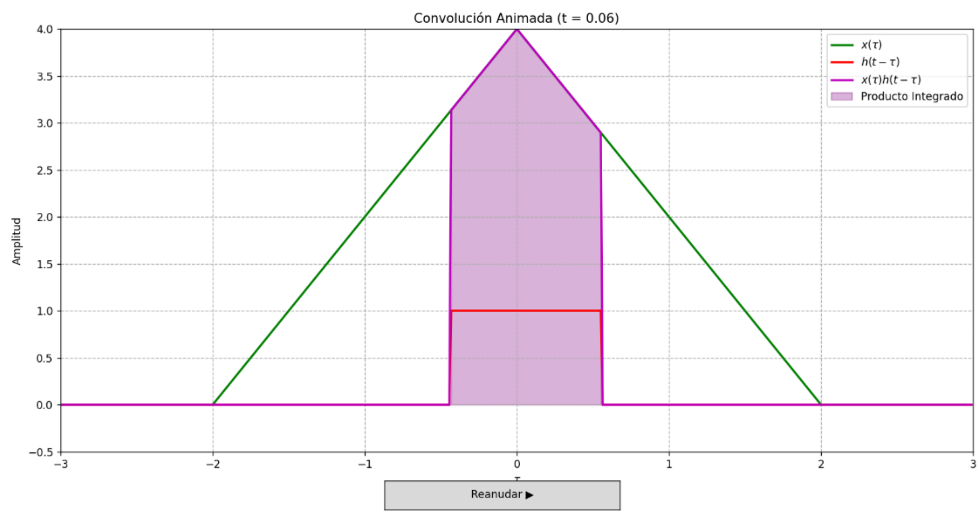




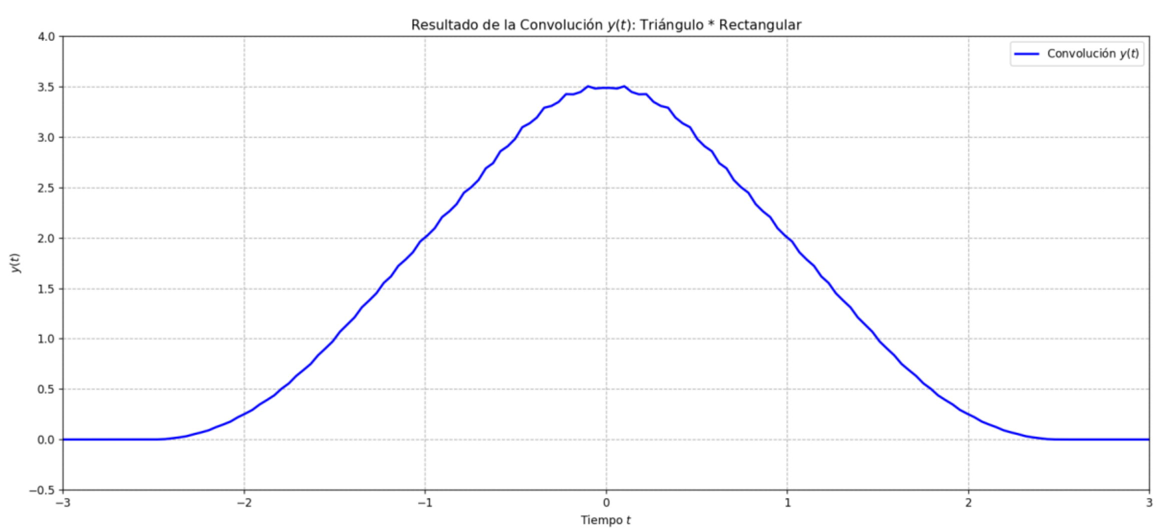


b) convolución continua x(t) y h(t):

Proceso con el programa (Python):



Resultado:



5. **Sea la señal x(t) como se muestra en la figura 3, encuentre y grafique las siguientes señales:**

a) x(-t + 5) b) x(–3 – t) c) x{–3 + 3 (-t)} d) $x\left(\frac{5}{3}t - 2\right)$

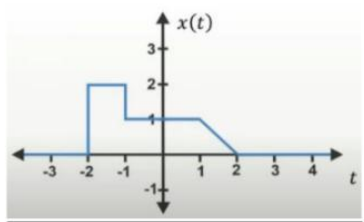
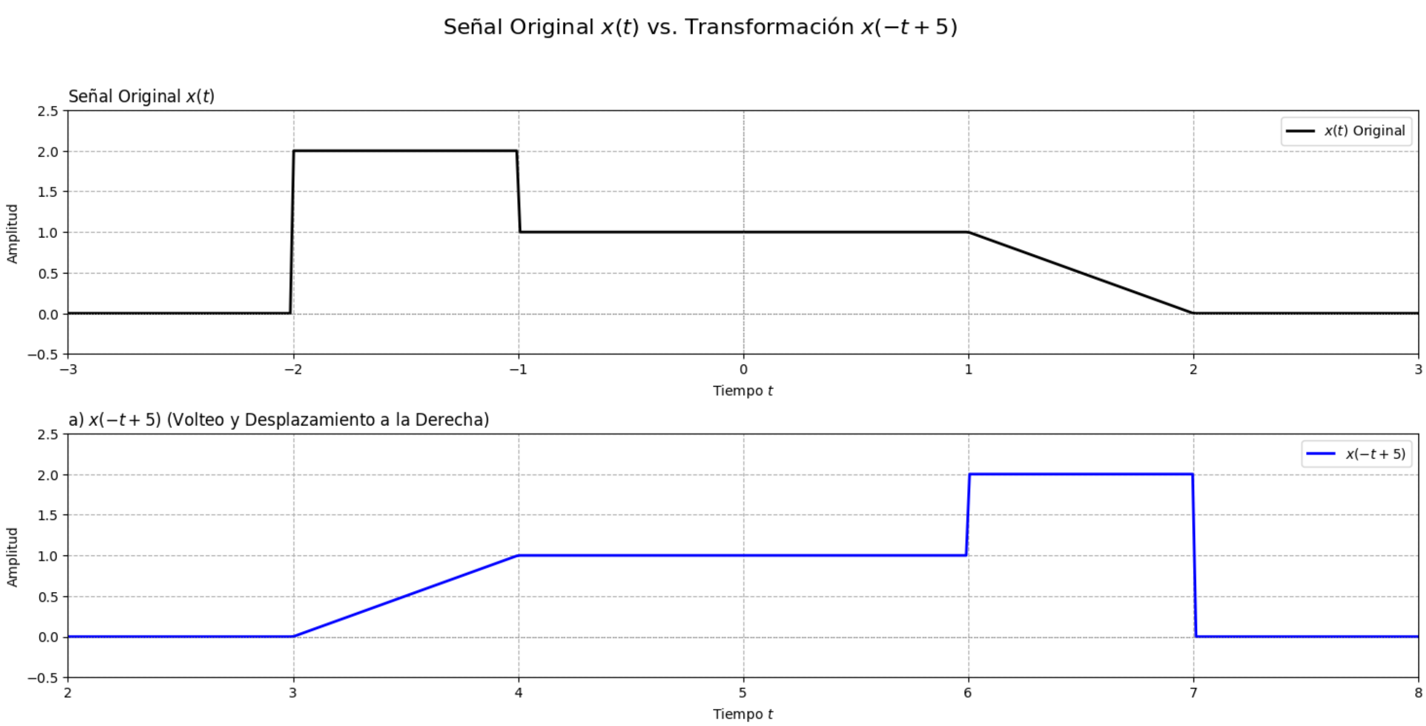


Figura 3.

a) $\boldsymbol{x(-t+5)}$

Esto equivale a reflexión en el eje vertical y luego desplazamiento a la derecha en 5 unidades.

1. Reflexión: $x(-t)$invierte el eje temporal.
   Soporte original $[-2, 2]$→ se convierte en $[-2, 2]$.
2.
3. Desplazamiento: $t \rightarrow t - 5$→ desplazamos **5 unidades a la derecha**.
   Soporte: $[-2 + 5, 3 + 5] = [3, 7]$.



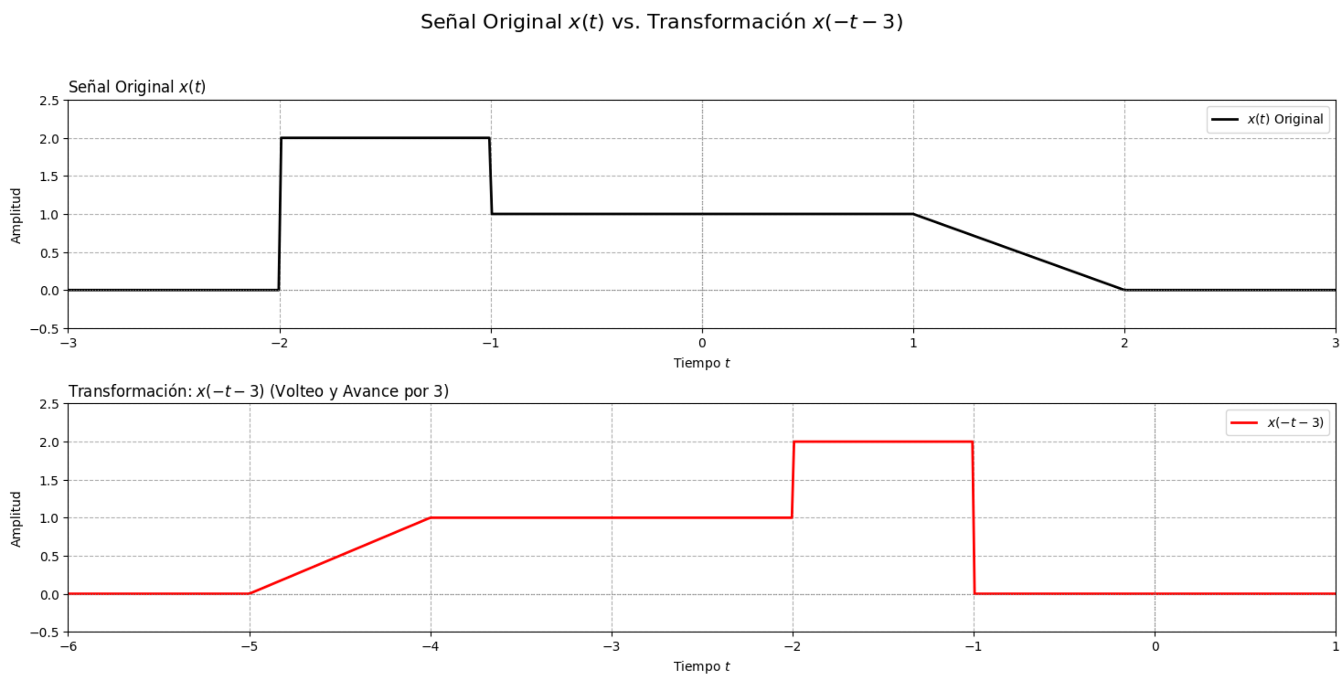
b) $\boldsymbol{x(-3-t)}$

Esto significa:

1. Reflexión $x(-t)$
2. Desplazamiento **3 unidades a la izquierda** (por $t+3$).

Soporte original $[-2,2]$:

- Reflexión $\rightarrow [-1,3]$
- Luego desplazamiento a la izquierda 3 $\rightarrow [-5,-1]$



c) $\boldsymbol{x\{-3+3(-t)\} = x(-3t-3)}$

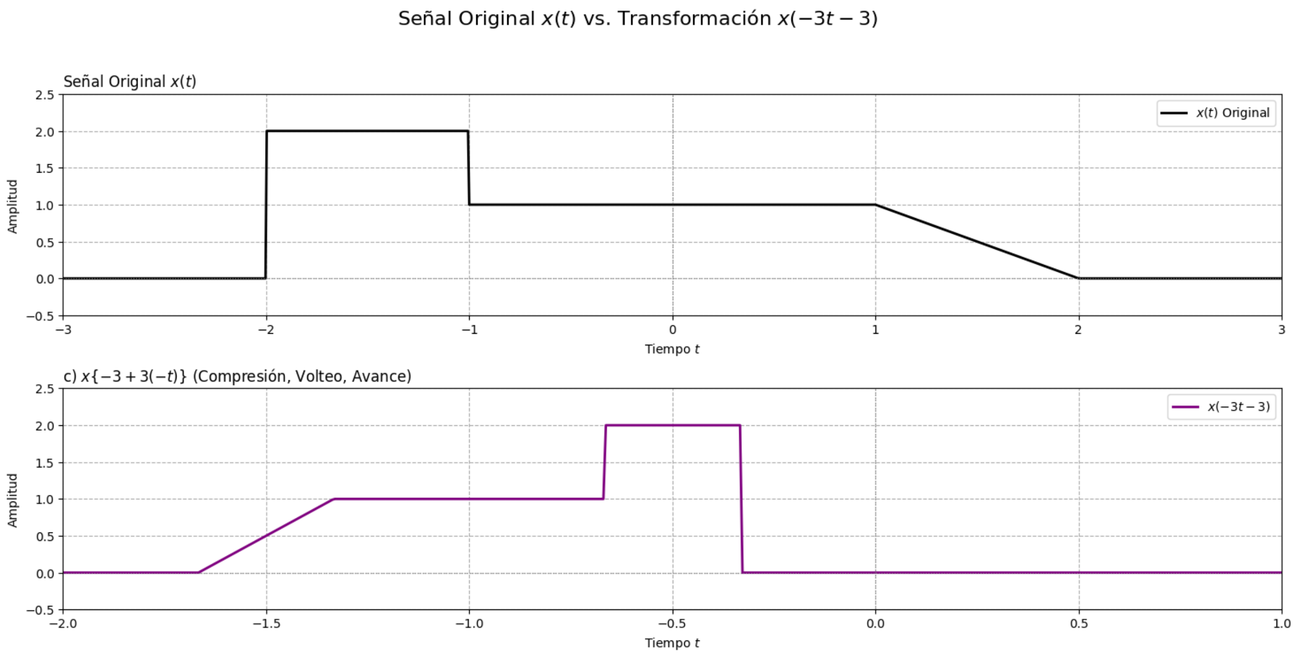
Reescribimos como $x[-3(t+1)]$:

- Escalamiento por factor **3** (compresión por 1/3, porque $|\ a\ |= 3$).
- Reflexión (por el signo negativo).
- Desplazamiento **1 unidad a la izquierda** (por $t+1$).

Soporte original $[-2,\ 2]$:

1. Reflexión $\rightarrow [-2,2]$
2. Compresión (dividimos por 3) $\rightarrow [-\frac{2}{3},\ 1]$
3. Desplazamiento 1 a la izquierda $\rightarrow [-1.67,0]$aproximadamente.

4. Soporte: $[-\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}]$



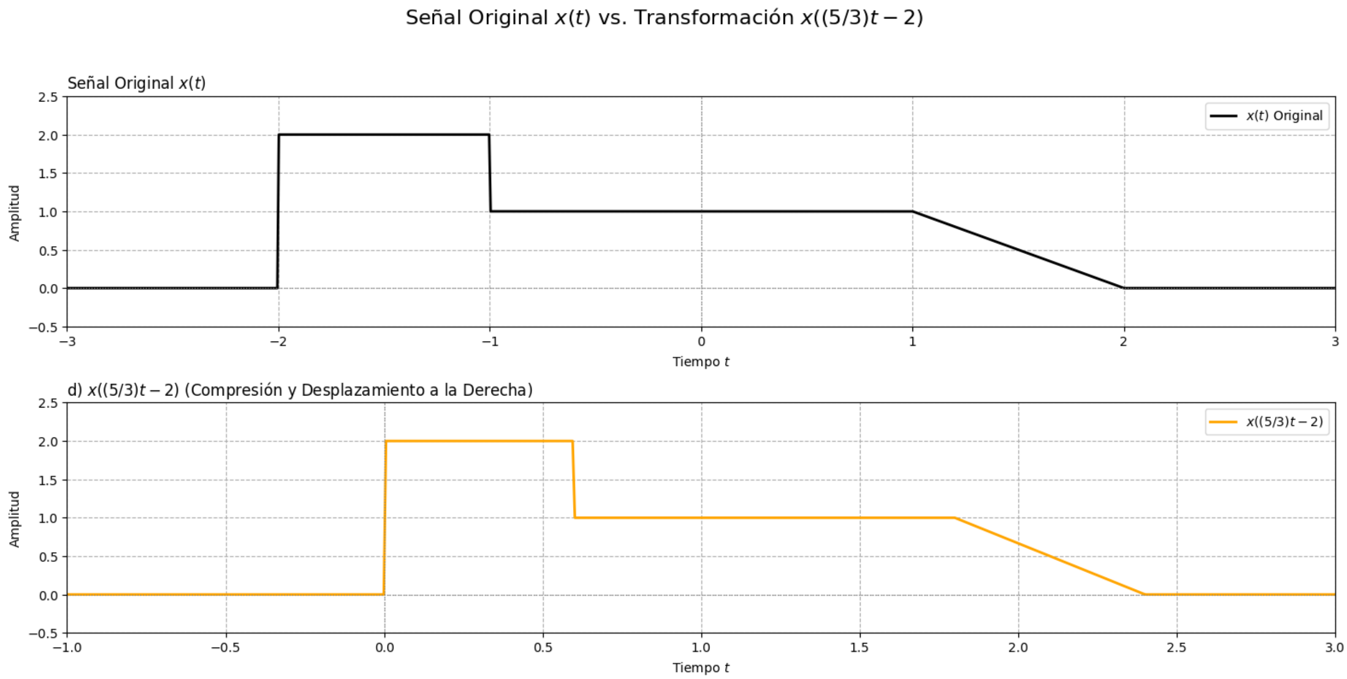
d) $\boldsymbol{x(\frac{5}{3}t-2)}$

Podemos escribirlo como $x[a(t-t_0)]$, donde $a = \frac{5}{3}$, $t_0 = \frac{2}{(5/3)} = \frac{6}{5}$.

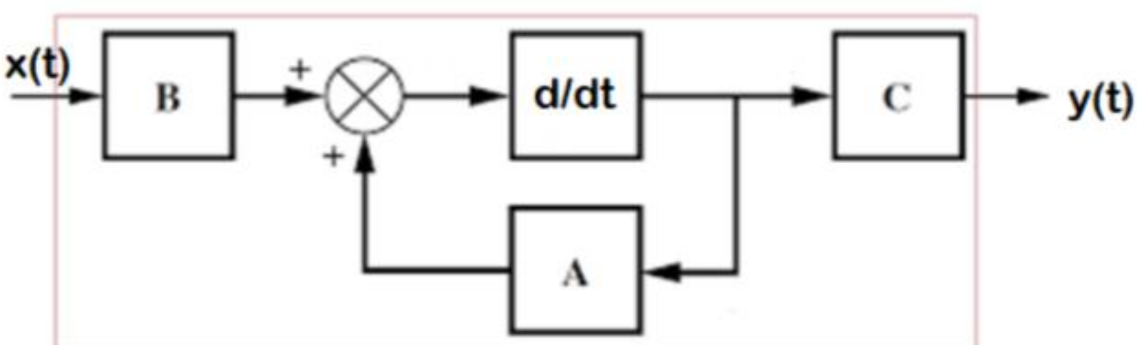
- Escalamiento: $|\, a \,| > 1 \rightarrow$ **compresión temporal** por factor $\frac{3}{5}$.
- Desplazamiento: **a la derecha** $\frac{6}{5} \approx 1.2$.

Soporte original $[-2, 2]$:

1. Compresión por $\frac{3}{5}$: $[-1.2, 1.2]$
2. Desplazamiento a la derecha 1.2 $\rightarrow$ $[-0.6, 2.4]$ = [0, 2.4]
3. Soporte: $[-0.6, 2.4]$ → [0,2.4] (aproximadamente)



6. Determine la salida y[n], del sistema que se describe en la figura 4.



Resultado:

$$v(t) = \frac{d}{dt}\,[Bx(t) + Av(t)]$$

$$y(t) = Cv(t)$$