Universidad Autónoma de Zacatecas
Unidad Académica de Ingeniería Eléctrica

Maestría en Ciencias del Procesamiento de la Información

# Investigación: La Variable Compleja en el Análisis de Señales

Autor: Cristian Omar Alvarado Rodríguez
Fecha: Octubre 2025

Zacatecas, México

# Contents

# Resumen

En este documento se presenta una investigación formal sobre la variable compleja aplicada al análisis de señales. Se discuten definiciones, funciones principales, el círculo unitario, relaciones entre funciones (parte real/imaginaría, magnitud/fase), propiedades matemáticas relevantes (incluyendo las condiciones de Cauchy–Riemann), y aplicaciones concretas en señales: exponenciales complejos, fasores, transformada de Fourier, señal analítica y transformada de Hilbert. Se incluyen fórmulas, explicaciones matemáticas, ejemplos numéricos y fragmentos de código para graficar conceptos en Python/Matlab.

# Chapter 1

# Introducción

El análisis de señales es una disciplina fundamental en ingeniería eléctrica, telecomunicaciones y ciencias aplicadas. Una de las herramientas más potentes para representar, manipular y comprender las señales es el uso de la variable compleja. Esta permite describir oscilaciones, envolventes, fases y magnitudes de forma más compacta y algebraicamente manejable que usando únicamente funciones reales.

# Chapter 2

# ¿Qué es una variable compleja?

Una **variable compleja** es un número de la forma:

$$z = x + jy,$$

con $x, y \in \mathbb{R}$ y $j^2 = -1$. En el análisis de señales, las variables complejas representan simultáneamente amplitud y fase.

## 2.1 Conceptos fundamentales

- **Parte real**: $\Re(z) = x$.
- **Parte imaginaria**: $\Im(z) = y$.
- **Módulo**: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- **Argumento o fase**: $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$.

## 2.2 Formas de representación

### 2.2.1 Forma cartesiana

$z = x + jy$

### 2.2.2 Forma polar

$$z = re^{j\theta}, \quad r = |z|,\ \theta = \arg(z).$$

### 2.2.3 Fórmula de Euler

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta.$$

Esta fórmula conecta exponenciales complejas con senos y cosenos.

# Chapter 3

# Funciones principales

## 3.1 Exponencial compleja

$$e^{(\sigma+j\omega)t} = e^{\sigma t}(\cos(\omega t) + j\sin(\omega t)).$$

Si $\sigma = 0$ se obtiene una oscilación pura. Estas funciones son la base del análisis en frecuencia.

## 3.2 Transformada de Fourier

La transformada de Fourier permite descomponer una señal en sus componentes frecuenciales:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt.$$

El resultado es una función compleja que contiene información de magnitud y fase.

## 3.3 Transformada de Laplace

$$X(s) = \int_{0}^{\infty} x(t)e^{-st}\,dt, \quad s = \sigma + j\omega.$$

Este formalismo generaliza la transformada de Fourier y es útil para estudiar estabilidad y transitorios.

## 3.4 Señal analítica

$$x_a(t) = x(t) + j\,\mathcal{H}\{x(t)\}.$$

Esta representación elimina las frecuencias negativas, permitiendo extraer envolvente y fase instantánea.

# Chapter 4

# Círculo Unitario

El conjunto de $z$ tales que $|z| = 1$ define el círculo unitario:

$$z = e^{j\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi).$$

En señales discretas:

- La estabilidad de un sistema depende de que sus polos estén dentro del círculo unitario.
- La DTFT evalúa la respuesta en frecuencia sobre el círculo unitario.

# Chapter 5

# Relaciones entre funciones

Sea $z = re^{j\theta} = x + jy$:

$$\Re\{z\} = r\cos\theta, \quad \Im\{z\} = r\sin\theta.$$

Magnitud y fase de $X(j\omega)$ se definen como:

$$|X(j\omega)| = \sqrt{(\Re\{X\})^2 + (\Im\{X\})^2}, \quad \angle X(j\omega) = \arctan\frac{\Im\{X\}}{\Re\{X\}}.$$

# Chapter 6

# Propiedades importantes

## 6.1 Linealidad

La combinación lineal de señales se conserva en el dominio complejo.

## 6.2 Conjugación compleja

$X(-j\omega) = X^*(j\omega)$ si $x(t)$ es real.

## 6.3 Cauchy–Riemann

Condiciones de analiticidad:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

## 6.4 Polos y ceros

La ubicación de polos y ceros determina estabilidad y respuesta en frecuencia.

# Chapter 7

# Ejemplos

## 7.1 Ejemplo 1: Señal sinusoidal

$\cos(\omega t + \phi) = \Re\{e^{j(\omega t+\phi)}\}$.

## 7.2 Ejemplo 2: Filtro pasabajo

Para $H(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega}$:

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}, \quad \angle H(j\omega) = -\arctan(\omega).$$

## 7.3 Ejemplo 3: Sistema discreto

$H(z) = \frac{1-0.5z^{-1}}{1-1.2z^{-1}}$ es inestable porque su polo está fuera del círculo unitario.

# Chapter 8

# Aplicaciones en Procesamiento de Señales

- Análisis espectral de audio e imágenes.
- Modulación en telecomunicaciones (AM, FM, QAM).
- Diseño de filtros analógicos y digitales.
- Estudio de estabilidad en sistemas de control.
- Extracción de envolvente y fase en bioseñales.

# Chapter 9

# Conclusiones

La variable compleja es una herramienta fundamental en análisis de señales. Facilita el manejo de amplitud y fase, y conecta propiedades matemáticas profundas con aplicaciones prácticas en ingeniería.

# Referencias


- A. V. Oppenheim, A. S. Willsky, *Signals and Systems*.
- J. G. Proakis, D. G. Manolakis, *Digital Signal Processing*.
- E. Kreyszig, *Complex Variables*.
- L. Debnath, *Integral Transforms and Their Applications*.