Universidad Autónoma de Zacatecas

Unidad Académica de Ingeniería Eléctrica

Maestría en Ciencias del Procesamiento de la Información

Serie de Fourier en Tiempo Discreto

(Forma Trigonométrica y Exponencial)

Autor: Cristian Omar Alvarado Rodríguez

Fecha: 16 de Octubre 2025

Índice

1. Introducción

La Serie de Fourier en Tiempo Discreto (DTFS) es una herramienta fundamental en el análisis de señales periódicas discretas. Permite representar cualquier señal periódica mediante una combinación finita de senos, cosenos o exponenciales complejas, facilitando el estudio de sus componentes de frecuencia.

2. Diferencia entre Tiempo Continuo y Tiempo Discreto

2.1. Tiempo Continuo

En tiempo continuo, la variable independiente t toma valores en un dominio continuo. Las señales periódicas $x(t)$ pueden representarse mediante una serie infinita de frecuencias armónicas $k\omega_0$, con $\omega_0 = 2\pi/T$, donde T es el periodo.

2.2. Tiempo Discreto

En tiempo discreto, la variable independiente n toma valores enteros. Una señal periódica discreta $x[n]$ de periodo N satisface $x[n+N] = x[n]$ para todo n. La DTFS representa a $x[n]$ mediante una suma finita de exponenciales complejas:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{j(2\pi/N)kn} \tag{1}$$

donde los coeficientes a_k se calculan como:

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j(2\pi/N)kn} \tag{2}$$

3. Formas de la DTFS

3.1. Forma Exponencial

La forma exponencial de la DTFS se expresa como:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \, e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{3}$$

donde los coeficientes a_k se calculan mediante la relación de análisis:

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \, e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{4}$$

Esta forma es útil para cálculos algebraicos, simulaciones y conexiones con la Transformada Discreta de Fourier (DFT), ya que los coeficientes a_k pueden ser complejos y contienen información de magnitud y fase.

3.2. Forma Trigonométrica

La forma trigonométrica expresa la señal en términos de senos y cosenos, especialmente útil cuando $x[n]$ es real:

$$x[n] = A_0 + \sum_{k=1}^{\lfloor (N-1)/2 \rfloor} \left(A_k \cos\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) + B_k \sin\left(\frac{2\pi}{N}kn\right)\right) \tag{5}$$

donde:

$$A_0 = a_0 \tag{6}$$
$$A_k = 2\,\mathrm{Re}(a_k) \tag{7}$$
$$B_k = -2\,\mathrm{Im}(a_k) \tag{8}$$

Esta forma permite visualizar la contribución de cada armónico de frecuencia k y es especialmente intuitiva para señales reales, ya que la magnitud de cada componente armónica es directamente proporcional a $\sqrt{A_k^2 + B_k^2}$ y su fase es $\phi_k = \arctan(-B_k/A_k)$.

3.3. Relación entre las formas exponencial y trigonométrica

- Cada término exponencial $a_k e^{j2\pi kn/N}$ puede descomponerse en una combinación de $\cos(2\pi kn/N)$ y $\sin(2\pi kn/N)$ mediante la identidad de Euler:

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

- Para señales reales $x[n]$, los coeficientes cumplen $a_{N-k} = a_k^*$, lo que garantiza que la combinación de exponentes conjugados produce una señal real en la forma trigonométrica.
- La forma trigonométrica facilita la interpretación física de los armónicos (frecuencias, amplitudes y fases), mientras que la forma exponencial es más compacta y adecuada para análisis matemático y programación.

4. Propiedades de la Serie de Fourier en Tiempo Discreto

A continuación se presentan las propiedades más importantes de la DTFS, organizadas en una tabla con su expresión en el dominio del tiempo y del dominio de la frecuencia.

Propiedad	Dominio del Tiempo	Dominio de Frecuencia
Síntesis (Transformada inversa)	$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$	$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$
Análisis (Transformada directa)	$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$	$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$
Linealidad	$x[n] = \alpha x_1[n] + \beta x_2[n]$	$a_k = \alpha a_{1k} + \beta a_{2k}$
Desplazamiento en tiempo	$x[n - n_0]$	$a_k e^{-j\frac{2\pi}{N}kn_0}$
Desplazamiento en frecuencia	$e^{j\frac{2\pi}{N}k_0 n}x[n]$	$a_{k-k_0 \bmod N}$
Conjugación (señal real)	$x[n] \in \mathbb{R}$	$a_{N-k} = a_k^*$
Multiplicación de señales	$x_1[n]x_2[n]$	$\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} a_{1m}a_{2(k-m)}$
Cambio de tiempo (submuestreo)	$x[Mn]$	$a_{Mk \bmod N}$
Parseval (energía)	$\sum_{n=0}^{N-1} \lvert x[n]\rvert^2 = N\sum_{k=0}^{N-1} \lvert a_k\rvert^2$	$\sum_{k=0}^{N-1} \lvert a_k\rvert^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \lvert x[n]\rvert^2$

Cuadro 1: Propiedades principales de la Serie de Fourier en Tiempo Discreto (DTFS).

5. Conclusión

La Serie de Fourier en Tiempo Discreto permite representar señales periódicas con un número finito de coeficientes complejos. La forma exponencial es útil para cálculos analíticos, mientras que la forma trigonométrica facilita la interpretación física. Ambas formas son esenciales para el análisis y diseño de sistemas digitales.