Lagrange-Formulierung und Elektrodynamik via Differentialformen I

Eugen Dizer & Mathieu Kaltschmidt

09. April 2018

Institut für Theoretische Physik
Universität Heidelberg

Dieser Vortrag entstand im Rahmen des Seminars "*Klassische Elektrodynamik*", organisiert von Prof. Weigand am Institut für Theoretische Physik der Universität Heidelberg im Sommersemester 2018.
Ziel des Vortrages ist es, eine Formulierung der Elektrodynamik in Differentialformen zu motivieren und damit dann eine alternative Formulierung der Maxwell-Gleichungen einzuführen.
Zu Beginn soll noch einmal die Lagrange-Formulierung der kovarianten Elektrodynamik thematisiert werden.

1 Lagrange-Formulierung der Elektrodynamik

1.1 Lagrangedichte für eine Feldtheorie

Wir wollen das Problem nun auf eine überabzählbare Anzahl an Freiheitsgraden erweiern. Wir betrachten hierzu die **Lagrangedichte** $\mathrm{L} = \iiint \mathrm{d}^3x\, \mathcal{L}$.
Das Wirkungsintegral ist nun $\mathrm{I} = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \iiint \mathrm{d}^3x\, \mathcal{L} = \int \mathrm{d}^4x\, \mathcal{L}$.
Nun erhalten wir die Bewegungsgleichungen aus dem Hamiltonschen Prinzip. Dazu nehmen wir an, dass die Variation der Felder auf den Hyperflächen $t = t_1$ und $t = t_2$ verschwindet.

$$\begin{aligned} 0 = \delta I &= \int \mathrm{d}^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^{(i)}} \delta\varphi^{(i)} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi^{(i)})} \delta(\partial_\mu \varphi^{(i)}) \right) \\ &= \int \mathrm{d}^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^{(i)}} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi^{(i)})} \right) \delta\varphi^{(i)} \end{aligned}$$

Wir erhalten daraus:

Euler-Lagrange-Gleichung

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^{(i)}} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi^{(i)})} \tag{1}$$

1.2 Lagrangedichte für das Maxwell-Feld

Wir wollen $\mathcal{L}$ so wählen, dass sie ein Skalar ist, von den Feldern sowie deren Ableitungen abhängt, Strom / Ladung als Quelle hat und die Maxwell-Gleichungen als Bewegungsgleichungen liefert:

$$\partial_\mu = j^\nu \qquad \Longleftrightarrow \qquad \Box A^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) = j^\nu \tag{2}$$

Da wir als Bewegungsgleichungen Differentialgleichungen 2. Ordnung erwarten, bietet es sich an, das 4er-Feld A^μ wie folgt anzusetzen:

$$\mathcal{L} = \mathrm{a}\cdot\partial_\mu A^\nu \partial^\mu A_\nu + \mathrm{b}\cdot\partial_\mu A^\nu \partial_\nu A^\mu + \mathrm{c}\cdot(\partial_\mu A^\mu)^2 + \mathrm{d}\cdot A_\mu A^\mu + \mathrm{e}\cdot A_\mu j^\mu$$

Setzt man dies in (1) ein und wählt die Koeffizienten so, dass (2) herauskommt, findet man:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - j_\mu A^\mu + \frac{\mathrm{c}}{2}\underbrace{\left[(\partial_\mu A^\mu)^2 - \partial_\mu A^\nu \partial_\nu A^\mu\right]}_{=\partial_\mu(A^\mu\partial_\varrho A^\varrho - A_\nu\partial^\nu A^\mu)}$$

Da der letzte Term sich als Divergenz schreiben lässt, ist er nur ein Randterm und verschwindet bei der Variation. Er ändert somit nichts an den Bewegungsgleichungen!
Es folgt also:

Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - j_\mu A^\mu \tag{3}$$

Die Lagrangedichte hat demnach die richtige Dimension [Energie/Volumen] wobei der erste Term einer "kinetischen Energie" und der Zweite einer "potentiellen Energie" entspricht.

1.3 Eichtransformationen und Eichinvarianz

Die Eichtransformation $A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu\phi$ ändert die Lagrangedichte im Allgemeinen:

$$\mathcal{L}'(A'_\tau, \partial_\tau A'_\tau) = \mathcal{L}(A_\tau, \partial_\tau A_\tau) + j^\mu\partial_\mu\phi$$

Da die Kontinuitätsgleichung $\partial_\mu j^\mu = 0$ gilt, kann man $j^\mu\partial_\mu\phi$ durch $\partial_\mu(j^\mu\phi)$ ersetzen. Dies lässt sich wieder als Divergenz auffassen und hat deshalb keinen Einfluss auf die Bewegungsgleichungen:

$$\text{Ladungserhaltung} \qquad \longleftrightarrow \qquad \text{Eichinvarianz}$$

Besonders interessant sind Translationen $x' = x + \varepsilon \cdot a$:

$$\begin{aligned}
\varphi^{(i)}(x+\varepsilon\cdot a) &= \varphi^{(i)}(x) + \overbrace{\varepsilon\cdot a^\mu\partial_\mu\varphi^{(i)}(x)}^{\delta\varphi^{(i)}} \\
\partial_\mu\varphi^{(i)}(x+\varepsilon\cdot a) &= \partial_\mu\varphi^{(i)}(x) + \underbrace{\varepsilon\cdot\left(a^\nu\partial_\nu\partial_\mu\varphi^{(i)}(x) + \partial_\mu a^\nu\partial_\nu\varphi^{(i)}(x)\right)}_{\delta(\partial_\mu\varphi^{(i)})}
\end{aligned}$$

Es wurde hierbei angenommen, dass die Ortsabhängigkeit nur in den Feldern steckt.
Wir erhalten:

$$\begin{aligned}
\delta I &= \int \mathrm{d}^4x \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^{(i)}}\,\varepsilon\cdot a^\mu\partial_\mu\varphi^{(i)} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi^{(i)})}\,\varepsilon\cdot\left(a^\nu\partial_\nu\partial_\mu\varphi^{(i)} + \partial_\mu a^\nu\partial_\nu\varphi^{(i)}\right)\right) \\
&= \int \mathrm{d}^4x \left(\partial_\nu\mathcal{L} - \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi^{(i)})}\partial_\nu\varphi^{(i)}\right]\right)\varepsilon\cdot a^\nu
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

Energie-Impuls-Tensor

$$\partial_\mu \underbrace{\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi^{(i)})}\partial^\nu\varphi^{(i)} - g^{\mu\nu}\mathcal{L}\right]}_{=T^{\mu\nu}} = 0 \tag{4}$$

Für das elektromagnetische Feld $\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - j_\mu A^\mu$ folgt:

$$T^{\mu\nu} = -F^{\mu\nu}j^\nu A_\sigma + g^{\mu\nu}\left(\frac{1}{4}F_{\sigma\tau}F^{\sigma\tau} + j_\mu A^\mu\right)$$

In dieser Fom ist der Feldstärketensor aber nicht eichinvariant, denn unter der Transformation $A^\mu \;\to\; A^\mu + \partial^\mu\phi$ folgt:

$$T^{\mu\nu} \quad\to\quad T^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}j_\tau\partial^\tau\phi - F^{\mu\sigma}\partial^\nu\partial_\sigma\phi = T^{\mu\nu} + \partial_\sigma(g^{\mu\nu}j^\sigma\phi - F^{\mu\sigma}j^\nu\phi) - j^\mu\partial^\nu\phi$$

Wir wollen einen Ausdruck für $T^{\mu\nu}$ finden, der eichinvariant und symmetrisch ist.
Dazu bemerken wir, dass zur Lagrangedichte eine Divergenz addiert werden kann ohne die Bewegungsgleichungen zu ändern. Also hat der Energie-Impuls-Tensor eine gewisse Beliebigkeit, die wir ausnutzen können.

Der "Energiestrom" bleibt unverändert unter einer Transformation $T^{\mu\nu} \rightarrow T^{\mu\nu} + \nabla T^{\mu\nu}$ mit:

(i) $\partial_\mu \nabla T^{\mu\nu} = 0$ (erfüllt Erhaltungssatz)

(ii) $\int \mathrm{d}^3x \, \nabla T^{00}$ (trägt nicht zur Gesamtenergie bei)

Obiger Zusatzterm nach der Eichung motiviert $\nabla T^{\mu\nu} = \partial_\sigma(F^{\mu\sigma})$ und erfüllt die Bedingungen.
Setzen wir also:

$$T^{\mu\nu} = -F^{\mu\sigma}\partial^\nu A_\sigma + g^{\mu\nu}\left(\frac{1}{4}F_{\sigma\tau}F^{\sigma\tau} + j_\tau A\tau\right) + \partial_\sigma\left(F^{\mu\sigma}A^\nu\right)$$

und schreiben mit der Maxwell-Gleichung $\partial_\sigma F^{\mu\sigma} = -j^\mu$ den neuen Ausdruck:

$$T^{\mu\nu} = F^{\mu\varrho}F_\varrho^\nu + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F_{\sigma\tau}F^{\sigma\tau} + g^{\mu\nu}j_\sigma A^\sigma - j^\mu A^\nu \tag{5}$$

Damit gilt $\partial_\mu T^{\mu\nu} = A_\varrho \partial^\nu j^\varrho$.
Für den elektromagnetischen Anteil $T_0^{\mu\nu} = F^{\mu\nu}F_\sigma^\nu + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F^2$ folgt dann: $\partial_\mu T_0^{\mu\nu} = j_\varrho F^{\varrho\nu}$

In Abwesenheit von äußeren Quellen ist der Energie-Impuls-Tensor **eichinvarient**, **erhalten**, **symmetrisch** und **spurfrei**.

2 Elektrodynamik in Differentialformen

2.1 Differentialformen

2.2 Hodge-Stern-Operator

2.3 Maxwell-Gleichungen