Elektrodynamik in Differentialformen

Wir wollen die Maxwell'schen Gleichungen

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (1)$$

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho \quad (3)$$

$$\nabla \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{J} \quad (4)$$

in der Sprache der Differentialformen umformulieren. Dies wirft einerseits Licht auf einige ihrer Eigenschaften, die im Rahmen der älteren Vektoranalysis nicht so klar hervortreten, andererseits bringt sie den geometrischen Charakter hervor. Außerdem bereitet es die Grundlage für das Verständnis der nicht-Abel'schen Eichtheorien, die für die Beschreibung der fundamentalen Wechselwirkungen der Natur wesentlich sind.

Differentialformen

Differentialformen ermöglichen es, das Kreuzprodukt auf beliebige Dimensionen zu erweitern. Außerdem sieht man, dass die Divergenz, die Rotation und der Gradient nur verschiedene Erscheinungen von dem selben Operator sind und sich auf beliebigen Mannigfaltigkeiten bilden lassen.

Sei V ein Vektorraum. Wir wollen zwei Vektoren aus V irgendwie miteinander multiplizieren können, sodass die grundlegende Eigenschaft des Kreuzprodukts erfüllt ist. Dieses Produkt nennen wir das „äußere Produkt" oder „wedge Produkt". Wir definieren,

Die äußere Algebra über V, bezeichnet mit ΛV, ist die von V induzierte Algebra mit den Relationen

$$v \wedge w = - w \wedge v \quad (5)$$

für alle $v, w \in V$.

Wir definieren $\Lambda^p V$ als den Untervektorraum von ΛV bestehend aus Linearkombinationen des p-fachen Produkts von Vektoren in V, z.B. $v_1 \wedge \dots \wedge v_p$.

Es gilt $\Lambda^0 V = \mathbb{R}$ und $\Lambda^1 V = V$. Das Wedge-Produkt von zwei Vektoren aus V liegt in $\Lambda^2 V$.

Wir ersetzen nun die reelen Zahlen durch glatte Funktionen $C^\infty(M)$ auf einer Mannigfaltigkeit M und wählen die 1-Formen $\Omega^1(M)$ als Vektorraum V.

Differentialformen auf M sind also die äußere Algebra, induziert von $\Omega^1(M)$, mit den Relationen

$$\omega \wedge \mu = - \mu \wedge \omega \quad (6)$$

für alle $\omega, \mu \in \Omega^1(M)$ und werden mit $\Omega(M)$ bezeichnet.

Den Unterraum der p-Formen bezeichnen wir mit $\Omega^p(M)$.

Die äußere Ableitung definieren wir als Abbildung $d: \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M)$ mit

1) $d(\omega + \mu) = d\omega + d\mu$ und $d(c\omega) = c\, d\omega$ für alle $\omega, \mu \in \Omega(M)$ und $c \in \mathbb{R}$

2) $d(\omega \wedge \mu) = d\omega \wedge \mu + (-1)^p \omega \wedge d\mu$ für alle $\omega \in \Omega^p(M)$ und $\mu \in \Omega(M)$

3) $d(d\omega) = 0$ für alle $\omega \in \Omega(M)$

Schränkt man sich auf den $\mathbb{R}^3$ ein, fallen interessante Eigenschaften auf:

- Gradient $d: \Omega^0(\mathbb{R}^3) \to \Omega^1(\mathbb{R}^3)$
- Rotation $d: \Omega^1(\mathbb{R}^3) \to \Omega^2(\mathbb{R}^3)$
- Divergenz $d: \Omega^2(\mathbb{R}^3) \to \Omega^3(\mathbb{R}^3)$

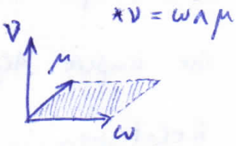
Die Rotation ist also nichts anderes als die äußere Ableitung angewandt auf eine 1-Form im $\mathbb{R}^3$. Will man so tun, als ob diese 2-Form eine 1-Form ist, kommt der Hodge-Star-Operator ins Spiel. Dieser schickt p-Formen auf (n-p)-Formen, wenn n die Dimension der Mannigfaltigkeit ist. Nur im $\mathbb{R}^3$ (bzw. in 3 Dimensionen) ist es möglich aus einer 2-Form wieder eine 1-Form zu machen:

$$d\omega = (\partial_y \omega_z - \partial_z \omega_y)\, dy \wedge dz + (\partial_z \omega_x - \partial_x \omega_z)\, dz \wedge dx + (\partial_x \omega_y - \partial_y \omega_x)\, dx \wedge dy$$

$$* d\omega = (\partial_y \omega_z - \partial_z \omega_y)\, dx + (\partial_z \omega_x - \partial_x \omega_z)\, dy + (\partial_x \omega_y - \partial_y \omega_x)\, dz$$

Deshalb spricht man beim Kreuzprodukt und der Rotation von Pseudovektoren. An dieser Stelle geht auch die „Rechte-Hand-Regel" und die Metrik ein, was man an der formalen Definition des Hodge-Star-Operators sieht:

$$*: \Omega^p(M) \to \Omega^{n-p}(M), \text{ sodass } \omega \wedge *\mu = \langle \omega, \mu \rangle \, vol, \ \forall \omega, \mu \in \Omega^p(M).$$



Dabei ist $vol = \sqrt{|\det g_{\mu\nu}|}\, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ die Volumen-Form und $g_{\mu\nu}$ die Metrik.

Ist $(s, n-s)$ die Signatur der Metrik, so gilt für p-Formen: $*^2 = (-1)^{p(n-p)+s}$, sodass zweifache Anwendung des Hodge-Star-Operators wieder die gleiche p-Form liefert; bloß um ein Vorzeichen unterschiedlich.

Reformulierung der Maxwell-Gleichungen

Wir wollen zunächst das erste Paar der Maxwell-Gleichungen umformulieren.
Dazu nehmen wir den allgemeinen Standpunkt ein und müssen das elektrische und magnetische Feld als Vektorfelder in der 4-dim. Raumzeit auffassen. Wir arbeiten in der Minkowski-Raumzeit in Standardkoordinaten x^μ.
Wir bemerken zunächst, dass sich die äußere Ableitung einer 1-Form ω in einen Raumanteil und einen Zeitanteil aufteilen lässt:

$$d\omega = \partial_0 \omega_I \, dx^0 \wedge dx^I + \partial_i \omega_I \, dx^i \wedge dx^I = dt \wedge \partial_t \omega + d_S \omega, \tag{7}$$

wobei I über alle Multi-Indizies geht.
Betrachtet man Gleichungen (1) und (2), so fällt auf, dass es geeignet ist, das E-Feld als 1-Form zu schreiben und das B-Feld als 2-Form:

$$E = E_x \, dx + E_y \, dy + E_z \, dz \tag{8}$$

$$B = B_x \, dy \wedge dz + B_y \, dz \wedge dx + B_z \, dx \wedge dy. \tag{9}$$

Damit lässt sich (1) und (2) zu

$$d_S B = 0 \tag{10}$$

$$\partial_t B + d_S E = 0 \tag{11}$$

umschreiben.
Diese beiden Gleichungen lassen sich zu einer zusammenfassen, indem man das elektromagnetische Feld F, eine 2-Form auf $\mathbb{R}^4$, einführt: $F = dt \wedge E - B$, (12)
denn dann haben wir:

$$\begin{aligned} dF &= -dt \wedge dE - dB \\ &= -dt \wedge (d_S E + dt \wedge \partial_t E) - d_S B - dt \wedge \partial_t B \\ &= -dt \wedge (d_S E + \partial_t B) - d_S B \end{aligned} \tag{13}$$

Deshalb sind (10) und (11) äquivalent zu $dF = 0$! (14)

In Komponentenschreibweise $F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} \, dx^\mu \wedge dx^\nu$ ist das elektromagnetische Feld

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Da die äußere Ableitung koordinatenunabhängig ist, gilt $dF = 0$ auf jeder beliebigen Mannigfaltigkeit und hängt nicht von der Wahl der Koordinaten ab.

Die 2-Form F ist also geschlossen und besitzt nach dem Poincaré'schen Lemma ein Potential:

$$F = dA \quad , \text{ wobei } A \text{ eine 1-Form ist.} \tag{16}$$

Damit gilt automatisch $dF = d(dA) = 0$. Außerdem sehen wir, dass wir eine Eichfreiheit haben

$$A \to A + d\lambda \quad , \text{ wobei } \lambda \in C^\infty(\mathbb{R}^4). \tag{17}$$

Und die Felder lassen sich mit diesem Potential darstellen:

$$E = -\partial_t A \tag{18}$$

$$B = d_S A \,. \tag{19}$$

Betrachten wir nun das zweite Paar der Maxwell-Gleichungen, also Gleichungen (3) und (4), die auf der rechten Seite Quellterme enthalten. Es fällt auf, dass E und B gewissermaßen ihre Rollen tauschen: Das E-Feld ist nun eine 2-Form und das B-Feld eine 1-Form.

Im $\mathbb{R}^3$ kennen wir einen Operator, der 1-Formen in 2-Formen konvertiert und andersrum: den Hodge-Star-Operator. Deshalb legen wir fest:

Sei $M = \mathbb{R} \times S$ die Raumzeit, wobei S der 3d-Raum ist. Die Metrik sei $g = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$.

$*_S$ bezeichne den Hodge-Star-Operator auf Differentialformen auf S.

Dann gilt $\quad * F = - *_S E + *_S B \wedge dt$

und $\quad d * F = - *_S \partial_t E \wedge dt - d_S *_S E + d_S *_S B \wedge dt = - d_S *_S E + (d_S *_S B - *_S \partial_t E) \wedge dt$.

Vergleicht man dies mit den Maxwell'schen Gleichungen fällt auf, dass

$$*_S d_S *_S E = \rho \quad , \quad \rho: \text{Ladungsdichte} \tag{20}$$

$$*_S d_S *_S B - \partial_t E = j \quad , \quad j = j_x dx + j_y dy + j_z dz. \tag{21}$$

Definiert man den Strom $J = j - \rho\, dt$, lassen sich (20) und (21) in

$$d * F = * J \tag{22}$$

zusammenfassen.

Die Maxwell-Gleichungen lassen sich also zu $dF = 0$ und $d * F = * J$ zusammenfassen!

Besondere Eigenschaften

- Kontinuitätsgleichung: $d * J = 0$
- Gleichungen im Vakuum $dF = 0$ und $d * F = 0$ erfüllen Dualität $F \mapsto * F$.

  Dies entspricht Invarianz unter $B \mapsto *_S E$ und $E \mapsto - *_S B$.