Um den Vortrag abzurunden, kommen wir wieder kurz auf die Lagrange-Beschreibung zurück und zeigen, wie man die Maxwell-Gleichungen in Differentialformen durch einen Lagrangian herleitet. Dazu muss man den Lagrangian nun in Differentialformen ausdrücken. Derartige Ausdrücke werden später auch in der Yang-Mills-Theorie und der Chern-Simon-Theorie auftreten. Ihr Vorteil ist, dass sie automatisch alle geforderten Punkte aus Kapitel 1 erfüllen, insbesondere die Koordinatenunabhängigkeit.

Die Lagrangians setzt man meistens axiomatisch an und zeigt dann, dass sie die gewünschten Gleichungen liefern. Für das elektromagnetische Feld gilt:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} F \wedge * F + A \wedge * J \quad ,$$

wobei F, A und J gemäß den obigen Definitionen gegeben sind. Es gilt $F = dA$.

Die zugehörige Wirkung ist $I[A] = \int \mathcal{L}$ und sei $A + \varepsilon \cdot \delta A$ das gestörte Eichpotential. Dann folgt aus der Variation des Wirkungsfunktionals:

$$\frac{d}{d\varepsilon} I[A + \varepsilon \cdot \delta A] \bigg|_{\varepsilon = 0} = \frac{d}{d\varepsilon} \left[\int -\frac{1}{2} d(A + \varepsilon \delta A) \wedge * d(A + \varepsilon \delta A) + (A + \varepsilon \delta A) \wedge * J \right] \Bigg|_{\varepsilon = 0}$$

$$= \int -\frac{1}{2} \big(\underbrace{dA \wedge * d\delta A}_{= \langle dA, d\delta A \rangle \, vol} + \underbrace{d\delta A \wedge * dA}_{= \langle d\delta A, dA \rangle \, vol} \big) + \delta A \wedge * J$$

$$= \int - d\delta A \wedge * dA + \delta A \wedge * J$$

$$\overset{\substack{P.I.}}{\underset{\substack{\omega = \delta A \\ \mu = * dA}}{=}} \int - \delta A \wedge d * dA + \delta A \wedge * J$$

$$= \int \delta A \wedge (- d * dA + * J)$$

Produktregel:

$$d(\omega \wedge \mu) = d\omega \wedge \mu + (-1)^p \omega \wedge d\mu$$

$$\Rightarrow \int d\omega \wedge \mu = \omega \wedge \mu \big|_{\partial} + (-1)^{p+1} \int \omega \wedge d\mu$$

Da die Variation bei $\varepsilon = 0$ für beliebige δA verschwinden muss, gilt:

$$d * dA = * J$$

$$\Leftrightarrow \quad d * F = * J$$