Lagrangian für das elektromagnetische Feld

Wir suchen einen Lagrangian, der die Elektrodynamik beschreibt. Wie bei der analytischen Mechanik erwarten wir Differentialgleichungen 2. Ordnung; diesmal aber für die Feldkomponenten. Wir wissen, dass die Elektrodynamik eine relativistische Theorie ist und die Bewegungsgleichungen daher invariant unter Lorentz-Transformationen sein sollten. Außerdem gilt das Superpositionsprinzip, d.h. Summen von Lösungen der Bewegungsgleichungen sind wieder Lösungen. Deshalb sollten die Bewegungsgleichungen linear sein, d.h. der Lagrangian sollte höchstens quadratisch in den Ableitungen der Feldkomponenten sein. Zuletzt sollen die Bewegungsgleichungen eichinvariant sein.
Da wir im 4-dim. Minkowski-Raum arbeiten, bietet es sich an, das 4-Feld A^μ und dessen Ableitungen zu betrachten. Aus den obigen Überlegungen ergeben sich folgende Forderungen an den Lagrangian:

1. Lorentzinvariant
2. Eichinvariant
3. höchstens quadratisch in den Ableitungen

Aus der ersten Forderung folgt, dass die Lagrange-Dichte ein Skalar sein muss.
Aus der Eichinvarianz folgt, dass die Lagrangedichte $F_{\mu\nu}$ oder sein pendant $*F_{\mu\nu}$ enthalten kann, denn unter einer Eichtransformation $A^\mu \to A^\mu + \partial^\mu \chi$ ändert sich der Feldstärketensor nicht:

$$F'_{\mu\nu} = (\partial_\mu A_\nu - \partial_\mu\partial_\nu \chi) - (\partial_\nu A_\mu - \partial_\nu \partial_\mu \chi) = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = F_{\mu\nu}.$$

Da $F_{\mu\nu}$ spurfrei ist, sind die ersten Skalare (die nur quadratisch von den Ableitungen abhängen):

$$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -(*F_{\mu\nu})(*F^{\mu\nu}) = 2(\vec{B}^2 - \vec{E}^2)$$

$$(*F_{\mu\nu})F^{\mu\nu} = 4 \cdot \vec{B} \cdot \vec{E}$$

Betrachtet man diese beiden Skalare ausführlicher, fällt auf, dass der zweite sein Vorzeichen unter Raumspiegelung ändert. Solche paritätverletzenden Effekte wurden bisher nicht beobachtet, weshalb dieses als Kandidat rausfällt. Da wir höchsten quadratische Abhängigkeit in den Ableitungen zulassen wollen, haben wir diese mit $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ gefunden. Mehr Kombinationen, sodass es eichinvariant bleibt gibt es nicht. Betrachten wir also noch die reinen Feldanteile:

Am einfachsten wäre $A_\mu A^\mu$. Dies entspricht aber einem Massenterm, der dazu führen würde, dass die Felder schneller abfallen würden als $1/r$, was nicht unseren Beobachtungen entspricht.
Deshalb bleibt der Lorentz-Skalar $j_\mu A^\mu$, der mit der Kontinuitätsgleichung $\partial_\mu j^\mu = 0$ eichinvariant ist. Da es die Symmetrie der Natur verletzen würde, dürfen die Raumzeitkoordinaten x^μ nicht explizit vorkommen.
D.h. die drei Forderungen fixieren die Lagrangedichte auf $\mathcal{L} = a \cdot F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + b \cdot j_\mu A^\mu$.