Der Hodge-Stern-Operator

Auf Grundlage der elektromagnetischen Dualität, welche durch die Transformation der Felder gemäß:

$$E \rightarrow B \qquad \text{sowie} \qquad B \rightarrow -E$$

die Invarianz der Maxwell-Gleichungen im Vakuum charakterisiert, wollen wir nun eine neue Methode, genauer einen neuen Operator einführen der uns diese Transformationen ermöglicht.

Wir erinnern uns an die neue Darstellung der beiden Felder als 1- bzw. 2-Form:

- $E = E_x \, dx + E_y \, dy + E_z \, dz$
- $B = B_x \, dy \wedge dz + B_y \, dz \wedge dx + B_z \, dx \wedge dy$

Für die Transformation müssen wir also eine 1-Form in eine 2-Form überführen und umgekehrt.
Dies ermöglicht uns im $\mathbb{R}^3$ der Hodge-Stern Operator
Die abstrakte Definition lautet:

$$\boxed{\lambda \wedge \theta = (-1)^s \, g(\theta, \star\lambda) \, \omega}$$

mit $\omega \in \Lambda^n V$, $\lambda \in \Lambda^p V$ und $\theta \in \Lambda^{n-p} V$.
wobei $g(\omega, \omega) = \prod_{k=1}^{n} g(\sigma^i, \sigma^i) = (-1)^s \rightsquigarrow$ Signatur d. Metrik

Für unseren Fall bietet sich jedoch die nachfolgende praktische Definition an.
Betrachten wir den Basis p-Vektor λ mit:

$$\lambda = \sigma^1 \wedge \sigma^2 \wedge \ldots \wedge \sigma^p = \sigma^I \in \Lambda^p V$$

Einsetzen von $\sigma^J \in \Lambda^{n-p} V$ in die abstrakte Definition liefert:

$$\underbrace{\lambda \wedge \sigma^J}_{=0 \; \forall J \neq \{p+1, \ldots, n\}} = (-1)^s \, g(\sigma^J, \star\lambda) \, \omega$$

Daraus folgt: $\star\lambda = \text{const.} \cdot \sigma^{p+1} \wedge \ldots \wedge \sigma^n$

mit $\lambda \wedge \sigma^J = \omega$ folgt: $1 = (-1)^s \, g(\sigma^J, c \cdot \sigma^J)$

oder analog $c = \frac{(-1)^s}{g(\sigma^j,\sigma^j)} = \frac{g(\omega,\omega)}{g(\sigma^j,\sigma^j)} = g(\lambda,\lambda)$

Alles zusammen ergibt:

$$\boxed{*(\sigma^1 \wedge \sigma^2 \wedge \cdots \wedge \sigma^p) = g(\sigma^1,\sigma^1)\cdots g(\sigma^p,\sigma^p)\,\sigma^{p+1} \wedge \cdots \wedge \sigma^n}$$

Anwendungsbeispiel: 4D - Minkowski - Raum

Wir betrachten den passenden 4er - Vektor:

$$\omega = -dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz$$

Anwenden von * liefert demnach:

- $*\omega = -1$
- $*1 = \omega$
- $*dx = dt \wedge dy \wedge dz$
- $*(dx \wedge dy \wedge dz) = -dt$

usw. *

wörtlich gesprochen liefert uns der Hodge-Stern-Operator die duale $(n-p)$-Form zur p-Form durch "wedgen" der übrigen Basis-1-Formen, die nicht in der p-Form auftreten unter Berücksichtigung der Geometrie des Raumes.

Dies wollen wir nun nutzen, um die inhomogenen Maxwell-Gleichungen auszuformulieren

* Für die doppelte Anwendung des Operators gilt:

$$\boxed{**= (-1)^{p(n-p)+s}}$$