Lagrange-Formulierung und Elektrodynamik via Differentialformen I

Eugen Dizer & Mathieu Kaltschmidt

09. April 2018

Institut für Theoretische Physik
Universität Heidelberg

Dieser Vortrag entstand im Rahmen des Seminars "*Klassische Elektrodynamik*", organisiert von Prof. Weigand am Institut für Theoretische Physik der Universität Heidelberg im Sommersemester 2018.
Ziel des Vortrages ist es, eine Formulierung der Elektrodynamik in Differentialformen zu motivieren und damit dann eine alternative Formulierung der Maxwell-Gleichungen einzuführen.
Zu Beginn soll noch einmal die Lagrange-Formulierung der kovarianten Elektrodynamik thematisiert werden.

1 Lagrange-Formulierung der Elektrodynamik

1.1 Lagrangedichte für eine Feldtheorie

Wir wollen das Problem nun auf eine überabzählbare Anzahl an Freiheitsgraden erweitern. Einstieg finden!
Wir betrachten hierzu die **Lagrangedichte** $\mathrm{L} = \iiint \mathrm{d}^3x\, \mathcal{L}$.
Das Wirkungsintegral ist nun $\mathrm{I} = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \iiint \mathrm{d}^3x\, \mathcal{L} = \int \mathrm{d}^4x\, \mathcal{L}$.
Nun erhalten wir die Bewegungsgleichungen aus dem Hamiltonschen Prinzip. Dazu nehmen wir an, dass die Variation der Felder auf den Hyperflächen $t = t_1$ und $t = t_2$ verschwindet.

$$\begin{aligned} 0 = \delta I &= \int \mathrm{d}^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^{(i)}} \delta\varphi^{(i)} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi^{(i)})} \delta(\partial_\mu \varphi^{(i)}) \right) \\ &= \int \mathrm{d}^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^{(i)}} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi^{(i)})} \right) \delta\varphi^{(i)} \end{aligned}$$

Wir erhalten daraus:

Euler-Lagrange-Gleichung

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^{(i)}} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi^{(i)})} \tag{1}$$

1.2 Lagrangedichte für das Maxwell-Feld

Wir wollen $\mathcal{L}$ so wählen, dass sie ein Skalar ist, von den Feldern sowie deren Ableitungen abhängt, Strom / Ladung als Quelle hat und die Maxwell-Gleichungen als Bewegungsgleichungen liefert:

$$\partial_\mu = j^\nu \qquad \Longleftrightarrow \qquad \Box A^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) = j^\nu \tag{2}$$

Da wir als Bewegungsgleichungen Differentialgleichungen 2. Ordnung erwarten, bietet es sich an, das 4er-Feld A^μ wie folgt anzusetzen:

$$\mathcal{L} = \mathrm{a} \cdot \partial_\mu A^\nu \partial^\mu A_\nu + \mathrm{b} \cdot \partial_\mu A^\nu \partial_\nu A^\mu + \mathrm{c} \cdot (\partial_\mu A^\mu)^2 + \mathrm{d} \cdot A_\mu A^\mu + \mathrm{e} \cdot A_\mu j^\mu$$

Setzt man dies in (1) ein und wählt die Koeffizienten so, dass (2) herauskommt, findet man:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j_\mu A^\mu + \frac{\mathrm{c}}{2} \underbrace{\left[(\partial_\mu A^\mu)^2 - \partial_\mu A^\nu \partial_\nu A^\mu\right]}_{=\partial_\mu(A^\mu \partial_\varrho A^\varrho - A_\nu \partial^\nu A^\mu)}$$

Da der letzte Term sich als Divergenz schreiben lässt, ist er nur ein Randterm und verschwindet bei der Variation. Er ändert somit nichts an den Bewegungsgleichungen!
Es folgt also:

Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j_\mu A^\mu \tag{3}$$

Die Lagrangedichte hat demnach die richtige Dimension [Energie/Volumen] wobei der erste Term einer "kinetischen Energie" und der Zweite einer "potentiellen Energie" entspricht.

Andererseits kann man die Lagrangedichte auch ohne Kenntnis der Maxwell-Gleichungen herleiten.
Wir wissen, dass die Elektrodynamik eine relativistische Theorie ist und die Bewegungsgleichungen daher invariant unter Lorentz-Transformationen sein sollten. Außerdem gilt das Superpositionsprinzip, d.h. Summen von Lösungen der Bewegungsgleichungen sind wieder Lösungen. deshalb sollten die Bewegungsgleichungen linear sein, der Lagrangian also höchstens quadratisch in den Ableitungen der Feldkomponenten sein.
Zuletzt sollen die Bewegungsgleichungen eichinvariant sein. Aus den obigen Überlegungen ergeben sich folgende Forderungen an den Lagrangian:

1. Lorentzinvarianz
2. Eichinvarianz

3. Höchstens quadratisch in den Ableitungen

Aus der ersten Forderung folgt, dass die Lagrangedichte ein Lorentz-Skalar sein muss. Aus der Eichinvarianz folgt, dass die Lagrangedichte $F_{\mu\nu}$ oder sein Pendant $\star F_{\mu\nu}$ enthalten kann, denn unter einer Eichtransformation $A^\mu \to A^\mu + \partial^\mu \phi$ ändert sich der Feldstärketensor nicht:

$$F'_{\mu\nu} = \partial_\mu \left(A^\nu + \partial_\nu \phi \right) - \partial_\nu \left(A^\mu + \partial_\mu \phi \right) = \partial_\mu A^\nu - \partial_\nu A^\mu = F_{\mu\nu}. \tag{4}$$

Da $F_{\mu\nu}$ spurfrei ist, sind die ersten Skalare, die nur quadratisch von den Ableitungen abhängen:

$$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = - \left(\star F_{\mu\nu} \right) \left(\star F^{\mu\nu} \right) = 2 \left(\vec{B}^2 - \vec{E}^2 \right) \tag{5}$$

$$\left(\star F_{\mu\nu} \right) F^{\mu\nu} = 4 \vec{B} \cdot \vec{E} \tag{6}$$

Betrachtet man diese beiden Skalare ausführlicher, fällt auf, dass der Zweite sein Vorzeichen unter Raumspiegelung ändert. Solche paritätsverletzenden Effekte wurden bisher nicht beobachtet, weshalb dieser als Kandidat rausfällt. Da wir höchstens quadratische Abhängigkeiten in den Ableitungen zulassen wollen, haben wir diese mit $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ gefunden. Mehr Kombinationen, sodass es eichinvariant bleibt, gibt es nicht. Betrachten wir also noch die reinen Feldanteile:

Am einfachsten wäre $A_\mu A^\mu$. Dies entspricht aber einem Massenterm, der dazu führen würde, dass die Felder schneller als $1/r$ abfallen würden. Deshalb bleibt noch der Lorentz-Skalar $j_\mu A^\mu$, der mit der Kontinuitätsgleichung $\partial_\mu j^\mu = 0$ eichinvariant ist. Da es die Symmetrie der Natur verletzen würde, dürfen die Raumzeitkoordinten x^μ nicht explizit vorkommen.

Die drei Forderungen fixieren die Lagrangedichte demnach auf $\mathcal{L} = a \cdot F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + b \cdot j_\mu A^\mu$.

1.3 Eichtransformationen und Eichinvarianz

Die Eichtransformation $A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \phi$ ändert die Lagrangedichte im Allgemeinen:

$$\mathcal{L}'(A'_\tau, \partial_\tau A'_\tau) = \mathcal{L}(A_\tau, \partial_\tau A_\tau) + j^\mu \partial_\mu \phi$$

Da die Kontinuitätsgleichung $\partial_\mu j^\mu = 0$ gilt, kann man $j^\mu \partial_\mu \phi$ durch $\partial_\mu (j^\mu \phi)$ ersetzen. Dies lässt sich wieder als Divergenz auffassen und hat deshalb keinen Einfluss auf die Bewegungsgleichungen:

$$\text{Ladungserhaltung} \qquad \longleftrightarrow \qquad \text{Eichinvarianz}$$

Besonders interessant sind Translationen $x' = x + \varepsilon \cdot a$:

$$
\begin{aligned}
\varphi^{(i)}(x+\varepsilon\cdot a) &= \varphi^{(i)}(x) + \overbrace{\varepsilon \cdot a^\mu \partial_\mu \varphi^{(i)}(x)}^{\delta\varphi^{(i)}} \\
\partial_\mu\varphi^{(i)}(x+\varepsilon\cdot a) &= \partial_\mu\varphi^{(i)}(x) + \underbrace{\varepsilon \cdot \left(a^\nu \partial_\nu \partial_\mu \varphi^{(i)}(x) + \partial_\mu a^\nu \partial_\nu \varphi^{(i)}(x)\right)}_{\delta(\partial_\mu\varphi^{(i)})}
\end{aligned}
$$

Es wurde hierbei angenommen, dass die Ortsabhängigkeit nur in den Feldern steckt.
Wir erhalten:

$$
\begin{aligned}
\delta I &= \int \mathrm{d}^4x \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^{(i)}}\, \varepsilon\cdot a^\mu\partial_\mu\varphi^{(i)} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi^{(i)})}\, \varepsilon\cdot\left(a^\nu\partial_\nu\partial_\mu\varphi^{(i)} + \partial_\mu a^\nu\partial_\nu\varphi^{(i)}\right)\right) \\
&= \int \mathrm{d}^4x \left(\partial_\nu\mathcal{L} - \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi^{(i)})}\partial_\nu\varphi^{(i)}\right]\right)\varepsilon\cdot a^\nu
\end{aligned}
$$

Damit erhalten wir:

Energie-Impuls-Tensor

$$
\partial_\mu \underbrace{\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi^{(i)})}\partial^\nu\varphi^{(i)} - g^{\mu\nu}\mathcal{L}\right]}_{=T^{\mu\nu}} = 0 \tag{7}
$$

Für das elektromagnetische Feld $\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - j_\mu A^\mu$ folgt:

$$
T^{\mu\nu} = -F^{\mu\nu}j^\nu A_\sigma + g^{\mu\nu}\left(\frac{1}{4}F_{\sigma\tau}F^{\sigma\tau} + j_\mu A^\mu\right)
$$

In dieser Fom ist der Feldstärketensor aber nicht eichinvariant, denn unter der Transformation $A^\mu \;\to\; A^\mu + \partial^\mu\phi$ folgt:

$$
T^{\mu\nu} \quad\to\quad T^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}j_\tau\partial^\tau\phi - F^{\mu\sigma}\partial^\nu\partial_\sigma\phi = T^{\mu\nu} + \partial_\sigma(g^{\mu\nu}j^\sigma\phi - F^{\mu\sigma}j^\nu\phi) - j^\mu\partial^\nu\phi
$$

Wir wollen einen Ausdruck für $T^{\mu\nu}$ finden, der eichinvariant und symmetrisch ist.
Dazu bemerken wir, dass zur Lagrangedichte eine Divergenz addiert werden kann ohne die Bewegungsgleichungen zu ändern. Also hat der Energie-Impuls-Tensor eine gewisse Beliebigkeit, die wir ausnutzen können.

Der "Energiestrom" bleibt unverändert unter einer Transformation $T^{\mu\nu} \;\to\; T^{\mu\nu} + \nabla T^{\mu\nu}$ mit:

(i) $\partial_\mu \nabla T^{\mu\nu} = 0$ (erfüllt Erhaltungssatz)

(ii) $\int \mathrm{d}^3x\, \nabla T^{00}$ (trägt nicht zur Gesamtenergie bei)

Obiger Zusatzterm nach der Eichung motiviert $\nabla T^{\mu\nu} = \partial_\sigma(F^{\mu\sigma})$ und erfüllt die Bedingungen.
Setzen wir also:

$$T^{\mu\nu} = -F^{\mu\sigma}\partial^\nu A_\sigma + g^{\mu\nu}\left(\frac{1}{4}F_{\sigma\tau}F^{\sigma\tau} + j_\tau A\tau\right) + \partial_\sigma\left(F^{\mu\sigma}A^\nu\right)$$

und schreiben mit der Maxwell-Gleichung $\partial_\sigma F^{\mu\sigma} = -j^\mu$ den neuen Ausdruck:

$$T^{\mu\nu} = F^{\mu\varrho}F_\varrho{}^\nu + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F_{\sigma\tau}F^{\sigma\tau} + g^{\mu\nu}j_\sigma A^\sigma - j^\mu A^\nu \tag{8}$$

Damit gilt $\partial_\mu T^{\mu\nu} = A_\varrho \partial^\nu j^\varrho$.
Für den elektromagnetischen Anteil $T_0^{\mu\nu} = F^{\mu\nu}F_\sigma{}^\nu + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F^2$ folgt dann: $\partial_\mu T_0^{\mu\nu} = j_\varrho F^{\varrho\nu}$

In Abwesenheit von äußeren Quellen ist der Energie-Impuls-Tensor **eichinvarient**, **erhalten**, **symmetrisch** und **spurfrei**.

2 Elektrodynamik in Differentialformen

Wir wollen die Maxwell-Gleichungen

$$\nabla\cdot\vec{B} = 0 \tag{9}$$
$$\nabla\times\vec{E} + \partial_t\vec{B} = 0 \tag{10}$$
$$\nabla\cdot\vec{E} = \varrho \tag{11}$$
$$\nabla\times\vec{B} - \partial_t\vec{E} = \vec{j} \tag{12}$$

in der Sprache der Differentialformen umformulieren. Dies wirft einerseits Licht auf einige ihrer Eigenschaften, die bei einer analogen Behandlung im Rahmen der Vektoranalysis nicht so deutlich hervortreten und bringt andererseits den geometrischen Charakter der Gleichungen noch deutlicher hervor. Außerdem bereitet es die Grundlage für das Verständnis der nicht-Abel'schen Eichtheorien, die für die Beschreibung der fundamentalen Wechselwirkungen der Natur wesentlich sind.

Achte auf Nummer der Gleichungen!!!

2.1 Differentialformen

Hier noch einen guten Einstieg überlegen und den Aufschrieb ergänzen.

2.2 homogene Maxwell-Gleichungen

Wir wollen zunächst einmal die beiden homogenen Maxwell-Gleichungen umformulieren.
Dazu nehmen wir einen allgemeinen Standpunkt ein und müssen das elektrische und das magnetische Feld als Vektorfelder ind der 4D-Raumzeit auffassen. Wir arbeiten nachfolgend in der Minkowski-Raumzeit in den Standard-Raumzeit-Koordinaten x^μ.
Zunächst einmal bemerken wir, dass sich die äußere Ableitung einer 1-Form in einen Raumanteil und einen Zeitanteil aufteilen lässt:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\omega &= \partial_0\omega_I \mathrm{d}x^0 \wedge \mathrm{d}x^I + \partial_i\omega_I \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^I && (13)\\ &= \mathrm{d}t \wedge \partial_t\omega + \mathrm{d}_s\omega && (14) \end{aligned}$$

wobei I über alle Multi-Indizes läuft.
Betrachtet man die Gleichungen (1) und (2), so fällt auf, dass es sinnvoll erscheint das E-Feld als 1-Form sowie das B-Feld als 2-Form zu schreiben:

$$\begin{aligned} E &= E_x \mathrm{d}x + E_y \mathrm{d}y + E_z \mathrm{d}z && (15)\\ B &= B_x \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + B_y \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + B_z \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y && (16) \end{aligned}$$

Damit lassen sich (1) und (2) schreiben als:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_s B &= 0 && (17)\\ \partial_t B + \mathrm{d}_s E &= 0 && (18) \end{aligned}$$

Wir wollen diese beiden Gleichungen zusammenfassen, indem wir für das elektromagnetische Feld die 2-Form F im $\mathbb{R}^4$ einführen:

$$F = \mathrm{d}t \wedge E - B \qquad (19)$$

passen die Vorzeichen?

denn dann haben wir:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}F &= -\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}E - \mathrm{d}B \\ &= -\mathrm{d}t \wedge (\mathrm{d}_s E + \mathrm{d}t \wedge \partial_t E) - \mathrm{d}_s B - \mathrm{d}t \wedge \partial_t B \\ &= -\mathrm{d}t \wedge (\mathrm{d}_s E + \partial_t B) - \mathrm{d}_s B && (20) \end{aligned}$$

Damit lassen sich beide homogenen Maxwell-Gleichungen kurz zu:

$$\mathrm{d}F = 0 \tag{21}$$

zusammenfassen.
In Komponentenschreibweise gilt für das elektromagnetische Feld

$$F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu \tag{22}$$

mit dem Feldstärke-Tensor:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{23}$$

Da die äußere Ableitung koordinatenunabhängig ist, gilt $\mathrm{d}F = 0$ auf jeder beliebigen Mannigfaltigkeit und hängt nicht von der Wahl der Koordinaten ab.
Die 2-Form F ist demnach geschlossen und besitzt nach dem **Poincaré-Lemma** ein Potential:

$$F = \mathrm{d}A \tag{24}$$

wobei A eine 1-Form ist.
Damit gilt automatisch $\mathrm{d}F = \mathrm{d}(\mathrm{d}A) = 0$. Außerdem sehen wir, dass wir eine Eichfreiheit haben:

$$A \quad \rightarrow \quad A + \mathrm{d}\lambda \qquad\qquad \lambda \in C^\infty(\mathbb{R}^4) \tag{25}$$

.
Mit Hilfe dieses Potentials lassen sich die Felder wie folgt darstelllen:

$$E = -\partial_t A \tag{26}$$
$$B = \mathrm{d}_s A \tag{27}$$

Betrachten wir nun noch die beiden inhomogenen Gleichungen (3) und (4), die jeweils noch Quellterme enthalten. Es fällt auf, dass E und B gewissermaßen ihre Rollen tauschen. Dieses Phänomen wird als **elektromagnetische Dualität** bezeichnet.
Auf Grundlage dieser Dualität, welche durch die Transformationen der Felder gemäß

$$E \rightarrow B \qquad \text{sowie} \qquad B \rightarrow -E$$

die Invarianz der Maxwell-Gleichungen im Vakuum charakterisiert, wollen wir nun eine neue Methode, genauer einen neuen Operator einführen der uns diese Transformationen ermöglicht.
Wir erinnern uns an die neue Darstellung der Felder nach Gl. () und ():

richtige Nummer

richtige Nummer

$$E = E_x \mathrm{d}x + E_y \mathrm{d}y + E_z \mathrm{d}z$$
$$B = B_x \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + B_y \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + B_z \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

Für die Transformation müssen wir also eine 1-Form in eine 2-Form überführen und umgekehrt. Im $\mathbb{R}^3$ kann diese Transformation mit dem **Hodge-Stern-Operator** realisiert werden.

2.3 Hodge-Stern-Operator

Der Hodge-Stern-Operator ist eine der drei Standard-Operation auf dem Raum der Differentialformen.
Wir betrachten die Abbildung:

$$\star : \Lambda^p(V*) \quad \rightarrow \quad \Lambda^{(n-p)}(V*)$$

Die abstrakte Definition des Operators lautet:

Hier mal noch die Definition überprüfen

$$\alpha \wedge \star\beta = g(\alpha, \beta)\omega \tag{28}$$

für alle $\alpha, \beta \in \Lambda^p V$ und $\omega \in \Lambda^n V$.
Die Metrik g definiert sich für die geordnete Orthonormalbasis $\sigma^i \in V.i = 1, \ldots, n$ wie folgt:

$$g(\alpha, \beta) = \det\left(g(\alpha^i, \beta^i)\right) \text{ mit } g(\sigma^i, \sigma^j) = \pm\delta^{ij} \tag{29}$$

für alle "einfachen" p-Vektoren α und β.
Im Allgemeinen gilt:

$$g(\omega, \omega) = \prod_{k=1}^{n} g(\sigma^i, \sigma^i) = (-1)^s \tag{30}$$

mit der Signatur s, welche sich aus der Anzahl an Minuszeichen bei der Betrachtung der Metrik ergibt und die Norm des Vektors festlegt.
In unserem Fall bietet sich die nachfolgende, etwas weniger abstrakte, praktische Definition an.
Wir betrachten einen Basis-p-Vektor α der Form:

$$\alpha = \sigma^1 \wedge \sigma^2 \wedge \ldots \wedge \sigma^p = \sigma^I \in \Lambda^p V \tag{31}$$

Einsetzen von $\sigma^J \in \Lambda^{(n-p)}V$ in die abstrakte Definition liefert:

$$\sigma^J \wedge \star\alpha = g(\sigma^j, \alpha)\omega \tag{32}$$

Daraus folgt direkt: $\star\alpha = \text{const.} \cdot \sigma^{p+1} \wedge \ldots \wedge \sigma^n$
und mit $\sigma^J \wedge \star\alpha = \omega$: $1 = g(\sigma^j, \text{const.} \cdot \sigma^j)$,
was uns schließlich zum Ausdruck:

$$\text{const.} = \frac{(-1)^s}{g(\sigma^j, \sigma^j)} = \frac{g(\omega, \omega)}{g(\sigma^j, \sigma^j)} = g(\alpha, \alpha)$$

führt.
Alles zusammen ergibt uns die recht anschauliche Definition:

Hodge-Stern-Operator

$$\star(\sigma^1 \wedge \sigma^2 \wedge \ldots \wedge \sigma^p) = g(\sigma^1, \sigma^1) \ldots g(\sigma^p, \sigma^p)\sigma^{p+1} \wedge \ldots \wedge \sigma^n \tag{33}$$

Für die zweifache Anwendung des Operators gilt: (ohne Herleitung)

$$\star\star = (-1)^{p(n-p)+s} \tag{34}$$

2.3.1 Anwendungsbeispiel: 4D-Minkowski-Raumzeit

Wir betrachten den trivialen 4er-Vektor:

$$\omega = -\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$$

Wenden wir nun den $\star$-Operator an folgt zum Beispiel:

$$\begin{aligned}
\star\, 1 &= \omega \\
\star\, \omega &= -1 \\
\star\, \mathrm{d}t &= -\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \\
\star\, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z &= -\mathrm{d}t \\
\star\star\omega &= (-1)^{4(4-4)+1} = -\omega \\
&\ldots
\end{aligned}$$

Wörtlich gesprochen liefert uns der Hodge-Stern-Operator die duale (n-p)-Form zur p-Form durch "wedgen" der übrigen Basis-1-Formen, die nicht in der p-Form auftreten, unter Berücksichtigung der Geometrie des Raumes.
Dies wollen wir nutzen, um nun die inhomogenen Maxwell-Gleichungen neu auszuformulieren.

2.4 inhomogene Maxwell-Gleichungen

Durch Anwenden des Hodge-Stern-Operators auf F folgt:

$$\star F = - \star E + \star B \wedge \mathrm{d}t \tag{35}$$

und damit:

$$\begin{aligned} \mathrm{d} \star F &= - \star \partial_t E \wedge \mathrm{d}t - \mathrm{d}_s \star E + \mathrm{d}_s \star B \wedge \mathrm{d}t \\ &= -\mathrm{d}_s \star E + (\mathrm{d}_s \star B - \star \partial_t E) \wedge \mathrm{d}t \end{aligned} \tag{36}$$

Vergleicht man dies mit den Maxwell-Gleichungen fällt auf, dass:

$$\star \mathrm{d}_s \star E = \varrho \qquad , \varrho = \text{Ladungsdichte} \tag{37}$$

$$\star \mathrm{d}_s \star B - \partial_t E = j \qquad , j = j_x \mathrm{d}x + j_y \mathrm{d}y + j_z \mathrm{d}z \tag{38}$$

Definiert man den Strom $J = j - \varrho \, \mathrm{d}t$, lassen sich () und () in

richtige Nummer

richtige Nummer

$$\mathrm{d} \star F = \star J \tag{39}$$

zusammenfassen.

Insgesamt lässt sich also die gesamte Elektrodynamik auf die beiden gefundenden, äußerst eleganten Gleichungen zurückführen.

Maxwell-Gleichungen

$$\mathrm{d}F = 0$$
$$\mathrm{d} \star F = \star J$$

2.5 Lagrangian in Differentialformen

Um den Vortrag abzurunden, kommen wir wieder kurz auf die Lagrange-Beschreibung zurück und zeigen, wie man die Maxwell-Gleichungen in Differentialformen durch einen Lagrangian herleitet. Dazu muss man nun auch den Lagrangian in Differentialformen ausdrücken.
Derartige Ausdrücke werden später auch in der Yang-Mills-Theorie und der Chern-Simon-Theorie auftreten. Ihr Vorteil ist, dass sie automatisch alle geforderten Punkte aus Kapitel 1 erfüllen, insbesondere die Koordinatenunabhängigkeit.

Die Lagrangians setzt man meistens axiomatisch an und zeigt dann, dass sie die gewünschten Gleichungen liefern. Für das elektromagnetische Feld gilt:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} F \wedge \star F + A \wedge \star J, \tag{40}$$

wobei F, A und J gemäß den obigen Definitionen gegeben sind. Es gelte $F = \mathrm{d}A$.

Das zugehörige Wirkungsfunktional sei I[A] $= \int \mathcal{L}$ und sei $A + \varepsilon \cdot \delta A$ das gestörte Eichpotential.
Dann folgt aus der Variation der Wirkung:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\epsilon}\mathrm{I}[A + \varepsilon \cdot \delta A]\bigg|_{\varepsilon=0} &= \frac{d}{d\epsilon}\left(\int -\frac{1}{2}\,\mathrm{d}(A + \varepsilon \cdot \delta A) \wedge \star\, \mathrm{d}(A + \varepsilon \cdot \delta A) + (A + \varepsilon \cdot \delta A) \wedge \star J\right)\bigg|_{\varepsilon=0} \\
&= \int -\frac{1}{2}\left(\underbrace{\mathrm{d}A \wedge \star \mathrm{d}\delta A}_{=\langle \mathrm{d}A, \mathrm{d}\delta A\rangle \mathrm{vol}} + \underbrace{\mathrm{d}\delta A \wedge \star \mathrm{d}A}_{=\langle \mathrm{d}\delta A, \mathrm{d}A\rangle \mathrm{vol}}\right) + \delta A \wedge \star J \\
&= \int -\mathrm{d}\delta A \wedge \star \mathrm{d}A + \delta A \wedge \star J \\
&= \int -\delta A \wedge \mathrm{d} \star \mathrm{d}A + \delta A \wedge \star J \\
&= \int \delta A \wedge (-\mathrm{d} \star \mathrm{d}A + \star J)
\end{aligned}$$

Da die Variation bei $\varepsilon = 0$ für beliebige δA verschwinden muss, gilt:

$$\mathrm{d} \star \mathrm{d}A = \star J \tag{41}$$
$$\mathrm{d} \star F = \star J \tag{42}$$

was wir bereits zuvor hergeleitet hatten.