Maxwell - Gleichungen

Im Allgemeinen fassen wir das elektrische und das magnetische Feld als Vektorfelder in der 4-dim. Raumzeit auf.

Dem elektrischen Feld E ordnen wir die 1-Form

$$\underline{E = E_x\, dx + E_y\, dy + E_z\, dz} \qquad (\ )$$

zu.

Für die magnetische Flussdichte B betrachten wir die 2-Form:

$$\underline{B = B_x\, dy \wedge dz + B_y\, dz \wedge dx + B_z\, dx \wedge dy} \qquad (\ )$$

Im Allgemeinen bezeichnen wir das Elektromagnetische Feld F als:

$$\underline{F = \frac{1}{2} F^{\mu\nu}\, dx^\mu \wedge dx^\nu} \qquad (\ )$$

wobei

$$F^{\mu\nu} = \left.\begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_t \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}\right\} \text{Feldstärketensor}$$

Der Faktor ½ folgt direkt aus der Tatsache, dass die typischen Ausdrücke jeweils zweimal auftauchen, z.B.

$F_{xy}\, dx \wedge dy$ sowie $F_{yx}\, dy \wedge dx$ mit $F_{xy} = -F_{yx}$

und $dx \wedge dy = -\, dy \wedge dx$ (vgl. Gl. ( )).

Wir betrachten nun die äußere Ableitung von F.

$$\begin{aligned} dF = &\left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz \\ &+ \left(\frac{\partial B_x}{\partial t} + \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) dt \wedge dy \wedge dz \\ &+ \left(\frac{\partial B_y}{\partial t} + \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right) dt \wedge dz \wedge dx \\ &+ \left(\frac{\partial B_z}{\partial t} + \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right) dt \wedge dx \wedge dy \qquad (\ ) \end{aligned}$$

Die einzelnen Terme erkennen wir direkt als Gleichung (1) bzw. (2) wieder.

Da jeder der einzelnen Terme verschwindet erhalten wir insgesamt: $\underline{dF = 0}$ ( )

Damit ist F eine geschlossene 2-Form.
Gemäß des Poincaréschen Lemma kann somit dem "rotationsfreien" Feld F ein Potential A zugeordnet werden, gemäß $\underline{F = dA}$ ( )
mit einer 1-Form A, welches aufgrund von $d(dA) = d^2 A = 0$ eine Eichfreiheit besitzt.
Das Potential bleibt demnach invariant unter der Transformation $\underline{A \to A + d\lambda}$ mit $\lambda \in C^\infty(\mathbb{R}^4)$.
Nachdem wir die homogenen Maxwellgleichungen bereits in der eleganten Form $dF = 0$ zusammenfassen konnten, wollen wir uns nun noch den beiden inhomogenen Gleichungen (3) und (4) zuwenden.
In diesem Kontext wollen wir zunächst noch einen neuen Operator im Umgang mit Differentialformen einführen.

Hodge-Stern-Operator

Wir betrachten die Abbildung:

$$* : \Lambda^p(V^*) \to \Lambda^{n-p}(V^*)$$

mit der Bedingung

$$*(e^1 \wedge e^2 \wedge \dots \wedge e^p) = (e^{p+1} \wedge e^{p+2} \wedge \dots \wedge e^n)$$

Diese hat die folgenden Eigenschaften:
(mit $f_1, f_2 \in C^\infty(M)$; $\omega, \nu \in \Omega^p(M)$ und Metrik g).

1) $*(f_1 \omega + f_2 \nu) = f_1 * \omega + f_2 * \nu$
2) $** \omega = (-1)^{p(n-p)} \cdot \omega$
3) $\omega \wedge * \nu = \nu \wedge * \omega = g(\omega, \nu) * 1_M$
4) $*(\omega \wedge * \nu) = *(\nu \wedge * \omega) = g(\omega, \nu)$
5) $g(*\omega, *\nu) = g(\omega, \nu)$

Wörtlich gesprochen liefert uns der Hodge-Stern-Operator die duale $(n-p)$-Form zur p-Form durch "wedgen" der übrigen Basis-1-Formen, die nicht in der betrachten p-Form auftauchen.

Konkrete Beispiele:

Im Minkowski-Raum mit Metrik $g = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ betrachten wir die 4-Form:

$$\omega = dx \wedge dy \wedge dz \wedge dt \qquad (\ )$$

Anwenden des $*$-Operators liefert:

$$*1 = dx \wedge dy \wedge dz \wedge dt$$
$$*\,dx = dy \wedge dz \wedge dt$$
$$*(dx \wedge dy \wedge dz) = -dt$$

usw.

Der $*$-Operator liefert somit ein nützliches Werkzeug zur Veranschaulichung der elektromagnetischen Dualität.

Schreiben wir F kurz als:

$$F = dt \wedge E - B \qquad (\ \ )$$

(vgl. hierzu mit dem Ausdruck aus Gl. ())

So erhalten wir durch Anwendung von $*$:

$$*F = dt \wedge -B + E \qquad (\ \ )$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{*F^{\mu\nu}}_{\text{dualer Feldstärketensor}} dx^\mu \wedge dx^\nu$$

mit $$*F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & E_x \\ B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix}$$

Auch hier wollen wir die äußere Ableitung $d*F$ betrachten.

Wir erhalten:

$$d*F = d(-B_x\,dx \wedge dt - \dots + E_x\,dy \wedge dz + \dots)$$
$$= \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz$$
$$+ \left(\frac{\partial E_x}{\partial t} - \frac{\partial B_z}{\partial y} + \frac{\partial B_y}{\partial z}\right) dt \wedge dy \wedge dz$$
$$+ \left(\frac{\partial E_y}{\partial t} - \frac{\partial B_x}{\partial z} + \frac{\partial B_z}{\partial x}\right) dt \wedge dz \wedge dx$$
$$+ \left(\frac{\partial E_z}{\partial t} - \frac{\partial B_y}{\partial x} + \frac{\partial B_x}{\partial y}\right) dt \wedge dx \wedge dy$$

Wir definieren die Ladungsdichte ρ:

$$4\pi \cdot \rho = *\partial_i * E \qquad (\quad) \qquad (\text{vgl. Gl. }(3))$$

sowie die Stromdichte $j = j_x\,dx + j_y\,dy + j_z\,dz$

als $$*\partial * B - \partial_t E = 4\pi j \quad (\quad) \qquad (\text{vgl. Gl. }(4))$$

Man erhält:

$$d*F = 4\pi(\rho\,dx \wedge d\mu \wedge dz$$
$$- j_x\,dt \wedge dy \wedge dz$$
$$- j_y\,dt \wedge dz \wedge dx$$
$$- j_z\,dt \wedge dx \wedge dy) \quad (\quad)$$

Fassen wir den Strom $J = j - \rho\,dt$ zusammen erhalten wir in Kurzform:

$$d*F = 4\pi * J \quad (\quad)$$

Insgesamt lässt sich die Elektrodynamik also auf die zwei Gleichungen:

$$dF = 0$$
$$d*F = 4\pi * J$$

zurückführen!