

# Lagrange-Formulierung und Elektrodynamik via Differentialformen I

Eugen Dizer & Mathieu Kaltschmidt

09. April 2018

Institut für Theoretische Physik  
Universität Heidelberg

Dieser Vortrag entstand im Rahmen des Seminars "*Klassische Elektrodynamik*", organisiert von Prof. Weigand am Institut für Theoretische Physik der Universität Heidelberg im Sommersemester 2018.

Ziel des Vortrages ist es, eine Formulierung der Elektrodynamik in Differentialformen zu motivieren und damit dann eine alternative Formulierung der Maxwell-Gleichungen einzuführen. Es werden die mathematischen und physikalischen Grundlagen für das Verständnis der modernen Eichtheorien besprochen und die Elektrodynamik als klassische Feldtheorie vorgestellt.

Zu Beginn soll die Lagrange-Formulierung der kovarianten Elektrodynamik thematisiert werden, um sie am Ende in der Sprache der Differentialformen zu formulieren.

## 1 Lagrange-Formulierung der Elektrodynamik

Das Hamilton'sche Extremalprinzip ist in vielen Anwendungen sehr erfolgreich. Es charakterisiert physikalisch realisierbare Bahnen unter allen denkbaren Bahnen als diejenigen, die kritische Elemente des Wirkungsintegrals sind. Die Lagrangefunktion dient nicht nur zur rationalen Herleitung der Bewegungsgleichungen, sondern ist auch ein wichtiges Hilfsmittel zur Bestimmung von Erhaltungsgrößen. Wir werden diese mächtige Methode auf die Elektrodynamik anwenden und sie auf überabzählbar viele Freiheitsgrade erweitern.

### 1.1 Lagrangedichte für eine Feldtheorie

In der klassischen Mechanik hatten wir es immer mit endlich vielen Freiheitsgraden zu tun. Bei der klassischen Feldtheorie stellen wir uns den Raum als gitterartig verbundene Raumpunkte vor, die jeweils mit ihren Nachbarn wechselwirken können. Im Kontinuumslimit haben wir unendlich viele Raumpunkte und benötigen eine neue Beschreibungsweise.

An die Stelle der verallgemeinerten Koordinaten treten nun die **Felder**  $\varphi^{(i)}$  und die Lagrangefunktion wird durch die **Lagrangedichte**  $\mathcal{L} = \int \int \int d^3x \mathcal{L}$  ersetzt.

Das Wirkungsintegral ist nun  $\mathcal{S} = \int_{t_1}^{t_2} dt \int \int \int d^3x \mathcal{L} = \int d^4x \mathcal{L}$ .

Die Bewegungsgleichungen erhalten wir aus dem Hamilton'schen Prinzip und nehmen

dazu an, dass die Variation der Felder auf den Hyperflächen  $t = t_1$  und  $t = t_2$  verschwindet:

$$\begin{aligned} 0 = \delta S &= \int d^4x \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^{(i)}} \delta \varphi^{(i)} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi^{(i)})} \delta (\partial_\mu \varphi^{(i)}) \right) \\ &= \int d^4x \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^{(i)}} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi^{(i)})} \right) \delta \varphi^{(i)} \end{aligned}$$

Wir erhalten daraus:

### Euler-Lagrange-Gleichung

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^{(i)}} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi^{(i)})} \quad (1)$$

## 1.2 Lagrangedichte für das Maxwell-Feld

Wir wollen  $\mathcal{L}$  so wählen, dass sie ein Skalar ist, von den Feldern sowie deren Ableitungen abhängt, Strom/Ladung als Quelle hat und die Maxwell-Gleichungen als Bewegungsgleichungen liefert:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \quad \Longleftrightarrow \quad \square A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = j^\nu \quad (2)$$

Da wir als Bewegungsgleichungen Differentialgleichungen 2. Ordnung erwarten, bietet es sich an, das 4er-Feld  $A^\mu$  wie folgt anzusetzen:

$$\mathcal{L} = a \cdot \partial_\mu A^\nu \partial^\mu A_\nu + b \cdot \partial_\mu A^\nu \partial_\nu A^\mu + c \cdot (\partial_\mu A^\mu)^2 + d \cdot A_\mu A^\mu + e \cdot A_\mu j^\mu \quad (3)$$

Setzt man dies in (3) ein und wählt die Koeffizienten so, dass (2) herauskommt, findet man:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j_\mu A^\mu + \frac{c}{2} \underbrace{[(\partial_\mu A^\mu)^2 - \partial_\mu A^\nu \partial_\nu A^\mu]}_{= \partial_\mu (A^\mu \partial_\nu A^\nu - A_\nu \partial^\nu A^\mu)} \quad (4)$$

Da der letzte Term sich als Divergenz schreiben lässt, ist er nur ein Randterm und verschwindet bei der Variation. Er ändert somit nichts an den Bewegungsgleichungen!

Es folgt also:

### Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j_\mu A^\mu \quad (5)$$

Die Lagrangedichte hat demnach die richtige Dimension  $[\text{Energie/Volumen}]$ , wobei der erste Term einer "kinetischen Energie" und der Zweite einer "potentiellen Energie" entspricht.

Andererseits kann man die Lagrangedichte auch ohne Kenntnis der Maxwell-Gleichungen herleiten:

Wir wissen, dass die Elektrodynamik eine relativistische Theorie ist und die Bewegungsgleichungen daher invariant unter Lorentz-Transformationen sein sollten. Außerdem gilt in erster Ordnung das Superpositionsprinzip, d.h. Summen von Lösungen der Bewegungsgleichungen sind wieder Lösungen. Deshalb sollten die Bewegungsgleichungen linear sein, der Lagrangian also höchstens quadratisch in den Ableitungen der Feldkomponenten sein. Es könnten auch Terme höherer Ordnung auftreten, diese wären aber nur kleine Störterme, die die Bewegungsgleichungen nur unwesentlich beeinflussen.

Zuletzt sollen die Bewegungsgleichungen eichinvariant sein. Aus den obigen Überlegungen ergeben sich folgende Forderungen an den Lagrangian:

1. Lorentzinvarianz
2. Eichinvarianz

Aus der ersten Forderung folgt, dass die Lagrangedichte ein Lorentz-Skalar sein muss. Aus der Eichinvarianz folgt, dass die Lagrangedichte  $F_{\mu\nu}$  oder sein Pendant  $\star F_{\mu\nu}$  enthalten kann, denn unter einer Eichtransformation  $A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \phi$  ändert sich der Feldstärketensor nicht:

$$F'_{\mu\nu} = \partial_\mu (A'_\nu + \partial_\nu \phi) - \partial_\nu (A'_\mu + \partial_\mu \phi) = \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu = F_{\mu\nu}. \quad (6)$$

Da  $F_{\mu\nu}$  spurfrei ist, sind die ersten möglichen eichinvarianten Skalare:

$$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -(\star F_{\mu\nu})(\star F^{\mu\nu}) = 2(\vec{B}^2 - \vec{E}^2) \quad (7)$$

$$(\star F_{\mu\nu}) F^{\mu\nu} = 4\vec{B} \cdot \vec{E} \quad (8)$$

Betrachtet man diese beiden Skalare ausführlicher, fällt auf, dass der Zweite sein Vorzeichen unter Raumspiegelung ändert. Solche paritätsverletzenden Effekte wurden bisher nicht beobachtet, weshalb dieser als Kandidat rausfällt. Außerdem lässt er sich sowieso als Divergenz schreiben und liefert demnach keinen Beitrag bei der Variation. Da wir höchstens quadratische Abhängigkeiten in den Ableitungen zulassen wollen, haben wir diese mit  $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$  gefunden. Mehr Kombinationen, sodass es eichinvariant bleibt, gibt es nicht. Betrachten wir also noch die reinen Feldanteile:

Am einfachsten wäre  $A_\mu A^\mu$ . Dies entspricht aber einem Massenterm, der dazu führen würde, dass die Felder schneller als  $\frac{1}{r}$  abfallen würden und ist darüber hinaus nicht eichinvariant. Deshalb bleibt noch der Lorentz-Skalar  $j_\mu A^\mu$ , der mit der Kontinuitätsgleichung  $\partial_\mu j^\mu = 0$  eichinvariant ist. Da es die Symmetrie der Natur verletzen würde, dürfen die Raumzeitkoordinaten  $x^\mu$  nicht explizit vorkommen. Die drei Forderungen fixieren die Lagrangedichte demnach auf  $\mathcal{L} = a \cdot F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + b \cdot j_\mu A^\mu$ . Der Faktor  $a$  bestimmt die Normierung des  $A$ -Feldes und wird üblicherweise zu  $a = -\frac{1}{4}$  festgelegt. Das negative Vorzeichen

rührt daher, dass der 'kinetische Anteil' mit den Zeitableitungen positiv wird, wie es bei der klassischen Lagrangefunktion üblich ist. Der Faktor  $b$  beschreibt die Stärke der Wechselwirkung von  $A_\mu$  mit dem Strom  $j^\mu$  und entspricht einer Ladung. Er bleibt als empirisch zu bestimmende Größe stehen. Man erhält im Endeffekt aber wieder (5).

### 1.3 Eichtransformationen und Eichinvarianz

Die Eichtransformation  $A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \phi$  ändert die Lagrangedichte im Allgemeinen:

$$\mathcal{L}'(A'_\tau, \partial_\tau A'_\tau) = \mathcal{L}(A_\tau, \partial_\tau A_\tau) + j^\mu \partial_\mu \phi \quad (9)$$

Da die Kontinuitätsgleichung  $\partial_\mu j^\mu = 0$  gilt, kann man  $j^\mu \partial_\mu \phi$  durch  $\partial_\mu (j^\mu \phi)$  ersetzen. Dies lässt sich wieder als Divergenz auffassen und hat deshalb keinen Einfluss auf die Bewegungsgleichungen:

$$\text{Ladungserhaltung} \quad \longleftrightarrow \quad \text{Eichinvarianz}$$

Besonders interessant sind Translationen  $x \rightarrow x + \varepsilon \cdot a$ :

$$\begin{aligned} \varphi^{(i)}(x + \varepsilon \cdot a) &= \varphi^{(i)}(x) + \overbrace{\varepsilon \cdot a^\mu \partial_\mu \varphi^{(i)}(x)}^{\delta \varphi^{(i)}} \\ \partial_\mu \varphi^{(i)}(x + \varepsilon \cdot a) &= \partial_\mu \varphi^{(i)}(x) + \underbrace{\varepsilon \cdot \left( a^\nu \partial_\nu \partial_\mu \varphi^{(i)}(x) + \partial_\mu a^\nu \partial_\nu \varphi^{(i)}(x) \right)}_{\delta(\partial_\mu \varphi^{(i)})} \end{aligned}$$

Es wurde hierbei angenommen, dass die Ortsabhängigkeit nur in den Feldern steckt. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^{(i)}} \varepsilon \cdot a^\mu \partial_\mu \varphi^{(i)} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi^{(i)})} \varepsilon \cdot \left( a^\nu \partial_\nu \partial_\mu \varphi^{(i)} + \partial_\mu a^\nu \partial_\nu \varphi^{(i)} \right) \right) \\ &= \int d^4x \left( \partial_\nu \mathcal{L} - \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi^{(i)})} \partial_\nu \varphi^{(i)} \right] \right) \varepsilon \cdot a^\nu \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

#### Energie-Impuls-Tensor

$$\partial_\mu \underbrace{\left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi^{(i)})} \partial^\nu \varphi^{(i)} - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \right]}_{=T^{\mu\nu}} = 0 \quad (10)$$

Für das elektromagnetische Feld  $\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - j_\mu A^\mu$  folgt:

$$T^{\mu\nu} = -F^{\mu\nu}j^\nu A_\sigma + g^{\mu\nu} \left( \frac{1}{4}F_{\sigma\tau}F^{\sigma\tau} + j_\mu A^\mu \right) \quad (11)$$

In dieser Form ist der Energie-Impuls-Tensor aber nicht eichinvariant, denn unter der Transformation  $A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \phi$  folgt:

$$T^{\mu\nu} \rightarrow T^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} j_\tau \partial^\tau \phi - F^{\mu\sigma} \partial^\nu \partial_\sigma \phi = T^{\mu\nu} + \partial_\sigma (g^{\mu\nu} j^\sigma \phi - F^{\mu\sigma} j^\nu \phi) - j^\mu \partial^\nu \phi \quad (12)$$

Wir wollen einen Ausdruck für  $T^{\mu\nu}$  finden, der eichinvariant und symmetrisch ist. Dazu bemerken wir, dass zur Lagrangedichte eine Divergenz addiert werden kann ohne die Bewegungsgleichungen zu ändern. Also hat der Energie-Impuls-Tensor eine gewisse Beliebigkeit, die wir ausnutzen können.

Der Energiestrom bleibt unverändert unter einer Transformation  $T^{\mu\nu} \rightarrow T^{\mu\nu} + \nabla T^{\mu\nu}$  mit:

- (i)  $\partial_\mu \nabla T^{\mu\nu} = 0$  (erfüllt Erhaltungssatz)
- (ii)  $\int d^3x \nabla T^{00}$  (trägt nicht zur Gesamtenergie bei)

Obiger Zusatzterm nach der Eichung motiviert  $\nabla T^{\mu\nu} = \partial_\sigma (F^{\mu\sigma} A^\nu)$  und erfüllt die Bedingungen.

Setzen wir also:

$$T^{\mu\nu} = -F^{\mu\sigma} \partial^\nu A_\sigma + g^{\mu\nu} \left( \frac{1}{4}F_{\sigma\tau}F^{\sigma\tau} + j_\tau A^\tau \right) + \partial_\sigma (F^{\mu\sigma} A^\nu) \quad (13)$$

und schreiben mit der Maxwell-Gleichung  $\partial_\sigma F^{\mu\sigma} = -j^\mu$  den neuen Ausdruck:

$$T^{\mu\nu} = F^{\mu\varrho} F_\varrho{}^\nu + \frac{1}{4}g^{\mu\nu} F_{\sigma\tau}F^{\sigma\tau} + g^{\mu\nu} j_\sigma A^\sigma - j^\mu A^\nu \quad (14)$$

Damit gilt  $\partial_\mu T^{\mu\nu} = A_\varrho \partial^\nu j^\varrho$ .

Für den rein elektromagnetischen Anteil  $T_0^{\mu\nu} = F^{\mu\nu} F_\sigma{}^\nu + \frac{1}{4}g^{\mu\nu} F_{\sigma\tau}F^{\sigma\tau}$  folgt dann:  $\partial_\mu T_0^{\mu\nu} = j_\varrho F^{\varrho\nu}$ .

In Abwesenheit von äußeren Quellen ist der Energie-Impuls-Tensor **eichinvariant, erhalten, symmetrisch** und **spurfrei**.

## 2 Elektrodynamik in Differentialformen

Wir wollen die Maxwell-Gleichungen

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (15)$$

$$\nabla \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0 \quad (16)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho \quad (17)$$

$$\nabla \times \vec{B} - \partial_t \vec{E} = \vec{j} \quad (18)$$

in die Sprache der Differentialformen umformulieren. Dies wirft einerseits Licht auf einige ihrer Eigenschaften, die bei einer analogen Behandlung im Rahmen der Vektoranalysis nicht so deutlich hervortreten und bringt andererseits den geometrischen Charakter der Gleichungen noch deutlicher hervor. Außerdem bereitet es die Grundlage für das Verständnis der nicht-Abel'schen Eichtheorien, die für die Beschreibung der fundamentalen Wechselwirkungen der Natur wesentlich sind.

### 2.1 Differentialformen

Differentialformen ermöglichen es uns, die Diskussion der Felder auf beliebige Dimensionen zu erweitern. Es wird auffallen, dass sich die bekannten Differentialoperatoren Gradient, Divergenz und Rotation lediglich als verschiedene Darstellungen desselben Operators auf bestimmten Mannigfaltigkeiten bilden lassen.

Sei  $V$  ein Vektorraum. Wir wollen zwei Vektoren aus  $V$  irgendwie miteinander multiplizieren können, sodass die grundlegende Eigenschaft des Kreuzproduktes erfüllt ist.

Dieses Produkt nennen wir das **äußere Produkt**  $\wedge$ . Eine alternative, häufig verwendete Bezeichnung ist **wedge-Produkt**. Wir definieren:

Die äußere Algebra über  $V$ , bezeichnet mit  $\Lambda V$ , ist die von  $V$  induzierte Algebra mit der Relation

$$v \wedge w = -w \wedge v \quad (19)$$

für alle  $v, w \in V$ .

Wir definieren  $\Lambda^p V$  als den Untervektorraum von  $\Lambda V$ , bestehend aus Linearkombinationen des  $p$ -fachen Produkts von Vektoren in  $V$ , beispielsweise  $v_1 \wedge \dots \wedge v_p$ .

Es gilt  $\Lambda^0 V = \mathbb{R}$  sowie  $\Lambda^1 V = V$ . Das wedge-Produkt zweier Vektoren liegt im  $\Lambda^2 V$ .

Man kann zeigen, dass für  $\omega \in \Lambda^p V$  und  $\mu \in \Lambda^q V$

$$\omega \wedge \mu = (-1)^{pq} \mu \wedge \omega$$

gilt.

Wir ersetzen nun die reellen Zahlen durch glatte Funktionen  $C^\infty(\mathcal{M})$  auf einer Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  und wählen den Raum der 1-Formen  $\Omega^1(\mathcal{M})$  als unseren Vektorraum  $V$ . Kurz zusammengefasst bedeutet das:

### Differentialformen

Differentialformen auf  $\mathcal{M}$  sind also die äußere Algebra, induziert von  $\Omega^1(\mathcal{M})$ , mit der Relation

$$\omega \wedge \mu = -\mu \wedge \omega$$

für alle  $\omega, \mu \in \Omega^1(\mathcal{M})$  und werden mit  $\Omega(\mathcal{M})$  bezeichnet.

Den Unterraum der p-Formen bezeichnen wir mit  $\Omega^p(\mathcal{M})$ .

Die sogenannte **äußere Ableitung**  $d$  definieren wir über die Abbildung:

$$d : \Omega^p(\mathcal{M}) \rightarrow \Omega^{p+1}(\mathcal{M})$$

mit

1.  $d(\omega + \mu) = d\omega + d\mu$  und  $d(c \cdot \omega) = c \cdot d\omega \quad \forall \omega, \mu \in \Omega(\mathcal{M})$  und  $c \in \mathbb{R}$
2.  $d(\omega \wedge \mu) = d\omega \wedge \mu + (-1)^p \omega \wedge d\mu \quad \forall \omega \in \Omega^p(\mathcal{M})$  und  $\mu \in \Omega(\mathcal{M})$
3.  $d(d\omega) = 0 \quad \forall \omega \in \Omega(\mathcal{M})$

Schränkt man sich auf den  $\mathbb{R}^3$  ein, fallen interessante Eigenschaften auf:

- **Gradient**  $d : \Omega^0(\mathbb{R}^3) \rightarrow \Omega^1(\mathbb{R}^3)$
- **Rotation**  $d : \Omega^1(\mathbb{R}^3) \rightarrow \Omega^2(\mathbb{R}^3)$
- **Divergenz**  $d : \Omega^2(\mathbb{R}^3) \rightarrow \Omega^3(\mathbb{R}^3)$

Die Rotation ist also nichts anderes als die äußere Ableitung angewandt auf eine 1-Form im  $\mathbb{R}^3$ .

## 2.2 homogene Maxwell-Gleichungen

Wir wollen zunächst einmal die beiden homogenen Maxwell-Gleichungen umformulieren.

Dazu nehmen wir einen allgemeinen Standpunkt ein und müssen das elektrische und das magnetische Feld als Vektorfelder in der 4D-Raumzeit auffassen. Wir arbeiten nachfolgend in der Minkowski-Raumzeit in den Standard-Raumzeit-Koordinaten  $x^\mu$ . Die Metrik sei:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Zunächst einmal bemerken wir, dass sich die äußere Ableitung einer 1-Form in einen Raumanteil und einen Zeitanteil aufteilen lässt:

$$\begin{aligned} d\omega &= \partial_0 \omega_I dx^0 \wedge dx^I + \partial_i \omega_I dx^i \wedge dx^I \\ &= dt \wedge \partial_t \omega + d_s \omega \end{aligned} \quad (21)$$

wobei  $d_s$  die auf den Raumanteil eingeschränkte äußere Ableitung ist und  $I$  ein Multi-Index.

Betrachtet man die homogenen Maxwell-Gleichungen und die Eigenschaften der äußeren Ableitung, fällt auf, dass es sinnvoll erscheint, das E-Feld als 1-Form sowie das B-Feld als 2-Form zu schreiben:

$$E = E_x dx + E_y dy + E_z dz \quad (22)$$

$$B = B_x dy \wedge dz + B_y dz \wedge dx + B_z dx \wedge dy \quad (23)$$

Damit lassen sich (15) und (16) schreiben als:

$$d_s B = 0 \quad (24)$$

$$\partial_t B + d_s E = 0 \quad (25)$$

Dies sieht man auch, wenn man das  $E$ - und  $B$ -Feld zur 2-Form  $F$  auf dem  $\mathbb{R}^4$  zusammenfasst:

$$F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu, \quad (26)$$

wobei  $F_{\mu\nu}$  der gewohnte Feldstärketensor ist und in Komponentenschreibweise als

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (27)$$

gegeben war.

Man sieht also, dass man

$$F = (E_1 dx^1 + E_2 dx^2 + E_3 dx^3) \wedge dx^0 + (B_3 dx^1 \wedge dx^2 + B_2 dx^3 \wedge dx^1 + B_1 dx^2 \wedge dx^3) \quad (28)$$

schreiben kann. Damit wird das  $E$ -Feld ganz natürlich zur 1-Form und das  $B$ -Feld zur 2-Form, wenn man die beiden Felder auf die 4-dimensionalen Raumzeit verallgemeinert.

Wir definieren also die 2-Form des elektromagnetischen Feldes  $F$ :

$$F = E \wedge dt + B \quad (29)$$

Wir bemerken, dass bei der äußeren Ableitung von  $F$  die linken Seiten der Gleichungen (24) und (25) auftreten:

$$\begin{aligned} dF &= dE \wedge dt + dB \\ &= (d_s E + dt \wedge \partial_t E) \wedge dt + d_s B + dt \wedge \partial_t B \\ &= (d_s E + \partial_t B) \wedge dt + d_s B \end{aligned} \quad (30)$$



Da  $dF$  nur dann Null ist, wenn die beiden Summanden unabhängig Null sind, lassen sich die beiden homogenen Maxwell-Gleichungen kurz zu:

$$dF = 0 \quad (31)$$

zusammenfassen.

Da die äußere Ableitung koordinatenunabhängig ist, gilt  $dF = 0$  auf jeder beliebigen Mannigfaltigkeit und hängt nicht von der Wahl der Koordinaten ab.

Die 2-Form  $F$  ist demnach geschlossen und besitzt nach dem **Poincaré-Lemma** ein Potential:

$$F = dA \quad (32)$$

wobei  $A$  eine 1-Form ist.

Damit gilt automatisch  $dF = d(dA) = 0$ . Außerdem sehen wir, dass wir eine Eichfreiheit haben:

$$A \rightarrow A + d\lambda \quad \lambda \in C^\infty(\mathbb{R}^4) \quad (33)$$

. Mit Hilfe dieses Potentials lassen sich die Felder wie folgt darstellen:

$$E = -\partial_t A \quad (34)$$

$$B = d_s A. \quad (35)$$

Betrachten wir nun noch die beiden inhomogenen Gleichungen (17?) und (18?), die jeweils noch Quellterme enthalten. Es fällt auf, dass  $E$  und  $B$  gewissermaßen ihre Rollen tauschen. Dieses Phänomen wird als **elektromagnetische Dualität** bezeichnet.

Auf Grundlage dieser Dualität, welche durch die Transformationen der Felder gemäß

$$E \rightarrow B \quad \text{sowie} \quad B \rightarrow -E$$

die Invarianz der Maxwell-Gleichungen im Vakuum charakterisiert, wollen wir nun eine neue Methode einführen, die uns diese Transformationen ermöglicht.

Es soll uns möglich sein eine 1-Form in eine 2-Form zu überführen und umgekehrt. Im  $\mathbb{R}^3$  kann diese Transformation mit dem **Hodge-Stern-Operator** realisiert werden.

### 2.3 Hodge-Stern-Operator

Der Hodge-Stern-Operator ist eine der drei Standard-Operationen auf dem Raum der Differentialformen.

Man spricht beim Kreuzprodukt von einer Rotation von Pseudovektoren, was nun anhand der Definition des Operators veranschaulicht werden soll. Wir werden sehen, dass die "Rechte-Hand-Regel" und die Metrik eingehen.

Ganz allgemein sei  $V$  ein  $n$ -dimensionaler Vektorraum mit innerem Produkt  $g$ , induziert von der inversen Metrik, und  $\{\sigma^1, \dots, \sigma^n\}$  die geordnete Orthonormalbasis des Vektorraumes, sodass:

$$g^{ij} := g(\sigma^i, \sigma^j) = \pm \delta^{ij}.$$

Der Hodge-Stern-Operator ist abstrakt definiert als die lineare Abbildung:

$$\star : \Lambda^p V \rightarrow \Lambda^{n-p} V$$

mit der Eigenschaft

$$\lambda \wedge \theta = (-1)^s g(\theta, \star \lambda) \omega \quad (36)$$

wobei  $\omega = \sigma^1 \wedge \dots \wedge \sigma^n \in \Lambda^n V$ ,  $\lambda \in \Lambda^p V$  und  $\theta \in \Lambda^{n-p} V$ . Dabei ist:

$$g(\omega, \omega) = \prod_{k=1}^n g(\sigma^k, \sigma^k) = (-1)^s \quad (37)$$

mit der Signatur  $(s, n - s)$ , wobei  $s$  die Anzahl an Minuszeichen in der inversen Metrik ist.

Wir wollen mit einer etwas anschaulicheren, praktischeren Definition arbeiten, welche sich durch kleinere Umformungen aus der abstrakten Definition ergibt. Da der  $\star$ -Operator linear ist, reicht es aus Basisvektoren zu betrachten.

Sei  $\lambda$  der Basis-p-Vektor mit:

$$\lambda = \sigma^1 \wedge \sigma^2 \wedge \dots \wedge \sigma^p = \sigma^I \in \Lambda^p V \quad (38)$$

Einsetzen eines zweiten Basis-Vektors  $\sigma^J \in \Lambda^{n-p}$  in die abstrakte Definition liefert:

$$\lambda \wedge \sigma^J = (-1)^s g(\sigma^J, \star \lambda) \omega \quad (39)$$

Daraus folgt direkt  $J = (p + 1, \dots, n)$  und

$$\star \lambda = c \cdot \sigma^{p+1} \wedge \dots \wedge \sigma^n. \quad (40)$$

Aus der Tatsache, dass  $\lambda \wedge \sigma^J = \omega$  erhalten wir:

$$1 = (-1)^s g(\sigma^J, c \cdot \sigma^J) \quad (41)$$

Oder Analog:

$$c = \frac{(-1)^s}{g(\sigma^J, \sigma^J)} = \frac{g(\omega, \omega)}{g(\sigma^J, \sigma^J)} = g(\lambda, \lambda) \quad (42)$$

Alles zusammen führt zur praktischen Definition des Operators als:

### Hodge-Stern-Operator

$$\star(\sigma^1 \wedge \sigma^2 \wedge \dots \wedge \sigma^p) = g(\sigma^1, \sigma^1) \dots g(\sigma^p, \sigma^p) \sigma^{p+1} \wedge \dots \wedge \sigma^n \quad (43)$$

Wörtlich gesprochen liefert uns der Hodge-Stern-Operator die duale  $(n - p)$ -Form zur  $p$ -Form durch "wedgen" der übrigen Basis-1-Formen, die nicht in der  $p$ -Form auftreten, unter Berücksichtigung der Geometrie des Raumes.

Für die zweifache Anwendung des Operators gilt: (ohne Herleitung)

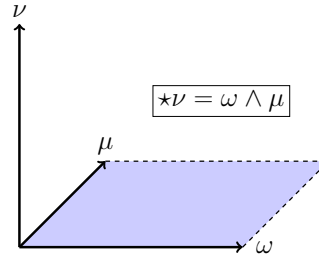
$$\star\star = \star^2 = (-1)^{p(n-p)+s} \quad (44)$$

Für unsere Anwendung wählen wir als Vektorraum  $V$  den Raum der 1-Formen  $\Omega^1(\mathcal{M})$  und ersetzen  $\Lambda^n V \rightarrow \Omega^n(\mathcal{M})$ . Die geordnete Orthonormalbasis ist nun also  $\{dx^1, \dots, dx^n\}$ .

Eine alternative Definition des Operators, mit der wir ebenfalls noch arbeiten wollen, lautet (nun angewandt auf Differentialformen):

$$\omega \wedge \star\mu = \langle \omega, \mu \rangle \text{vol}, \quad \forall \omega, \mu \in \Omega^p(\mathcal{M}) \quad (45)$$

Dabei ist  $\text{vol} = \sqrt{|\det g_{\mu\nu}|} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$  die Volumen-Form,  $g_{\mu\nu}$  die Metrik und  $\langle \omega, \mu \rangle = g^{\alpha\beta} \omega_\alpha \mu_\beta$  das innere Produkt.



**Abbildung 1:** Grafische Darstellung der Funktion des Hodge-Stern-Operators

Beschränken wir den Operator auf den Raum  $\mathbb{R}^3$  mit dem Standardskalarprodukt verwenden wir nachfolgend die Notation  $\star_s$ .

### 2.3.1 Anwendungsbeispiel: 4D-Minkowski-Raumzeit

Wir betrachten die triviale 4-Form:

$$\omega = dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz \quad (46)$$

Wenden wir nun den  $\star$ -Operator an, folgt zum Beispiel:

$$\begin{aligned} \star 1 &= \omega \\ \star \omega &= -1 \\ \star dt &= -dx \wedge dy \wedge dz \\ \star dx \wedge dy \wedge dz &= -dt \\ \star^2 \omega &= (-1)^{4(4-4)+1} \omega = -\omega \\ &\dots \end{aligned}$$

Dies wollen wir nutzen, um nun die inhomogenen Maxwell-Gleichungen neu zu formulieren.

## 2.4 inhomogene Maxwell-Gleichungen

Bei den inhomogenen Maxwell-Gleichungen tauschen nicht nur die Rollen von  $E$ - und  $B$ -Feld, es treten zusätzlich Quellterme in Form der Ladungsdichte  $\rho$  und der Stromdichte  $\vec{j}$  auf.

Um diese als Differentialformen zu betrachten, nutzen wir, dass die Metrik uns erlaubt Vektorfelder in 1-Formen umzuwandeln und umgekehrt. Wir sehen also:

$$j = j_1 dx^1 + j_2 dx^2 + j_3 dx^3. \quad (47)$$

Analog kann man das 4-Vektorfeld  $j^\mu$  mit der Minkowski-Metrik in eine Differentialform umwandeln:

$$J = j - \rho dt. \quad (48)$$

Nun können wir die inhomogenen Maxwell-Gleichungen in der Sprache der Differentialformen schreiben als:

$$\star_s d_s \star_s E = \rho \quad (49)$$

$$\star_s d_s \star_s B - \partial_t E = j \quad (50)$$

Diese beiden Gleichungen lassen sich wieder zu einer einzigen Gleichung zusammenfassen, wenn man bemerkt, dass:

$$\star F = \star_s E - \star_s B \wedge dt \quad (51)$$

$$d \star F = \star_s \partial_t E \wedge dt + d_s \star_s E - d_s \star_s B \wedge dt \quad (52)$$

$$\star d \star F = -\partial_t E - \star_s d_s \star_s E \wedge dt + \star_s d_s \star_s B \quad (53)$$

Setzt man  $\star d \star F = J$  und vergleicht Terme gleichen Grades so erhält man das gewünschte Ergebnis: Gleichungen (17) und (18) wurden zusammengeführt! Also lassen sich die inhomogenen Maxwell-Gleichungen in Differentialformen schreiben als  $\star d \star F = J$  oder äquivalent durch nochmalige Anwendung des Hodge-Stern-Operators auf beiden Seiten:

$$d \star F = \star J \quad (54)$$

Insgesamt lässt sich also die gesamte Elektrodynamik auf die beiden gefundenen, äußerst eleganten Gleichungen zurückführen.

### Maxwell-Gleichungen

$$dF = 0$$

$$d \star F = \star J$$

## 2.5 Lagrangian in Differentialformen

Um den Vortrag abzurunden, kommen wir wieder kurz auf die Lagrange-Beschreibung zurück und zeigen, wie man die Maxwell-Gleichungen in Differentialformen durch einen Lagrangian herleitet. Dazu muss man nun auch den Lagrangian in Differentialformen ausdrücken.

Derartige Ausdrücke werden später auch in der Yang-Mills-Theorie und der Chern-Simons-Theorie auftreten. Ihr Vorteil ist, dass sie automatisch alle geforderten Punkte in Kapitel 1 erfüllen, insbesondere die Koordinatenunabhängigkeit.

Die Lagrangians setzt man meistens axiomatisch an und zeigt dann, dass sie die gewünschten Gleichungen liefern. Für das elektromagnetische Feld gilt:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}F \wedge \star F + A \wedge \star J, \quad (55)$$

wobei  $F$ ,  $A$  und  $J$  gemäß den obigen Definitionen gegeben sind. Es gelte  $F = dA$ .

Das zugehörige Wirkungsfunktional sei  $S[A] = \int \mathcal{L}$  und das gestörte Eichpotential sei  $A + \varepsilon \cdot \delta A$ .

Dann folgt aus der Variation der Wirkung:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\varepsilon} S[A + \varepsilon \cdot \delta A] \right|_{\varepsilon=0} &= \frac{d}{d\varepsilon} \left( \int -\frac{1}{2} d(A + \varepsilon \cdot \delta A) \wedge \star d(A + \varepsilon \cdot \delta A) + (A + \varepsilon \cdot \delta A) \wedge \star J \right) \Big|_{\varepsilon=0} \\ &= \int -\frac{1}{2} \left( \underbrace{dA \wedge \star d\delta A}_{=\langle dA, d\delta A \rangle \text{vol}} + \underbrace{d\delta A \wedge \star dA}_{=\langle d\delta A, dA \rangle \text{vol}} \right) + \delta A \wedge \star J \\ &= \int -d\delta A \wedge \star dA + \delta A \wedge \star J \\ &= \int -\delta A \wedge d \star dA + \delta A \wedge \star J \\ &= \int \delta A \wedge (-d \star dA + \star J) \end{aligned}$$

Da die Variation bei  $\varepsilon = 0$  für beliebige  $\delta A$  verschwinden muss, gilt:

$$\begin{aligned} d \star dA &= \star J \\ d \star F &= \star J \end{aligned}$$

was wir bereits zuvor hergeleitet hatten.

## Literaturangaben

- [1] John Baez und Javier P Muniain. *Gauge Fields, Knots and Gravity*. Singapore: World Scientific Publishing Company, 1994.
- [2] Tevian Dray. *The Hodge Dual Operator*. Department of Mathematics, Oregon State University, Corvallis, OR 97331, USA, 1999.
- [3] Prof. A. Hebecker. *Allgemeine Relativitätstheorie - Vorlesungsskript*. 2007.
- [4] Claude Itzykson und Jean-Bernard Zuber. *Quantum field theory*. Mineola, N.Y.: Dover Publications, 2005.
- [5] John David Jackson. *Classical electrodynamics*. New York ; Weinheim [u.a.]: Wiley, 1999.
- [6] Charles W. Misner, Kip S. Thorne und John Archibald Wheeler. *Gravitation*. San Francisco, Calif.: Freeman, 1973.
- [7] Mikio Nakahara. *Geometry, topology and physics*. New York [u.a.]: Taylor & Francis, 2003.
- [8] Karl Warnick und Peter Russer. „Differential Forms and Electromagnetic Field Theory“. In: *Progress In Electromagnetics Research*, Vol. 148, 83–112 (2014).