Lagrangedichte für eine Feldtheorie

Erweiterung auf überabzählbar viele Freiheitsgrade durch Lagrangedichte $\mathcal{L}(t, \vec{x}, j^{(k)}, \varphi^{(i)}, \partial_\mu \varphi^{(i)})$.

Lagrangefunktion wäre $L = \iiint d^3x \; \mathcal{L}$.

Das Wirkungsintegral ist nun $I = \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint d^3x \; \mathcal{L} = \int d^4x \; \mathcal{L}$.

Die Bewegungsgleichungen folgen aus dem Hamiltonschen Prinzip $\to$ Variation der Wirkung $\overset{!}{=} 0$.

Dazu nehmen wir an, dass die Variationen der Felder auf den Hyperflächen $t = t_1$ und $t = t_2$ verschwinden

$$\Rightarrow \quad 0 = \delta I = \int d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^{(i)}} \delta \varphi^{(i)} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi^{(i)})} \delta(\partial_\mu \varphi^{(i)}) \right)$$

$$= \int d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^{(i)}} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi^{(i)})} \right) \delta \varphi^{(i)}$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^{(i)}} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi^{(i)})} \qquad (1)$$

Lagrangedichte für das Maxwell-Feld

Wir wollen $\mathcal{L}$ so wählen, dass sie ein Skalar ist, von den Feldern und deren Ableitungen abhängt, Strom/Ladung als Quelle hat und die Maxwell-Gleichungen als Bewegungsgleichungen liefert:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \quad \Leftrightarrow \quad \Box A^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) = j^\nu \qquad (2)$$

Da wir als BWGLen Differentialgleichungen 2. Ordnung erwarten, bietet es sich an das 4er-Feld A^μ anzusetzen: $\mathcal{L} = a \cdot \partial_\mu A^\nu \partial^\mu A_\nu + b \cdot \partial_\mu A^\nu \partial_\nu A^\mu + c \cdot (\partial_\mu A^\mu)^2 + d \cdot A_\mu A^\mu + e \cdot A_\mu j^\mu$.

Setzt man dies in (1) ein und wählt die Koeffizienten so, dass (2) herauskommt, findet man:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j_\mu A^\mu + \frac{c}{2} \underbrace{\left[(\partial_\mu A^\mu)^2 - \partial_\mu A^\nu \partial_\nu A^\mu \right]}_{= \partial_\mu \left(A^\mu \partial_\varrho A^\varrho - A_\nu \partial^\nu A^\mu \right)}$$

Da der letzte Term sich als Divergenz schreiben lässt, ist es nur ein Randterm und verschwindet bei der Variation $\Rightarrow$ Ändert nichts an Bewegungsgleichungen!

Also: $\quad \mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j_\mu A^\mu$. $\qquad (3)$

Sie hat die richtige Einheit [Energie/Volumen] und der erste Term entspricht einer „kinetischen" Energie, der zweite Term einer „potentiellen" Energie.

Eichtransformationen an der Lagrangedichte

Die Eichtransformation $A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \phi$ ändert die Lagrangedichte im Allgemeinen: $\mathcal{L}'(A'_\tau, \partial_\sigma A'_\tau) = \mathcal{L}(A_\tau, \partial_\sigma A_\tau) + j^\mu \partial_\mu \phi$

Da aber die Kontinuitätsgleichung $\partial_\mu j^\mu = 0$ gilt, kann man $j^\mu \partial_\mu \phi$ durch $\partial_\mu (j^\mu \phi)$ ersetzen!

Dies ist aber eine Divergenz und ändert nichts an den Bewegungsgleichungen.

Also: $\quad$ Ladungserhaltung $\leftrightarrow$ Eichinvarianz

Besonders interessant sind Translationen $x' = x + \varepsilon a$: $\varphi^{(i)}(x+\varepsilon a) = \varphi^{(i)}(x) + \overbrace{\varepsilon \cdot a^\mu \partial_\mu \varphi^{(i)}(x)}^{= \delta\varphi^{(i)}}$

Es wurde angenommen, dass die Ortsabhängigkeit nur in den Feldern steckt !

$$\partial_\mu \varphi^{(i)}(x+\varepsilon a) = \partial_\mu \varphi^{(i)}(x) + \underbrace{\varepsilon \cdot \left(a^\nu \partial_\nu \partial_\mu \varphi^{(i)} + \partial_\mu a^\nu \partial_\nu \varphi^{(i)} \right)}_{= \delta(\partial_\mu \varphi^{(i)})} .$$

$$\Rightarrow \quad \delta I = \int d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^{(i)}} \varepsilon a^\mu \partial_\mu \varphi^{(i)} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi^{(i)})} \varepsilon \cdot \left(a^\nu \partial_\nu \partial_\mu \varphi^{(i)} + \partial_\mu a^\nu \partial_\nu \varphi^{(i)} \right) \right)$$

$$= \int d^4x \left(\partial_\nu \mathcal{L} - \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi^{(i)})} \partial_\nu \varphi^{(i)} \right] \right) \varepsilon a^\nu$$

$$\Rightarrow \quad \partial_\mu \underbrace{\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi^{(i)})} \partial^\nu \varphi^{(i)} - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \right]}_{= T^{\mu\nu} \quad \text{(Energie-Impuls-Tensor)}} = 0 . \qquad (4)$$

Für das elektromagnetische Feld $\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j_\mu A^\mu$ folgt : $T^{\mu\nu} = - F^{\mu\sigma} \partial^\nu A_\sigma + g^{\mu\nu} \left(\frac{1}{4} F_{\sigma\tau} F^{\sigma\tau} + j_\rho A^\rho \right)$

In dieser Form ist er aber nicht eichinvariant, denn unter einer Transformation $A^\mu \to A^\mu + \partial^\mu \phi$ folgt :

$$T^{\mu\nu} \longrightarrow T^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} j_\tau \partial^\tau \phi - F^{\mu\sigma} \partial^\nu \partial_\sigma \phi = T^{\mu\nu} + \partial_\sigma \left(g^{\mu\nu} j^\sigma \phi - F^{\mu\sigma} \partial^\nu \phi \right) - j^\mu \partial^\nu \phi .$$

Wir wollen einen Ausdruck für $T^{\mu\nu}$ finden, der eichinvariant und symmetrisch ist :

Dazu bemerken wir, dass zur Lagrangedichte eine Divergenz hinzugefügt werden kann ohne die BWGLen zu ändern. Also hat der Energie-Impuls-Tensor eine gewisse Beliebigkeit, die wir ausnutzen können.

Der „Energiestrom" bleibt unverändert unter einer Transformation $T^{\mu\nu} \to T^{\mu\nu} + \Delta T^{\mu\nu}$ mit

(i) $\partial_\mu \Delta T^{\mu\nu} = 0$ (erfüllt Erhaltungssatz)

(ii) $\int d^3x \, \Delta T^{00} = 0$ (trägt nicht zur Gesamtenergie bei) .

Obiger Zusatzterm nach der Eichung motiviert $\Delta T^{\mu\nu} = \partial_\sigma \left(F^{\mu\sigma} A^\nu \right)$ und erfüllt die Bedingungen.

Setzen wir also $T^{\mu\nu} = - F^{\mu\sigma} \partial^\nu A_\sigma + g^{\mu\nu} \left(\frac{1}{4} F_{\sigma\tau} F^{\sigma\tau} + j_\tau A^\tau \right) + \partial_\sigma \left(F^{\mu\sigma} A^\nu \right)$

und schreiben mit der Maxwell-Gleichung $\partial_\sigma F^{\mu\sigma} = - j^\mu$ den neuen Ausdruck :

$$T^{\mu\nu} = F^{\mu\rho} F_\rho{}^\nu + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\sigma\tau} F^{\sigma\tau} + g^{\mu\nu} j_\sigma A^\sigma - j^\mu A^\nu \qquad (5)$$

Damit gilt $\partial_\mu T^{\mu\nu} = A_\rho \partial^\nu j^\rho$ bzw. für den rein elektromagnetischen Anteil $T_0^{\mu\nu} = F^{\mu\sigma} F_\sigma{}^\nu + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^2$ gilt $\partial_\mu T_0^{\mu\nu} = j_\rho F^{\rho\nu}$. In Abwesenheit von äußeren Quellen ist der Energie-Impuls-Tensor eichinvariant, erhalten, symmetrisch und spurfrei.