第1部分 基础

T1.判断并证明下述命题（给出证明或反例）：

（1）存在集合 A, B 和 C，使得 $A\in B$，$B\in C$ 且 $A\notin C$;

如，A={a}, B={{a},b}, C={{{a},b},c}.

（2）如果 $A\in\{\{b\}\}$，那么 $b\in A$;

证明：由于 A 为集合{{b}}的元素，而集合{{b}}中只有一个元素{b}，所以 A={b}；又因为 $b\in\{b\}$，所以 $b\in A$.

（3）若 A, B 为集合, 有 $A\subseteq B$ 和 $A\in B$ 能同时成立;

如，A={a}，B={a，{a}}.

（4）对任意集合 A 和 B, 有 $P(A)\cap P(B)=P(A\cap B)$；

证明：$\forall S\in P(A)\cap P(B)$，有 $S\in P(A)$且 $S\in P(B)$，所以 $S\subseteq A$ 且 $S\subseteq B$.从而 $S\subseteq A\cap B$，故 $S\in P(A\cap B)$.即 $P(A)\cap P(B)\subseteq P(A\cap B)$.

$\forall S\in P(A\cap B)$，有 $S\subseteq A\cap B$，所以 $S\subseteq A$ 且 $S\subseteq B$.从而 $S\in P(A)$且 $S\in P(B)$，故 $S\in P(A)\cap P(B)$.即 $P(A\cap B)\subseteq P(A)\cap P(B)$.

故 $P(A)\cap P(B)=P(A\cap B)$.

（5）对任意集合 A 和 B，有 $P(A)\cup P(B)=P(A\cup B)$；

仅当 $A\subseteq B$ 或 $B\subseteq A$ 时, 等式成立. 反例：令 A={1,2}，B={3}.

（6）若 $A\cup B=A\cup C$，则 $B=C$；

反例：令 A={1,2}，B={1}，C={2}.

（7）若 $A\cap B=A\cap C$，则 $B=C$.

反例：令 $A=\varnothing$，B={1}，C={2}.

（8）对任意集合 A，B，C，有 $(A\cup C)-(B\cup C)\subseteq A-B$.

证明：$(A\cup C)-(B\cup C)=(A\cup C)\cap(B\cup C)'=(A\cup C)\cap(B'\cap C')=(A\cap B'\cap C')\cup(C\cap B'\cap C')$

$=A\cap B'\cap C'\subseteq A\cap B'=A-B$.

（9）对任意集合 A，B 和 C，等式 $(A\cap B)\cup C=A\cap(B\cup C)$当且仅当 $C\subseteq A$.

证明：必要性 $C\subseteq(A\cap B)\cup C=A\cap(B\cup C)\subseteq A$ 即 $C\subseteq A$;

充分性 若 $C\subseteq A$，则 $A\cup C=A$，于是, $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)=A\cap(B\cup C)$.

（10）$A\cap(B\cup A)=A\cap B$.

反例：A = {a}, B = {b}

（11）$A-(B\cap A)=A-B$.

证明：$A-(B\cap A)=A\cap(B\cap A)'=A\cap(B'\cup A')=(A\cap B')\cup(A\cap A')$

$=(A\cap B')\cup\Phi=A\cap B'=A-B$

（12）$A\cap(B\cup C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

反例：A = {a}, B = {b}, C = {b}

（13）$A\oplus A=A$.

反例：A={a}, $A\oplus A=\Phi$

（14）$A\cap(B-A)=A\cap B$.

反例：A = {a}, B = {a}

（15）$A\cup(B-A)=A\cup B$.

证明：$A \cup (B - A) = A \cup (B \cap A') = (A \cup B) \cap (A \cup A') = A \cup B$

第2部分 理论

T1. 设 A,B 为集合，|A|=n,|B|=m,

(1) 问 A 到 B 的二元关系共多少个?

(2) 问 A 上二元关系共多少个?

(3) A 上有多少种不同的自反的（反自反的） 二元关系?

(4) A 上有多少种不同的对称的二元关系?

(5) A 上有多少种不同的反对称的二元关系?

(1) $2^{n\times m}$ (2) $2^{n\times n}$ (3) 2^{n^2-n} (4) $2^{(n^2+n)/2}$ (5) $2^{n}\cdot 3^{(n^2-n)/2}$

(3) (x, x)之外的元素(n^2−n 个)任选;

(4) (x, y), x， y 相异或同：前者选(x, y)与（y， x）, 后者选或不选;

(5) (x, y), x， y 相异或同，前者选(x, y)与（y， x）之一， 或均不选，后者选或不选.

T2. 设 R_1 和 R_2 是 A 上任意关系, B⊆A，判断并证明下述命题(**下述所**涉及的关系均为A上关系):

(1) R_1 和 R_2 自反⇒ $R_1 \circ R_2$ 自反;

(2) R_1 和 R_2 反自反⇒$R_1 \circ R_2$ 反自反;

(3) R_1 和 R_2 对称⇒$R_1 \circ R_2$ 对称;

(4) R_1 和 R_2 传递⇒$R_1 \circ R_2$ 传递;

(5) R 自反⇒$R \cap B\times B$ 自反;

(6) R 对称⇒$R \cap B\times B$ 对称;

(7) R 传递⇒$R \cap B\times B$ 传递;

(8) R 传递且自反⇒R^2=R。

(1) 正确.

(2) 反例：A={a,b},R_1={(a,b)},R_2={(b,a)}.

(3) 反例：A={a,b,c},R_1={(a,b),(b,a)},R_2={(b,c),(c,b)}.

(4) 反例：A={a,b,c},R_1={(a,b),(b,c),(a,c)},R_2={(b,c),(c,a),(b,a)}.

(5) 当 A≠B 时，$R \cap B\times B$ 非自反.

(6) 正确.

(7) 正确.

(8) 正确. 设 xR^2y，则存在 z 使得 xRz, zRy，又 R 传递，所以有 xRy, 因此 $R^2 \subseteq R$；设 xRy. 因为 R 自反，所以有 yRy，于是有 xR^2y，因此 $R \subseteq R^2$. 综上 R^2=R.

T3. 设 A={1,2,3,4,5}，A 上关系 R={(1,2),(3,4),(2,2)}, S={(4,2),(2,5),(3,1),(1,3)}。基于关系矩阵求解 RoS。

由题有：$M_R=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$，$M_S=\begin{bmatrix}0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$，

则 $M_{R\circ S}=M_R*M_S=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

RoS={(1,5),(2,5),(3,2)}.

T4. Suppose we consider the relations "less（小于）", "lessOrEqual（小于等于）", "greater（大于）", "equal（等于）", and "notEqual（不等于）" over the set R of real numbers. Please show that what we get if we compose some of these relations as follows:

greater o less = R × R

equal o notEqual =notEqual

notEqual o notEqual=R × R

T5. 设R是集合X上的二元关系，对任意x_i，x_j，x_k∈X，每当$(x_i,x_j)\in R \wedge (x_j,x_k)\in R$时，必有$(x_k,x_i)\in R$，则称R是循环的. 试证：R是等价关系，当且仅当R是自反和循环的.

设 R 为价关系，故 R 是自反、对称、传递的。若 xRy，yRz，由 R 传递有 xRz，由 R 对称有 zRx，所以 R 是循环的。故 R 为等价关系时 R 是自反的和循环的；

设 R 是自反的和循环的，若 xRy，由 R 自反有 yRy，从而由 R 循环有 yRx，故 R 是对称的。若 xRy，yRz，由 R 循环有 zRx，从而由 R 对称有 xRz，因此 R 是传递的。故 R 是自反的和循环的时 R 为等价关系.

T6. 假设给定了正整数的集合A，在A上定义二元关系R如下：((x,y),(u,v))∈R，当且仅当xv=yu，证明R是一个等价关系.

(1) 自反性：∀(x,y)∈A，因为 xy=yx，所以((x,y),(x,y))∈R，因此 R 是自反的；

(2) 对称性：∀(x,y)，(u,v)∈A，若((x,y),(u,v))∈R⇒xv=yu⇒uy=vx⇒((u,v),(x,y)∈R，因此 R 是对称的；

(3) 传递性：∀(x,y)，(u,v)，(s,t)∈A，

若((x,y),(u,v))∈R∧((u,v),(s,t))∈R⇒xv=yu∧ut=vs⇒xvut=yuvs⇒xt=ys⇒((x,y),(s,t))∈R，因此 R 是传递的.

综上，R 是一个等价关系.

T7. 令C = {a＋bi| a,b为实数,a≠0} ，定义C上关系R：(a＋bi)R(c＋di)当且仅当ac＞0，证明R为等价关系.

对任意 s=(a＋bi)∈C，a≠0，有 a·a＞0，则(a＋bi)R(a＋bi)，所以 R 是自反的；

若(a＋bi)R(c＋di)，则有 ac＞0，所以 ca＞0，故(c＋di)R(a＋bi)，R 是对称的；

若(a＋bi)R(c＋di)，(c＋di)R(e＋fi)，则 ac＞0，ce＞0，因此 ae＞0，所以 (a＋bi)R(e＋fi)，故 R 是传递的.

因此 R 为等价关系.

T8. 设{A_1，A_2，…，A_k}是集合A的一个划分，我们定义A上的一个二元关系R，使(a,b)∈R当且仅当a和b在这个划分的同一块中。证明R是等价关系.

(1) 设对任意 a∈A，则必存在 A_i，使 a∈A_i，因 a 与 a 必可看作在同一块中，故有(a,a)∈R。即 R 是自反的.

(2) 设 a,b∈A，若有(a,b)∈R，则 a 与 b 必在同一块，故 b 与 a 亦在同一块，(b,a)∈R，即 R 是对称的.

(3) 对任意 a,b,c∈A，(a,b)∈R∧(b,c)∈R，a 与 b 必在同一块，b 与 c 必在同一块，从而 a, c 在同一块，于是(a,c)∈R，所以，R 是传递的.

综上，R 是一个等价关系.

T9. 设A = {1，2，3，4，5，6}，A有分划

π_1 = {{1，2，3}，{4，5，6}}

π_2 = {{1，2}，{3，4}，{5，6}}

求π_1，π_2所对应的等价关系.

π_1所对应的等价关系 R_1={(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3),(4,4),(4,5),(4,6),(5,4),(5,5),(5,6),(6,4),(6,5),(6,6)}；

π_2所对应的等价关系 R_2={(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(3,4),(4,3),(4,4), (5,5),(5,6),(6,5),(6,6)}；

T10. 设R，S为A上的两个等价关系，且$R \subseteq S$.定义A/R上的关系R/S：

$$([x],[y])\in R/S \text{当且仅当} (x,y)\in S$$

证明：R/S为A/R上的等价关系.

S 为 A 上的等价关系，那么对任意 x 有$(x,x)\in S$，所以$([x],[x])\in R/S$，R/S 是自反的；

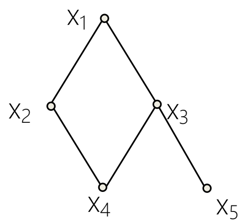
若$([x],[y])\in R/S$，则$(x,y)\in S$，由 S 对称知$(y,x)\in S$，所以$([y],[x])\in R/S$，R/S 是对称的；

若$([x],[y])\in R/S$，$([y],[z])\in R/S$，则$(x,y)\in S$，$(y,z)\in S$，由 S 传递知$(x,z)\in S$，所以$([x],[z])\in R/S$，R/S 是传递的.

综上，R/S 为 A/R 上的等价关系.

T11. 设集合$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$上的偏序关系如下图所示,求X的最大元、最小元、极大元、极小元.

求子集$X_1=\{x_2,x_3,x_4\}$、$X_2=\{x_3,x_4,x_5\}$、$X_3=\{x_1,x_3,x_5\}$的上界、下界、上确界、下确界、最大元、最小元、极大元和极小元.



集合	最大元	最小元	极大元	极小元	上界	下界	上确界	下确界
X	x_1	无	x_1	x_4、x_5	x_1	无	x_1	无
X_1	无	x_4	x_2、x_3	x_4	x_1	x_4	x_1	x_4
X_2	x_3	无	x_3	x_4、x_5	x_1、x_3	无	x_3	无
X_3	x_1	x_5	x_1	x_5	x_1	x_5	x_1	x_5

T12.设R是集合S上的关系,$S'\subseteq S$, 定义S′上的关系: $R'=R\cap(S'\times S')$，请判断下述命题的真值:

(1)若R在S上是偏序关系，则R′在S′上是偏序关系.

(2)若R在S上是拟序关系，则R′在S′上是拟序关系.

(3)若R在S上是全序关系，则R′在S′上是全序关系.

(4)若R在S上是良序关系，则 R′在S′上是良序关系.

均为真.

第3部分 综合应用(选做)

1 现有一个软件开发需求：基于城市之间的交通可达数据提供一个交通信息查询服务，交通方式可以是通过火车、飞机、汽车或轮船的多种方式的结合或仅其中一种方式. 试用集合、关系语言来描述该系统基础数据，以及一些基本服务：如某两个城市间是否有飞机或火车直达，或通过换乘方式可达.

提示：用 C 表示所有城市的集合，R 表示城市间的可达性，对于任意 2 个城市 C_1，$C_2 \in C$，如果有交通可达，则 $<C_1, C_2> \in R$. 容易证明，R 是等价关系，商集 R/C 的等价类表示该等价类集合中的城市间是相互可达的；求解 R 的传递闭包 t(R)，城市间是否换乘可达可以基于 t(R)查询；对于各种交通工具的班次可以用元组来描述，从而构建关系数据库.

2 在项目安排与工作调度中（如工厂流水线作业、岸桥卸船作业等、软件开发等），某些工作任务与其它某些工作任务存在优先级关系，设计一个好的项目任务的优化调度安排是非常重要的. 试用集合与关系语言描述这类调度问题及其求解方法.

提示：用T表示任务集合，定义T上的偏序关系R: $\{(x,y) | x \leq y$当且仅当x的优先级比y高，$x, y \in T\}$，进而可以利用逐步求解偏序集中极小元的算法设计任务的完成顺序.