第1部分 基础

T1 构造互不同构的所有五结点的树.

T2 一棵树有两个结点度数为 2，一个结点度数为 3，三个结点度数为 4. 问它有几个度数为 1 的结点?

T3 设图 G=（n,m），证明：如果 G 满足如下三个属性中的两个，则 G 就是一棵树，且可以推导出另一个属性：1) G 连通； 2) G 中不存在环； 3) m=n-1.

T4 试证明或否定：连通图 G 的任一边是 G 的某一棵生成树的枝；连通图 G 的任何一条边都是 G 的某一棵生成树的弦.

T5 图 G(n,m)含有 k 个分图，试利用树的性质证明：G 中至少包含 m-n+k 条不同的回路。提示：注意到回路的构成、树的相关数量关系.

T6 设 T_1，T_2 是连通图 G 的生成树，边 e_1 在 T_1 中但不在 T_2 中，证明：存在边 e_2 在 T_2 中但不在 T_1 中，使得$T_2 \cup \{e_1\}-\{e_2\}$与 $T_1 \cup \{e_2\}-\{e_1\}$都是 G 的生成树.

T7 证明：完全二分树 T 的结点数为 n，则 n 为奇数且 T 的叶子结点数t=(n+1)/2

第2部分 理论

T1 一个无向图如果同构于它的补图，则称该图为自补图。

（1）给出所有具有4个结点的自补图；

（2）给出所有具有5个结点的自补图；

（3）证明一个自补图一定有4k或4k+1（k∈N）个结点。

T2 证明：设G是具有n个结点的简单无向图，如果G中每一对结点的度数之和均大于等于n-1，那么G是连通图。

第3部分 综合应用

下述 2 个应用问题，需要首先构建图模型，之后通过判断图的连通性来证明相关结论.

T1 已知有关人员 a，b，c，d，e，f，g 具有如下的语言能力：a 说英语；b 说英语和西班牙语；c 说英语、意大利语和俄语；d 说日语和西班牙语；e 说德语和意大利语；f 说法语、日语和俄语；g 说法语和德语。试问： 上述七人是否任意二人都能交谈(可借助于其余五人组成的译员链)?

T2 某局域网上的 2n 台计算机，如果每一台计算机至少可以与另外 n 台计算机直接传递数据，那么，在这2n 台计算机中任何两台之间都可以传递数据（可能需要通过其它计算机）。

T3 决策树是一种树形结构的机器学习方法，在决策树的树形结构里，每个内部节点表示由一种特征属性引发的判断，每个节点下面的分支结点表示某个判断结果的输出，最后的叶子结点表示一种分类结果。如果某决策树算法求解得到了一棵完全三元决策树且是平衡的，分类结果有 105 个，试问：最好、最坏情况下，利用决策树进行分类分别需要执行多少次判断。