

书面作业3.1

第1部分 基础

T1. 判断并证明下述命题 (给出证明或反例) :

- (1) 存在集合 A, B 和 C, 使得 $A \in B, B \in C$ 且 $A \notin C$;
- (2) 如果 $A \in \{b\}$, 那么 $b \in A$;
- (3) 若 A, B 为集合, 有 $A \subseteq B$ 和 $A \in B$ 能同时成立;
- (4) 对任意集合 A 和 B, 有 $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$;
- (5) 对任意集合 A 和 B, 有 $P(A) \cup P(B) = P(A \cup B)$;
- (6) 若 $A \cup B = A \cup C$, 则 $B = C$;
- (7) 若 $A \cap B = A \cap C$, 则 $B = C$.
- (8) 对任意集合 A, B, C, 有 $(A \cup C) - (B \cup C) \subseteq A - B$.
- (9) 对任意集合 A, B 和 C, 等式 $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$ 当且仅当 $C \subseteq A$.
- (10) $A - (B \cap A) = A - B$.
- (11) $A \cap (B \cup C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
- (12) $A \oplus A = A$.
- (13) $A \cap (B - A) = A \cap B$.
- (14) $A \cup (B - A) = A \cup B$.

第2部分 理论

T1. 设 A, B 为集合, $|A|=n, |B|=m$,

- (1) 问 A 到 B 的二元关系共多少个?
- (2) 问 A 上二元关系共多少个?
- (3) A 上有多少种不同的自反的 (反自反的) 二元关系?
- (4) A 上有多少种不同的对称的二元关系?
- (5) A 上有多少种不同的反对称的二元关系?

T2. 设 R_1 和 R_2 是 A 上任意关系, $B \subseteq A$, 判断并证明下述命题(下述所涉及的关系均为 A 上关系):

- (1) R_1 和 R_2 自反 $\Rightarrow R_1 \circ R_2$ 自反;
- (2) R_1 和 R_2 反自反 $\Rightarrow R_1 \circ R_2$ 反自反;
- (3) R_1 和 R_2 对称 $\Rightarrow R_1 \circ R_2$ 对称;
- (4) R_1 和 R_2 传递 $\Rightarrow R_1 \circ R_2$ 传递;
- (5) R 自反 $\Rightarrow R \cap B \times B$ 自反;
- (6) R 对称 $\Rightarrow R \cap B \times B$ 对称;
- (7) R 传递 $\Rightarrow R \cap B \times B$ 传递;
- (8) R 传递且自反 $\Rightarrow R^2 = R$ 。

T3. 设 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, A 上关系 $R = \{(1, 2), (3, 4), (2, 2)\}$, $S = \{(4, 2), (2, 5), (3, 1), (1, 3)\}$ 。基于关系矩阵求解 $R \circ S$ 。

T4. Suppose we consider the relations "less (小于)", "lessOrEqual (小于等于)", "greater (大于)", "equal (等于)", and "notEqual (不等于)" over the set \mathbb{R} of real numbers. Please show that what we get if we compose some of these relations as follows:

greater o less

equal o notEqual

notEqual o notEqual

T5. 设 R 是集合 X 上的二元关系, 对任意 $x_i, x_j, x_k \in X$, 每当 $(x_i, x_j) \in R \wedge (x_j, x_k) \in R$ 时, 必有 $(x_i, x_k) \in R$, 则称 R 是循环的. 试证: R 是等价关系, 当且仅当 R 是自反和循环的.

T6. 假设给定了正整数的集合 A , 在 A 上定义二元关系 R 如下: $((x, y), (u, v)) \in R$, 当且仅当 $xv = yu$, 证明 R 是一个等价关系.

T7. 令 $C = \{a + bi \mid a, b \text{为实数}, a \neq 0\}$, 定义 C 上关系 R : $(a + bi)R(c + di)$ 当且仅当 $ac > 0$, 证明 R 为等价关系.

T8. 设 $\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ 是集合 A 的一个划分, 我们定义 A 上的一个二元关系 R , 使 $(a, b) \in R$ 当且仅当 a 和 b 在这一个划分的同一块中. 证明 R 是等价关系.

T9. 设 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, A 有分划

$$\pi_1 = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}\}$$

$$\pi_2 = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}\}$$

求 π_1, π_2 所对应的等价关系.

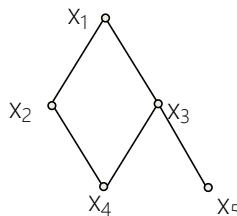
T10. 设 R, S 为 A 上的两个等价关系, 且 $R \subseteq S$. 定义 A/R 上的关系 R/S :

$$([x], [y]) \in R/S \text{当且仅当} (x, y) \in S$$

证明: R/S 为 A/R 上的等价关系.

T11. 设集合 $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ 上的偏序关系如下图所示, 求 X 的最大元、最小元、极大元、极小元.

求子集 $X_1 = \{x_2, x_3, x_4\}$ 、 $X_2 = \{x_3, x_4, x_5\}$ 、 $X_3 = \{x_1, x_3, x_5\}$ 的上界、下界、上确界、下确界、最大元、最小元、极大元和极小元.



T12. 设 R 是集合 S 上的关系, $S' \subseteq S$, 定义 S' 上的关系: $R' = R \cap (S' \times S')$, 请判断下述命题的真值:

(1) 若 R 在 S 上是偏序关系, 则 R' 在 S' 上是偏序关系.

(2) 若 R 在 S 上是拟序关系, 则 R' 在 S' 上是拟序关系.

(3) 若 R 在 S 上是全序关系, 则 R' 在 S' 上是全序关系.

(4) 若 R 在 S 上是良序关系, 则 R' 在 S' 上是良序关系.

第3部分 综合应用(选做)

1 现有一个软件开发需求：基于城市之间的交通可达数据提供一个交通信息查询服务，交通方式可以是通过火车、飞机、汽车或轮船的多种方式的结合或仅其中一种方式。试用集合、关系语言来描述该系统基础数据，以及一些基本服务：如某两个城市间是否有飞机或火车直达，或通过换乘方式可达。

2 在项目安排与工作调度中（如工厂流水线作业、岸桥卸船作业等、软件开发等），某些工作任务与其它某些工作任务存在优先级关系，设计一个好的项目任务的优化调度安排是非常重要的。试用集合与关系语言描述这类调度问题及其求解方法。