书面作业 第11次

第1部分 基础

第2部分 理论

T1 f是群G到群H的同态映射，e_G、e_H为G、H的单位元，请证明：

(1) $f(e_G) = e_H$.

(2) 任意$x \in G$, $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$.

(3) 任意$x \in G$, $f(x^n) = f(x)^n (n \in Z)$.

T2 针对下列具体的群之间同态关系，写出上一题中3个性质的具体形式（（1）（2）小题），或利用相关性质证明结论（第（3）小题）：

(1) f为群$<R;+>$到群$<R_+;*>$的同态映射：$f(x)=a^x$，$a>0$，+，*为一般的加法、乘法.

(2) f为群$<R_+;*>$到群$<R;+>$的同态映射：$f(x)=\log_a x$，$a>0$，+，*为一般的加法、乘法.

(3) 证明：f为群G到群H的同态映射，$x \in G$，若$|x|=n$, 则 $|f(x)|$ 整除n.

T3 证明单位半群G的所有可逆元素的集合H，对于G的运算*，能够构成群.

提示：需要证明结合律成立：即a，$b \in H$，则$(a*b)^{-1} \in H$.

T4 设$<G;o>$是半群，若$\forall$ a,$b \in G$，方程$a*x=b$，$y*a=b$有解，则称$<G;*>$是可解的，

(1) 证明：可解半群G是群；

(2) G是有限半群，G为群当且仅当G中消去律成立.

提示：（1）需要首先利用方程有解以及单位元的性质，将"右单位元"e_1表示出来，再利用另外一个方程进行运算判断此e_1满足左单位元的要求，类似地，证明右单位元e_2也存在，从而二者相等即为单位元；再进一步，证明元素可逆.（2）对于充分性，可利用消去律证明半群G也是可解半群.

T5 设$<H;*>$是群$<G;*>$的子群，令$A=\{x|x \in G, x*H*x^{-1}=H\}$，证明：$<A;*>$是$<G;*>$的一个子群.

T6 设$<H;*>$和$<K;*>$均是群$<G;*>$的子群，设$HK=\{h*k \mid h \in H, k \in K\}$，证明$<HK;\cdot>$是$<G;\cdot>$的子群的充要条件是HK=KH.

T7 设f、g是从群$<A;*>$到群$<B;o>$的同态，$C=\{x|x \in A且f(x)=g(x)\}$, 请证明：$<C;*>$是$<A;*>$的子群.

提示：按照判定定理来证明，并注意利用同态映射以及T1中的有关结论.

T8 证明：（1）有限群G中的任何元素a的阶可整除|G|.

(2) 质数阶的群G没有非平凡子群(G除外)，且为循环群.

(3) 设G和H分别是m阶与n阶群，若G到H存在单同态，则m|n.

T9 证明右陪集的如下性质：

1) $a \in Ha$； 2) $b \in Ha \Leftrightarrow Ha=Hb$； 3) $a \in H \Leftrightarrow Ha=H$； 4)$Ha=Hb \Leftrightarrow ab^{-1} \in H$.

T10 1) 设G为模12加群，求$<3>$在G中所有的左陪集.

2) $X=\{x|x \in R, x \neq 0,1\}$，在X上定义如下6个函数，则$G=\{f_1,f_2,f_3,f_4,f_5,f_6\}$关于函数的复合运算构成群，求子群$\{f_1,f_2\}$的所有的陪集.

$f_1(x)=x$，$f_2(x)=1/x$，$f_3(x)=1-x$， $f_4(x)=1/(1-x)$， $f_5(x)=(x-1)/x$， $f_6(x)=x/(x-1)$.

第3部分 综合应用

T1 某通讯编码由4个数据位x1、x2、x3、x4和3位校验位x5、x7、x8构成，它们的关系如下：

$x5=x1 \oplus x2 \oplus x3$

$x6=x1\oplus x2\oplus x4$

$x7=x1\oplus x3\oplus x4$

其中，$\oplus$为异或运算.若S为满足上述关系的码字的集合，且当$x,y\in S$时有$x\oplus y=x1\oplus y1,\ldots,x7\oplus y7$.

（1）$<S;\oplus>$是群，试证明之；

（2）**(选做)** 查阅资料分析、证明上述纠错码（群码）的纠错能力.