

书面作业 第2次 习题参考解答或提示

第1部分 基础

T1. 用等值演算法证明下列等值公式 (每一个步骤均需写出依据) :

$$(1) (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R) = (P \vee Q) \rightarrow R.$$

$$(P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R)$$

$$= (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R) \text{ (蕴涵等值式)}$$

$$= (\neg P \wedge \neg Q) \vee R \text{ (分配律)}$$

$$= \neg(P \vee Q) \vee R \text{ (德摩根律)}$$

$$= (P \vee Q) \rightarrow R. \text{ (蕴涵等值式)}$$

$$(2) (P \rightarrow R) \vee (Q \rightarrow R) = (P \wedge Q) \rightarrow R.$$

$$(P \rightarrow R) \vee (Q \rightarrow R)$$

$$= (\neg P \vee R) \vee (\neg Q \vee R) \text{ (蕴涵等值式)}$$

$$= (\neg P \vee \neg Q) \vee R \text{ (分配律)}$$

$$= \neg(P \wedge Q) \vee R \text{ (德摩根律)}$$

$$= (P \wedge Q) \rightarrow R. \text{ (蕴涵等值式)}$$

$$(3) (P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R) = P \rightarrow (Q \wedge R).$$

$$(4) (P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R) = P \rightarrow (Q \vee R).$$

$$(5) P \rightarrow (Q \rightarrow R) = Q \rightarrow (P \rightarrow R).$$

$$P \rightarrow (Q \rightarrow R)$$

$$= \neg P \vee (Q \rightarrow R) \text{ (蕴涵等值式)}$$

$$= \neg P \vee (\neg Q \vee R) \text{ (蕴涵等值式)}$$

$$= (\neg P \vee \neg Q) \vee R \text{ (结合律)}$$

$$= (\neg Q \vee \neg P) \vee R \text{ (交换律)}$$

$$= \neg Q \vee (\neg P \vee R) \text{ (结合律)}$$

$$= \neg Q \vee (P \rightarrow R) \text{ (蕴涵等值式)}$$

$$= Q \rightarrow (P \rightarrow R). \text{ (蕴涵等值式)}$$

$$(6) P \rightarrow (Q \rightarrow R) = (P \wedge Q) \rightarrow R.$$

$$(7) \neg(P \leftrightarrow Q) = (P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q).$$

$$\neg(P \leftrightarrow Q)$$

$$= \neg((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)) \text{ (等价等值式)}$$

$$= \neg((\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P)) \text{ (蕴涵等值式)}$$

$$= (P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg P) \text{ (德摩根律)}$$

$$= (P \vee Q) \wedge (P \vee \neg P) \wedge (\neg Q \vee Q) \wedge (\neg Q \vee \neg P) \text{ (分配律)}$$

$$= (P \vee Q) \wedge 1 \wedge 1 \wedge (\neg Q \vee \neg P) \text{ (排中律)}$$

$$= (P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee \neg P) \text{ (同一律)}$$

$$= (P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q). \text{ (交换律)}$$

$$(8) \neg(P \leftrightarrow Q) = (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q).$$

第2部分 理论

T2. 求下列公式的析取范式与合取范式（使用等值演算法），主析取范式与主合取范式（同时使用真值表方法与等值演算方法），并判断公式类型：

（命题公式的析取范式、合取范式可以有很多，满足形式要求即可，这里仅给出主范式答案）

$$(1) P \rightarrow (P \wedge (Q \rightarrow P)).$$

$$P \rightarrow (P \wedge (Q \rightarrow P)) = \neg P \vee (P \wedge (\neg Q \vee P)) = (\neg P \vee P) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee P) = 1 \wedge 1 = 1.$$

主析取范式： $(\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)$ ，即 $m_{00} \vee m_{01} \vee m_{10} \vee m_{11}$ ， $m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3$

主合取范式：为1（或表述为“空”亦可）。

$$(2) \neg((P \wedge Q) \vee R) \rightarrow R.$$

主析取范式： $(\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$ ，即 $m_{001} \vee m_{011} \vee m_{101} \vee m_{110} \vee m_{111}$ ， $m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7$ 。

主合取范式： $(P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R)$ ， $M_{000} \wedge M_{010} \wedge M_{100}$ ，亦即 $M_0 \wedge M_2 \wedge M_4$ 。

$$(3) (P \wedge R) \vee (Q \wedge R) \rightarrow \neg P.$$

主析取范式： $(\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$ ，即 $m_{001} \vee m_{011} \vee m_{101} \vee m_{110} \vee m_{111}$ ，亦即 $m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_7$ 。

主合取范式： $(\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$ ， $M_{100} \wedge M_{110}$ ，亦即 $M_4 \wedge M_6$ 。

第3部分 应用

T1. 数字逻辑电路基本逻辑门有与、或、非门，以及与非、或非、异或门，可以分别用逻辑运算 \vee 、 \wedge 、 \neg ，以及 \uparrow 、 \downarrow 、 $\underline{\vee}$ 来表示，请分别仅用 $\{\neg, \vee, \wedge\}$ 、 $\{\neg, \wedge\}$ 、 $\{\neg, \vee\}$ 来表达 \uparrow 、 \downarrow 、 $\underline{\vee}$ 运算。

\uparrow 、 \downarrow 参考教材定理1.11，异或为排斥或。

T2. 有一大型会议室，四周都有一个门，计划在门边安装装双态开关。为了控制全室的照明，要求设计一个线路，使得改变任意一个开关的状态就能改变全室的明暗，假设室中无人时暗，有人时灯亮，写出控制电路的逻辑表达式（目前仅有异或门 $\underline{\vee}$ 可以提供）。提示：一般开关初始状态均应断开，接通任意一个门边的开关则灯亮，再断开任意一门边开关则灯灭。所以，可以设计奇数个开关接通则灯亮，进而给出由析取、合取、否定等联结词运算构成的组合电路表达式，再转化为仅包含异或运算电路表达式，从而可以画出电路图。

T3. 一家航空公司，为了保证安全，用计算机复核飞行计划。每台计算机能给出飞行计划正确或者有误的回答。由于计算机也有可能发生故障，因此采用4台计算机同时复核。由所给答案，根据“少数服从多数”的原则作出判断。试将结果用命题公式表示，并加以简化。

参考教材例1.19（新版，P25旧版）。

设 C_1 ， C_2 ， C_3 分别表示3台计算机的答案， S 表示判断结果，据题意可构造出真值表如表1所示。

表1 真值表

C_1	C_2	C_3	C_4	S
-------	-------	-------	-------	-----

0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

则 $S = (\neg C_1 \wedge C_2 \wedge C_3 \wedge C_4) \vee (C_1 \wedge \neg C_2 \wedge C_3 \wedge C_4) \vee (C_1 \wedge C_2 \wedge \neg C_3 \wedge C_4) \vee (C_1 \wedge C_2 \wedge C_3 \wedge \neg C_4) \vee (C_1 \wedge C_2 \wedge C_3 \wedge C_4)$
 $= (C_2 \wedge C_3 \wedge C_4) \vee (C_1 \wedge C_3 \wedge C_4) \vee (C_1 \wedge C_2 \wedge C_4) \vee (C_1 \wedge C_2 \wedge C_3).$