第7次书面作业 参考解答或提示

第1部分 基础

T1 分别构造具有如下特点的图:

（1）有欧拉回路和哈密尔顿回路；环图均是：如C_4.

（2）有欧拉回路, 但无哈密尔顿回路；$K_3 \cup K_3$, 并有1个公共结点构成的连通图.

（3）无欧拉回路, 但有哈密尔顿回路；K_4.

（4）无欧拉回路, 也无哈密尔顿回路. $K_3 \cup K_4$, 并有1个公共结点构成的连通图.

T2 构造一个平面图，使它是可 4-着色的，但不是可 3-着色的. K_4.

T3 构造若干个结点数为6的非平面图. 最简单的构造方法：K_5，再加一个结点v，v与K_5的任意个数结点邻接.

第2部分 理论

T1 设图 G 是一个(n,m)图，且 $m \geq (n-1)(n-2)/2+2$，证明：G 是哈密尔顿图. 可否画出一个具有n个结点，$(n-1)(n-2)/2+1$条边的非哈密尔顿图?

反证法. 假设G不是哈密尔顿图，则G不会满足Ore哈密尔顿图判定定理的条件，则至少存在一对不相邻结点u,v的度数之和<n，于是，与u,v相关联的边数量小于n，G中余下的n-2个结点关联的边数量不超过$(n-2)(n-3)/2$，故G边数$m<(n-2)(n-3)/2+n=(n-1)(n-2)/2+2$. 矛盾. 故G是哈密尔顿图.

$K_5 \cup K_2$, 并有1个公共结点构成的连通图为6个结点11条边的非哈密尔顿图.

T2 Prove the following theorem.

Theorem (Bondy and Chvátal, 1976). Consider a simple graph G= (V, E) and let u, v∈ V be non-neighbouring vertices such that deg(u) +deg(v) ≥ |V|. Then G is Hamiltonian iff G U{(u, v)} is Hamiltonian.

提示：本题关键在于证明充分性，即G U{(u，v)}为哈密尔顿图时，G也为哈密尔顿图，注意针对边（u，v）进行讨论，类似哈密尔顿图判定定理的证明方法.

必要性：显然；

充分性：GU｛(u, v)｝是Hamilton图，则其存在一条Hamilton回路C，

若(u, v)不在C上，则未添加边(u, v)时，G原本就是Hamilton图；

若(u, v)在C上，则将(u, v)删除，得到一条哈密尔顿路径P，P包含G所有结点且其端点u、v不相邻，利用反证法证明P也是一条G的Hamilton回路（请参考Ore哈密尔顿图判定定理的证明方法）.

T3 求解极大平面图的边数(e)与结点数(n)的关系. 极大平面图的每个面度数为3，设其面数为f，则由3f=2e以及欧拉公式n-e+f=2易得：e=3n-6.

T4 用数学归纳法证明连通平面图的欧拉公式. 用n，e，f分别表示G的结点数、边数、面数.

用数学归纳法证明. 对面数f进行归纳.

当f=1时，G中无回路，因而G是一棵树，故有n=e+1，即有n-e+f=2.

假设f=k-1时，定理成立.

考察f=k时，设图G有n个结点，e条边. 因为k≥2，所以G中至少有一个环将外部面与内部面分开.

从任一环中去掉一条边，得到G(G′仍然连通)，因为去掉的边在环中，一定是两个面的公共边. 将其去掉后这两个面就连成了一个面，图G′的面数为k-1，边数为e-1，结点数为n.

由归纳假设，对图G′有：

n-(e-1)+(k-1)=2，

故有

$n-e+k=2$.

即$f=k$时，定理成立.

由归纳法，定理得证.

类似地，也可以对边数e进行归纳（归纳步中删除一条边e时对面数的影响要讨论：e为割边与否?）.

T5 求解非连通平面图G的欧拉公式；若非连通平面图G的每个面度数至少为k，试求解G可能的最大边数. 用n，e，f分别表示G的结点数、边数、面数.

设G有w个分图，则对每个分图应用欧拉公式有（注意到，外部面一共计算了w次）：

$\sum(n_i-e_i+f_i)=\sum 2$, 即$n-e+(f+(w-1))=2w$，于是$n-e+f=w+1$.

进而，如果每个面度数至少为k，则$2e\geq k\cdot f$，又结合$n-e+f=w+1$有：$e\leq(n-w-1)\cdot k/(k-2)$.

T6（选做） 证明六色定理.

提示：相比五色定理的证明，本定理的证明较为简单,可类似地用数学归纳法证明.

与五色定理的证明过程完全一致，在归纳步不再需要用肯普链改造删除的结点v的相邻结点着色，而是直接得到结论：因为v相邻结点最多5个，则最多使用5种颜色，于是至少还余下一种颜色给v使用.

第3部分 综合应用

T1 考虑在七天内安排七门课程的考试，要求同一位教师所任教的两门课程考试不安排在接连的两天里，请应用有关图论性质证明：如果教师所担任的课程都不多于四门，则存在满足上述要求的考试安排方案.

用结点表示课程考试，如果这两个结点对应的考试课程是由不同教师担任的，那么这两个结点之间有一条边，从而得到图G. 因为每个教师所任的课程不超过4，故每个结点的度数至少是3，任两个结点度数的和至少是6，故根据判定定理，G总包含一条哈密尔顿路，它对应于一个七门考试课目的一个适当安排.

T2 某大型互联网公司的一个软件开发部门有5个开发小组，近期要完成5个软件开发项目，已知小组A擅长项目2、3、4的开发，小组B擅长项目1、2、3、5的开发，小组C、D、E擅长项目2、3的开发. 分析论证可否设计一个规划，满足条件：每个小组均参与项目开发，每个小组只完成擅长的项目，且每一个项目均能完成.

项目和开发小组均作为结点，若某小组擅长开发某项目，则在其相应结点间加一条边，于是得到一个二分图（小组结点集为V_1，项目结点集为V_2）. 容易判断，V_1中小组3、4、5对应的3个结点仅与V_2中项目2、3对应的2个结点邻接，这不满足Hall相异性条件，故不存在V_1到V_2的匹配，故不存在满足条件的规划.

T3 Complex大学的CS学院有8名教员，这学期他们每人开设3门课程，课程表如下表所示.

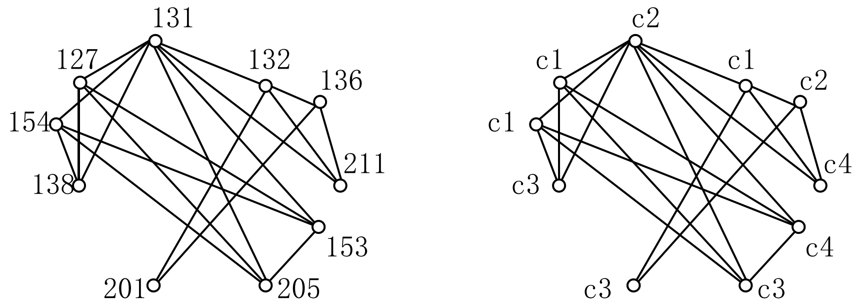
表1

教授	所授课程
Agnesi	132,136,211
Bernoulli	127,131,153
Cauchy	131,132,211
Descartes	127,131,205
Euler	131,138,154
Frobenius	132,136,201
Gauss	127,131,138
Hamilton	153,154,205

在安排考试的时候，已经确定学院的每门课程都将有考试，每位教授仅必须监考自己的课程. 学校有充足的教室，且每人都希望考试能尽早结束，这样他们就能尽情投入到假期中去，学者或许还能证明出一些新的定理. 那么，整个考试最少需要多少时间按段？具体如何安排？

提示：本时间表问题的关键是设计一个时间段的安排，使得教授多门课程的教授不会产生监考时间上的冲突.

以结点代表课程，以课程编号作为结点标记，如果某两门课程是由同一名教授开设的，则将相应结点之间连一条边. 最后得到课程图如图1(a)所示.



a　　　　b

图1

使用最少的时间段的考试安排等价于图G的色数，因为相邻的结点色数不同，表明教授多门课程的教授不会产生时间冲突. 由于G中存在子图K_4，因此G的色数至少为4. 以此子图K4为基准，最后得到G的一种4着色图，如图1(b)所示. G的色数也可以由Powell算法来求解. 因此，最少需要4个时段，具体的考试安排如表1所示.

表2

时间段	考试科目	监考教授
1 (c1)	127,132,154	Agnesi,Bernoulli,Cauchy,Descartes,Euler,Frobenius, Gauss, Hamilton
2 (c2)	131,136	Agnesi,Bernoulli,Cauchy,Descartes,Euler,Frobenius, Gauss
3 (c3)	128,201,205	Descartes,Euler,Frobenius,Gauss,Hamilton
4 (c4)	153,211	Agnesi,Bernoulli,Cauchy,Hamilton