书面作业 第 8 次 参考解答或提示

第 1 部分 基础

T1 构造互不同构的所有五结点的树.
3 棵

T2 一棵树有两个结点度数为 2，一个结点度数为 3，三个结点度数为 4. 问它有几个度数为 1 的结点?
9 个

T3 设图 G=（n,m），证明：如果 G 满足如下三个属性中的两个，则 G 就是一棵树，且可以推导出另一个
属性：1) G 连通； 2) G 中不存在环； 3) m=n-1
教材定理 10.1

T4 试证明或否定：连通图 G 的任一边是 G 的某一棵生成树的枝；连通图 G 的任何一条边都是 G 的某一棵生成树的弦.
注意树的相关结论. 设 T 是 G 的生成树，G 的任一边 e 如果不是 T 的枝，则将该边加入 T，于是构成了环 C，再删除 C 上另外一条边得包含 e 的生成树 T'，因此，任何边都可以是某生成树的枝；若 G 中存在割边，则结论不成立，因为割边必须是任何 G 的生成树的枝.

T5 图 G(n,m)含有 k 个分图，试利用树的性质证明：G 中至少包含 m-n+k 条不同的回路。提示：注意到回路的构成、树的相关数量关系.
注意到，一棵树 T 的任二结点间添加一条边 e 则得到一条包含边 e 的回路 C，如果添加不同于 e 的边于 T 中，则得到不同于 C 的回路，因此，一个连通图中回路的数目是其边数与其生成树边数之差。
图 G 含有 k 个分图，每个分图的均为一棵树，根据树的基本性质，容易求得所有分图的生成树的边数之和为 n-k, 从而，图 G 中回路数即每个分图中回路数之和为: m-(n-k)=m-n+k.

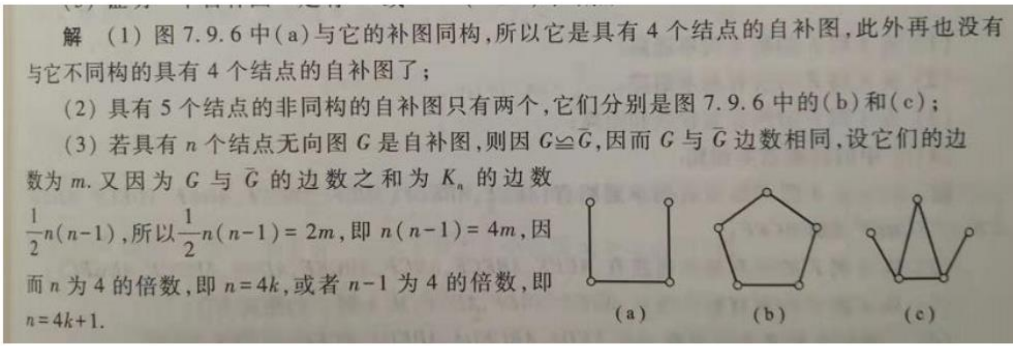
T6 设 T_1，T_2 是连通图 G 的生成树，边 e_1 在 T_1 中但不在 T_2 中，证明：存在边 e_2 在 T_2 中但不在 T_1 中，使得 $T_2\cup\{e_1\}-\{e_2\}$与 $T_1\cup\{e_2\}-\{e_1\}$都是 G 的生成树.
提示：此题还需要证明 $T_1\cup\{e_2\}-\{e_1\}$是生成树，难度有所增加. 对 e_2 需要限定.
令删除 e_1 后 T_1 分为 2 棵树 T_{11}, T_{12}, 定义集合 $E_{e1}=\{(u,v)|(u,v)\in G$, 且 $u\in T_{11}, v\in T_{12}\}$,
注意到如下结论：E_{e1} 中边显然都不在 T_1 中，且 G 中包含 e_1 的环必然包含一条 E_{e1} 中的边，E_{e1} 中的任何
边加入 T_1 中均将构成包含 e_1 的环.
于是，将边 e_1 加入 T_2 时将构成环 C_1，包含 e_1 的环 C_1 上一定存在一条边 $e_2\in E_{e1}$，且 $e_2\notin T_1$，$e_2\in T_2$. 从
而，删除 C_1 上边 e_2 可得生成树 T'，即：$T_2\cup\{e_1\}-\{e_2\}$是 G 的生成树.
根据集合 E_{e1} 的定义，将 e_2 加入 T_1 时将构成包含 e_1 的环 C_2，从而，删除 C_2 上边 e_1

可得生成树 T″，即：
$T_1 \cup \{e_2\} - \{e_1\}$是 G 的生成树.
综上，结论成立.

T7 证明：完全二分树 T 的结点数为 n，则 n 为奇数且 T 的叶子结点数 t=(n+1)/2.
设 T 分支结点数为 i，则按结点分类方法，有 mi+1=i+t=n，m=2 时，有 i=t-1，于是 i+t=2t-1=n, t=(n+1)/2. 显然 n=2t-1 为奇数.
显然本题可以用数学归纳法来证明.

第 2 部分 理论

T1 一个无向图如果同构于它的补图，则称该图为自补图。
（1） 给出所有具有 4 个结点的自补图；
（2） 给出所有具有 5 个结点的自补图；
（3） 证明一个自补图一定有 4k 或 4k+1（k∈N） 个结点。


解 （1）图 7.9.6 中(a)与它的补图同构，所以它是具有 4 个结点的自补图，此外再也没有与它不同构的具有 4 个结点的自补图了；

（2）具有 5 个结点的非同构的自补图只有两个，它们分别是图 7.9.6 中的(b)和(c)；

（3）若具有 n 个结点无向图 G 是自补图，则因 $G \cong \bar{G}$，因而 G 与 $\bar{G}$ 边数相同，设它们的边数为 m. 又因为 G 与 $\bar{G}$ 的边数之和为 K_n 的边数 $\frac{1}{2}n(n-1)$，所以 $\frac{1}{2}n(n-1)=2m$，即 $n(n-1)=4m$，因而 n 为 4 的倍数，即 $n=4k$，或者 $n-1$ 为 4 的倍数，即 $n=4k+1$.

T2 证明：设 G 是具有 n 个结点的简单无向图，如果 G 中每一对结点的度数之和均大于等于 n-1，那么 G 是连通图。
参考定理 9.10 半哈密尔顿图充分条件证明的第一步。

第 3 部分 综合应用

T1 已知有关人员 a， b， c， d， e， f， g 具有如下的语言能力： a 说英语； b 说英语和西班牙语； c 说英语、 意大利语和俄语； d 说日语和西班牙语； e 说德语和意大利语； f 说法语、日语和俄语； g 说法语和德语。 试问： 上述七人是否任意二人都能交谈(可借助于其余五人组成的译员链)?
思路：用简单图来表示上述问题：结点表示相关人员，如果二人可以说同一语言，则在相应的二结点间加边。如果得到的图是连通图则表示上述七人可以任意二人进行交谈。

T2 某局域网上的 2n 台计算机，如果每一台计算机至少可以与另外 n 台计算机直接传递数据， 那么，在这 2n 台计算机中任何两台之间都可以传递数据（可能需要通过其它计算机）.
思路：用结点表示计算机，如果二计算机可以进行直接数据传递，则在相应而结点间加

边，从而可以将原问题表示为一个简单图 G，如果图 G 是连通的，则表示在这 2n 台计算机中任何两台之间都可以传递数据（可能要通过其它计算机）.
应用反证法来证明 G 是连通的（参考本次习题的 2- T2）.
假设 G 不连通，则至少存在两个分图，设其中二个分图的结点数分别为 n_1, n_2，结点 u，v 分别在这两个分
图中，于是，容易得到:$d(u)+d(v)\geq 2n$ 与 $d(u)+d(v)\leq(n_1-1)+(n_2-1)\leq 2n-2$ 的矛盾.
此题还可以直接用后续证明 G 为 Hamilton 图的方法来证明其连通性。

T3 决策树是一种树形结构的机器学习方法，在决策树的树形结构里，每个内部节点表示由一种特征属性引发的判断，每个节点下面的分支结点表示某个判断结果的输出，最后的叶子结点表示一种分类结果。如果某决策树算法求解得到了一棵完全三元决策树且是平衡的，分类结果有 105 个，试问：最好、最坏情况下，利用决策树进行分类分别需要执行多少次判断?
每一类结果均在叶子结点上，3 元树是完全且平衡的，因此，叶子结点在最低 2 层，
h= $\lceil \log_m^t \rceil$=5.
因此，最好、最坏需要的判断即是为 h-1 与 h，即分别需要 4 与 5 次判断