

# 简单流体模拟算法（魔改版）

TAs

2023 年 7 月 17 日

## 1 问题背景

本题目讨论的是**无外力作用的不可压缩流体**的模拟。在接下来对于二维平面的讨论中，认为纵向方向为  $x$  方向，横向方向为  $y$  方向。

## 2 数学 算法概述

如果将流体的速度场表示为  $\mathbf{u}$ ，压强场表示为  $p$ ，不可压缩流体的 Navier–Stokes 方程可以表示为：

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \underbrace{-(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}}_1 - \underbrace{\frac{1}{\rho} \nabla p}_2 - \underbrace{\nu \nabla^2 \mathbf{u}}_3 + \mathbf{g} \quad (1)$$
$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

其中  $\mathbf{g}$  表示外力导致的加速度，由于无外力作用， $\mathbf{g} = \mathbf{0}$ 。对应式子中的标号，其他部分的含义分别是：

**1 Advection** 表示随流体本身的流动，把某一处的速度带到相邻位置

**2 Pressure** 表示局部的压强不均导致的速度变化

**3 Diffusion** 表示因为流体粘度带来的局部的速度扩散， $\nu$  是粘度系数 kinematic viscosity

为了求以上方程的数值解，在这里需要用到一个数学结论：*Helmholtz-Hodge* 分解

**定理.** 任意向量场都可以被唯一分解为以下形式：

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_n + \nabla q \quad (2)$$

其中  $q$  是标量场，垂直于边界的变化率为 0 ( $\frac{\partial q}{\partial n} = 0$ )， $\mathbf{w}_n$  是一个无散向量场 ( $\nabla \cdot \mathbf{w}_n = 0$ )。

由于以上分解的唯一性，我们可以定义一个算子，把标量场映射到无散分量上：

**定义.** 定义算子  $P$ ，表示将一个向量场映射到它的无散分量上： $P(\mathbf{w}) = \mathbf{w}_n$ 。

将  $P$  应用在等式 1 两侧：

$$P\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right) = P\left(-(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \frac{1}{\rho} \nabla p - \nu \nabla^2 \mathbf{u}\right) \quad (3)$$

等式 3 中的部分可以被化简：

- 由于  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ ，因此其导数也满足  $\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = 0$ 。所以  $P(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}) = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$
- $\nabla p$  本身就是一个梯度场，因此  $P(\nabla p) = \mathbf{0}$

化简结果为：

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = P(-(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nu \nabla^2 \mathbf{u}) \quad (4)$$

根据方程 4 某一时刻速度的变化可以只根据流动和扩散进行计算，只需要最后把速度场中的额外散度去掉。据此构造数值模拟算法，将连续时间切分为时间片，在每个时间片内分为以下几步：

- 进行流动 (Advection) 的模拟，更新速度场
- 进行速度扩散 (Diffusion) 的模拟，更新速度场
- 将速度场投影 (Projection) 到其散度为 0 的分量上<sup>1</sup>

## 2.1 P 算子的计算方法

为了计算  $P(\mathbf{w})$ ，要求得  $\mathbf{w}$  的 Helmholtz-Hodge 分解中的两个分量任意之一。对方程 2 两侧同时计算散度，由于  $\mathbf{w}_n$  散度为 0：

$$\nabla \cdot \mathbf{w} = \nabla^2 q \quad (5)$$

$\mathbf{w}$  是已知的，可以直接计算它的散度，因此这是一个关于  $q$  的泊松方程，在流体边界  $\partial D$  上的边界条件是  $\frac{\partial q}{\partial \mathbf{n}} = 0$

在解得  $q$  以后， $\mathbf{w}_n = \mathbf{w} - \nabla q$ 。

# 3 实现细节

首先，为了方便，我们约定模拟的时间片长度为 1。下文中所有的  $\Delta t = 1$

## 3.1 场的离散表示和算符实现

模拟的区域为  $x \in (-0.5, h - 0.5), y \in (-0.5, w - 0.5)$ ，计算中储存的所有场都会被离散化为边长为 1 的正方形的格子，存储在 Numpy 数组中。 $\mathbf{f}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$  被定义为场  $f$  在第  $x$  行，第  $y$  列的格子正中央的值（见图 3.1）。

你一共需要存储两个场，在代码模板中已经帮你构造好了：一个速度场  $\mathbf{u}$ （每个格点上是一个二维向量），还有一个表示流体中携带颜料的颜色  $d$ （RBG 三个分量，可以认为是三个分离的标量或者一个三维向量）

为了方便描述边界条件和计算梯度，约定：流体被约束在一个矩形盒子中，在模拟域边上留下长度为 1 的边界（灰色格子）。这些格子的数值都是未定义的，检查时对这些位置的值没有要求，因此可以随意存储任何数值。

据此，我们可以定义梯度和散度算符的离散形式：

<sup>1</sup>可以认为这个投影过程对应的是：方程右侧除了压强项以外的非零散度造成了流体的局部挤压、拉伸，这会造成不均的压强场，它带来的加速度会让方程右侧的散度整体等于零。损失的速度耗散成了热。

$f[0,0]$	$f[0,1]$	$f[0,2]$	$f[0,3]$	$f[0,4]$	$f[0,5]$	$f[0,6]$	$f[0,7]$
$f[1,0]$	$f[1,1]$	$f[1,2]$	$f[1,3]$	$f[1,4]$	$f[1,5]$	$f[1,6]$	$f[1,7]$
$f[2,0]$	$f[2,1]$	$f[2,2]$	$f[2,3]$	$f[2,4]$	$f[2,5]$	$f[2,6]$	$f[2,7]$
$f[3,0]$	$f[3,1]$	$f[3,2]$	$f[3,3]$	$f[3,4]$	$f[3,5]$	$f[3,6]$	$f[3,7]$
$f[4,0]$	$f[4,1]$	$f[4,2]$	$f[4,3]$	$f[4,4]$	$f[4,5]$	$f[4,6]$	$f[4,7]$

图 1: 场  $f$  在模拟域上 ( $h = 4, w = 7$ )

```
grad(f, x, y) = [
    (f[x+1, y] - f[x-1, y]) / 2,
    (f[x, y+1] - f[x, y-1]) / 2,
]
div(f_x, f_y, x, y) =
    (f_x[x+1, y] - f_x[x-1, y]) / 2
    + (f_y[x, y+1] - f_y[x, y-1]) / 2
```

你可以使用 `np.roll` 将整个场进行平移，这样可以并行计算整个场的梯度、散度或者拉普拉斯算符应用后的结果。存在的一个问题是：`np.roll` 对溢出的行为是循环滚动，这样一侧最靠边的值会被移动到另一侧，这是没有实际物理意义的。

根据我们对于模拟域的约定，边界正好分别位于最前两行、最前两列、最后两行、最后两列之间。由于在计算上述算子的时候，最多只需要将场平移一格，因此只需要在每次更新场后将边界外的值覆写，就会解决边界问题。

### 3.1.1 边界条件

选择边界外的值被覆写的内容需要和 Navier-Stokes 方程的边界条件一致。对于速度场，我们选用 No-slip 边界条件：在边界上流体速度为 0。由于我们将格点的值定义为格子正中央的值，因此需要将边界外的格点的值设置成关于边界对称位置的相反的值<sup>2</sup>：

在 2.1 提及了计算  $P$  算子的方法，其中会需要标量场  $q$  计算梯度。 $q$  的边界条件是垂直于边界方向的变化率为 0，因此需要直接把模拟域内部的值复制到边界外。以上两个过程很类似，可以实现为同一个函数：

```
def copy_to_boundary(field, factor):
    field 的第一行 <- field 的第二行 * factor
    field 的最后一行 <- field 的倒数第二行 * factor
    field 的第一列 <- field 的第二列 * factor
    field 的最后一列 <- field 的倒数第二列 * factor
```

在以下过程中将会多次用到这一函数。

<sup>2</sup>其实四个角落里的值永远不会用到，但是为了实现方便，就不单独处理了

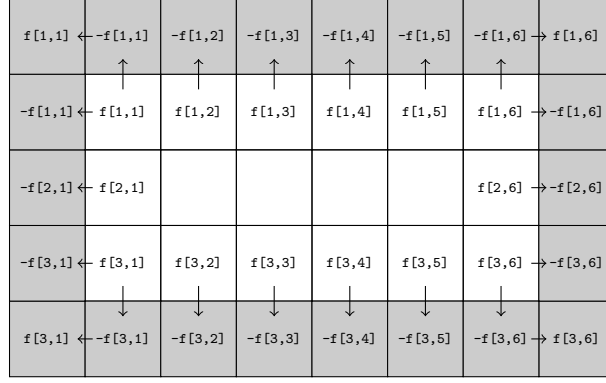


图 2: 维护边界条件

### 3.2 Advection

为了保证算法的稳定性，我们采用隐式方法：根据某一点的速度，找到上一个时间片这一点的流体所处的位置，然后把那里的速度复制过来。同样会随流体流动而移动的东西是流体携带的物质，在这里是颜料：

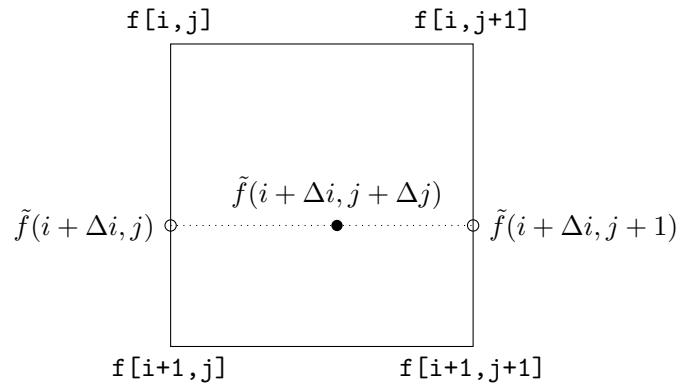
$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{t+\Delta t}(\mathbf{x}) &= \mathbf{u}_t(\mathbf{x} - \mathbf{u}_t(x)\Delta t) \\ d_{t+\Delta t}(\mathbf{x}) &= d_t(\mathbf{x} - \mathbf{u}_t(x)\Delta t) \end{aligned} \quad (6)$$

**注意！** 颜料位于边界外的部分请确保重置为 0，因为这可能会略微影响后续模拟的数值。

由于  $\mathbf{x} - \mathbf{u}_t(x)$  不一定正好落在整点上，需要进行插值。我们约定采用 **双线性插值** (Bilinear Interpolation)

#### 3.2.1 双线性插值

简单而言就是对两个方向依次做线性插值：



$$\begin{aligned} \tilde{f}(i + \Delta i, j) &= (1 - \Delta i) \cdot f(i, j) + \Delta i \cdot f(i + 1, j) \\ \tilde{f}(i + \Delta i, j + 1) &= (1 - \Delta i) \cdot f(i, j + 1) + \Delta i \cdot f(i + 1, j + 1) \\ \tilde{f}(i + \Delta i, j + \Delta j) &= (1 - \Delta j) \cdot \tilde{f}(i + \Delta i, j) + \Delta j \cdot \tilde{f}(i + \Delta i, j + 1) \end{aligned} \quad (7)$$

### 3.3 Diffusion

同样为了保证算法的稳定性，采用隐式方法：

$$(\mathbf{I} - \nu \Delta t \nabla^2) \mathbf{u}_{t+\Delta t}(x) = \mathbf{u}_t(x) \quad (8)$$

由于我们将  $\nabla^2$  表示成了矩阵，因此上面这个方程其实是一个线性方程组。

助教在 `utils.py` 中提供了一个求解以下形式线性方程组的函数：

$$(r\mathbf{I} + s\nabla^2)x = b \quad (9)$$

其中  $x$  和  $b$  是二维标量场， $r$  和  $s$  是参数。

使用方法是调用 `utils.build_poisson_solver(height, width, r, s, factor)`，其中 `factor` 的含义和 `copy_to_boundary` 中相同。上述调用会返回一个函数 `f`，当你需要求解的时候，你需要将场  $b$  形状变为 **长 `width * height` 的一维向量**，传入 `f`，`f` 会返回一个 **长 `width * height` 的一维向量**，代表解得的  $x$ ，你需要将其变回原来的形状。

构造函数 `f` 非常耗时。可以注意到， $\nu$  是整个模拟中都不会改变的参数，因此上述线性方程组的等式左侧其实永远不变。因此可以在模拟开始前调用一次 `utils.build_poisson_solver`，把返回的函数保存起来，之后重复使用即可。

### 3.4 Projection

在 2.1 一节中提到了去除速度场的散度的方法，需要使用你之前实现好的梯度和散度算子：

- 通过求解泊松方程，计算 Helmholtz-Hodge 分解中的标量场
- 求标量场的梯度，从速度场中减去这部分，即可得到无散的速度场

`utils.build_poisson_solver` 可以用来求解  $q$ 。和速度扩散的求解一样，求解函数也同样可以重复使用。

回忆这个方程的边界条件是标量场在垂直边界方向的变化率为 0，也就是  $\frac{\partial q}{\partial \mathbf{n}} = 0$ 。为了达成这点，请确保：

- 在构造 Solver 的时候传入正确的 boundary factor
- 在求解结束之后，求梯度之前，使用 `copy_to_boundary` 确保这点。

**注意！** 在其他地方使用算子前，也一定要使用 `copy_to_boundary` 设置好场的边界值。