

色散实验数据处理方法对比研究

许建国,蔡建春,吉鑫

(昆明学院物理科学与技术系,昆明 650214)

[摘要] 为了用实验数据拟合色散曲线,通过求解柯西公式系数的超定方程组最小二乘解来确定系数的值,并与 Origin 软件非线性最小二乘法拟合测量数据进行比较。结果表明,在实验误差范围内两者吻合得很好。

[关键词] 色散曲线;超定方程组;非线性最小二乘法;Origin

[中图分类号] TP353:O436.3

[文献标志码] A

[文章编号] 2096-2266(2018)06-0034-03

数据测量和数据处理是光学设计性实验过程中非常重要的两个内容,二者缺一不可,不可偏废。数据测量是基础,没有数据测量,数据处理就成了无源之水、无本之木;只有数据测量,不做数据处理,实验本身就失去了意义。选择正确的数据处理方法,提高处理实验数据的效率和获得实验数据的期望值,是所有数据处理者共同的使命及愿望。本文用超定方程组最小二乘解^[1]方法和 Origin 8.0 软件处理光色散的实验数据,以测量的钠光折射率作为定标,检验两种方法处理数据的可行性,并对两种方法进行对比研究。

1 柯西色散规律

色散是物质的折射率随入射光波长的变化而不同的现象^[2]。折射率和波长之间的关系称为色散关系。在正常色散区,柯西(A. L. Gauchy, 1836)根据实验得到了一个经验公式^[3]:

$$n = a + \frac{b}{\lambda^2} + \frac{c}{\lambda^4}, \quad (1)$$

其中 a 、 b 、 c 为常数,与材料的性质有关,由实验测定。

实验原理和数据处理:根据最小偏向角法测量三棱镜折射率的方法,用下式计算三棱镜的折射率^[4]:

$$n = \frac{\sin[(\alpha + \delta_{\min})/2]}{\sin(\alpha/2)}. \quad (2)$$

其中 α 为三棱镜的顶角, δ_{\min} 为最小偏向角。实验中,以低压汞灯为光源,用一台分光计、一块三棱镜,分别测量汞灯谱线中几条已知波长对应的折射率。汞灯谱线不同波长对应的最小偏向角及折射率见表1。用自准直法测得三棱镜顶角 $\alpha = 59^\circ 53'$ 。

2 柯西经验公式系数的确定

2.1 解超定方程求系数 将汞光灯波长及其对应的折射率代入式(1)得下方程组:

表1 各波长对应的最小偏向角和折射率

项目	λ/nm						
	404.66	435.84	491.60	546.07	576.95	579.07	589.30*
δ_{\min}	$54^\circ 46' 15''$	$53^\circ 43' 30''$	$52^\circ 29'$	$51^\circ 40' 15''$	$51^\circ 18' 41''$	$51^\circ 17' 32''$	$51^\circ 11' 27''^*$
n	1.686 507	1.676 566	1.664 581	1.656 634	1.653 091	1.652 902	1.651 905*

注: *分别表示低压钠灯谱线的波长、对应的最小偏向角和折射率,其余为低压汞灯谱线的波长、对应的最小偏向角和折射率。

[基金项目] 昆明学院应用型人才培改革创新项目(昆院教[2016]27号)

[收稿日期] 2017-08-02

[修回日期] 2017-12-15

[作者简介] 许建国,讲师,主要从事大学物理及实验教学研究。

$$\begin{cases} a + 6.106881 \times 10^{-6}b + 3.729399 \times 10^{-11}c = 1.686507 \\ a + 5.264363 \times 10^{-6}b + 2.771352 \times 10^{-11}c = 1.676566 \\ a + 4.137864 \times 10^{-6}b + 1.712192 \times 10^{-11}c = 1.664581 \\ a + 3.353539 \times 10^{-6}b + 1.124622 \times 10^{-11}c = 1.656634 \\ a + 3.004060 \times 10^{-6}b + 9.024376 \times 10^{-12}c = 1.653091 \\ a + 2.982208 \times 10^{-6}b + 8.893562 \times 10^{-12}c = 1.652902 \end{cases} \quad (3)$$

从式(3)可知,这是6个方程求3个未知数,是一超定方程组。利用矩阵乘法分解方程组(3)得下面表达式:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 6.106881 \times 10^{-6} & 3.729399 \times 10^{-11} \\ 1 & 5.264363 \times 10^{-6} & 2.771352 \times 10^{-11} \\ 1 & 4.137864 \times 10^{-6} & 1.712192 \times 10^{-11} \\ 1 & 3.353539 \times 10^{-6} & 1.124622 \times 10^{-11} \\ 1 & 3.004060 \times 10^{-6} & 9.024376 \times 10^{-12} \\ 1 & 2.982208 \times 10^{-6} & 8.893562 \times 10^{-12} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1.686507 \\ 1.676566 \\ 1.664581 \\ 1.656634 \\ 1.653091 \\ 1.652902 \end{bmatrix} \quad (4)$$

对于方程组(3), R 是一个 6×3 的矩阵, $\text{rank}(R) = 3$, R 是一个列满秩矩阵,且 $6 > 3$, 方程组(3)没有精确解。对实验数据处理和曲线拟合时,在无法完全满足给定的条件下,对方程组(3)求一个最接近的解,使其解的残差最小。因为 $\text{rank}(R) = 3 < 6$, 满足超定方程组最小二乘解的存在和唯一性定理^[5]的条件,超定方程组(3)存在唯一最小二乘解,其解为 $X = (R^T R)^{-1} R^T B$ 。所以计算 $R^T R X = R^T B$ 的最小二乘解,得 X 矩阵的各个系数值分别为 $a_1 = 1.627\ 605$ 、 $b_1 = 7.405\ 903 \times 10^3$ 和 $c_1 = 3.649\ 776 \times 10^8$ 。于是本实验中,柯西经验公式用常数表示为:

$$n = 1.627605 + \frac{7.405903 \times 10^3}{\lambda^2} + \frac{3.649776 \times 10^8}{\lambda^4} \quad (5)$$

将钠光波长 $\lambda_{Na} = 589.3\text{ nm}$ 代入式(5),算出钠光对该三棱镜的折射率 $n_{Na} = 1.651\ 957$,与表1钠光的实测折射率 $n_{Na}^* = 1.651\ 905$,在误差允许范围内二者的数值吻合得很好。

2.2 非线性最小二乘法拟合求系数 利用Origin软件对测量数据进行非线性最小二乘法拟合,经整理后得如图1所示的结果。

在误差允许范围内,图1中 $a_2 = 1.627\ 6$, $b_2 = 7.408\ 18 \times 10^3$, $c_2 = 3.647\ 45 \times 10^8$,与超定方程组的解 a_1 、 b_1 和 c_1 吻合得很好。从色散关系曲线图像可以看出,随着波长增加折射率减小,波长减小折射率增大,这种色散称为正常色散。

2.3 色散关系曲线的应用 应用色散关系曲线可以工作概括起来有3个方面,第一,如果测出色光对物质的折射率,由式(5)可计算该色光的波长,从而计算普朗克常数^[6]的数值;第二,由该物质的色散关系曲线,可以推知制作该物质的材料^[7];第三,由色散关系曲线可以估计未知波长的折射率,见图2。

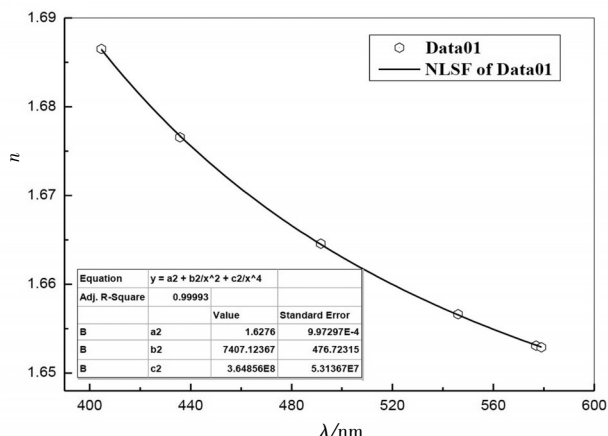


图1 非线性最小二乘法拟合测量数据

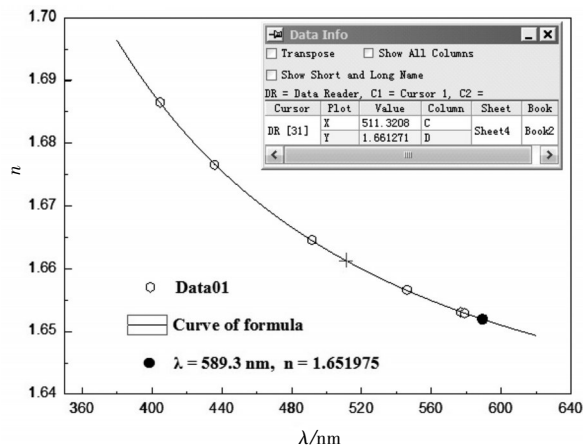


图2 Data Reader读取数据

利用 Origin 界面的 Data Reader 在色散关系曲线上读取数据点,可得不同波长(或折射率)的折射率(或波长)。按住计算机键盘上的“→”或“←”键,屏幕上“+”光标沿曲线移动,图2表中 X 和 Y 的数值即为该点的波长和对应的折射率。图例“●”为钠光的波长和其折射率数值,折射率拟合数值为 1.651 957,与实验测量值吻合得很好。

综上,由数据处理结果可知,用超定方程组最小二乘解方法和 Origin 软件处理色散实验的数据是可行的。方法一主要围绕如何求解方程个数多于未知数个数的问題,按照求解未知数方程的一般方法得不到方程组的精确解,而最小二乘法解可以得到符合要求的解,用矩阵乘法即可完成,方法简单易学,不过作图与插值计算未知波长的折射率比较麻烦。方法二用 Origin 软件的非线性最小二乘法拟合数据并作图,计算与作图完全由计算机完成,过程简洁高效,对未知波长的折射率的估值一目了然,但实验数据的处理原理和过程不是很直观明了,对于初学者理解和掌握起来有一定的难度。Origin 软件处理实验数据必须假以时日、反复

练习方能做到应用自如。我们认为,将两种处理数据的方法教给学生,让学生既知其然又知其所以然,不仅使学生学会了处理数据的不同方法,而且也符合因材施教、因人施教的教育教学原则。

[参考文献]

- [1] 杨立本. 超定方程组最小二乘解行处理方法[J]. 云南师范大学学报(自然科学版), 1997, 17(1): 1-4.
- [2] 钟锡华. 现代光学基础[M]. 北京: 北京大学出版社, 2003: 440-441.
- [3] 赵凯华. 新概念物理教程: 光学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2004: 334-345.
- [4] 杨述武, 赵立竹, 沈国土. 普通物理实验 3: 光学部分[M]. 北京: 高等教育出版社, 2007: 33-35.
- [5] 百度百科. 超定方程组[EB/OL]. [2017-06-20]. <https://baike.baidu.com/item/%E8%B6%85%E5%AE%9A%E6%96%B9%E7%A8%8B%E7%BB%84/4663111?fr=aladdin>.
- [6] 刘绒侠. 利用色散法探索玻尔氢原子理论测量普朗克常数[J]. 大学物理实验, 2008, 21(3): 4-7.
- [7] 朱简约, 陈乾. 基于分光计实验的光谱分析及柯西色散公式研究[J]. 大学物理实验, 2016, 29(2): 41-43.

Comparative Study of Data Processing Methods for Dispersion Experiment

Xu Jianguo, Cai Jianchun, Ji Xin

(Department of Physical Science and Technology, Kunming University, Kunming 650214, China)

[Abstract] In order to fit the dispersion curve with the measured data, the coefficients are determined by the least square solutions to the overdetermined equations of Cauchy's formula, these coefficients are compared with the nonlinear least square fitting measured data in Origin Software. The results show that both are maintaining consistency in the experimental errors.

[Key words] dispersion curve; overdetermined equations; nonlinear least square; Origin

(责任编辑 袁霞)