

Вершины графа: Города международной ТК «Энергия» в Казахстане  
 Пусть ребрами графа будут отмечены жд сообщения между городами.  
 Вес ребра – расстояние между городами.

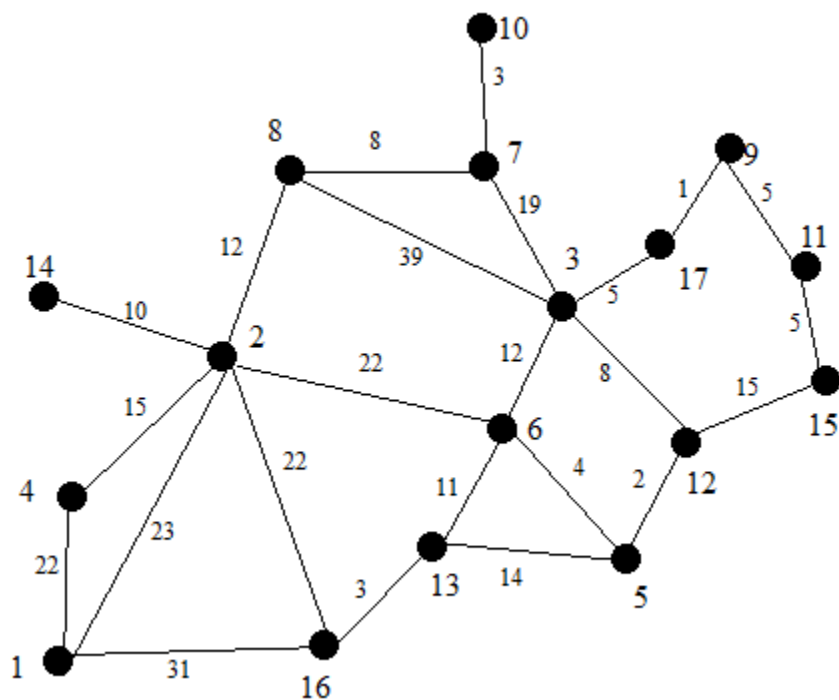
<https://nrg-tk.ru/contacts/karaganda/>

[https://ru.wikipedia.org/wiki/Казахстанские\\_железные\\_дороги](https://ru.wikipedia.org/wiki/Казахстанские_железные_дороги)

- 1) Ақтау Мангистауская область
- 2) Актобе Актюбинская область
- 3) Алматы Алматинская область
- 4) Атырау Атырауская область
- 5) Астана Акмолинская область
- 6) Караганда Карагандинская область
- 7) Кокчетав Акмолинская область
- 8) Костанай Костанайская область
- 9) Павлодар Павлодарская область
- 10) Петропавловск Северо-Казахстанская область
- 11) Семей Восточно-Казахстанская область
- 12) Талдыкорган Алматинская область
- 13) Тараз Жамбылская область
- 14) Уральск Западно-Казахстанская область
- 15) Усть-Каменогорск Восточно-Казахстанская область
- 16) Шымкент Южно-Казахстанская область
- 17) Экибастуз Павлодарская область



Диаграмма графа (17 вершин и 24 ребра). Вес ребра – средняя продолжительность поездки между городами (в часах)



Матрица весов

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1		23		22												31	
2	23			15		22		18						10		22	
3						12	19	39				8					5
4	22	15															
5						4						2	14				
6		22	12		4								11				
7			19					8		3							
8		18	39				8										
9											5						1
10							3										
11								5							5		
12			8		2										15		
13					14	11										3	
14		10															
15											5	15					
16	31	22											3				
17			5						1								

# 1. Минимальное остовное дерево.

Алгоритм Краскала.

Выпишем ребра в порядке возрастания весов

(9,17)=1	(5,12)=2	(7,10)=3	(13,16)=3	(5,6)=4	(3,17)=5	(9,11)=5
(11,15)=5	(3,12)=8	(7,8)=8	(2,14)=10	(6,13)=11	(3,6)=12	(2,8)=12
(5,13)=14	(2,4)=15	(12,15)=15	(3,7)=19	(1,4)=22	(2,6)=22	(2,16)=22
(1,2)=23	(1,16)=31	(3,8)=39				

Просматриваем по очереди ребра графа:

Ребро (9,17)=1 добавляем в остов

Ребро (5,12)=2 добавляем в остов

Ребро (7,10)=3 добавляем в остов

Ребро (13,16)=3 добавляем в остов

Ребро (5,6)=4 добавляем в остов

Ребро (3,17)=5 добавляем в остов

Ребро (9,11)=5 добавляем в остов

Ребро (11,15)=5 добавляем в остов

Ребро (3,12)=8 добавляем в остов

Ребро (7,8)=8 добавляем в остов

Ребро (2,14)=10 добавляем в остов

Ребро (6,13)=11 добавляем в остов

Ребро (3,6)=12 образует цикл, пропускаем

Ребро (2,8)=12 добавляем в остов

Ребро (5,13)=14 образует цикл, пропускаем

Ребро (2,4)=15 добавляем в остов

Ребро (12,15)=15 образует цикл, пропускаем

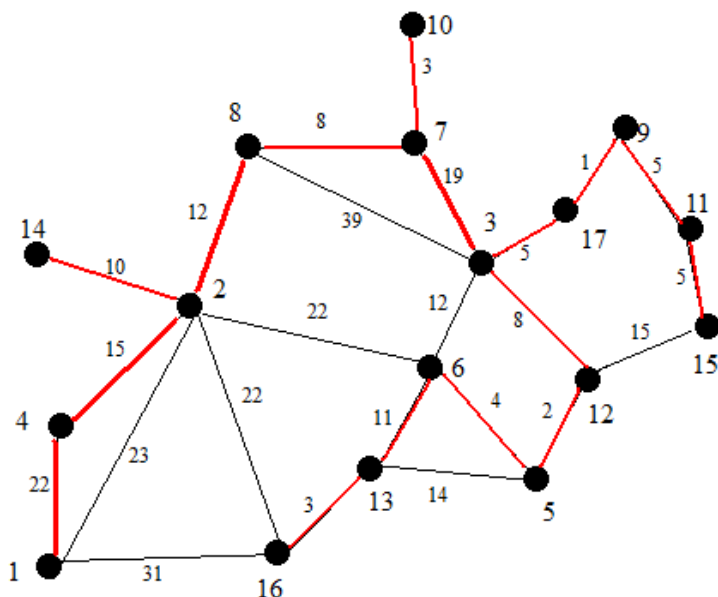
Ребро (3,7)=19 добавляем в остов

Ребро (1,4)=22 добавляем в остов

Добавлено 16 ребер при 17 вершинах.

Алгоритм завершен.

Остовное дерево построено.

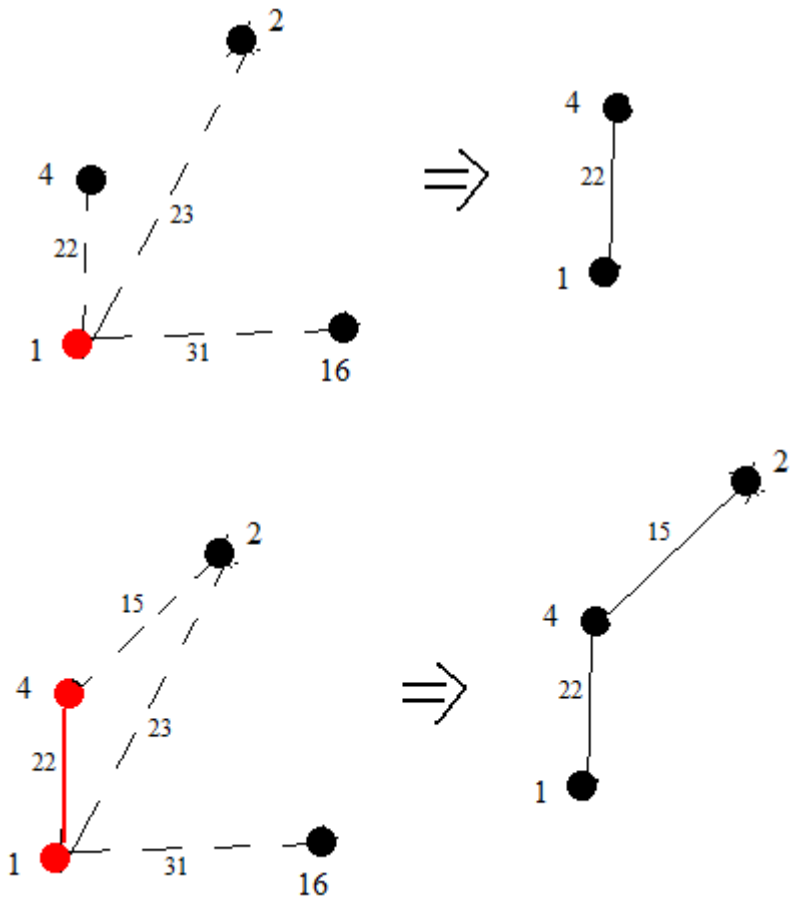


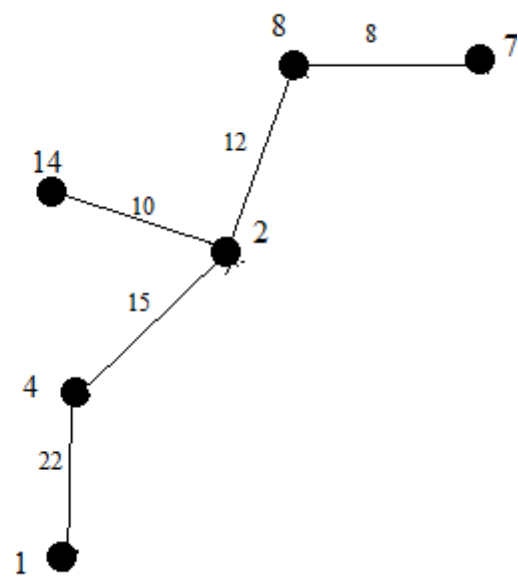
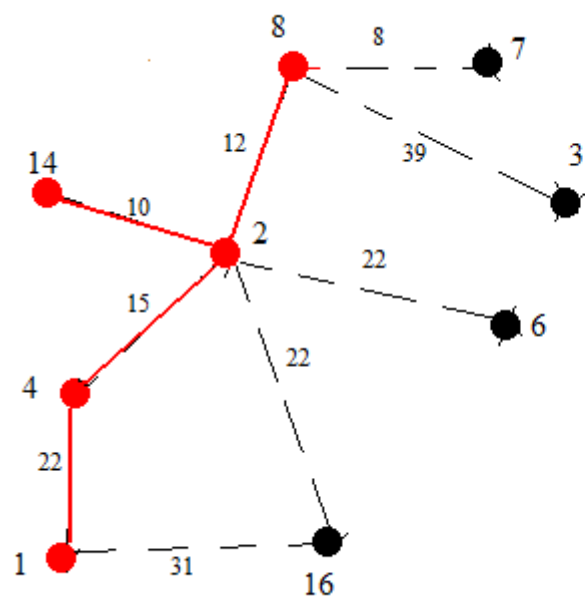
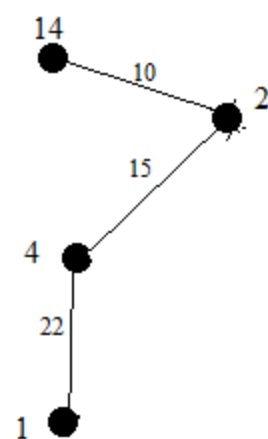
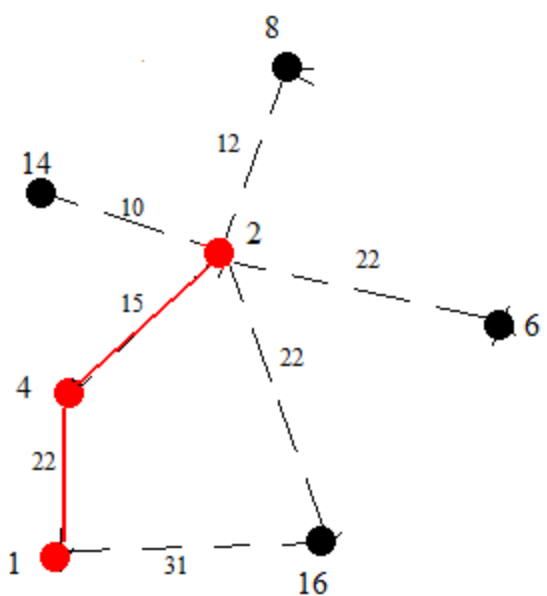
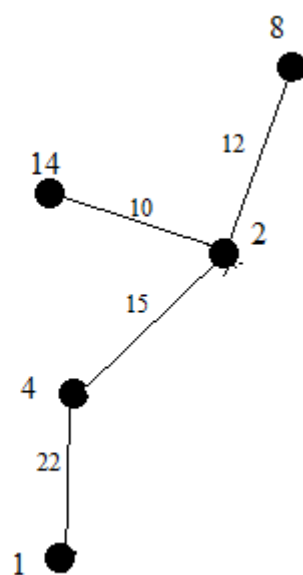
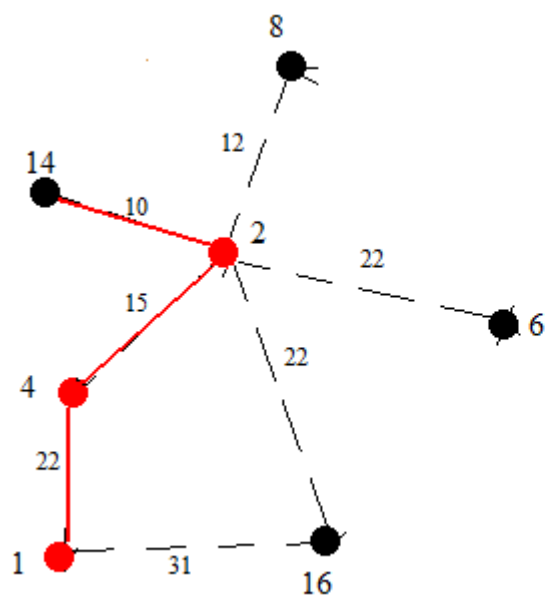
Его вес равен:  $1+2+3+3+4+5+5+5+8+8+10+11+12+15+19+22=133$

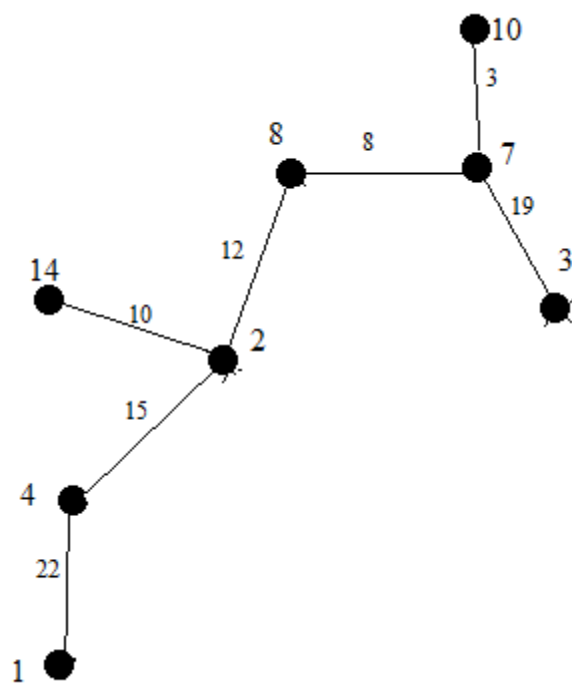
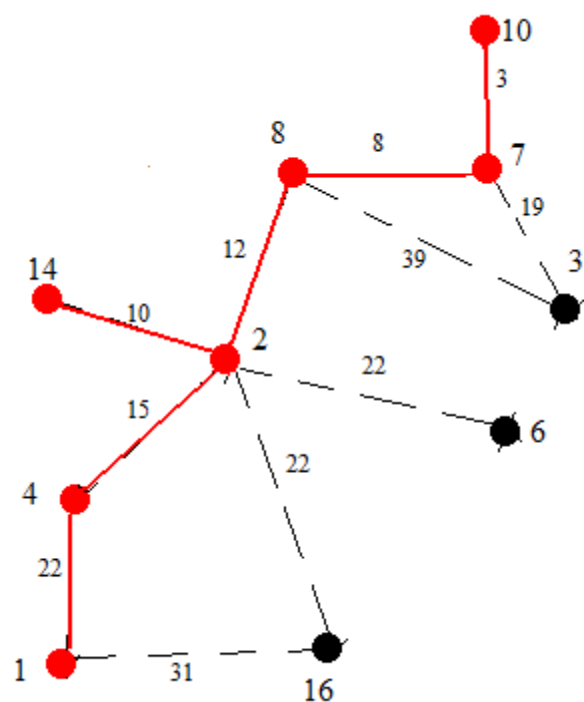
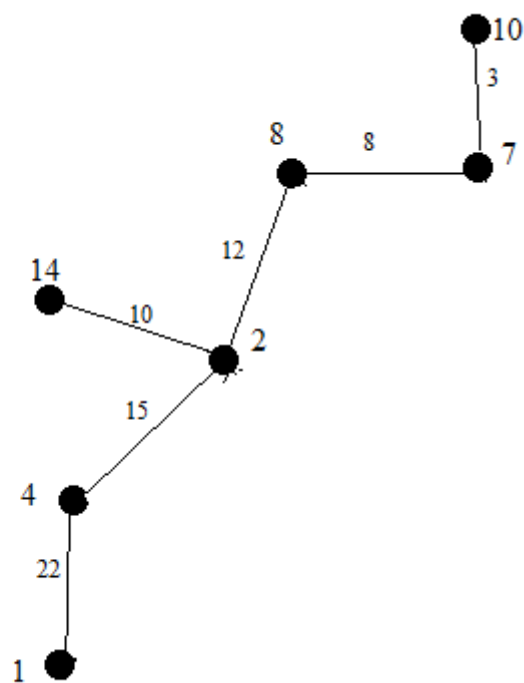
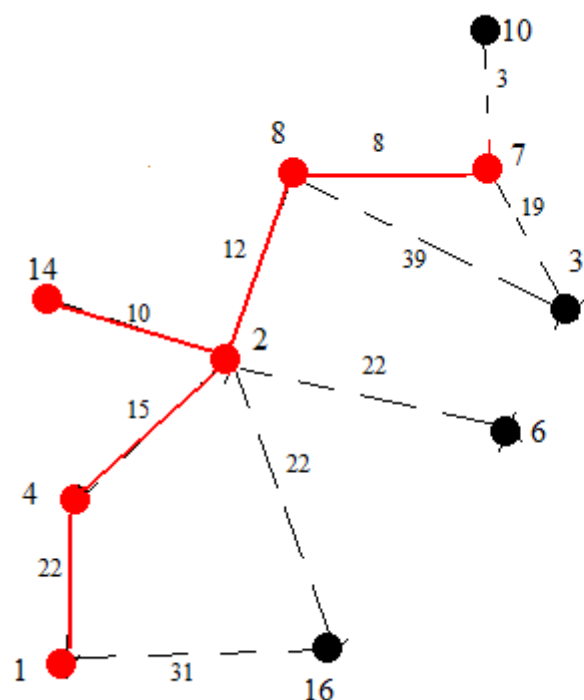
## Алгоритм Прима

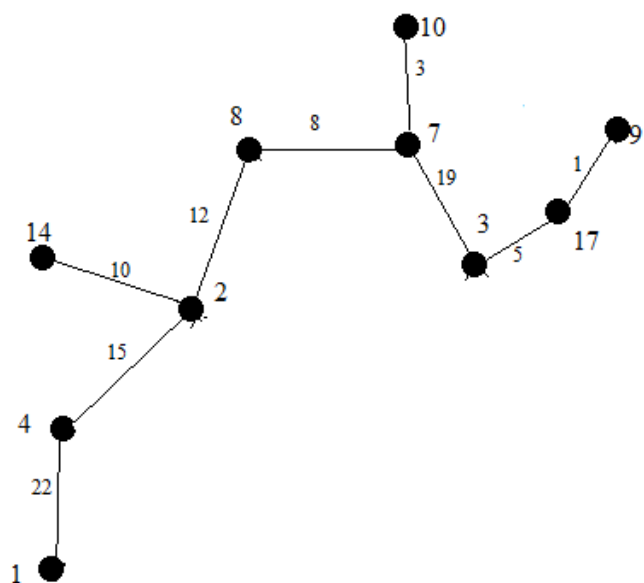
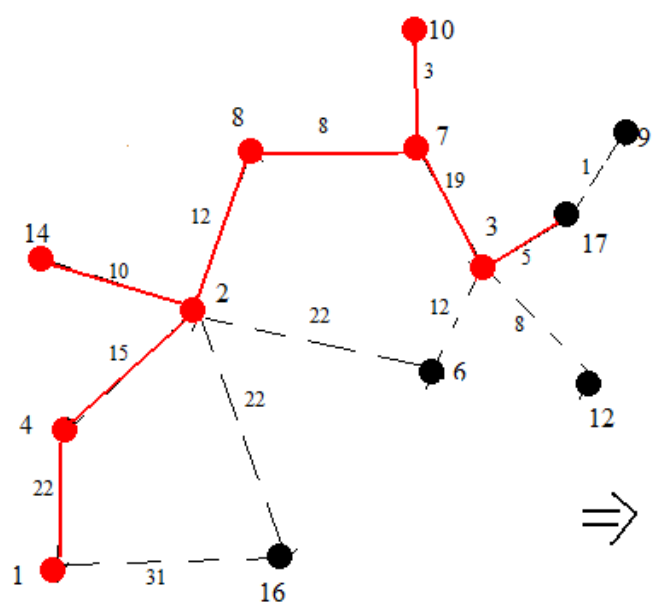
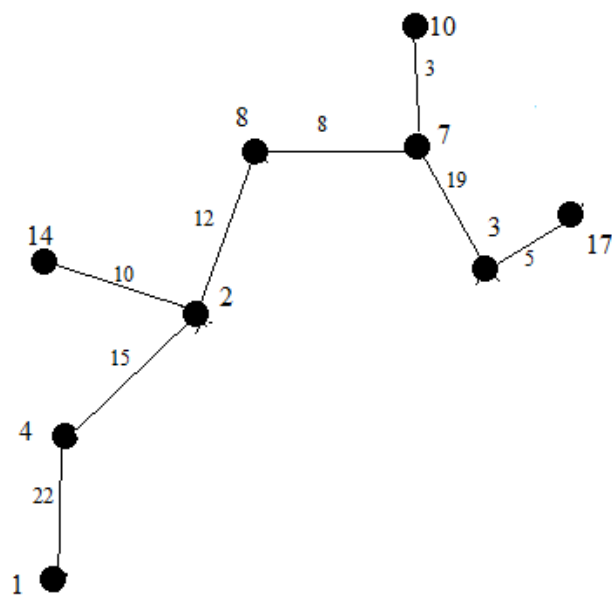
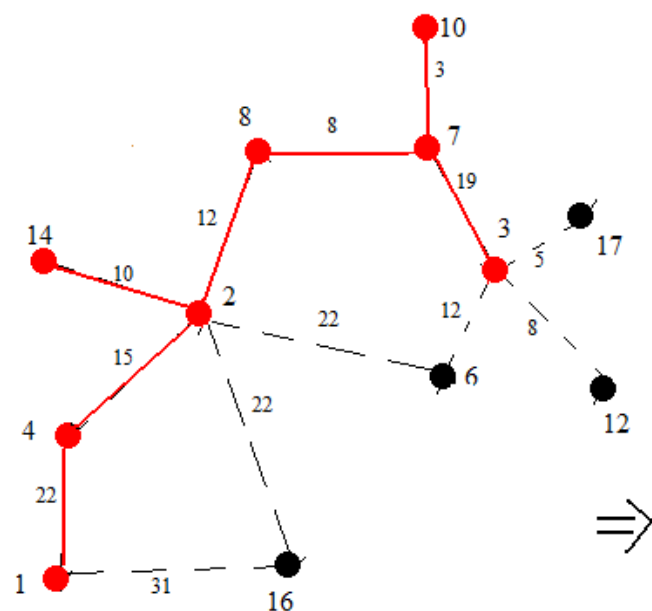
Начнем с произвольной вершины, например 1.

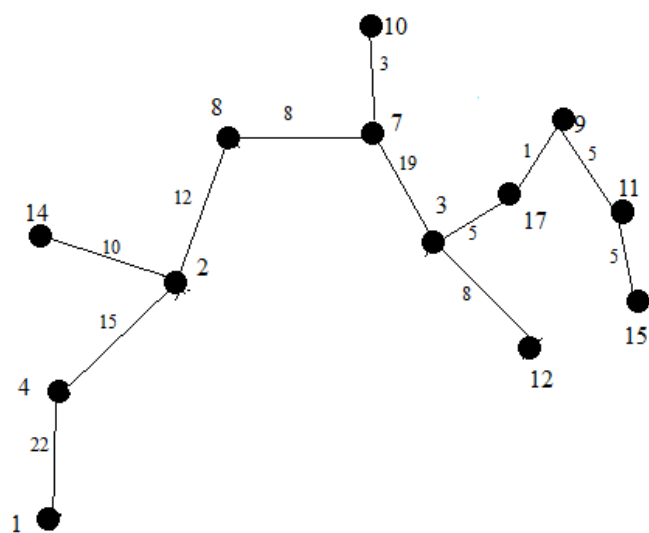
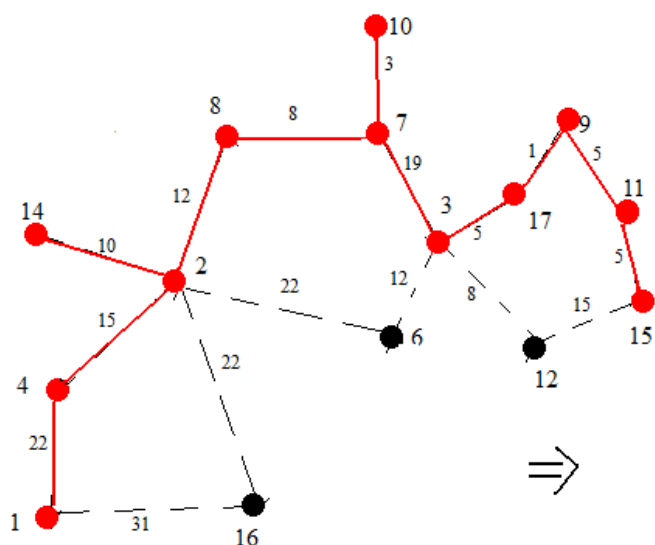
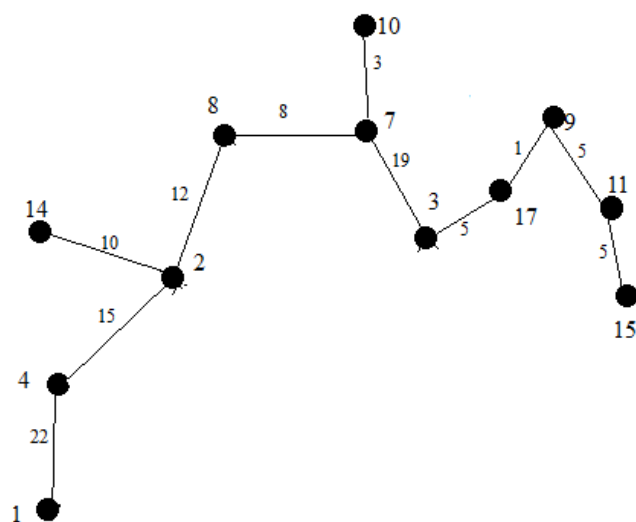
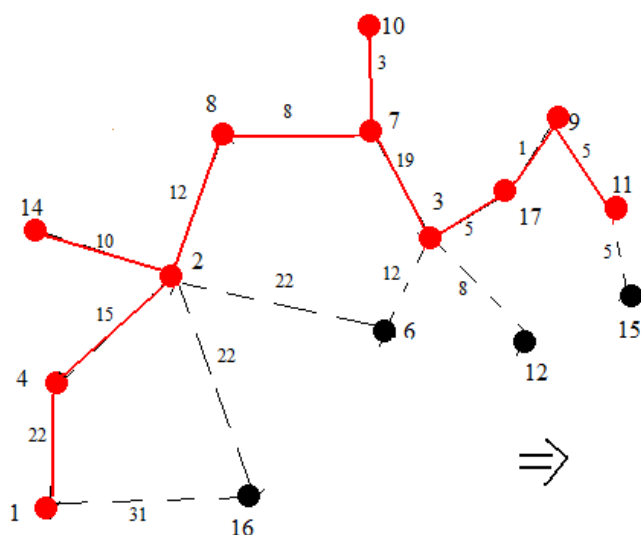
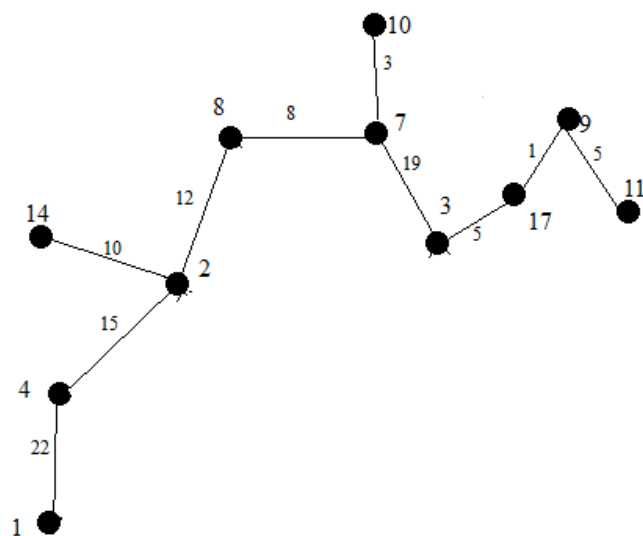
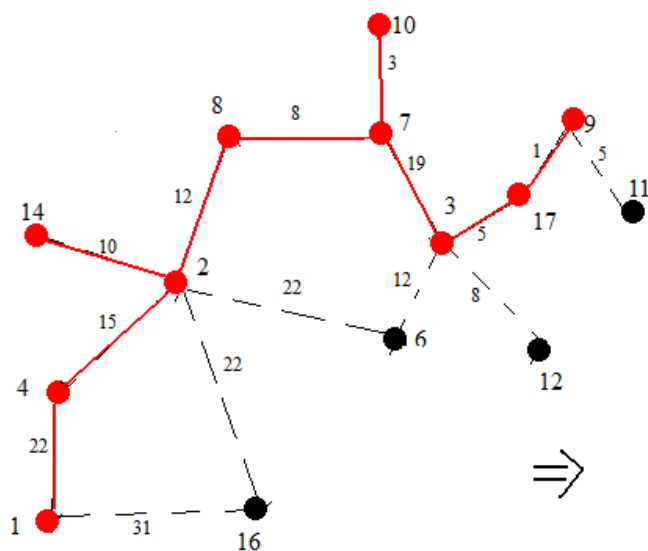
Из инцидентных ей ребер выбираем минимальное и добавляем в остов.



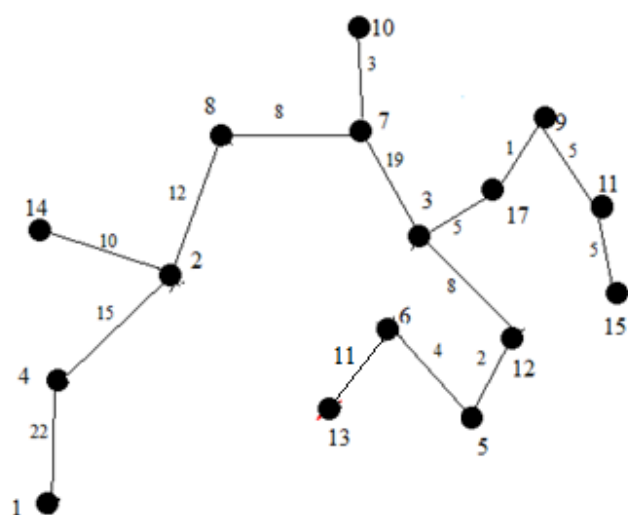
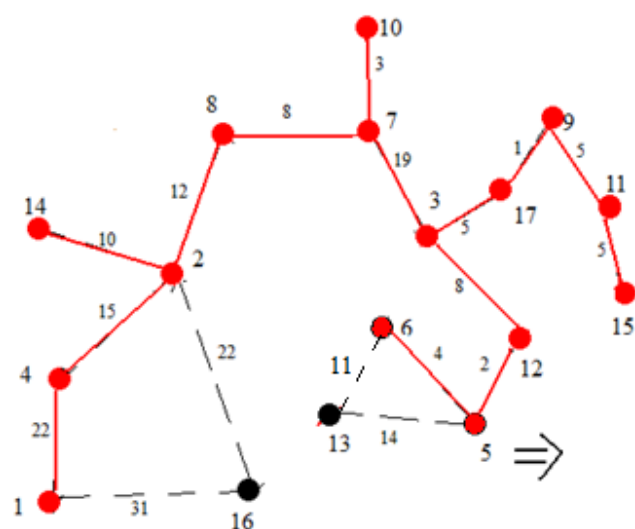
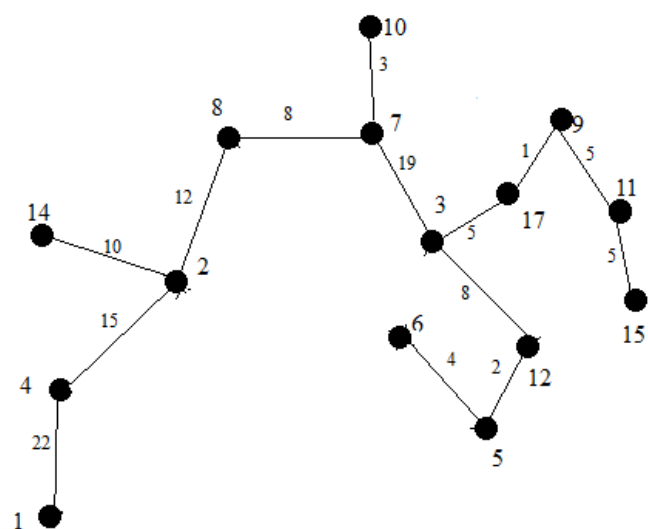
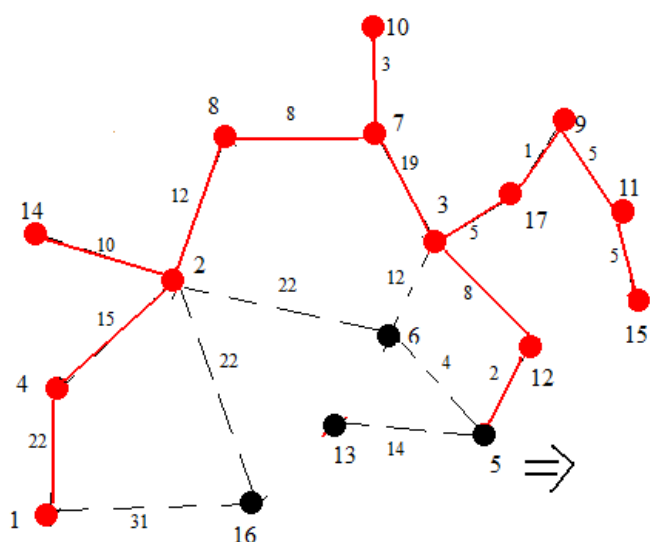
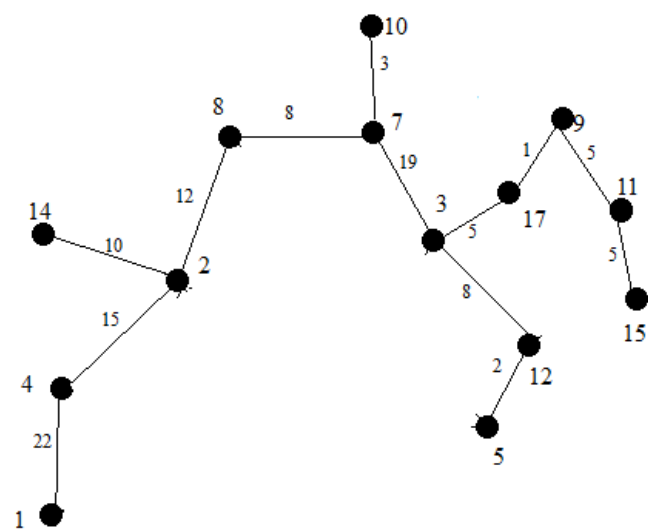
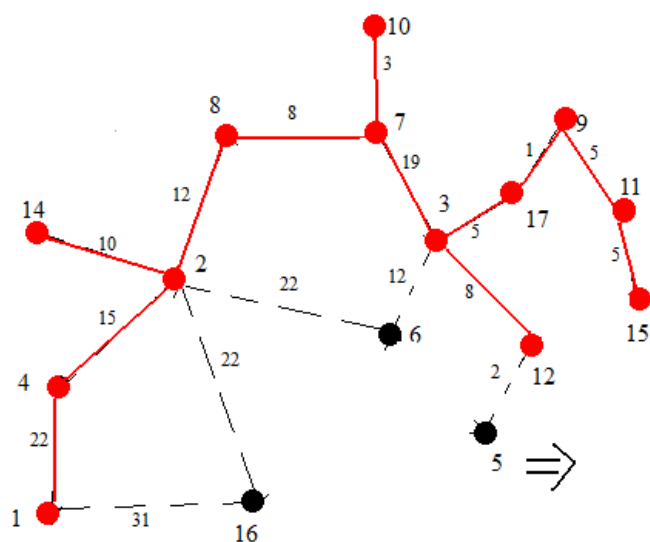


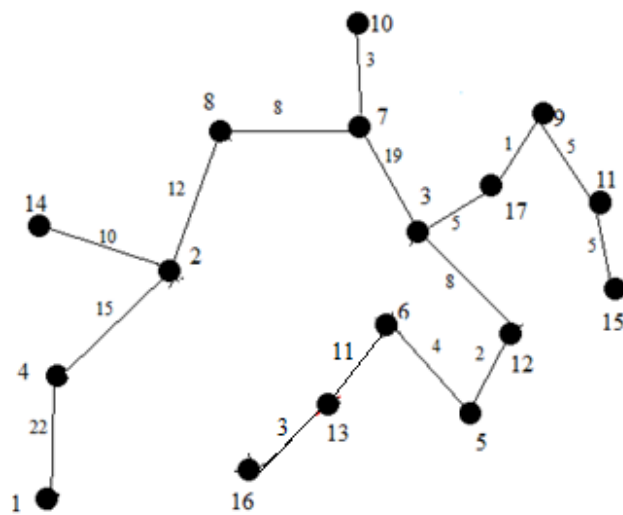
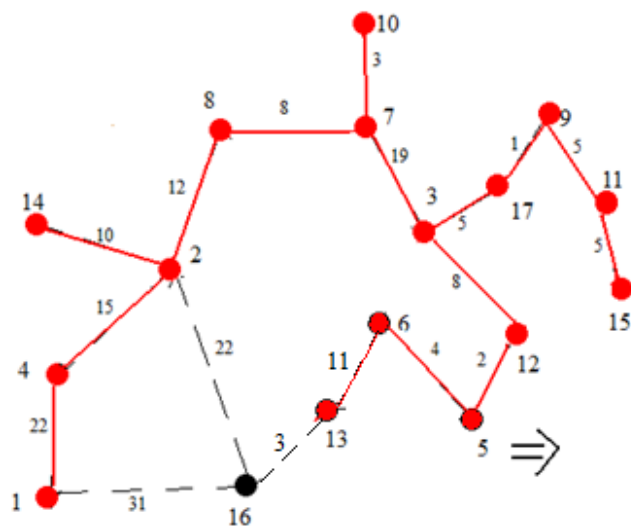




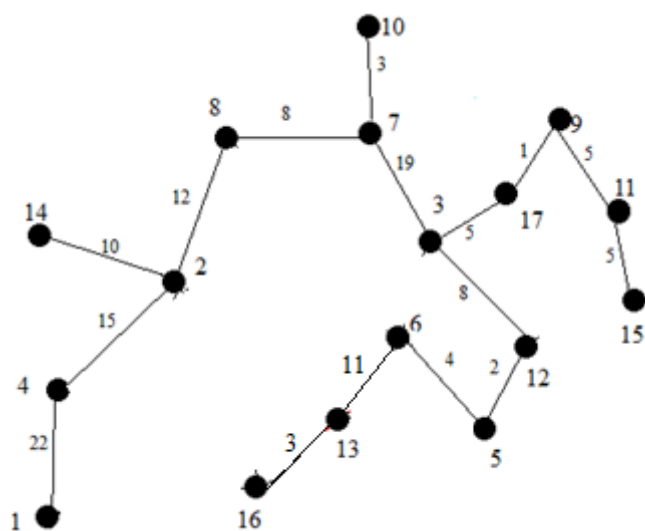








Остовное дерево найдено



Его вес равен

$$22+15+10+12+8+3+19+3+5+1+5+5+8+2+4+11+3=133$$

## Задача 2

С помощью алгоритма Дейкстры найдем кратчайшие пути от вершины 1 до всех остальных.

Начальные метки вершин

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
<b>(0,-)</b>	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$

11	12	13	14	15	16	17
$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$

1 итерация

Вершина 2:  $0+23=23 < \infty$  обновляем метку

Вершина 4:  $0+22=22 < \infty$  обновляем метку

Вершина 16:  $0+31=31 < \infty$  обновляем метку

Минимальную метку делаем постоянной (вершина 4)

<b>1</b>	2	3	<b>4</b>	5	6	7	8	9	10
<b>(0,-)</b>	(23,1)	$(\infty, -)$	<b>(22,1)</b>	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$

11	12	13	14	15	16	17
$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	(31,1)	$(\infty, -)$

2 итерация

Вершина 2:  $22+15=37 > 23$  метка не меняется.

Минимальную метку делаем постоянной (вершина 2)

<b>1</b>	<b>2</b>	3	<b>4</b>	5	6	7	8	9	10
<b>(0,-)</b>	<b>(23,1)</b>	$(\infty, -)$	<b>(22,1)</b>	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$

11	12	13	14	15	16	17
$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	(31,1)	$(\infty, -)$

3 итерация

Вершина 6:  $23+22=45 < \infty$  обновляем метку

Вершина 8:  $23+12=35 < \infty$  обновляем метку

Вершина 14:  $23+10=33 < \infty$  обновляем метку

Вершина 16:  $23+22=45 > 31$  метка не меняется

Минимальную метку делаем постоянной (вершина 16)

<b>1</b>	<b>2</b>	3	<b>4</b>	5	6	7	8	9	10
<b>(0,-)</b>	<b>(23,1)</b>	$(\infty,-)$	<b>(22,1)</b>	$(\infty,-)$	(45,2)	$(\infty,-)$	(35,2)	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$

11	12	13	14	15	<b>16</b>	17
$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	(33,2)	$(\infty,-)$	<b>(31,1)</b>	$(\infty,-)$

4 итерация

Вершина 13:  $31+3=34 < \infty$  обновляем метку

Минимальную метку делаем постоянной (вершина 14)

<b>1</b>	<b>2</b>	3	<b>4</b>	5	6	7	8	9	10
<b>(0,-)</b>	<b>(23,1)</b>	$(\infty,-)$	<b>(22,1)</b>	$(\infty,-)$	(45,2)	$(\infty,-)$	(35,2)	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$

11	12	13	<b>14</b>	15	<b>16</b>	17
$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	(34,16)	<b>(33,2)</b>	$(\infty,-)$	<b>(31,1)</b>	$(\infty,-)$

5 итерация

Минимальную метку делаем постоянной (вершина 13)

<b>1</b>	<b>2</b>	3	<b>4</b>	5	6	7	8	9	10
<b>(0,-)</b>	<b>(23,1)</b>	$(\infty,-)$	<b>(22,1)</b>	$(\infty,-)$	(45,2)	$(\infty,-)$	(35,2)	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$

11	12	<b>13</b>	<b>14</b>	15	<b>16</b>	17
$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	<b>(34,16)</b>	<b>(33,2)</b>	$(\infty,-)$	<b>(31,1)</b>	$(\infty,-)$

6 итерация

Вершина 5:  $34+14=48 < \infty$  обновляем метку

Вершина 6:  $34+11=45=45$  метку не меняем

Минимальную метку делаем постоянной (вершина 8)

<b>1</b>	<b>2</b>	3	<b>4</b>	5	6	7	<b>8</b>	9	10
<b>(0,-)</b>	<b>(23,1)</b>	$(\infty,-)$	<b>(22,1)</b>	$(48,13)$	$(45,2)$	$(\infty,-)$	<b>(35,2)</b>	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$

11	12	<b>13</b>	<b>14</b>	15	<b>16</b>	17
$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	<b>(34,16)</b>	<b>(33,2)</b>	$(\infty,-)$	<b>(31,1)</b>	$(\infty,-)$

7 итерация

Вершина 3:  $35+39=74 < \infty$  обновляем метку

Вершина 7:  $35+8=43 < \infty$  обновляем метку

Минимальную метку делаем постоянной (вершина 7)

<b>1</b>	<b>2</b>	3	<b>4</b>	5	6	<b>7</b>	<b>8</b>	9	10
<b>(0,-)</b>	<b>(23,1)</b>	$(74,8)$	<b>(22,1)</b>	$(48,13)$	$(45,2)$	<b>(43,8)</b>	<b>(35,2)</b>	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$

11	12	<b>13</b>	<b>14</b>	15	<b>16</b>	17
$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	<b>(34,16)</b>	<b>(33,2)</b>	$(\infty,-)$	<b>(31,1)</b>	$(\infty,-)$

8 итерация

Вершина 3:  $43+19=62 < 74$  обновляем метку

Вершина 10:  $43+3=46 < \infty$  обновляем метку

Минимальную метку делаем постоянной (вершина 6)

<b>1</b>	<b>2</b>	3	<b>4</b>	5	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	9	10
<b>(0,-)</b>	<b>(23,1)</b>	$(62,7)$	<b>(22,1)</b>	$(48,13)$	<b>(45,2)</b>	<b>(43,8)</b>	<b>(35,2)</b>	$(\infty,-)$	$(46,7)$

11	12	<b>13</b>	<b>14</b>	15	<b>16</b>	17
$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	<b>(34,16)</b>	<b>(33,2)</b>	$(\infty,-)$	<b>(31,1)</b>	$(\infty,-)$

9 итерация

Вершина 3:  $45+12=57 < 62$  обновляем метку

Вершина 5:  $45+4=49 > 48$  метку не меняем

Минимальную метку делаем постоянной (вершина 10)

<b>1</b>	<b>2</b>	3	<b>4</b>	5	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	9	<b>10</b>
<b>(0,-)</b>	<b>(23,1)</b>	(57,6)	<b>(22,1)</b>	(48,13)	<b>(45,2)</b>	<b>(43,8)</b>	<b>(35,2)</b>	$(\infty,-)$	<b>(46,7)</b>

11	12	<b>13</b>	<b>14</b>	15	<b>16</b>	17
$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	<b>(34,16)</b>	<b>(33,2)</b>	$(\infty,-)$	<b>(31,1)</b>	$(\infty,-)$

10 итерация

Минимальную метку делаем постоянной (вершина 5)

<b>1</b>	<b>2</b>	3	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	9	<b>10</b>
<b>(0,-)</b>	<b>(23,1)</b>	(57,6)	<b>(22,1)</b>	<b>(48,13)</b>	<b>(45,2)</b>	<b>(43,8)</b>	<b>(35,2)</b>	$(\infty,-)$	<b>(46,7)</b>

11	12	<b>13</b>	<b>14</b>	15	<b>16</b>	17
$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	<b>(34,16)</b>	<b>(33,2)</b>	$(\infty,-)$	<b>(31,1)</b>	$(\infty,-)$

11 итерация

Вершина 12:  $48+2=50 < \infty$  обновляем метку

Минимальную метку делаем постоянной (вершина 12)

<b>1</b>	<b>2</b>	3	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	9	<b>10</b>
<b>(0,-)</b>	<b>(23,1)</b>	(57,6)	<b>(22,1)</b>	<b>(48,13)</b>	<b>(45,2)</b>	<b>(43,8)</b>	<b>(35,2)</b>	$(\infty,-)$	<b>(46,7)</b>

11	<b>12</b>	<b>13</b>	<b>14</b>	15	<b>16</b>	17
$(\infty,-)$	<b>(50,5)</b>	<b>(34,16)</b>	<b>(33,2)</b>	$(\infty,-)$	<b>(31,1)</b>	$(\infty,-)$

12 итерация

Вершина 3:  $50+8=58 > 57$  метку не меняем

Вершина 15:  $50+15=65 < \infty$  обновляем метку

Минимальную метку делаем постоянной (вершина 3)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(0,-)	(23,1)	(57,6)	(22,1)	(48,13)	(45,2)	(43,8)	(35,2)	( $\infty$ , -)	(46,7)

11	12	13	14	15	16	17
( $\infty$ , -)	(50,5)	(34,16)	(33,2)	(65,12)	(31,1)	( $\infty$ , -)

13 итерация

Вершина 17:  $57+5=62 < \infty$  обновляем метку

Минимальную метку делаем постоянной (вершина 17)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(0,-)	(23,1)	(57,6)	(22,1)	(48,13)	(45,2)	(43,8)	(35,2)	( $\infty$ , -)	(46,7)

11	12	13	14	15	16	17
( $\infty$ , -)	(50,5)	(34,16)	(33,2)	(65,12)	(31,1)	(62,3)

14 итерация

Вершина 9:  $62+1=63 < \infty$  обновляем метку

Минимальную метку делаем постоянной (вершина 9)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(0,-)	(23,1)	(57,6)	(22,1)	(48,13)	(45,2)	(43,8)	(35,2)	(63,17)	(46,7)

11	12	13	14	15	16	17
( $\infty$ , -)	(50,5)	(34,16)	(33,2)	(65,12)	(31,1)	(62,3)

15 итерация

Вершина 11:  $63+5=68 < \infty$  обновляем метку

Минимальную метку делаем постоянной (вершина 15)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(0,-)	(23,1)	(57,6)	(22,1)	(48,13)	(45,2)	(43,8)	(35,2)	(63,17)	(46,7)

11	12	13	14	15	16	17
(68,9)	(50,5)	(34,16)	(33,2)	(65,12)	(31,1)	(62,3)

16 итерация

Вершина 11:  $65+5=70 > 68$  метку не меняем

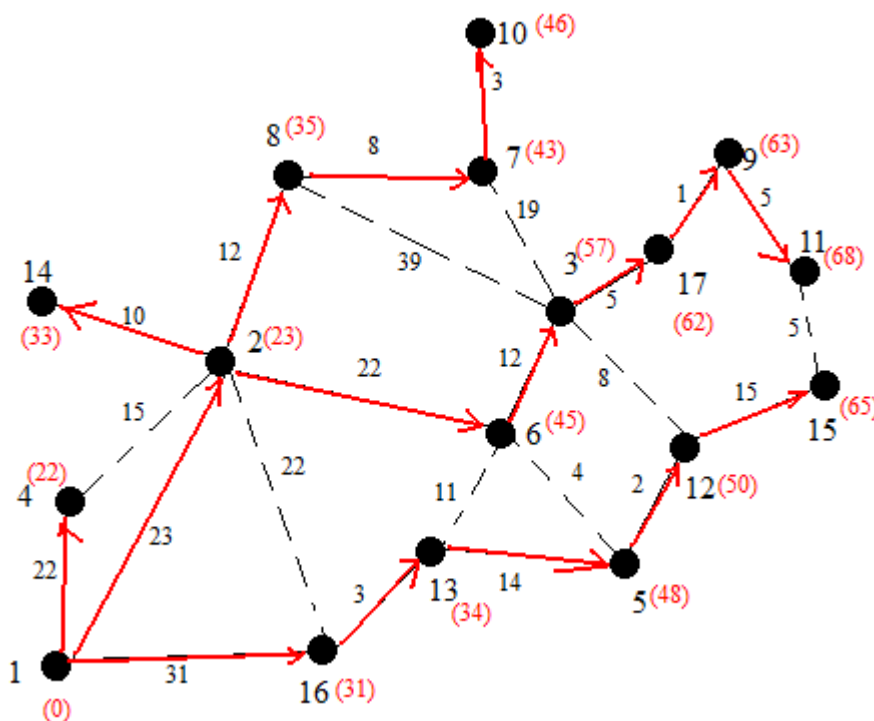
Минимальную метку делаем постоянной (вершина 11)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(0,-)	(23,1)	(57,6)	(22,1)	(48,13)	(45,2)	(43,8)	(35,2)	(63,17)	(46,7)

11	12	13	14	15	16	17
(68,9)	(50,5)	(34,16)	(33,2)	(65,12)	(31,1)	(62,3)

Алгоритм завершен.

Результат работы алгоритма

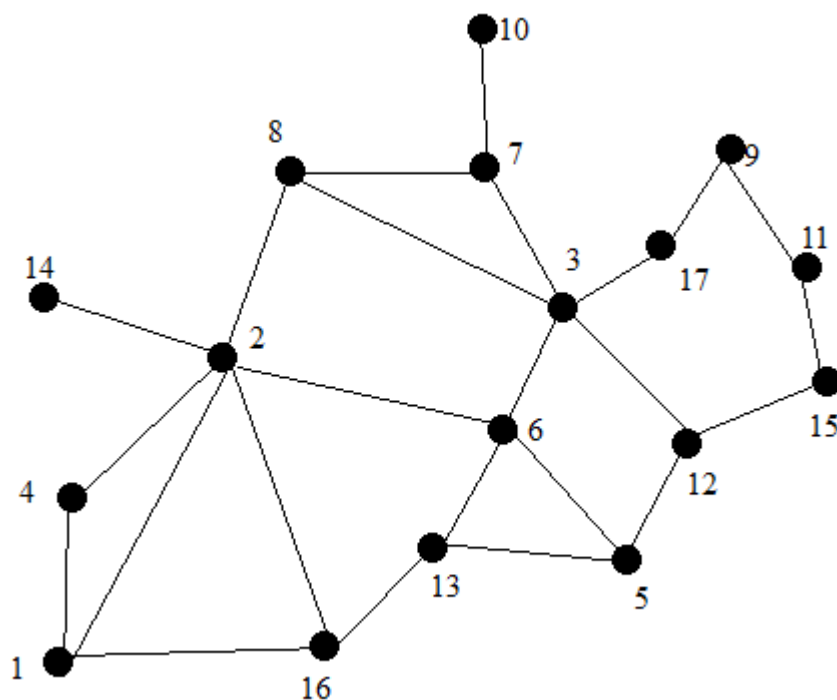




До вершины 2:	1→2	Протяженность: 23
До вершины 3:	1→2→6→3	Протяженность: 57
До вершины 4:	1→4	Протяженность: 22
До вершины 5:	1→16→13→5	Протяженность: 48
До вершины 6:	1→2→6	Протяженность: 45
До вершины 7:	1→2→8→7	Протяженность: 43
До вершины 8:	1→2→8	Протяженность: 35
До вершины 9:	1→2→6→3→17→9	Протяженность: 63
До вершины 10:	1→2→8→7→10	Протяженность: 46
До вершины 11:	1→2→6→3→9→11	Протяженность: 68
До вершины 12:	1→16→13→5→12	Протяженность: 50
До вершины 13:	1→16→13	Протяженность: 34
До вершины 14:	1→2→14	Протяженность: 33
До вершины 15:	1→16→13→5→12→15	Протяженность: 65
До вершины 16:	1→16	Протяженность: 31
До вершины 17:	1→2→6→3→17	Протяженность: 62

Задача 3.

Обход графа в ширину



Начинаем с вершины 1

1) С вершиной 1 смежны вершины 2,4,16. Добавляем их в очередь.  $Q=\{2,4,16\}$

Извлекаем из очереди вершину 2.

2)С вершиной 2 смежны вершины 6,8,14. Добавляем их в очередь.  $Q=\{4,16,6,8,14\}$

Извлекаем из очереди вершину 4.

3)У вершины 4 нет смежных непосещенных вершин.  $Q=\{16,6,8,14\}$

Извлекаем из очереди вершину 16.

4)С вершиной 16 смежна вершина 13. Добавляем ее в очередь.  $Q=\{6,8,14,13\}$

Извлекаем из очереди вершину 6.

5)С вершиной 6 смежны вершины 3 и 5. Добавляем их в очередь.  $Q=\{8,14,13,3,5\}$

Извлекаем из очереди вершину 8.

6)С вершиной 6 смежна вершина 7. Добавляем ее в очередь.  $Q=\{14,13,3,5,7\}$

Извлекаем из очереди вершину 14.

7)У вершины 14 нет смежных непосещенных вершин.  $Q=\{13,3,5,7\}$

Извлекаем из очереди вершину 13.

8)У вершины 13 нет смежных непосещенных вершин.  $Q=\{3,5,7\}$

Извлекаем из очереди вершину 3.

9)С вершиной 3 смежна вершина 17. Добавляем ее в очередь.  $Q=\{5,7,17\}$

Извлекаем из очереди вершину 5.

10)С вершиной 5 смежна вершина 12. Добавляем ее в очередь.  $Q=\{7,17,12\}$

Извлекаем из очереди вершину 7.

11)С вершиной 7 смежна вершина 10. Добавляем ее в очередь.  $Q=\{17,12,10\}$

Извлекаем из очереди вершину 17.

12)С вершиной 17 смежна вершина 9. Добавляем ее в очередь.  $Q=\{12,10,9\}$

Извлекаем из очереди вершину 12.

13)С вершиной 12 смежна вершина 5. Добавляем ее в очередь.  $Q=\{10,9,5\}$

Извлекаем из очереди вершину 10.

14)У вершины 10 нет смежных непосещенных вершин.  $Q=\{9,5\}$

Извлекаем из очереди вершину 9.

15)С вершиной 9 смежна вершина 11. Добавляем ее в очередь.  $Q=\{5,11\}$

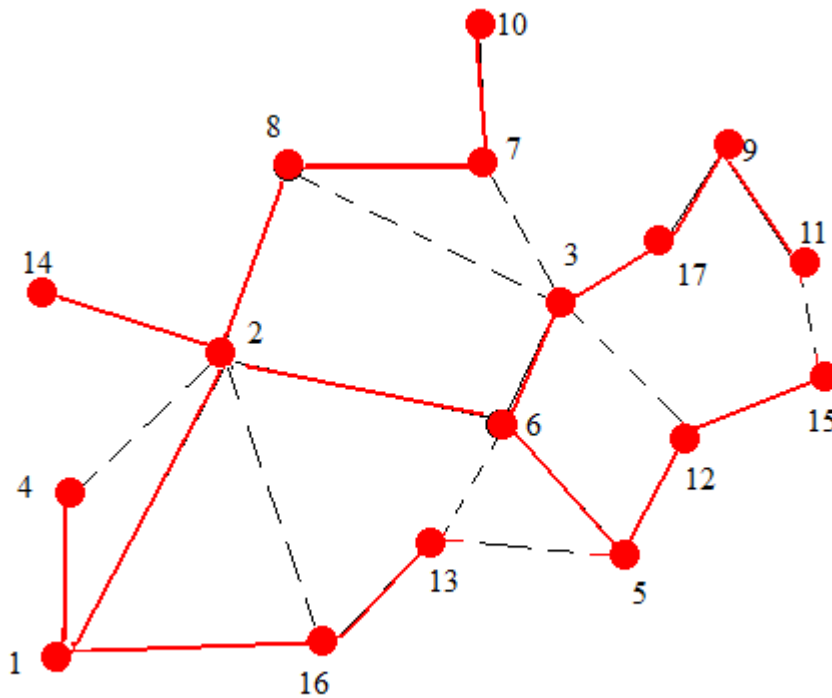
Извлекаем из очереди вершину 5.

16)У вершины 5 нет смежных непосещенных вершин.  $Q=\{11\}$

Извлекаем из очереди вершину 11.

17) У вершины 11 нет смежных непосещенных вершин.  $Q = \emptyset$

Очередь пуста. Алгоритм завершен.



Порядок обхода: 1,2,4,16,6,8,14,13,3,5,7,17,12,10,9,15,11

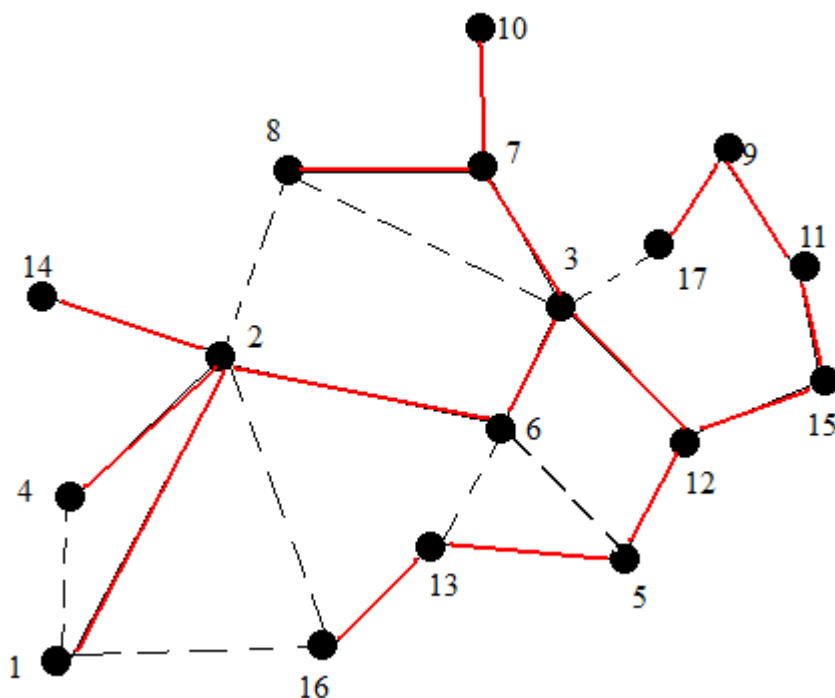
Обход графа в глубину

Начинаем с вершины 1

- 1) из вершины 1 переходим в вершину 2
- 2) из вершины 2 переходим в вершину 4
- 3) у вершины 4 нет смежных непосещенных вершин, возвращаемся в 2
- 4) из вершины 2 переходим в вершину 6
- 5) из вершины 6 переходим в вершину 3
- 6) из вершины 3 переходим в вершину 7
- 7) из вершины 7 переходим в вершину 8
- 8) у вершины 8 нет смежных непосещенных вершин, возвращаемся в 7
- 9) из вершины 7 переходим в вершину 10
- 10) у вершины 10 нет смежных непосещенных вершин, возвращаемся в 7
- 11) у вершины 7 нет смежных непосещенных вершин, возвращаемся в 3
- 12) из вершины 3 переходим в вершину 12
- 13) из вершины 12 переходим в вершину 5

- 14) из вершины 5 переходим в вершину 13
- 15) из вершины 13 переходим в вершину 16
- 16) у вершины 16 нет смежных непосещенных вершин, возвращаемся в 13
- 17) у вершины 13 нет смежных непосещенных вершин, возвращаемся в 5
- 18) у вершины 5 нет смежных непосещенных вершин, возвращаемся в 12
- 19) из вершины 12 переходим в вершину 15
- 20) из вершины 15 переходим в вершину 11
- 21) из вершины 11 переходим в вершину 9
- 22) из вершины 9 переходим в вершину 17
- 23) у вершины 17 нет смежных непосещенных вершин, возвращаемся в 9
- 24) у вершины 9 нет смежных непосещенных вершин, возвращаемся в 11
- 25) у вершины 11 нет смежных непосещенных вершин, возвращаемся в 15
- 26) у вершины 15 нет смежных непосещенных вершин, возвращаемся в 12
- 27) у вершины 12 нет смежных непосещенных вершин, возвращаемся в 3
- 28) у вершины 3 нет смежных непосещенных вершин, возвращаемся в 6
- 29) у вершины 6 нет смежных непосещенных вершин, возвращаемся в 2
- 30) из вершины 2 переходим в вершину 14
- 31) у вершины 14 нет смежных непосещенных вершин, возвращаемся в 2
- 32) у вершины 2 нет смежных непосещенных вершин, возвращаемся в 1
- 33) у вершины 1 нет смежных непосещенных вершин.

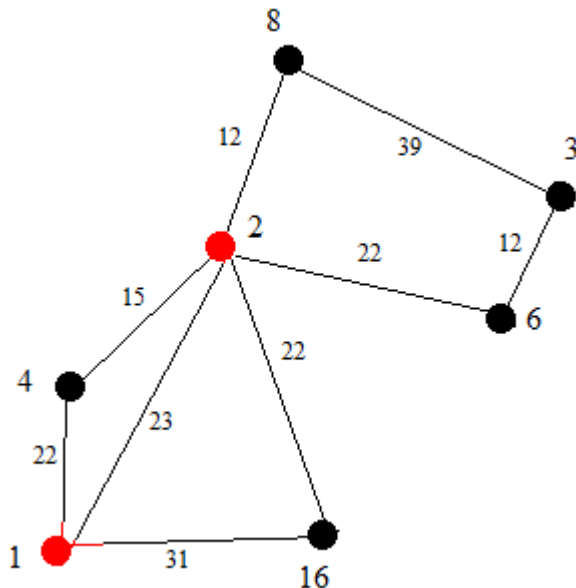
Алгоритм завершен



Порядок обхода: 1,2,4,6,3,7,8,10,12,5,13,16,15,11,9,17,14

Для поиска в глубину в данном случае потребовалось в 2 раза больше итераций, чем для поиска в ширину. Рациональнее использовать обход в ширину в данном случае.

Выделим подграф с 7 вершинами, у которого лишь 2 вершины имеют нечетную степень (вершины 1 и 2)

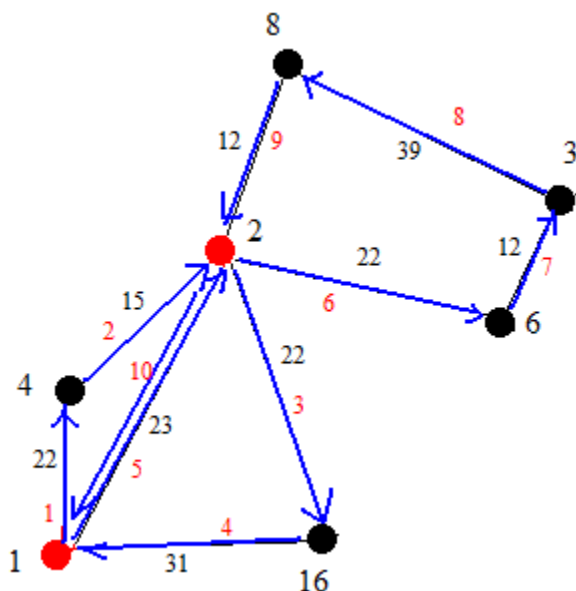


Найдем кратчайший путь из вершины 1 в вершину 2 (он очевиден:  $1 \rightarrow 2$ ).

Тогда, ребро (1,2) в маршруте китайского почтальона используется дважды, а остальные ребра по одному разу.

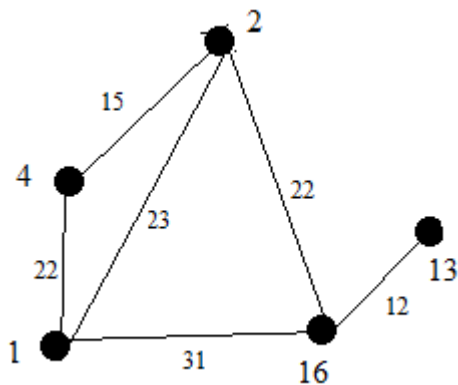
Получаем маршрут:  $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 16 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 2 \rightarrow 1$

Его протяженность равна:  $22+15+22+31+23+22+12+39+12=188$

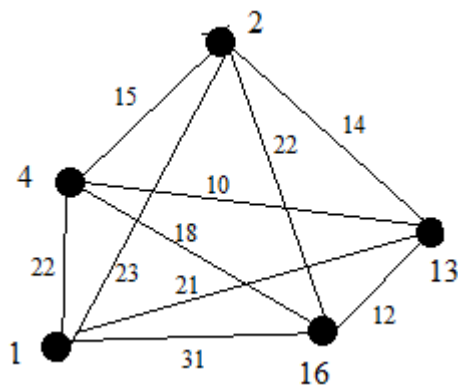


## Задача 5

Выделим подграф на 5 вершинах



Достроим его до полного графа (вес недостающим ребрам зададим произвольно)



Определим верхнюю границу задачи комивояжера с помощью алгоритма ближайшего соседа

Начнем с вершины 1.

Ближайший сосед к вершине 1 это 13, переходим в нее.

Ближайший сосед к вершине 13 это 4, переходим в нее.

Ближайший сосед к вершине 4 это 2, переходим в нее.

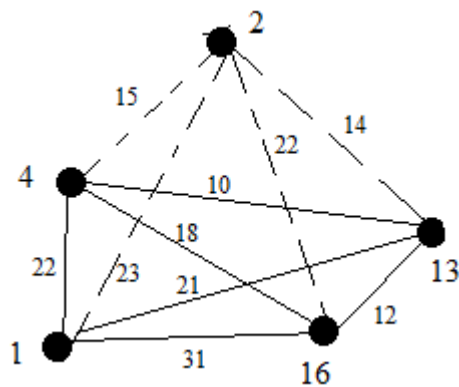
Ближайший сосед к вершине 2 из непосещенных это 16, переходим в нее.

Возвращаемся в вершину 1.

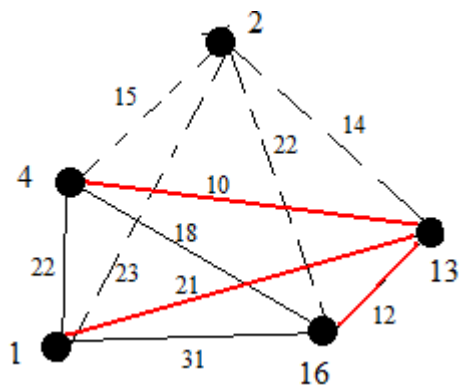
Получаем гамильтонов путь:  $1 \rightarrow 13 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 16 \rightarrow 1$

Его длина равна:  $21 + 10 + 15 + 22 + 31 = 99$

Удалим из графа вершину 2 вместе с инцидентными ребрами.



В оставшемся графе выделим минимальное остовное дерево



Вес остова:  $10+12+21=43$

Два кратчайших ребра из вершины 2 – это  $(2,4)=15$  и  $(2,13)=14$

Значит, нижняя граница:  $43+15+14=72$

Таким образом, Длина гамильтонова цикла наименьшей длины соответствует неравенству:

$$72 \leq L \leq 99$$