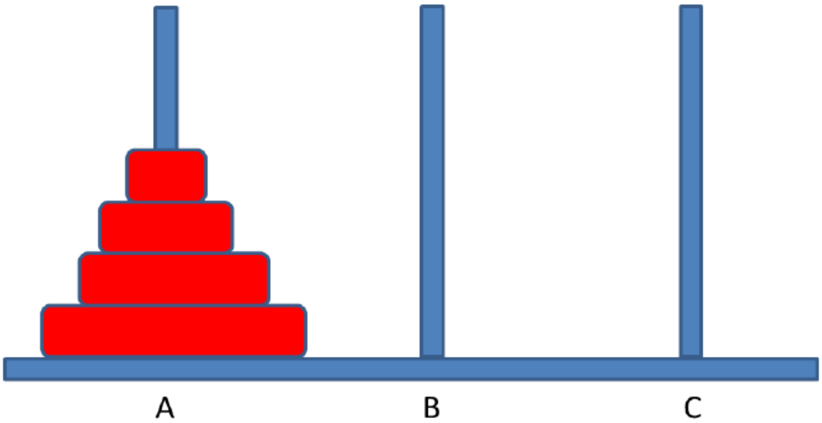
1

Türme von Hanoi

Das Spiel TÜRME VON HANOI besteht aus drei Holzstäben A, B und C. Auf Stab A sind n Scheiben mit nach oben sukzessiv kleiner werdenden Radien aufgestapelt. Es soll ein Algorithmus gefunden werden, der den Turm von Stab A auf den Stab C versetzt. Dabei darf in jedem Schritt immer nur eine Scheibe auf einen leeren Stab oder auf eine größere Scheibe versetzt werden.




```python
# hanoi.py
def hanoi(n, start, end, helper):
  if n == 1:
  print(start + "->" + end)
  else:
    hanoi(n-1, start, helper, end)
    print(start + "->" + end)
    hanoi(n-1, helper, end, start)

def user_input():
  return int(input())

if __name__ == "__main__":
  n = user_input()
  hanoi(n, 'A', 'C', 'B')
```

Da man für eine Scheibe einen Zug, für 2 Scheiben 3 Züge und für 3 Scheiben 7 Züge benötigt, lässt sich ein Pattern naheliegen, dass man allgemein für n Scheiben $2^n - 1$ Züge benötigt.

Beweis. **Beweisen Sie induktiv, dass diese Formel richtig ist**

Vollständige Induktion

Induktionsanfang:

Für $n = 1 \Rightarrow 2^1 - 1 = 1 \longleftarrow$ ist wahr

Induktionsvoraussetzung:

Gilt für jede $n \in \mathbb{N}$

Induktionsschritt:

Für $n = n + 1 \Rightarrow 2^{n+1} - 1 = 2 * 2^n - 1 = 2 * (2^n - 1) \longleftarrow$ Voraussetzung

$\square$

Es ist nicht möglich, den Turm mit weniger Zügen zu versetzen

Annahme: Es ist möglich, den Turm von Hanoi mit weniger als $2^n - 1$ Zügen zu versetzen.

$$n = 1 \quad \Rightarrow \quad 2^{n-1} - 1 = 2^{1-1} - 1 = 2^0 - 1 = 0.$$

Da aber mindestens 1 Zug benötigt wird, folgt, $\lightning$

2 Extra Aufgaben

2.1 Aufgabe 3.10

Wir betrachten die folgende rekursiv definierte Folge:

$$b_n = \begin{cases} 1, \text{für } n = 1 \\ \sqrt{1 + b_{n-1}}, \text{für } n > 2 \end{cases}$$

Beweis. Beweisen dass diese Folge gegen den goldenen Schnitt konvergiert:

$$\lim n \to \inf b_n = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Antwort: Um zu zeigen, dass die rekursiv definierte Folge b_n gegen den goldenen Schnitt $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ konvergiert, betrachten wir die Definition der Folge:

$$b_n = \begin{cases} 1, & \text{für } n = 1 \\ \sqrt{1 + b_{n-1}}, & \text{für } n > 1 \end{cases}$$

Schritt 1: Zu Zeigen, dass die Folge beschränkt und monoton ist:

Zuerst zeigen wir, dass die Folge b_n beschränkt ist. Wir vermuten, dass $b_n < \phi$ für alle n.
Wir zeigen dies durch Induktion.

Induktionsanfang: Für $n = 1$ haben wir $b_1 = 1 < \phi$.

Induktionsannahme: Angenommen, $b_k < \phi$ für ein $k \geq 1$.

Induktionsschritt: Wir zeigen, dass $_{k+1} < \phi$:

$$b_{k+1} = \sqrt{1 + b_k} < \sqrt{1 + \phi}$$

Da $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, gilt:

$\sqrt{1 + \phi} = \sqrt{1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$ Nun zeigen wir, dass $\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} < \phi$

$$\phi^2 = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{4} = \frac{6 + 2\sqrt{5}}{4} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

Somit ist $\sqrt{1 + \phi} < \phi \Rightarrow b_{k+1} < \phi$.

Durch Induktion folgt, dass $b_n < \phi$ für alle n.

Schritt 2: Zu Zeigen, dass die Folge monoton wächst

Nun zeigen wir, dass b_n monoton wachsend ist, d.h. $b_n < b_{n+1} \forall n$.
Wir zeigen dies durch vollsändige Induktion:

Induktionsanfang: Für $n = 1$ haben wir $b_1 = 1 < b_2 = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$.

Induktionsannahme: Angenommen, $b_k < b_{k+1}$

Induktionsschritt: Wir zeigen, dass $b_{k+1} < b_{k+2}$:

$$b_{k+2} = \sqrt{1 + b_{k+1}}$$

Da $b_k < b_{k+1}$, gilt $1 + b_k < 1 + b_{k+1}$.

Da die Funktion $(x) = \sqrt{1 + x}$ monoton wachsend ist, folgt:

$$b_{k+1} = \sqrt{1 + b_k} < \sqrt{1 + b_{k+1}} = b_{k+2}$$

Somit ist b_n monoton wachsend.

Da b_n eine monoton wachsende und beschränkte Folge ist, konvergiert sie.

Sei $L = \lim_{n\to\infty} b_n$ dann gilt:

$$L = \sqrt{1 + L}$$

Quadrieren beider Seiten ergibt:

$$L^2 = 1 + L \implies L^2 - L - 1 = 0$$

$$=> L = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Da $b_n >= 0$

$$=> L = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \phi$$

$$=> \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$\square$

https://github.com/SpiXFamily/Rekursion-MLL