Rekursive Berechnung von Quadratwurzeln

Die Wurzel einer positiven reellen Zahl ***a***, die > *1* ist, ist ebenfalls > *1*. Ist***a*** < *1*, ist die Wurzel auch < *1.* Aus dieser Feststellung kann abgeleitet werden, dass

$$1 + r = \sqrt{a}$$

Gl. 95

worin ***r*** ein noch nicht bekannter Rest ist. ***r*** ist positiv, wenn ***a*** > *1* sonst negativ.

Beidseitiges quadrieren von Gl. 95 führt auf

$$(1 + r)^2 = a$$

Gl. 96

Auflösen des Binoms

$$1 + 2r + r^2 = a$$

Gl. 97

und Umstellen

$$r \cdot (2 + r) = a - 1$$

Gl. 98

Schließlich folgt die Rekursionsvorschrift für die Berechnung des Rests ***r***:

$$r = \frac{a-1}{2+r}$$

Gl. 99

Das ***r*** der linken Seite von Gl. 99 kann beliebig oft in das ***r*** der rechten Seite eingesetzt werden. Dies entspricht dem Selbstaufruf, der für Rekursionen typisch ist.

Für numerische Anwendungen wird Gl. 5-8 besser so geschrieben:

$$r_{i+1} = \frac{a-1}{2+r_i}$$

Gl. 100

Worin ***i*** den aktuellen Rekursionsschritt bezeichnet.

Beispiel

Gesucht ist die Quadratwurzel aus 2. Die Anwendung von Gl. 100 führt auf:

$$r_{i+1} = \frac{2-1}{2+r_i} = \frac{1}{2+r_i}.$$

Mit der Startannahme, dass der Rest $\boldsymbol{r_0}$ gleich Null ist, führt der erste Schritt auf $\boldsymbol{r_1}$ = *0,5* und so weiter:

$$r_{i+1} = \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+.....+\frac{1}{2+r_0}}}}$$

Dies ist ein Kettenbruch, der bereits nach vier Schritten eine Wert für den Rest von $\boldsymbol{r_4}$ = *0,41428...* Der gesuchte Wurzelwert ergibt sich dann zu

1 + r = 1,41428...

Der korrekte Wert lautet *1,41421...*