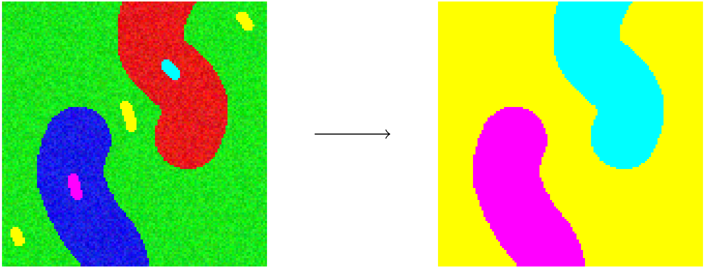
Segmentation d'image par marches aléatoires

Problème

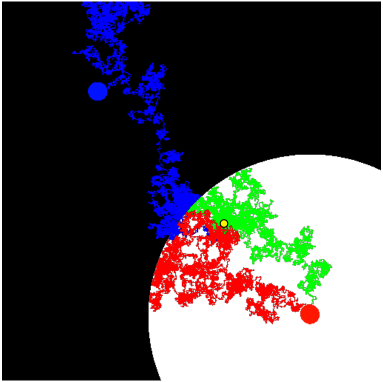
La **segmentation d'image** est un problème de vision par ordinateur qui consiste à **partitionner** une image donnée en différentes régions selon des **critères** prédéfinis.

On s'intéresse ici au cas où **certains pixels sont étiquetés**, on cherche alors à attribuer une étiquette aux autres pixels.
On supposera de plus que les **objets** sont **homogènes** et **tous étiquetés**.



Solution

On va faire des **marches aléatoires** partant de chacun des pixels, et on retient l'étiquette du pixel sur lequel on retombe le plus souvent en premier.

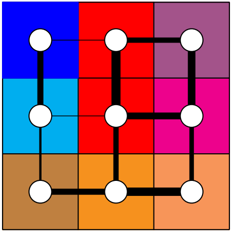


Graphe

$$V = [\![0, H-1]\!] \times [\![0, L-1]\!]$$

$$E = \{\, \{v_i, v_j\} \subseteq V \quad | \quad \|v_i - v_j\| = 1 \,\}$$

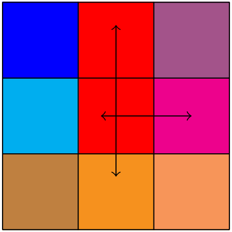
$$\forall i, j \in V, \begin{cases} \omega_{ij} \in \mathbb{R}_+^* & \text{si } e_{ij} \in E \quad (\text{p.ex. } e^{-\beta\|p_i - p_j\|^2}) \\ \omega_{ij} = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



Marches aléatoires

$$\forall i \in V, \quad d_i = \sum_{e_{ij} \in E} \omega_{ij}$$

$$\forall (i,j) \in V^2, \quad p(i \rightarrow j) = \frac{\omega_{ij}}{d_i}$$



Marches aléatoires

$$x_i^s = \mathbb{P}(\text{"la marche aléatoire partant de } i \text{ arrive en premier en } S\text{"})$$

Alors

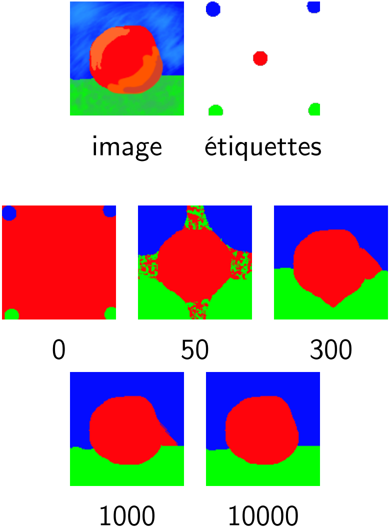
$$\forall i \in V_{NE}, \forall s \in S, \quad x_i^s = \frac{\sum\limits_{e_{ij} \in E} \omega_{ij} x_j^s}{d_i}$$

On cherche x avec comme conditions aux bords

$$\forall i \in V_E, \forall s \in S, \quad x_i^s = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ est étiqueté par } s \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Algorithme : Automate cellulaire

entrée: graphe, nombre n d'itérations
sortie : probabilités
$x \leftarrow$ répartition approximative avec
  conditions aux bords;
pour k **de** *1* **à** n **faire**
    pour chaque i **dans** V_{NE} **faire**
        pour chaque s **dans** S **faire**
            $\underline{x_i^s} = \dfrac{\sum_{e_{ij} \in E} \omega_{ij}\, x_j^s}{d_i}$;
        fin
    fin
    $x \leftarrow \underline{x}$;
fin
renvoie x;



Proposition

Les valeurs prises par une fonction harmonique sont entre les extrema des conditions aux bords.

Corollaire

Les fonctions harmoniques sont uniques pour des conditions aux bords fixées.

Résolution analytique

Preuve :
Soit x_i^s un maximum sur V_{NE}.
Si i est dans l'intérieur de V_{NE}, $x_i^s = \frac{\sum_{e_{ij}} \omega_{ij} x_j^s}{d_i}$ avec les j dans V_{NE} donc $x_j^s = x_i^s$.
On se ramène donc au cas où i est sur les bords de V_{NE},
$x_i^s = \frac{\sum_{e_{ij}} \omega_{ij} x_j^s}{d_i} + \frac{\sum_{e_{ik}} \omega_{ik} x_k^s}{d_i}$ avec les j dans V_{NE} et les k dans V_E.
Alors il y a un k tel que $x_k^s >= x_i^s$.
Idem si x_i^s est un minimum.

Preuve du Corollaire :
Soit x et y deux fonctions harmoniques avec mêmes conditions aux bords. Alors la fonction $(x - y)$ est aussi harmonique avec 0 comme condition aux bords, donc $x = y$.

Résolution analytique

$$L_{ij} = \begin{cases} d_i & \text{si } i = j \\ -\omega_{ij} & \text{sinon} \end{cases}$$

Proposition

La solution x au problème est la fonction qui minimise ${}^t xLx$.

Résolution analytique

$$^t xLx = \sum_{i \in V} x_i (x_i d_i - \sum_{j \in V} \omega_{ij} x_j) = \sum_{e_{ij} \in E} \omega_{ij} (x_i - x_j)^2$$

Donc $^t xLx$ est convexe et $^t xLx \xrightarrow[x \to \infty]{} \infty$ donc pour toutes conditions aux bords il existe un minimum atteint pour x.
Soit $i \in V_{NE}$, on isole le terme

$$\begin{aligned}
&\sum_{e_{ij} \in E} \omega_{ij} (x_i - x_j) \\
=&\|X_j - x_i \mathbb{1}\|^2 \qquad \text{avec } < a, b >= \sum_{e_{ij} \in E} \omega_{ij} a_i b_j \\
=&\|X_j\|^2 - 2x_i < X_j, \mathbb{1} > + x_i^2 \|\mathbb{1}\|^2
\end{aligned}$$

La somme est minimale donc

$$x_i = \frac{\sum_{e_{ij} \in E} \omega_{ij} \, x_j}{d_i}$$

Résolution analytique

$$L = \begin{bmatrix} L_E & B \\ {}^tB & L_{NE} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_E \\ x_{NE} \end{bmatrix}$$

$$(Lx)_i = x_i d_i - \sum_{e_{ij} \in E} \omega_{ij} x_j$$

Donc

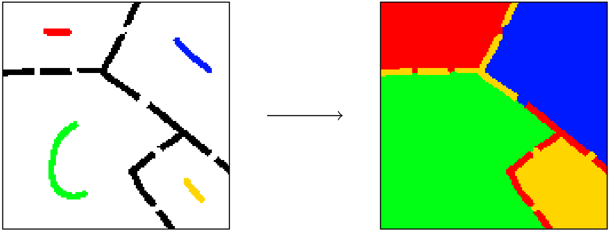
$$Lx = \begin{bmatrix} ? \\ 0 \end{bmatrix}$$

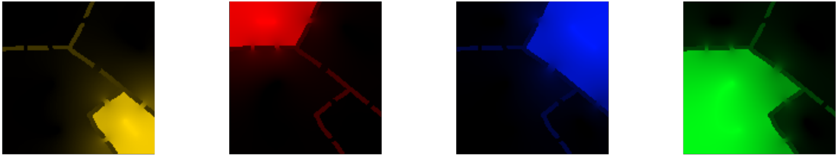
Donc

$$L_{NE}\, x_{NE} = -{}^tB\, x_E$$

$\implies$ Résolution de $(|S|-1)$ sytèmes linéaires creux de grande taille (5 coefficients non nuls par ligne/colonne dans L), le dernier s'obtenant à partir des autres, $x_i^{|S|} = 1 - \sum_{s=1}^{|S|-1} x_i^s$.

Exemples





Exemples