第09讲 基底变换

传媒与信息工程学院
欧 新 宇

- 向量和向量组
- 向量空间和子空间
- 线性相关性
- 空间的张成
- 维数、基底与坐标
- 构成基底的条件
- 基底变换
- 基底变换的实例

本讲要点

- ✓ 理解基底变化和坐标变换的原理
- ✓ 学会从将标准基$[e_1,e_2]$ 下的坐标迁移到任意基$[u_1,u_2]$，并求转移矩阵
- ✓ 学会从将任意基$[u_1,u_2]$ 下的坐标迁移到标准基$[e_1,e_2]$，并求转移矩阵
- ✓ 学会从将任意基$[u_1,u_2]$ 下的坐标迁移到任意基$[v_1,v_2]$，并求转移矩阵
- ✓ 重点掌握配合*Python*描述实现上述功能

基于基底变换的坐标变换

1. 基于基底变换的坐标变换

在进行**坐标变换**的时候，我们有时候也会将其解释为基底变换，事实上坐标变换和基底变换在某种程度上可以理解为是一回事。与此同时，我们也可以说这是向量的基底变换，因为在空间中，我们通常将向量称成为坐标。所不同的是，**基底变换**描述的是坐标的参照体系的变换，而**坐标变换**描述的是一个向量在不同坐标系下的具体值的变换。

简单的说，给定一个基于特定基底U的坐标x，其坐标变换的实质就是将该坐标 x 从基底 U 迁移到基底V，得到新的坐标值。

此处我们可以将坐标变换表示为： $[x]_U -> [x]_V$。

1. 基于基底变换的坐标变换

- 基于基底的坐标
- 从矩阵乘法的角度理解基底变换和坐标变换
- 从标准基开始的基底变换
- 从任意基开始的基底变换

1. 基于基底的坐标

基于基底的坐标

【定义】

假设二维空间R^2存在标准基为e_1,e_2，任何R^2中的向量 x 都可以表示为线性组合: $x=x_1e_1+x_2e_2$。标量 x_1 和 x_2 可以看成是 x 在标准基下的坐标。

事实上，对任意R^2的基 $\{y, z\}$，给定向量 x 可唯一地表示为线性组合: $x=\alpha y+\beta z$，标量α,β为 x 相应于基$\{y,z\}$的坐标。

2. 基于基底的坐标

基于基底的坐标

对基$\{y,z\}$中的元素进行排序，使得 y 为第一个基向量，z 为第二个基向量，并将这个有序的基记为 $[y,z]$ 。然后称向量$(\alpha,\beta)^T$为 x 对应于 $[y,z]$ 的坐标向量。

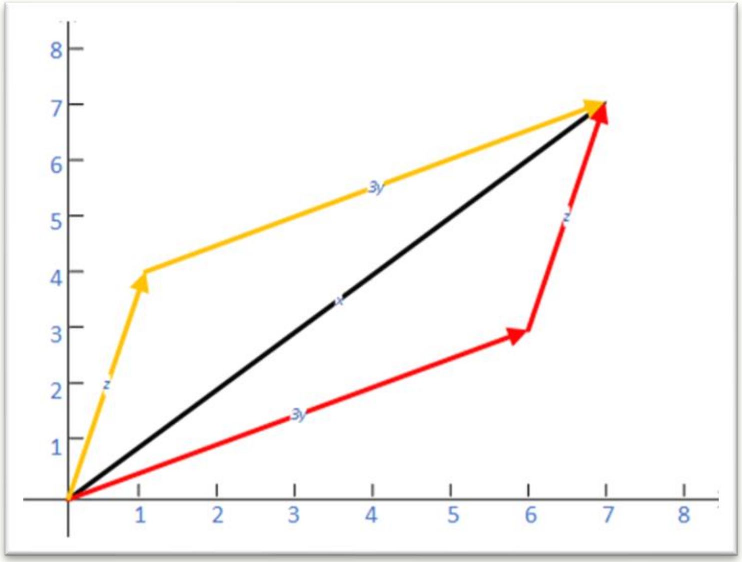
注意，如果交换基向量的顺序为$[z,y]$，则必须同时交换坐标向量。x 对应于 $[z,y]$ 的坐标向量为 $(\beta,\alpha)^T$ 。当使用下标基时，例如$\{u_1,u_2\}$，下标就表示基向量的一个顺序。

2. 基于基底的坐标

例题讲解

【例9.1】 令 $\boldsymbol{y}=(2,1)^T$，$\boldsymbol{z}=(1,4)^T$ 。向量$\boldsymbol{y}$和$\boldsymbol{z}$线性无关，且构成R^2的一组基。向量 $\boldsymbol{x}=(7,7)^T$ 可写为线性组合：$\boldsymbol{x}=3\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}$。此处，$\boldsymbol{x}$相应于$[\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}]$的坐标向量是 $(3,1)^T$。从几何上看，坐标向量表示如何从原点移动到点(7,7)，即首先沿着$\boldsymbol{y}$方向，然后沿着$\boldsymbol{z}$方向。

如果把z看作是第一个基向量，$\boldsymbol{y}$是第二个基向量，则：$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{z}+3\boldsymbol{y}$。$\boldsymbol{x}$对应于有序基$[\boldsymbol{z},\boldsymbol{y}]$的坐标向量为$(1,3)^T$ 。从几何上看，这个向量告诉我们如何从原点移动到点(7,7)，即首先沿着$\boldsymbol{z}$方向，然后沿着y方向移动。



2. 基于基底的坐标

例题讲解：人口迁移

【例5.4】假设一个大城市的总人口保持相对固定；然而，每年6%的人从城市搬到郊区，2%的的人从郊区搬到城市。如果初始时，30%的人生活在城市，70%的人生活中郊区，那么10年后这些比例有什么变化？30年后呢？50年后呢？长时过程意味着什么？

解：人口的变化可由矩阵乘法确定。

若令：$A=\begin{bmatrix}0.94 & 0.02\\ 0.06 & 0.98\end{bmatrix}$ 及 $x=\begin{bmatrix}0.3\\ 0.7\end{bmatrix}$。

其中，0.94表示一年后仍然生活在城市的人口比例，0.02表示从郊区搬到城市的人口比例；0.06表示从城市搬到郊区的人口比例，0.98表示仍然生活在郊区的人口比例。

2. 基于基底的坐标

例题讲解：人口迁移

则，1年后，在城市和郊区生活的人口比例可由 $\boldsymbol{x}_1=A\boldsymbol{x}_0$ 求得；2年后的比例可由 $\boldsymbol{x}_2=A\boldsymbol{x}_1=A^2\boldsymbol{x}_0$ 求得；一般地，n年后的比例可由 $\boldsymbol{x}_n=A^n\boldsymbol{x}_0$ 给出。

如果计算n=10，30和50时的百分比，并将它们舍入到最接近的百分比，我们有：

$$\boldsymbol{x}_1=A^1\boldsymbol{x}_0=\begin{bmatrix}0.296\\0.704\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}_{10}=A^{10}\boldsymbol{x}_{10}=\begin{bmatrix}0.272\\0.728\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{x}_2=A^2\boldsymbol{x}_2=\begin{bmatrix}0.292\\0.708\end{bmatrix},\quad \mathbf{x}_{30}=A^{30}\boldsymbol{x}_{10}=\begin{bmatrix}0.254\\0.745\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{x}_{50}=A^{50}\boldsymbol{x}_{10}=\begin{bmatrix}0.250\\0.749\end{bmatrix}$$

2. 基于基底的坐标

例题讲解：人口迁移

```python
import numpy as np
# np.set_printoptions(formatter={'float': '{: 0.2f}'.format})

A0 = np.array([[0.94,0.02],[0.06,0.98]])
x = np.array([[0.3],[0.7]])

n = 50
years = [1,2,10,30,50]

A = A0
for year in range(n):  # year的取值范围是[0:49],其中0为第一年，49为第50年
    res = np.dot(A, x)
    A = np.dot(A, A0)
    if year+1 in years:
        print('{:2d}年后的居住比例为：{}'.format(year+1, res.T))
```

当n持续增加时，向量序列 $x_n=A^n x_0$ 将收敛到极限$x=[0.25,0.75]^T$ 。向量x的极限称为该过程的**稳态向量（steady-state vector）**。有兴趣的同学可以查询有关**马尔可夫过程(Markov process)**的相关文献。

课堂互动一 Link

从矩阵乘法的角度理解基底变换

3. 从矩阵乘法的角度理解基底变换（坐标变换）

基于二阶方阵的基底变换（坐标变换）

前面我们说过向量的坐标必须依托于基底的选取，也就是说，向量的坐标在明确了基底的前提下才有实际意义。而对于二维列向量，我们说它对应到空间中的坐标是(x, y)，其实就是基于默认基底：$\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)$. 那么二维基向量的完整表达就应该是：

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = x\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}。$$

3. 从矩阵乘法的角度理解基底变换（坐标变换）

基于二阶方阵的基底变换（坐标变换）

下面我们就利用这个概念来讲矩阵与向量的乘法运算进行展开，进一步理解坐标变换的过程。

给定一个矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，若存在向量$\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$，则它们之间的乘法关系可以表示为：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Au} &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\left(x\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}+y\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \\ &= x\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}+y\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= x\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}+y\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\end{aligned}$$

3. 从矩阵乘法的角度理解基底变换（坐标变换）

基于二阶方阵的基底变换（坐标变换）

更连贯地表达，我们可以认为在矩阵$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$的作用下，向量 u 将从**标准基迁移到一个新的基下**，即完成了坐标变换。

$$x\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=x\begin{bmatrix}a\\c\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}b\\d\end{bmatrix}$$

具体而言，通过乘法运算，矩阵把向量的基底进行了变换，旧的基底$\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)$ 变成了新的基底$\left(\begin{bmatrix}a\\c\end{bmatrix},\begin{bmatrix}b\\d\end{bmatrix}\right)$。

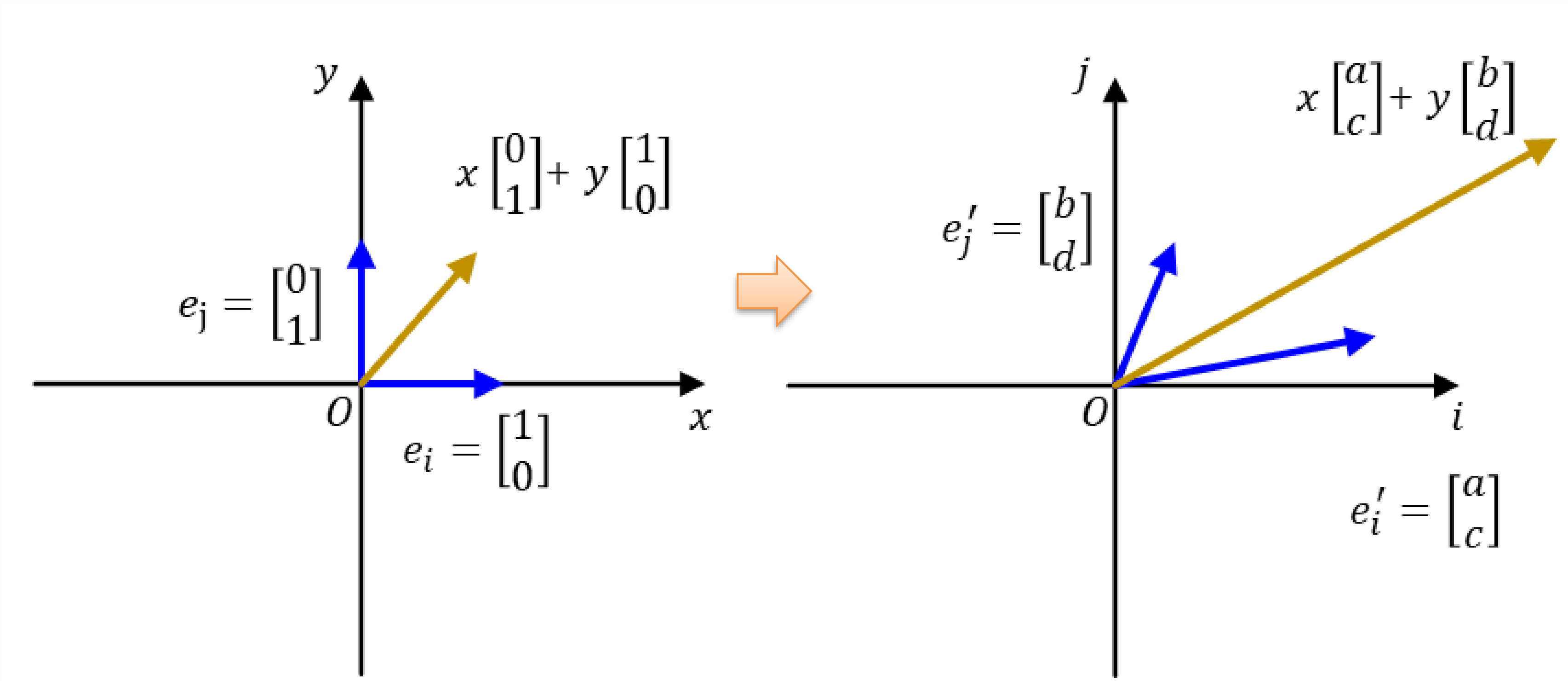
- 映射前，由旧基底分别乘以对应的坐标(x, y)来表示其空间位置；
- 映射后，由新基底去乘以坐标(x, y)来表述坐标在新的基底下的

空间位置： $x\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=x\begin{bmatrix}a\\c\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}b\\d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ax+by\\cx+dy\end{bmatrix}$

3. 从矩阵乘法的角度理解基底变换（坐标变换）

基于二阶方阵的基底变换（坐标变换）

该映射关系可以用下图来表示：



$$x\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=x\begin{bmatrix}a\\c\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}b\\d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ax+by\\cx+dy\end{bmatrix}$$

3. 从矩阵乘法的角度理解基底变换（坐标变换）

【结果分析】

综合矩阵的乘法公式不难发现：

1. 矩阵***A***的第一列$\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$就是原始的$x$方向上的标准基$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$变换所得到的目标位置（基于新基向量的坐标），而第二列$\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$就是$y$方向上的标准基$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$映射后的目标位置（基于新基向量的坐标）。

2. 映射后得到的新向量，如果以向量$\left(\begin{bmatrix} \mathrm{a} \\ \mathrm{c} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathrm{b} \\ \mathrm{d} \end{bmatrix}\right)$为基底那么其坐标仍然是$(x,y)$；如果以标准基$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$为基底，那么其坐标就变为 $(ax+by,cx+dy)$。

3. 从矩阵乘法的角度理解基底变换（坐标变换）

基于三阶方阵的基底变换（坐标变换）

三阶方阵和三维列向量相乘的例子，其运算规则也满足二阶变换的原理：

$$\boldsymbol{Au} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \left(x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$= x \begin{bmatrix} a \\ d \\ g \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} b \\ e \\ h \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} c \\ f \\ i \end{bmatrix}$$

3. 从矩阵乘法的角度理解基底变换（坐标变换）

【结果分析】

1. 矩阵***A***的第一列$\begin{bmatrix} a \\ d \\ g \end{bmatrix}$就是标准基$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$变换后得到的目标位置；第二列$\begin{bmatrix} b \\ e \\ h \end{bmatrix}$就是标准基$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$映射后的目标位置；而方阵第三列$\begin{bmatrix} c \\ f \\ i \end{bmatrix}$就是标准基$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$映射后的目标位置。

2. 映射后的目标向量如果在新的基底（$\begin{bmatrix} a \\ d \\ g \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ e \\ h \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c \\ f \\ i \end{bmatrix}$）下，其坐标仍然是$(x,y,z)$；如果回到标准基下，新基底和其对应的坐标$(x,y,z)$相结合，就能得到默认原始基底的坐标值，具体表示为：$\begin{bmatrix} ax+by+cz \\ dx+ey+fz \\ gx+hy+iz \end{bmatrix}$。

3. 从矩阵乘法的角度理解基底变换（坐标变换）

基于m×n阶方阵的基底变换（坐标变换）

下面讨论更一般的例子，给定一个矩阵$A_{m\times n}(m\neq n)$和一个n维列向量$\boldsymbol{x}$。我们按照上面的步骤计算矩阵A和向量$\boldsymbol{x}$的乘法，可以得到：

$$Ax=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=x_1\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}+\dots+x_n\begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}.$$

在$m\times n$形状大小的矩阵A的作用下，原始的n维向量$[1,0,\dots,0]^T$被映射了新的m维度基向量$[a_{11},a_{21},\dots,a_{m1}]$；原始的$n$维向量 $[0,0,\dots,1]^T$被映射了新的m维度基向量$[a_{1n},a_{2n},\dots,a_{mn}]$。

3. 从矩阵乘法的角度理解基底变换（坐标变换）

【结果分析】

从推导结果可以发现，**映射前后的坐标维度发生了变换**，原始的n维列向量变成了n个m维列向量的线性组合，最终的运算结果是一个m维的列向量。由此，我们不难得出结论：映射后的向量维数和原始向量维数的关系取决于映射矩阵的维数m和n的关系：

- $m>n$，映射后的目标向量维数大于原始向量的维数。此时，矩阵$\boldsymbol{A}$中的 n 个列向量不足以表达 m 维空间中的所有向量。因此，这 n 个向量无法成为 m 维空间的基底。
- $m<n$，目标向量的维数小于原始向量的维数，则 n 个向量中，一定存在线性相关的向量，因此它也无法构成基底。
- $m=n$，方阵，目标向量维数与原始向量一致。此时，如果这n个向量线性无关，则它们就能够构建一组新的基底。

课堂互动二 Link

从标准基开始的基底变换

4. 从标准基开始的基底变换（坐标变换）

一旦决定使用一组新的基，就需要寻找在这组基下的坐标。例如，假设我们希望用一组不同的基代替 $\boldsymbol{R}^2$ 中的标准基 $[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2]$，不妨设：$\boldsymbol{u}_1=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix},\boldsymbol{u}_2=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$。

事实上，我们希望做的是在两个坐标系间进行转换。考虑下面**两个问题**：

1. 给定一个向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)^T$，求它在 $\boldsymbol{u}_1$ 和 $\boldsymbol{u}_2$ 下的坐标。
2. 给定一个向量 $c_1\boldsymbol{u}_1+c_2\boldsymbol{u}_2$，求它在 $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$ 下的坐标。

4. 从标准基开始的基底变换（坐标变换）

任务2

2. 给定一个向量 $c_1u_1+c_2u_2$，求它在 e_1 和 e_2 下的坐标。

下面，我们先求解**任务2**，因为它相对简单。为了将基$[\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2]$转换为标准基$[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2]$，我们必须将原来的基元素$u_1$和$u_2$表示为新的基元素$\boldsymbol{e}_1$和$\boldsymbol{e}_2$。

$$\boldsymbol{u}_1 = 3\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2$$

$$\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$$

由此得到：

$$c_1\boldsymbol{u}_1+c_2\boldsymbol{u}_2 = c_1(3\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2)+c_2(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2) = (3c_1\boldsymbol{e}_1+2c_1\boldsymbol{e}_2)+(c_2\boldsymbol{e}_1+c_2\boldsymbol{e}_2)$$

$$=(3c_1+c_2)\boldsymbol{e}_1+(2c_1+c_2)\boldsymbol{e}_2$$

4. 从标准基开始的基底变换（坐标变换）

任务2

$$c_1\boldsymbol{u}_1+c_2\boldsymbol{u}_2=(3c_1+c_2)\boldsymbol{e}_1+(2c_1+c_2)\boldsymbol{e}_2$$

因此$c_1\boldsymbol{u}_1+c_2\boldsymbol{u}_2$相应于$[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2]$的坐标向量为：

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}3c_1+c_2\\2c_1+c_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&1\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix}$$

如果令$\boldsymbol{U}=(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2)=\begin{bmatrix}3&1\\2&1\end{bmatrix}$，则给定任何相应于$[\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2]$的坐标向量$\boldsymbol{c}$，求相应于$[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2]$的坐标向量 x，我们只需要用 $\boldsymbol{U}$ 乘以 $\boldsymbol{c}$，就可以得到**转移公式：$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{c}$。**

此时，称$\boldsymbol{U}$为有序基$[\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2]$到标准基$[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2]$的**转移矩阵(transition matrix)**。

4. 从标准基开始的基底变换（坐标变换）

任务1

为了求解**任务1**，我们需要求从$[e_1,e_2]$到$[u_1, u_2]$的转移矩阵。任务1中的矩阵 U 是非奇异的，因此它的列向量u_1和u_2线性无关。由上面的转移公式可以得到：$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{U}^{-1}x$。

因此，给定向量：$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^T = x_1\boldsymbol{e}_1+x_1\boldsymbol{e}_2$，只需要乘以$\boldsymbol{U}^{-1}$即可求出在$[u_1, u_2]$下的坐标向量。其中$\boldsymbol{U}^{-1}$为从$[e_1,e_2]$到$[u_1, u_2]$的转移矩阵。

逆矩阵的求解方法：假设存在矩阵***A***，我们可以构造一个新的矩阵$B=[AI]$，然后对***B***进行初等行变换，目标是将***A***转换为单位矩阵***I***。当新的矩阵产生的时候，*I*的伴随矩阵就是***A***的逆矩阵A^{-1}。即，$C=[IA^{-1}]$.

4. 从标准基开始的基底变换（坐标变换）

例题讲解

【例5.5】 令$\boldsymbol{u}_1=(3,2)^T,\boldsymbol{u}_2=(1,1)^T$及$\boldsymbol{x}=(7,4)^T$。求$\boldsymbol{x}$相应于$\boldsymbol{u}_1$和$\boldsymbol{u}_2$的坐标向量。

解：根据前面的思路，从$[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2]$到$[\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2]$的转移矩阵为$U$的逆矩阵，其中：$\boldsymbol{U}=(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2)=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}$.

因此，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7\\ 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ -2\end{bmatrix}$

即$\boldsymbol{c}$为要求的坐标向量，且$\boldsymbol{x}=3\boldsymbol{u}_1-2\boldsymbol{u}_2$。

下面使用Python求解转移矩阵U的逆矩阵U^{-1}和矩阵与向量之间的乘法。

4. 从标准基开始的基底变换（坐标变换）

例题讲解

```python
import numpy as np
from scipy import linalg
U = np.array([[3,1],[2,1]])
x = np.array([[7],[4]])

U1 = linalg.inv(U)
c = np.dot(U1, x)

print('U的逆矩阵为: \n {}'.format(U1))
print('新坐标c为: \n {}'.format(c))
```

```
U的逆矩阵为:
 [[ 1. -1.]
 [-2.  3.]]
新坐标c为:
 [[ 3.]
 [-2.]]
```

4. 从标准基开始的基底变换（坐标变换）

例题讲解

【例5.6】 令$\boldsymbol{b}_1=(1,-1)^T$,$\boldsymbol{b}_2=(-2,3)^T$。求从$[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2]$ 到 $[\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2]$ 的转移矩阵，并确定$\boldsymbol{x}=(1,2)^T$相应于$[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2]$的坐标向量。

解： 从$[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2]$到$[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2]$的转移矩阵为：$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2)=\begin{bmatrix}1 & -2\\ -1 & 3\end{bmatrix}$.

由此，从$[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2]$ 到$[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2]$的转移矩阵为：$\boldsymbol{B}^{-1}=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}$

因此，向量$\boldsymbol{x}$相应于$[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2]$的坐标向量为：

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\ 3\end{bmatrix}$$

于是有：$\boldsymbol{x}=7\boldsymbol{b}_1+3\boldsymbol{b}_2$。

4. 从标准基开始的基底变换（坐标变换）

例题讲解

```
import numpy as np
from scipy import linalg
B = np.array([[1,-2],[-1,3]])
x = np.array([[1],[2]])

B1 = linalg.inv(B)
c = np.dot(B1, x)

print('B的逆矩阵为: \n {}'.format(B1))
print('新坐标c为: \n {}'.format(c))
```

```
B的逆矩阵为:
 [[3. 2.]
 [1. 1.]]
新坐标c为:
 [[7.]
 [3.]]
```

课堂互动三 Link

从任意基开始的基底变换

5. 一般向量空间的基底变换（坐标变换）

【定义】 令V为一个向量空间，且令$E=[\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_n]$ 为V的一组有序基。若 $\boldsymbol{v}$ 为 $\boldsymbol{V}$ 中的任意元素，则 $\boldsymbol{v}$ 可写为：

$$\boldsymbol{v}=c_1\boldsymbol{v}_1+c_2\boldsymbol{v}_2+\ldots+c_n\boldsymbol{v}_n$$

其中 $c_1,c_2,\ldots,c_n$ 为标量。因此可以将每一个向量$\boldsymbol{v}$ 唯一对应于 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一个向量$\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,\ldots,c_n)^T$ 。采用这种方式定义的向量$\boldsymbol{c}$称为 $\boldsymbol{v}$ 相应于有序基 $\boldsymbol{E}$ 的坐标向量，并记为 $[\boldsymbol{v}]_E$，c_i 称为 $\boldsymbol{v}$ 相对于$\boldsymbol{E}$ 的坐标。

前面的例子均假设坐标变换在 $\boldsymbol{R}^2$ 中进行，类似的方法也可应用于 $\boldsymbol{R}^n$ 。在 $\boldsymbol{R}^n$ 中，转移矩阵将为$n\times n$矩阵。

5. 从任意基开始的基底变换（坐标变换）

下面我们讨论一下从一组非标准基$[\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2]$到另一组非标准基$[\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2]$的坐标变换问题。假设对给定的向量 $\boldsymbol{x}$，它相应于$[\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2]$的坐标为：$\boldsymbol{x}=c_1\boldsymbol{v}_1+c_2\boldsymbol{v}_2$ 。

现在，我们希望将x表示为和基$[\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2]$对应的坐标$d_1\boldsymbol{u}_1+d_2\boldsymbol{u}_2$。即求标量$d_1, d_2$，使得：$c_1\boldsymbol{v}_1+c_2\boldsymbol{v}_2 = d_1\boldsymbol{u}_1+d_2\boldsymbol{u}_2$ 。

若令 $V=(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)$，且 $U=(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2)$，则上面的方程可以写成矩阵形式：$\boldsymbol{Vc}=\boldsymbol{Ud}$ ，由此可以得到：$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{Vc}$ 。

因此，给定 $\boldsymbol{R}^2$ 中的向量 $\boldsymbol{x}$ 及其对应的有序基 $[\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2]$ 的坐标向量 c，要求 $\boldsymbol{x}$ 相应于新基 $[\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2]$ 的坐标向量$\boldsymbol{d}$，只需将 $\boldsymbol{c}$ 乘以V到U的转移矩阵：$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{V}$

5. 从任意基开始的基底变换（坐标变换）

例题讲解

【例5.7】求从非标准基$[v_1,v_2]$ 到另一组非标准基 $[u_1,u_2]$ 的转移矩阵，其中$v_1=[5,2]^T$, $v_1=[7,3]^T$ 及 $u_1=[3,2]^T$,$u_1=[1,1]^T$ 。

解：从$[v_1,v_2]$到$[u_1,u_2]$的转移矩阵为

$$S=U^{-1}V=\begin{bmatrix}3 & 2\\1 & -1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}5 & 7\\2 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 4\\-4 & -5\end{bmatrix}$$

相似地，矩阵**U**的转移矩阵$U-1$和矩阵乘法，也可以使用Python来完成。

5. 从任意基开始的基底变换（坐标变换）

例题讲解

```
import numpy as np
from scipy import linalg
U = np.array([[3,1],[2,1]])
V = np.array([[5,7],[2,3]])

U1 = linalg.inv(U)
S = np.dot(U1, V)

print('U的逆矩阵为: \n {}'.format(U1))
print('转移矩阵为: \n {}'.format(S))
```

```
U的逆矩阵为:
 [[ 1. -1.]
 [-2.  3.]]
转移矩阵为:
 [[ 3.  4.]
 [-4. -5.]]
```

5. 从任意基开始的基底变换（坐标变换）

例题讲解

【结果分析】

从$[\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2]$到$[\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2]$的转换可以看成是一个两步的过程。**首先**从$[\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2]$转换为标准基 $[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2]$，**然后**再从标准基转换为$[\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2]$ 。给定向量空间R^2中的向量 $\boldsymbol{x}$，若 $\boldsymbol{c}$ 为 $\boldsymbol{x}$ 相应于$[\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2]$的坐标向量，且 $\boldsymbol{d}$ 为 $\boldsymbol{x}$ 相应于$[\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2]$的坐标向量，则：

$$c_1\boldsymbol{v}_1+c_2\boldsymbol{v}_2=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2=d_1\boldsymbol{u}_1+d_2\boldsymbol{u}_2$$

因为V是从$[\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2]$到$[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2]$的转移矩阵，且 $\boldsymbol{U}^{-1}$ 是从$[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2]$到$[\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2]$ 的转移矩阵，由此得到：$\boldsymbol{Vc}=\boldsymbol{x}$ 及$\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{d}$

于是，$\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{Vc}=\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{d}$

5. 从任意基开始的基底变换（坐标变换）

例题讲解

【结果分析】

如前所述，我们得到了从$[v_1,v_2]$到$[u_1,u_2]$的转移矩阵为$S=U^{-1}V$。下面给出一个形象化的图示：

$$\begin{tikzcd}
{[v_1,v_2]} \arrow[rr, "V"] \arrow[drr, "U^{-1}V"'] & & {[e_1,e_2]} \arrow[d, "U^{-1}"] \\
& & {[u_1,u_2]}
\end{tikzcd}$$

5. 从任意基开始的基底变换（坐标变换）

例题讲解

【例5.8】 若 $\boldsymbol{x} = 3\boldsymbol{v}_1+2\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_3$ 及 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{v}_1-3\boldsymbol{v}_2+2\boldsymbol{v}_3$，令：

$$\boldsymbol{E} = [\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3] = [(1,1,1)^T,(2,3,2)^T,(1,5,4)^T]$$

$$\boldsymbol{F} = [\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3] = [(1,1,0)^T,(1,2,0)^T,(1,2,1)^T]$$

求：（1）从$\boldsymbol{E}$到$\boldsymbol{F}$的转移矩阵；（2）求 x,y 相应于有序基F的坐标。

解：（1）$\boldsymbol{E}$到$\boldsymbol{F}$的转移矩阵为：

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{E}^{-1}\boldsymbol{F}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

5. 从任意基开始的基底变换（坐标变换）

例题讲解

解：（2）坐标 $\boldsymbol{x,y}$ 相应于有序基 $\boldsymbol{F}$ 的坐标向量为：

$$[\boldsymbol{x}]_F = \boldsymbol{Sx} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$[\boldsymbol{y}]_F = \boldsymbol{Sy} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

【拓展验证】：验证基底变换前后的恒等性

$$8\boldsymbol{u}_1 - 5\boldsymbol{u}_2 + 3\boldsymbol{u}_3 = 3\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_3$$

$$-8\boldsymbol{u}_1 + 2\boldsymbol{u}_2 + 3\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{v}_1 - 3\boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3$$

5. 从任意基开始的基底变换（坐标变换）

例题讲解-Python描述

```
import numpy as np
from scipy import linalg

E = np.array([[1,2,1],[1,3,5],[1,2,4]])
F = np.array([[1,1,1],[1,2,2],[0,0,1]])
x = np.array([[3],[2],[-1]])
y = np.array([[1],[-3],[2]])

# 1. 求转移矩阵S
S = np.dot(linalg.inv(F), E)
print('S=\n{}'.format(S))

# 2. 计算x,y相应于有序基F的坐标
xF = np.dot(S, x)
yF = np.dot(S, y)
print('xF=\n {}, \n yF=\n {}'.format(xF, yF))

# 3. 验证基底变换前后的恒等性
print('x的比较结果={}, y的比较结果={}'.
      format((np.dot(F, xF) == np.dot(E, x)).all(), (np.dot(F, yF) == np.dot(E, y)).all()))
```

```
S=
[[ 1.  1. -3.]
 [-1. -1.  0.]
 [ 1.  2.  4.]]
xF=
 [[ 8.]
 [-5.]
 [ 3.]],
 yF=
 [[-8.]
 [ 2.]
 [ 3.]]
x的比较结果=True, y的比较结果=True
```

5. 从任意基开始的基底变换（坐标变换）

【拓展验证】：验证基底变换前后的恒等性

$$8u_1-5u_2+3u_3 = 3v_1+2v_2-v_3$$

$$-8u_1+2u_2+3u_3 = v_1-3v_2+2v_3$$

```python
# 3. 验证基底变换前后的恒等性
print('x的比较结果={}, y的比较结果={}'.
      format((np.dot(F, xF) == np.dot(E, x)).all(), (np.dot(F, yF) == np.dot(E, y)).all()))

# x_left = np.dot(F, xF)
# x_right =np.dot(E, x)

# y_left = np.dot(F, yF)
# y_right = np.dot(E, y)

# com_x = (x_left == x_right).all()
# com_y = (y_left == y_right).all()

# print('x的比较结果={}, y的比较结果={}'.format(com_x, com_y))
# print('x_left=\n {}, \n x_right=\n {}'.format(x_left, x_right))
# print('y_left=\n {}, \n y_right=\n {}'.format(y_left, y_right))
```

课堂互动四 Link

更多基底变换的例子

6. 更多基底变换的例子

- ✓ 从标准基$[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2]$ 到任意基$[\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2]$ 的基底变换（坐标变换）
- ✓ 从任意基$[\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2]$ 到标准基$[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2]$ 的基底变换（坐标变换）
- ✓ 从任意基$[\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2]$ 移到任意基$[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2]$ 的基底变换（坐标变换）

6. 更多基底变换的例子

【习题5.9】对下列问题，求从基$[\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2]$到$[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2]$对应的转移矩阵U

1. $\boldsymbol{u}_1=(1,1)^T$, $\boldsymbol{u}_2=(-1,1)^T$
2. $\boldsymbol{u}_1=(1,2)^T$, $\boldsymbol{u}_2=(2,5)^T$
3. $\boldsymbol{u}_1=(0,1)^T$, $\boldsymbol{u}_2=(1,0)^T$

问题分析：从特定基 $[\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2]$ 到标准基 $[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2]$ 的基底变换（坐标变换）。此处求转移矩阵，比较简单，只需要将 $\boldsymbol{u}$ 排列成列向量组即可得到特定基向标准基的转移矩阵。

$$\boldsymbol{U}_1=[\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2]=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{U}_2=[\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2]=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{U}_3=[\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2]=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

6. 更多基底变换的例子

【习题5.10】 求从基[e_1,e_2]到[u_1,u_2]对应的转移矩阵S。

1. $u_1=(1,1)^T$, $u_2=(-1,1)^T$; 2. $u_1=(1,2)^T$, $u_2=(2,5)^T$

2. $u_1=(0,1)^T$, $u_2=(1,0)^T$

问题分析：从标准基[e_1,e_2]到特定基[u_1,u_2]的基底变换。根据坐标变换公式，基坐标 $x=Uc$ ，我们可以得到从标准基坐标向特定基坐标的变换公式：$c=U^{-1}x$，其中U^{-1}就是标准基[e_1,e_2]到特定基[u_1,u_2]的转移矩阵。

解：$U_1^{-1}=[u_1,u_2]^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$, $U_2^{-1}=[u_1,u_2]^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{bmatrix}$,

$$U_3^{-1}=[u_1,u_2]^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

6. 更多基底变换的例子

【习题5.10】 求从基$[e_1,e_2]$到$[u_1,u_2]$对应的转移矩阵**S**。

解：$U_1^{-1}=[u_1,u_2]^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}$, $U_2^{-1}=[u_1,u_2]^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 5\end{bmatrix}$,

$$U_3^{-1}=[u_1,u_2]^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$$

```python
import numpy as np
from scipy import linalg

U1 = np.array([[1,-1],[1,1]])
U2 = np.array([[1,2],[2,5]])
U3 = np.array([[0,1],[1,0]])

print('U1_inv=\n{}'.format(linalg.inv(U1)))
print('U2_inv=\n{}'.format(linalg.inv(U2)))
print('U3_inv=\n{}'.format(linalg.inv(U3)))
```

```
U1_inv=
[[ 0.5  0.5]
 [-0.5  0.5]]
U2_inv=
[[ 5. -2.]
 [-2.  1.]]
U3_inv=
[[-0.  1.]
 [ 1.  0.]]
```

6. 更多基底变换的例子

【习题5.11】 令 $v_1=(3,2)^T, v_2=(4,3)^T$，对应于下列问题中每一组有序基 $[u1,u2]$，求从 $[v_1,v_2]$ 到 $[u_1,u_2]$ 的转移矩阵。

1. $u_1=(1,1)^T$, $u_2=(-1,1)^T$
2. $u_1=(1,2)^T$, $u_2=(2,5)^T$
3. $u_1=(0,1)^T$, $u_2=(1,0)^T$

问题分析：从特定基$[u_1,u_2]$到特定基$[v_1,v_2]$的基底变换。此处，求$[v_1,v_2]$到$[u_1,u_2]$的转移矩阵，可以直接套用公式 $S=U^{-1}V$

$$1.\ S_1=U^{-1}V=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}3 & 4\\ 2 & 3\end{bmatrix}\qquad 2.\ S_2=U^{-1}V=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}3 & 4\\ 2 & 3\end{bmatrix}$$

$$3.\ S_3=U^{-1}V=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}3 & 4\\ 2 & 3\end{bmatrix}$$

6. 更多基底变换的例子

【习题5.11】 令 $v_1=(3,2)^T, v_2=(4,3)^T$，对应于下列问题中每一组有序基 $[u1,u2]$，求从 $[v_1,v_2]$ 到 $[u_1,u_2]$ 的转移矩阵。

```python
import numpy as np
from scipy import linalg

U1 = np.array([[1,-1],[1,1]])
U2 = np.array([[1,2],[2,5]])
U3 = np.array([[0,1],[1,0]])

V = np.array([[3,4],[2,3]])

S1 = np.dot(linalg.inv(U1), V)
S2 = np.dot(linalg.inv(U2), V)
S3 = np.dot(linalg.inv(U3), V)


print('S1=\n{}'.format(S1))
print('S2=\n{}'.format(S2))
print('S3=\n{}'.format(S3))
```

```
S1=
[[ 2.5  3.5]
 [-0.5 -0.5]]
S2=
[[11. 14.]
 [-4. -5.]]
S3=
[[2. 3.]
 [3. 4.]]
```

6. 更多基底变换的例子

【习题5.12】令 $E=[(5,3)^T,(3,2)^T]$，并令 $x=(1,1)^T, y=(1,-1)^T$，且 $z=(10,7)^T$。计算 $[x]_E$, $[y]_E$ 和 $[z]_E$。

问题分析：从标准基$[e_1,e_2]$到特定基$[u_1,u_2]$的基底变换。根据坐标变换公式，基坐标 $x=Uc$，我们可以得到从标准基坐标向特定基坐标的变换公式：$c=U^{-1}x$，其中，U^{-1}就是标准基 $[e_1,e_2]$到特定基$[u_1,u_2]$的转移矩阵。

1. $[x]_E = xU^{-1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$
2. $[y]_E = xU^{-1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$
3. $[z]_E = xU^{-1} = \begin{bmatrix} 10 \\ 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$

6. 更多基底变换的例子

【习题5.12】 令 $\boldsymbol{E}=[(5,3)^T,(3,2)^T]$，并令 $\boldsymbol{x}=(1,1)^T, \boldsymbol{y}=(1,-1)^T$，且 $\boldsymbol{z}=(10,7)^T$ 。计算 $[\boldsymbol{x}]_E$, $[\boldsymbol{y}]_E$ 和 $[\boldsymbol{z}]_E$。

```python
import numpy as np
from scipy import linalg

E = np.array([[5,3],[3,2]])

x = np.array([[1],[1]])
y = np.array([[1],[-1]])
z = np.array([[10],[7]])

print('xE=\n{}'.format(np.dot(linalg.inv(E), x)))
print('yE=\n{}'.format(np.dot(linalg.inv(E), y)))
print('zE=\n{}'.format(np.dot(linalg.inv(E), z)))
```

```
xE=
[[-1.]
 [ 2.]]
yE=
[[ 5.]
 [-8.]]
zE=
[[-1.]
 [ 5.]]
```

6. 更多基底变换的例子

【习题5.13】令 $\boldsymbol{u}_1=(1,1,1)^T,\boldsymbol{u}_2=(1,2,2)^T,\boldsymbol{u}_3=(2,3,4)^T$ ，求：

1) 求基 $[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$ 到特定基 $[\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3]$ 的转移矩阵。

2) 求下列向量在基 $[\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3]$ 下的坐标。

(i) $\boldsymbol{A}=(3,2,5)^T$, (ii) $\boldsymbol{B}=(1,1,2)^T$, (iii) $\boldsymbol{C}=(2,3,2)^T$

问题分析：

从标准基 $[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$ 到特定基 $[\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3]$ 的基底变换。根据坐标变换公式 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{x}$ 即可求得坐标和转移矩阵。

6. 更多基底变换的例子

【习题5.13】令 $u_1=(1,1,1)^T, u_2=(1,2,2)^T, u_3=(2,3,4)^T$ ，求:

$$U^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&2\\1&2&3\\1&2&4\end{bmatrix}^{-1}$$

$$[A]_u=U^{-1}x=\begin{bmatrix}1&1&2\\1&2&3\\1&2&4\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}3\\2\\5\end{bmatrix}$$

$$[B]_u=U^{-1}x=\begin{bmatrix}1&1&2\\1&2&3\\1&2&4\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$$

$$[C]_u=U^{-1}x=\begin{bmatrix}1&1&2\\1&2&3\\1&2&4\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}2\\3\\2\end{bmatrix}$$

6. 更多基底变换的例子

【习题5.13】令 $u_1=(1,1,1)^T, u_2=(1,2,2)^T, u_3=(2,3,4)^T$，求:

```python
import numpy as np
from scipy import linalg

U = np.array([[1,1,2],[1,2,3],[1,2,4]])
A = np.array([[3],[2],[5]])
B = np.array([[1],[1],[2]])
C = np.array([[2],[3],[2]])

U_inv = linalg.inv(U)

print('U_inv=\n {}'.format(U_inv))
print('Au=\n{}'.format(np.dot(U_inv, A)))
print('Bu=\n{}'.format(np.dot(U_inv, B)))
print('Cu=\n{}'.format(np.dot(U_inv, C)))
```

```
U_inv=
 [[ 2.  0. -1.]
 [-1.  2. -1.]
 [ 0. -1.  1.]]
Au=
[[ 1.]
 [-4.]
 [ 3.]]
Bu=
[[ 0.]
 [-1.]
 [ 1.]]
Cu=
[[ 2.]
 [ 2.]
 [-1.]]
```

6. 更多基底变换的例子

【习题5.14】 令 $v_1=(4,6,7)^T, v_2=(0,1,1)^T, v_3=(0,1,2)^T$，并令 $u_1=(1,1,1)^T, u_2=(1,2,2)^T, u_3=(2,3,4)^T$，求：

1) 求从特定基 $[v_1,v_2,v_3]$到特定基 $[u_1,u_2,u_3]$的转移矩阵。

2) 若 $x=2v_1+3v_2-4v_3$，确定向量 x 相应于 $[u_1,u_2,u_3]$的坐标。

问题分析： 从特定基［u_1,u_2,u_3］到特定基［v_1,v_2,v_3］的基底变换。根据坐标变换的通用公式 $Vc=Ud$，即可求得坐标和转移矩阵。

6. 更多基底变换的例子

【习题5.14】

解：1) 要获得 $\boldsymbol{v}$ 到 $\boldsymbol{u}$ 的转移矩阵，实际上就是将 $\boldsymbol{v}$ 到 $\boldsymbol{e}$ 和 $\boldsymbol{e}$ 到 $\boldsymbol{u}$ 的转移矩阵进行合成，那么可以得到：

$$S = U^{-1}V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

2) 基于 $\boldsymbol{v}$ 的坐标 $\boldsymbol{x}$ 转换为基于 $\boldsymbol{u}$ 的坐标，可以通过通用公式的变形获得，即：

$$Vc = Ud => d = U^{-1}Vc => x_new = U^{-1}Vx = S\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

6. 更多基底变换的例子

【习题5.14】

```
import numpy as np
from scipy import linalg

U = np.array([[1,1,2],[1,2,3],[1,2,4]])
V = np.array([[4,0,0],[6,1,1],[7,1,2]])
xv = np.array([[2],[3],[-4]])

S = np.dot(linalg.inv(U), V)
xu = np.dot(S,xv)

print('S=\n {}'.format(S))
print('xu=\n{}'.format(xu))
```

```
S=
 [[ 1. -1. -2.]
 [ 1.  1.  0.]
 [ 1.  0.  1.]]
xu=
[[ 7.]
 [ 5.]
 [-2.]]
```

6. 更多基底变换的例子

【习题5.15】 给定 $v_1=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, v_2=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}, S=\begin{bmatrix}3 & 5\\1 & -2\end{bmatrix}$，求：$w_1, w_2$，使得 S 为从 $[w_1, w_2]$ 到 $[v_1, v_2]$ 的转移矩阵。

问题分析：从特定基 $[w_1, w_2]$ 到特定基$[v_1, v_2]$的基底变换。由于S是W到V的转移矩阵，所以有 $S=V^{-1}W$，由此可以得到 $w=VS$。

解：要求V到W的坐标，即利用公式 $w=Sv(d=Sc)$ 求解，其中 S 为 v 到 w 的转移矩阵。

$$W=VS=\begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 5\\1 & -2\end{bmatrix}$$

6. 更多基底变换的例子

【习题5.15】 给定 $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$，求：$\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2$，使得 $\boldsymbol{S}$ 为从 $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2]$ 到 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2]$ 的转移矩阵。

```
import numpy as np
from scipy import linalg

S = np.array([[3,5],[1,-2]])
V = np.array([[1,2],[2,3]])

W = np.dot(V,S)

print('W=\n {}'.format(W))
```

```
W=
 [[5 1]
 [9 4]]
```

6. 更多基底变换的例子

【习题5.16】给定$\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}2\\6\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix}4 & 1\\2 & 1\end{bmatrix}$，求：$\boldsymbol{u}_1$,$\boldsymbol{u}_2$，使得 $\boldsymbol{S}$ 为从 [$\boldsymbol{v}_1$,$\boldsymbol{v}_2$]到[$\boldsymbol{u}_1$,$\boldsymbol{u}_2$]的转移矩阵。

问题分析：问题分析：从特定基 [$\boldsymbol{u}_1$,$\boldsymbol{u}_2$] 到特定基 [$\boldsymbol{v}_1$,$\boldsymbol{v}_2$] 的基底变换。由于S是V到U的转移矩阵，所以有 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{V}$，由此可以得到 $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{US}$ => $\boldsymbol{U}=\boldsymbol{VS}^{-1}$

解:

$$\boldsymbol{W}=\boldsymbol{VS}^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 1\\6 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 1\\2 & 1\end{bmatrix}^{-1}$$

6. 更多基底变换的例子

【习题5.16】给定$v_1=\begin{bmatrix}2\\6\end{bmatrix}$,$v_2=\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}$, $S=\begin{bmatrix}4 & 1\\2 & 1\end{bmatrix}$，求：$u_1$,$u_2$，使得 S 为从 $[v_1,v_2]$到$[u_1,u_2]$的转移矩阵。

```
import numpy as np
from scipy import linalg

S = np.array([[4,1],[2,1]])
V = np.array([[2,1],[6,4]])

W = np.dot(V, linalg.inv(S))

print('W=\n {}'.format(W))
```

```
W=
 [[ 0.  1.]
 [-1.  5.]]
```

课后作业

Link

读万卷书 行万里路 只为最好的修炼

QQ：14777591 (宇宙骑士)
Email：ouxinyu@alumni.hust.edu.cn
Tel：18687840023