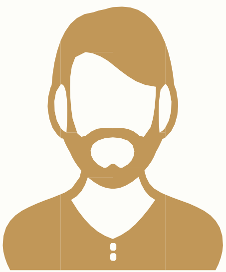
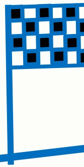
第2讲 描述空间的工具 — 向量

传媒与信息工程学院
欧 新 宇

第2讲 描述空间的工具：向量



- ✓ 向量的基本知识回顾
- ✓ 列向量
- ✓ 使用Python语言描述向量
- ✓ 向量的加法和数乘
- ✓ 向量间的乘法
- ✓ 向量的线性组合



第2讲 描述空间的工具：向量

总体说明

空间是贯穿**线性代数**整个领域的主干和核心概念，我们所有的概念和应用都会构架在空间这个逻辑实体上。而向量和矩阵就是我们用来填充这个实体的工具，包括运算、映射、降维、投影、近似求解、特征提取等，都将建立在基于矩阵和向量的空间中实现。

向量的基本知识回顾

向量的基本知识回顾

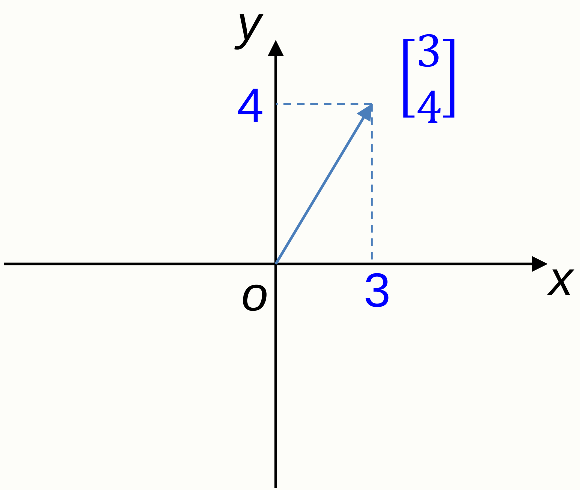
向量的定义

- **向量**：也称欧几里得向量、几何向量、矢量，它指具有大小和方向的量。它可以形象化地表示为带箭头的线段。直观地说，一组排列成行或列的有序数字，就是向量。
- **箭头所指**：代表向量的方向；
- **线段长度**：代表向量的大小；
- **向量的记法**：
  - 印刷体，记作*小写粗斜体字母*，如***a, b, u, v;***
  - 手写体，在字母顶上加一小箭头“→”，如 $\vec{u}$；
  - 给定向量的起点A和终点B，可记作$\overrightarrow{AB}$；
  - 在空间直角坐标系中，以数对形式表示，如 (2, 3)

向量的基本知识回顾

二维向量的空间表示

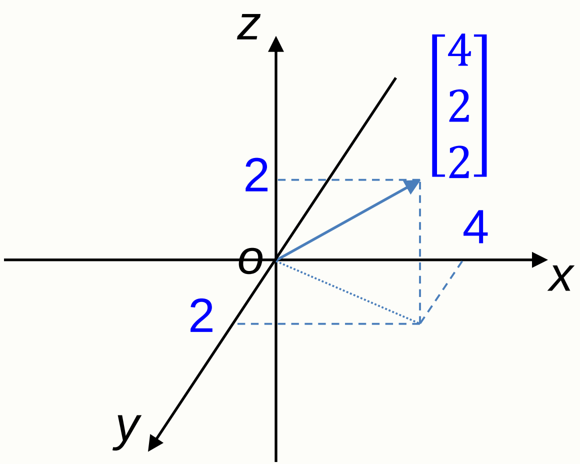
给定二维向量$\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$，它有两个分量，其中$x$分量值为3，$y$分量值为4，以原点(0,0)为起点，可以在直角坐标系中构建一条有向线段。



向量的基本知识回顾

三维向量的空间表示

给定三维向量$\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}4\\2\\2\end{bmatrix}$，它有三个分量，其中$x$分量值为4，$y$分量值为2，$z$分量值为2，以原点(0,0,0)为起点，可以在三阶笛卡尔坐标系中构建一条有向线段。



列向量

列向量

计算机领域主要使用列向量

根据数字的排列方式，向量可以被分为行向量和列向量。在计算机领域中，我们常使用**列向量**来表示和处理向量。例如，将矩阵$\boldsymbol{A}$映射到向量$\boldsymbol{x}$上时，可以用$\boldsymbol{Ax}$来表示，最常见的应用是求解方程组。列向量通常由两种表示方法。

- 直观表示：$\alpha = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$，$\beta = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$
- 单行表示（更常用）：$\alpha = [2, 3]^T$，$\beta = [2, 3, 4]^T$

基于Python语言的向量表示

基于Python语言的向量表示

在Python中，最重要，也是最常用的一个库就是数学计算库 **Numpy**，它也是本门课中最主要的python工具包。下面我们将使用numpy库来实现**数组(向量、矩阵)**的创建。

- 创建numpy数组（向量）

```
import numpy as np
A = np.array([1, 2, 3, 4])
print(a)
```

```
[[1 2 3 4]]
```

- 获取变量数据类型

```
type(A)
```

```
numpy.ndarray
```

列向量的生成

列向量的生成

在机器学习及大多数计算机任务中，都会以列向量的方式对数据进行处理，而numpy默认生成的是行向量。所以，需要事先进行转换。

最容易也是最直接的方法：**矩阵转置（Transpose）**。

值得注意的是，在计算机的存储意识中，向量是一维的量，它只在一个维度上具有值。因此，无法进行转置。

```python
import numpy as np
A = np.array([1, 2, 3, 4])
B = A.transpose()
C = A.T

print('a={}'.format(A))
print('A={}'.format(B))
print('B={}'.format(C))
```

```
a=[1 2 3 4]
A=[1 2 3 4]
B=[1 2 3 4]
```

列向量的生成

如何处理呢?

一维向量 → 二维矩阵

- 当我们使用**向量**来表示一个数据时，可以表示为：$\vec{A}$ =[a_1,a_2,...,a_n], 此时，$\vec{A}$ 是一个维度为 1，长度为 n 的数据（向量）；
- 当我们使用**矩阵**来表示这个向量时，则可以表示为: $\overrightarrow{A_2}$ =[a_{11},a_{12},...,a_{1n}], 此时 $\overrightarrow{A_2}$ 是一个维度为2的数据（矩阵），第一个维度长度为 1，第二个维度长度为 n，我们也可以将这样的矩阵理解为一个**行向量**，一行n列，形态为：1×n (1, 4)。
- 在转换为二维矩阵后，就可以通过矩阵的转置实现行向量向列向量的转换，此时的数据 $\overrightarrow{A_2}$ 将转变为一个列向量 $\overrightarrow{B_2}$ ，n行一列，形态为：n×1 (4, 1)，表示为: $\overrightarrow{A_3}$ =[a_{11}; a_{21}; ...; a_{n1}]。

列向量的生成

使用二维矩阵进行转换

```
import numpy as np
A2 = np.array([[1, 2, 3, 4]])
B2 = A.transpose()
C2 = A.T

print('A2={}'.format(A2))
print('B2={}'.format(B2))
print('C2={}'.format(C2))
```

```
A2=[[1 2 3 4]]
B2=[1 2 3 4]
C2=[1 2 3 4]
```

```
print('A2的形态：{}'.format(A2.shape))
print('B2的形态：{}；C2的形态：{}'.format(B2.shape, C2.shape))
```

```
A2的形态：(1, 4)
B2的形态：(4,)；C2的形态：(4,)
```

列向量的生成

【结果分析】

- 原始的一维向量 $\vec{A}$ 和经过 .transpose()和 .T 转换后的向量 $\vec{B}$ 和 $\vec{C}$，都呈现为相同的形态 (4，1)，并且值也完全相同。这说明在Python中，转置在向量上是无效的。
- 当我们使用**二维矩阵**进行转换时，新生成的矩阵$\overrightarrow{A_2}$是一个 $1\times n$ 的二维矩阵，当经过 .transpose() 和 .T 转换后，两个矩阵都变成了$n\times 1$的矩阵。这说明，原来以二维矩阵显示的行向量，形态为(1，4)；已经转换为以二维矩阵显示的列向量了，形态为(4, 1)。

列向量的生成

特别注意

在Python中一维向量和二维矩阵的表示非常容易转换，只需要增加一层中括号"[ ]"就可以实现从一维到二维的转换。

相似地，三维矩阵使用三层中括号表示，*n* 维矩阵使用 *n* 层中括号表示。

下面给出一维向量和二维向量的表示。

```
A = np.array([1, 2, 3, 4])
A2 = np.array([[1, 2, 3, 4]])
```

向量的加法

向量的加法

要进行**矩阵相加**，前提是两个矩阵具有相同的形态（即 A.shape = B.shape）。矩阵的加法可以理解为两个矩阵对应元素的**相加**（按位相加），生成的结果矩阵维度保持不变（即(A+B).shape = A.shape = B.shape）。

给定两个 n 维向量 $\vec{u}$ 和 $\vec{v}$，它们之间的加法运算规则可以表示为：

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \cdots \\ u_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \cdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ u_3 + v_3 \\ \cdots \\ u_n + v_n \end{bmatrix}$$

向量的加法

一个例子

求解矩阵 $\vec{u}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}$ 和 $\vec{v}=\begin{bmatrix}5\\6\\7\\8\end{bmatrix}$ 的**和**的运算结果。

按照运算规则可以表示为：

$$\vec{u}+\vec{v}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5\\6\\7\\8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+5\\2+6\\3+7\\4+8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\8\\10\\12\end{bmatrix}$$

向量的加法

使用Python语言进行描述

```
import numpy as np
u = np.array([[1,2,3,4]]).T
v = np.array([[5,6,7,8]]).T
w = u + v

print('u={}\n\n v={}\n\n u+v={}'.format(u,v,w))
```

注意已经转换为二维数组形式

```
u=[[1]
 [2]
 [3]
 [4]]
```

```
v=[[5]
 [6]
 [7]
 [8]]
```

```
u+v=[[ 6]
 [ 8]
 [10]
 [12]]
```

对于形态为1×n的单行矩阵和行向量的相加，也遵循**按位相加**的原则。

向量的数乘

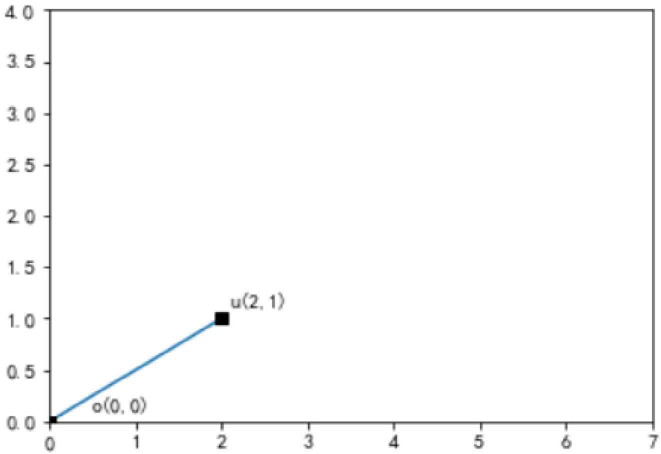
向量的数乘

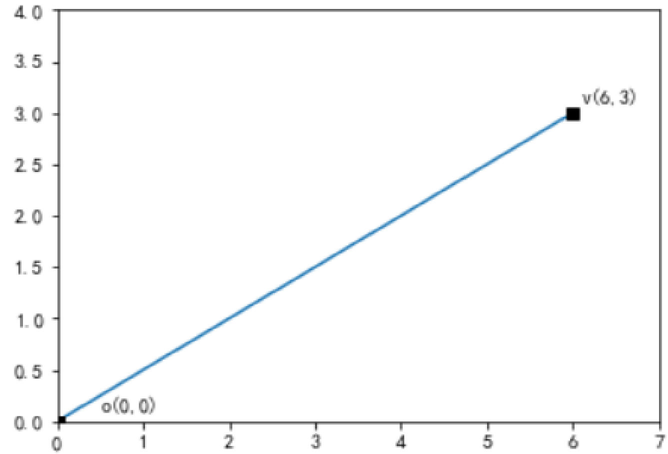
数乘的概念和特性

向量的数乘，又称为向量的数量乘法，它表示的是一个标量和一个向量之间的**乘积**关系。与向量的加法类似，向量的数乘是由标量和向量中的**每个元素**依次相乘，生成的新向量与原来的向量具有相同的形态。向量的数乘从**几何**意义上来说，可以理解为向量沿着所在直线的方向拉升相应的倍数，拉升的**倍数**由标量决定，拉升的**方向**与原向量方向保持不变。

向量的数乘

数乘的几何示意图





【结果分析】

从上图可以看到向量 $\vec{u}$ 和 向量 $\vec{v} = 3 * \vec{u}$ 的几何示意图，两个向量具有相同的方向，但具有不同的长度。向量 $\vec{v} = 3 * \vec{u}$ 的长度刚好是向量 $\vec{u}$ 的3倍。

向量的数乘

数乘的运算规则

给定一个 n 维向量 $\vec{u}$ 和一个标量 v，他们的数乘变换运算规则可以表示为：

$$c*\vec{u}=c*\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\\cdots\\u_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c*u_1\\c*u_2\\c*u_3\\\cdots\\c*u_n\end{bmatrix}$$

向量的数乘

一个例子

给定标量5和向量$\vec{u}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}$，可以得到它们的数乘结果为：

$$5*\vec{u}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}=5*\begin{bmatrix}5*1\\5*2\\5*3\\5*4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\10\\15\\20\end{bmatrix}。$$

向量的数乘

使用Python语言进行描述

```
import numpy as np
u = np.array([[1,2,3,4]]).T
res = 5*u
print(res)
```

```
[[ 5]
 [10]
 [15]
 [20]]
```

- **结果分析：**

向量的数乘是没有方向的，无论左乘还是右乘都具有相同的效果，这意味着 $\vec{u} * a = a * \vec{u}$。这个结论，可以轻松推广到矩阵的数乘。

向量的乘法：内积和外积

向量的乘法：内积和外积

向量的内积

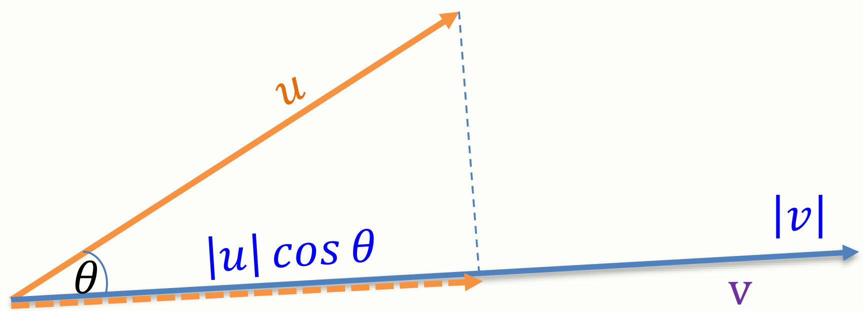
- 内积的**前提：**两个向量维数相同，长度相同
- 向量内积的**结果：**标量
- 内积的**别称**：点乘
- **运算规则：**对应位置上的元素相乘，然后合并相加

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\\cdots\\u_n\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\\\cdots\\v_n\end{bmatrix}=v_1v_1+v_2v_2+v_3v_3+\cdots v_nv_n$$

向量的乘法：内积和外积

向量的内积

- 内积的**几何形式**：$u \cdot \mathrm{v} = |u||v| \cos\theta$
- 内积的**几何意义**：向量u 在向量v 方向上的投影长度乘以向量v的模长。
- 内积的**几何表示**：



向量的乘法：内积和外积

向量的内积：一个例子

试计算，向量 $u=\begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix}$与向量 $v=\begin{bmatrix}1\\3\\5\end{bmatrix}$的内积。

解：

$$u\cdot v=\begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\3\\5\end{bmatrix}$$ =2*1+4*3+6*5=2+12+30=44

向量的乘法：内积和外积

向量的内积：Python描述

[178]:
```
import numpy as np
u = np.array([2,4,6])
v = np.array([1,3,5])
print(np.dot(u,v))
```

44

'dot'：点，点乘

- **结果分析：**

向量间的内积要求两个元素必须是向量形式，同时具有相同的形态。这意味，以**矩阵**形式表示的“向量”无法进行内积运算。

向量的乘法：内积和外积

向量的内积：Python描述

```
import numpy as np
u = np.array([[2,4,6]])
v = np.array([[1,3,5]])
print(np.dot(u,v))
```

行矩阵

```
---------------------------------------------------------------------------
ValueError                                Traceback (most recent call last)
<ipython-input-181-54e4fb57e3e4> in <module>
      2 u = np.array([[2,4,6]])
      3 v = np.array([[1,3,5]])
----> 4 print(np.dot(u,v))

ValueError: shapes (1,3) and (1,3) not aligned: 3 (dim 1) != 1 (dim 0)
```

```
import numpy as np
u = np.array([[2,4,6]]).T
v = np.array([[1,3,5]]).T
print(np.dot(u,v))
```

列矩阵

```
---------------------------------------------------------------------------
ValueError                                Traceback (most recent call last)
<ipython-input-180-bac849b462b9> in <module>
      2 u = np.array([[2,4,6]]).T
      3 v = np.array([[1,3,5]]).T
----> 4 print(np.dot(u,v))

ValueError: shapes (3,1) and (3,1) not aligned: 1 (dim 1) != 3 (dim 0)
```

结果分析：

可以看到相同形态的二维矩阵无法进行内积运算，哪怕是行数或列数为1的二维数组。这似乎和前面的运算规则相违背。

向量的乘法：内积和外积

向量的内积：Python描述

若需要使用二维数组表示的“**向量**”进行内积运算，则要求两个数组具有相同的长度，同时两个数组互为转置。

```
import numpy as np
u = np.array([[2,4,6]])
v = np.array([[1,3,5]]).T
print(np.dot(u,v))
```

```
[[44]]
```

具体的运算规则将在后面的矩阵乘法中进行解释。

向量的乘法：内积和外积

向量的外积

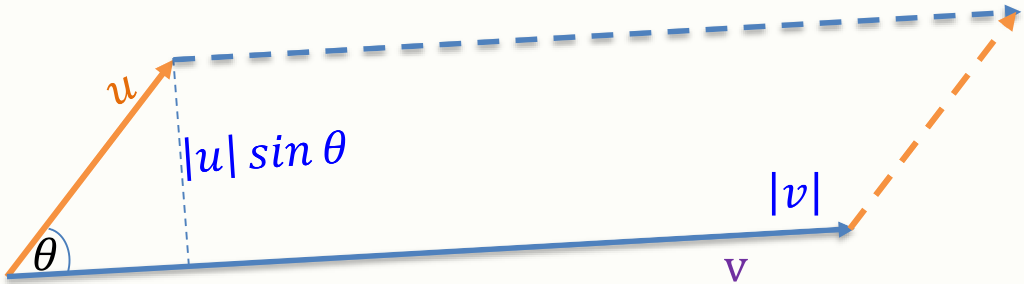
- 向量外积的**结果**：标量（二维）、向量（三维以上）
- 内积的**别称**：叉乘、向量积
- 二维平面的**运算规则**：

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = u_1 v_2 - u_2 v_1$$

向量的乘法：内积和外积

向量的外积

- 外积的**几何形式：** $u \times \mathrm{v} = |u||v| \sin\theta$
- **几何意义（二维）**：向量u 和向量v 张成的平行四边形的面积。
- **几何表示（二维）**：



向量的乘法：内积和外积

向量的外积

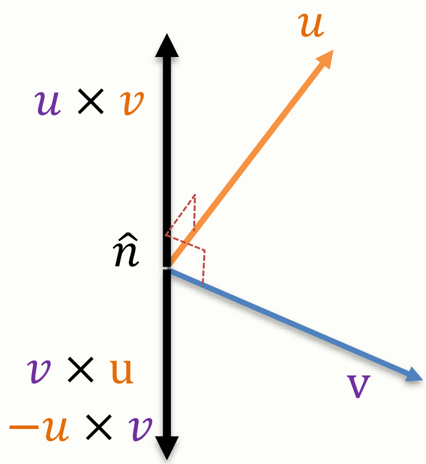
- 三维平面的**运算规则：**

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_1 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{bmatrix}$$

向量的乘法：内积和外积

向量的外积

- **几何意义（三维）**： 向量 u 和向量 v 张成的平面的法向量，该向量垂直于 u 和 v 向量构成的平面。。
- **几何表示（三维）**：



向量的乘法：内积和外积

向量的外积：二个例子（二维）

1. 试计算，向量 $u = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$与向量 $v = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$的内积。

解：

$$u \times v = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$ =2*5-4*3=10-12=-2

向量的乘法：内积和外积

向量的外积：二个例子（三维）

2. 试计算，向量 $u = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$与向量 $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$的内积。

解：

$$u \times v = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_1 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 * 6 - 4 * 3 \\ 4 * 1 - 2 * 6 \\ 2 * 3 - 3 * 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -8 \\ 3 \end{bmatrix}$$

向量的乘法：内积和外积

向量的外积：Python描述

```
import numpy as np
u = np.array([2,4])
v = np.array([3,5])
print(np.cross(u,v))
```

```
-2
```

```
import numpy as np
u = np.array([2,3,4])
v = np.array([1,3,6])
print(np.cross(u,v))
```

```
[ 6 -8  3]
```

向量的线性组合

向量的线性组合

概念和运算规则

向量的**线性组合**：基于向量加法和数乘构建的基本运算。

基本**运算规则**：假设存在标量a, b, c 和向量$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$，则有：

$$a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v} + c\boldsymbol{w} = a\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} au_1 + bv_1 + cw_1 \\ au_2 + bv_2 + cw_2 \\ au_3 + bv_3 + cw_3 \end{bmatrix}$$

向量的线性组合

一个例子

给定标量$a = 2, b = 4, c = 6$和向量$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}, \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix}7\\8\\9\end{bmatrix}$，试求线性组合$a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v} + c\boldsymbol{w}$。

解：$a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v} + c\boldsymbol{w} = 2\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix} + 6\begin{bmatrix}7\\8\\9\end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix}2*1+4*4+6*7\\2*2+4*5+6*8\\2*3+4*6+6*9\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}60\\72\\84\end{bmatrix}$$

向量的线性组合

Python描述

```
import numpy as np
u = np.array([[1,2,3]]).T
v = np.array([[4,5,6]]).T
w = np.array([[7,8,9]]).T
print(2*u + 4*v + 6*w)
```

```
[[60]
 [72]
 [84]]
```

```
import numpy as np
u = np.array([1,2,3]).T
v = np.array([4,5,6]).T
w = np.array([7,8,9]).T
print(2*u + 4*v + 6*w)
```

```
[60 72 84]
```

- **结果分析：**

  向量的线性组合需要将向量转换为**列向量**，因此需要使用**二维数组**来表示列向量。直接进行线性变换，可以运算，但无法获得最终的列向量。

读万卷书 行万里路 只为最好的修炼

QQ：14777591 (宇宙骑士)

Email：ouxinyu@alumni.hust.edu.cn

Tel：18687840023