第09讲 基底变换 `课堂互动答案`

作者：欧新宇（Xinyu OU）

本文档所展示的测试结果，均运行于：Intel Core i7-7700K CPU 4.2GHz

【课堂互动一】 `基于基底变换的坐标变换`

1. $[x]_U$ -> $[x]_V$ 表示的含义是( )。

A. 将坐标x从基底V迁移到基底U
B. 将坐标x从基底U迁移到基底V
C. 将向量U的x坐标分量迁移到向量V
D. 将向量V的x坐标分量迁移到向量U

答案及解析： B

2. 一般情况下，下面哪个符号用于表示空间的标准基。

A. u
B. v
C. e
D. a

答案及解析： C

3. 令 $u=(4,3)^T,\ v=(-1,2)^T$，若存在向量$x=3u-v$，则向量x的坐标为（ ）。

A. $[[3*4+(-1)*(-1),3*3+(-1)*2]]=[[13,7]]$
$B. [[3*4+(-1)*(-1)],[3*3+(-1)*2]]=[[13],[7]]$
C. $[[4*3,-1*3],[-1*3,2*(-1)]]=[[12,-3],[-3,-2]]$
D. $[[4*3,-1*3],[-1*3,2*(-1)]]=[[12,-3],[-3,-2]]$

答案及解析： B

【课堂互动二】 `从矩阵乘法的角度理解基底变换`

1. 给定一个矩阵$A=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}$，若以A的列向量组为基的空间中存在向量$u=[6,8]^T$。则向量$u$在标准基和以矩阵$A$为基的空间中的坐标分别表示为：（ ）。

A. (6,8) (6,8)
B. (6,8) (20,22)
C. (20,22) (6,8)
D. (20,22) (20,22)

答案及解析：C

因为向量u存在于空间A中，因此相对于空间A，u的坐标为(6,8). 而相对于标准基的空间，其坐标为
$Au = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 22 \end{bmatrix}$。

2. 如果一个向量所存在的空间R的维度确定了，那么它就有一个固定的位置，这个位置就称为向量的坐标。无论其他量如何变化，该坐标值都不会变化。

A. 对
B. 错

答案及解析： B

空间中向量的坐标与基底关系密切，若基底发生变化，即使维度不变，坐标也会跟着变化。

3. 三阶方阵和三阶向量相乘将满足以下哪一个公式?

A.
$Au = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} a \\ d \\ g \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} b \\ e \\ h \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} c \\ f \\ i \end{bmatrix}$
B. $Au = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} g \\ h \\ i \end{bmatrix}$

答案及解析： A

4. 向量的空间位置由其所参考的基底和相对于基底的位置决定，简单说，向量的空间位置可以表示为基底乘以对应的坐标。

A. 对
B. 错

答案及解析： A

5. 给定一组向量$U = (\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix})$, 及以该向量组A为基底的坐标$c(x, y)$。问: 如果将该坐标迁移到以标准基为基底的空间后，新坐标为( )。

A. (x, y)
B. (ax+bx, cy+dy)
C. (ax+by, cx+dy)
D. (ay+by, cx+dx)

答案及解析： C

从标准基e到特定基底u的转移矩阵为，矩阵U的逆矩阵，因此，可以得到新的坐标
$d = Uc = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix}$

【课堂互动三】 从标准基开始的基底变换

1. 给定基底V和基于基底V的坐标c，我们可以得到该坐标在标准基下的坐标x为( )。

A. x=Uc
B. x=cU
C. x=U/c
D. x=c/U

答案及解析： A

2. 令$u_1=(1,-1)^T, u_2=(2,2)^T$。则坐标$x=(1,2)^T$相应于$[u_1,u_2]$的坐标向量为（ ）。

A. $\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 2\end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}$

D. $\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 2\end{bmatrix}^{-1}$

答案及解析： C

从$[u_1,u_2]$到$[e_1,e_2]$的转移矩阵为：$U=[u_1,u_2]$.
由此，从$[e_1,e_2]$到$[u_1,u_2]$的转移矩阵为：U^{-1}
因此，坐标x相应于$[u_1,u_2]$的坐标向量为：$c=U^{-1}x=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}$

【课堂互动四】 从任意基开始的基底变换

1. 从$[v_1,v_2]$到$[u_1,u_2]$的转换可以看成是一个两步的过程。首先从$[v_1,v_2]$转换为标准基$[e_1,e_2]$，然后再从标准基转换为$[u_1,u_2]$。那么如果给定基于V的坐标w，我们可以得到基于U的坐标x的求解公式为：（ ）。

A. $x=UVw$
B. $x=UV^{-1}w$
C. $x=U^{-1}Vw$
D. $x=U^{-1}V^{-1}w$

答案及解析： C

从$[v_1,v_2]$到$[e_1,e_2]$的转移矩阵为V，而从$[e_1,e_2]$到$[u_1,u_2]$的转移矩阵为U^{-1}。因此，我们可以得到:
$Vw=d$及$U^{-1}d=x$，其中d为w在标准基下的坐标。
于是，$x=U^{-1}d=U^{-1}Vw$。

2. 下列用于求解矩阵A的逆矩阵B的Python代码，正确的一个是（)。

A. B = np.inv(A)
B. B = scipy.inv(A)
C. B = linalg.inv(A)
D. B = np.dot(A)

答案及解析： C