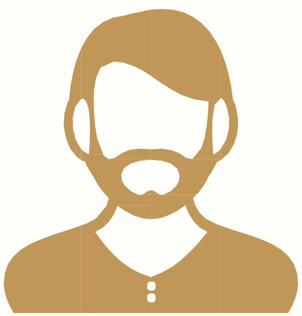
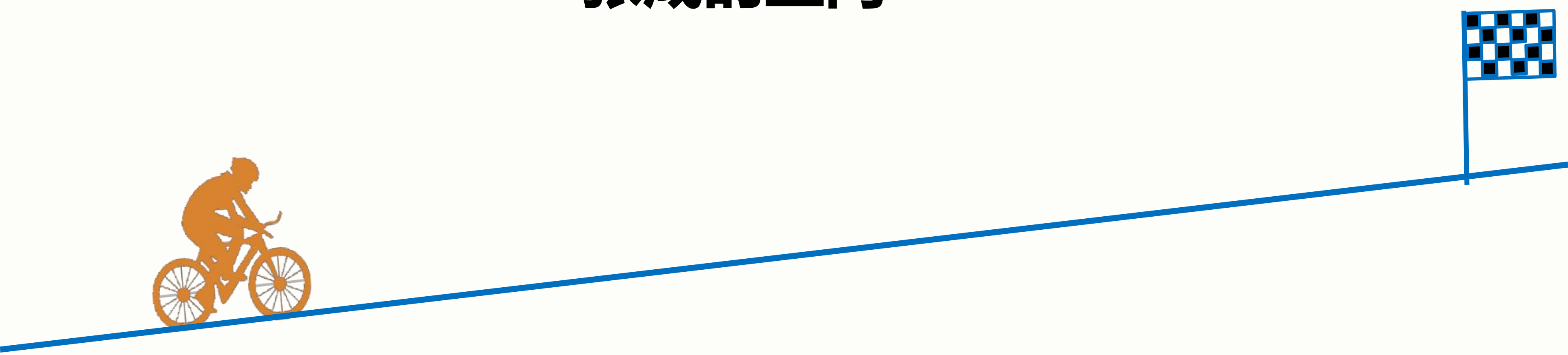
特别注意：本章内容理论知识较多，有一定难度，希望各位同学认真理解，反复阅读，有任何问题及时提问。

第03讲 基底与坐标

传媒与信息工程学院
欧 新 宇



- 向量组的基本概念
- 向量空间
- 向量组的线性相关性
- 维数、基与坐标
- 构成基底的条件
- 张成的空间



向量组的基本概念

向量组的基本概念

n 维向量

定义：n 个有序的数$a_1,a_2,\ldots,a_n$所组成的数组称为***n*维向量**，这n个数称为该向量的n个分量，第 i 个数a_i称为第i 个分量。

- n 维向量可以写成一行，称为n 维行向量；也可以写成一列，称为n 维列向量。
- 在计算机领域中，无论是行向量还是列向量，都按照矩阵的运算规则进行运算，即：将向量转换成二阶矩阵来进行结算。
- 在默认情况下，如果没有指明是行向量还是列向量，都当作列向量。

向量组的基本概念

n 维向量

在本课程中，我们统一使用*黑体小写斜体字母* 表示，这也是标准表达方式。（在部分Slide或者代码中可能会使用 ***A*，*B*，*C***类似的***大写英文斜体字母***，这也不错，此时可以理解为这是一个张量，因为，所有的向量都可以理解为一阶张量。）

- 其中 $\alpha, \beta, \gamma, a, b, c, u, v, w$表示列向量；
- 用列向量的转置用来表示行向量，如：$\alpha^T, \beta^T, u^T, v^T$。
- 假设：$u = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}$，则有：$u^T = (a_1, a_2, \dots, a_n)$

  其中u是一个列向量，u^T是一个行向量。

向量空间

向量空间

三维向量空间

在几何中，**空间**通常作为点的集合，即空间的元素是点，这样的空间称为**点空间**。我们把3维向量的全体所组成的集合：$\boldsymbol{R}^3=\{\boldsymbol{r}=(x,y,z)^T|x,y,z\in R\}$ 叫做**三维向量空间。**

在点空间取定坐标系后，空间中的点P(x,y,z)与3维向量$\boldsymbol{r}=(x,y,z)^T$之间就存在**一一对应**的关系。因此，**向量空间**可以类比为取定了坐标系的**点空间**。

向量的集合：$\boldsymbol{\pi}=\{\boldsymbol{r}=(x,y,z)^T|ax+by+cz=d\}$ 也叫做向量空间 $\boldsymbol{R}^3$ 中的平面。

向量空间

n 维向量空间

n 维向量的全体所组成的集合：

$\boldsymbol{R}_n=\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T|x_1,x_2,\ldots,x_n\in R\}$ 叫做 **n 维向量空间。**

n 维向量的集合 $\pi=\{x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T|a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n=b\}$ 叫做 n 维向量空间 R_n 中的 $n-1$ 维**超平面**。

n 维向量有着广泛的实际意义。例如，为了确定飞机的飞行状态，我们需要6个参数。表示飞机重心在空间的位置需要3个参数x,y,z; 此外，还需要3个参数，机身的水平转角 $\theta(0\le\theta<2\pi)$，机身的仰角 $\psi(-\pi 2\le\psi\le\pi 2)$，以及机翼的转角 $\phi(-\pi\le\phi\le\pi)$。如此，6个参数组成一个6维的向量，就可用来描述一架飞机的飞行状态。

向量组的线性相关性

向量组

若干个同维数的列向量（或同维的行向量）所组成的集合叫做**向量组**。

- 一个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=a_{ij}$ 有 n 个 m 维列向量： $a_{\mathrm{j}}=\begin{pmatrix} a_{1\mathrm{j}} \\ a_{2\mathrm{j}} \\ \cdots \\ a_{m\mathrm{j}} \end{pmatrix}$, $(j=1,2,\ldots,n)$。它们组成的向量组 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 称为矩阵$\boldsymbol{A}$的**列向量组。**
- 一个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 又有 m 个 n 维行向量： $a_i^{\mathrm{T}}=(a_{i1},a_{i2},\ldots,a_{in})$, $(i=1,2,\ldots,m)$。它们所组成的向量组 a_1^{T}, a_2^{T},…, $a_{\mathrm{m}}^{\mathrm{T}}$ 称为矩阵 A的**行向量组。**

向量组

由有限个向量所组成的**向量组**可以构成一个**矩阵**。

- m 个 n 维列向量所组成的**向量组**$a_1,a_2,\ldots,a_m$，构成一个 $n \times m$ **的矩阵**：$\boldsymbol{A}=(a_1,a_2,\ldots,a_m)$。
- m 个 n 维行向量所组成的**向量组** $b_1^{\mathrm{T}}, b_2^{\mathrm{T}},\ldots, b_m^{\mathrm{T}}$，构成一个 $m \times n$**的矩阵**：$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_1^{\mathrm{T}} \\ b_2^{\mathrm{T}} \\ \cdots \\ b_m^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$。

线性组合

- **定义**：

给定向量组 ***A***: $a_1,a_2,\ldots,a_m$，对于任何一组实数 $k_1,k_2,\ldots,k_m$，向量 $k_1a_1+k_2a_2+\ldots+k_ma_m$ 称为关于向量组A和系数 k_i 的线性组合，k_i 称为线性组的系数。

- 给定向量组 ***A***: $a_1,a_2,\ldots,a_m$ 和向量***b***，如果存在一组数 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m$，使 ***b*** $=\lambda_1a_1+\lambda_2a_2+\ldots+\lambda_ma_m$，则向量 ***b*** 是向量组 ***A*** 的线性组合，这时称向量 ***b*** 能由向量组 ***A*** 线性表示。

- **扩展到方程组：**

向量 b 能够由向量组 A 线性表示，也就意味着由它们构成的方程组：$x_1a_1+x_2a_2+\ldots+x_ma_m=b$ 有解。

线性相关性

- **定义：**

给定向量***A***: $a_1,a_2,\ldots,a_m$，如果存在**不全为零**的数$k_1,k_2,\ldots,k_m$，使得 $k_1a_1+k_2a_2+\ldots+k_ma_m=0$，则称向量组***A***是**线性相关**的，否则称它**线性无关**。

讨论向量组$a_1,a_2,\ldots,a_m$ 线性相关，通常是指 $m\geq 2$ 的情况。

- 当 $m=1$ 时，该定义也成立，这意味着向量组只包含一个向量
  - 当 $a=0$ 时，线性相关；
  - 当 $a\neq 0$ 时，线性无关。
- 当 $m=2$ 时，即向量组包含两个向量 a_1,a_2，它线性相关的充分必要条件是 a_1,a_2 的分量对应成比例，其几何意义是两向量共线。
- 当 $m=3$ 时，三个向量线性相关的几何意义是三向量共面。

线性相关性

线性相关的正向推导

向量组 ***A***: $a_1,a_2,\ldots,a_{\mathrm{m}}(m\geq 2)$ 线性相关，

$\Rightarrow$ 向量组 ***A*** 中至少有一个向量能由其余 m-1 个向量线性表示。

这是因为，如果向量组***A*** 线性相关

$\Rightarrow$ 则有不全为0的数 $k_1,k_2,\ldots,k_m$ 使 $k_1a_1+k_2a_2+\ldots+k_ma_m=0$。

因为$k_1,k_2,\ldots,k_m$不全为0，不妨设$k_1\neq 0$，

$\Rightarrow$ 于是便有：$a_1=-\frac{1}{k_1}(k_2a_2+\ldots+k_ma_m)$，

$\Rightarrow$ 即a_1能由$a_2,\ldots,a_{\mathrm{m}}$线性表示。

线性相关性

线性相关的反向推导

如果向量组 ***A*** 中有某个向量能由其余 m-1 个向量线性表示

=>向量组 ***A*** 线性相关

设a_m能由$a_1,a_2,\dots,a_{\mathrm{m}-1}$线性表示

=> 即有$\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_{m-1}$使 $a_m=\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\dots+\lambda_{m-1}a_{m-1}$

$\Rightarrow$于是： $\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\dots+\lambda_{m-1}a_{m-1}+(-1)a_m=0$.

$\Rightarrow$即：$a_m=\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\dots+\lambda_{m-1}a_{m-1}$.

=> 因为$\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_{m-1},-1$这$m$个数不全为0（至少$-1\neq0$）

=> 所以向量组 ***A*** 线性相关。

线性相关性

扩展到方程组

- 当方程组中有某个方程是其余方程的线性组合时，这个方程就是多余的，这时称**方程组**（各个方程）**是线性相关**的；
- 当方程组中没有多余的方程，就称该方程组（各个方程）**线性无关**（或**线性独立**）。

给定向量组***A***: $a_1,a_2,\ldots,a_m$ 构成矩阵***A***: $a_1,a_2,\ldots,a_m$，如果**向量组*A*线性相关**，

$\Rightarrow$则**齐次线性方程组**$x_1a_1+x_2a_2+\ldots+x_ma_m=0$，

$\Rightarrow$即$Ax=0$ 有非零解。

线性相关性

向量组$a_1,a_2,\ldots,a_\mathrm{m}$ 线性相关的**充分必要条件**是它所构成的矩阵 $A=a_1,a_2,\ldots,a_\mathrm{m}$ 的秩$\boldsymbol{R(A)}$小于向量个数 $\boldsymbol{m}$；向量组线性无关的**充分必要条件**是 $R(A)=m$。

求**矩阵的秩**的方法，需要将矩阵进行**初等变换。**基于Python，我们可以使用numpy库来实现，不需要手动求取，基本方法如下（后面将会做详细说明）：

```
import numpy as np
np.lialg.matrix_rank(A)
```

维数、基与坐标

维数与基

维数与基的定义

在线性空间 $\boldsymbol{V}$ 中，如果存在 n 个元素$a_1,a_2,\ldots,a_n$ 满足：

1. $a_1,a_2,\ldots,a_n$线性无关；
2. V 中任一元素 a 总可由$a_1,a_2,\ldots,a_n$ 线性表示，那么 $a_1,a_2,\ldots,a_n$就称为线性空间 V 的一个**基**，n 称为线性空间 V 的**维数**。

维数为 n 的线性空间称为 n 维线性空间，记作 $\boldsymbol{V_n}$ 。

维数与基

- **空间**：若知 $a_1,a_2,\ldots,a_n$为 Vn 的一个基，

=> 则 Vn 可表示为 $Vn=\{a=x_1a_1+x_2a_2+\ldots+x_na_n \mid x_1,x_1,\ldots,x_n \in R\}$，

- **基的特性**：若 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 为 Vn 的一个基，

$\Rightarrow$则对任何向量 $a\in Vn$，都有一组有序数 $x_1,x_2,\ldots,x_n$，使 $a=x_1a_1+x_2a_2+\ldots+x_na_n$，并且这组数是唯一的。

$\Rightarrow$反之，任给一组有序数$x_1,x_2,\ldots,x_n$，总有唯一的元素 $a=x_1a_1+x_2a_2+\ldots+x_na_n \in Vn$。

坐标

基于向量的坐标

在向量空间中，向量可以用来描述空间中的一个**特定点**。

- **二维向量空间**：向量 $a=[4,5]^T$ 可以用来表示二维平面上的一个点，它在x轴上的分量是4，在y轴上的分量是5，记作(4,5)。
- **三维向量空间**：三维向量 $b=[3,4,5]^T$，可以表示三维空间中的一个点，它在x,y,z轴上的分量分别是3,4,5，记作(3,4,5)。

相似的，高维向量也可以用来表示高维空间中的位置。

对于计算机专业的同学来说，要特别注意抽象理解高维空间的“**几何**”形态，例如在进行图像视频处理的时候，一个视频的时序关系就是第4个维度的特征。

坐标

参照系

二维向量 a 在空间中的坐标 (4,5)，有一个潜在条件没有被指明，它的分量值4和5分别是投影在x轴和y轴上的有向线段的**参照系**是x轴上长度为1的有向线段和y轴上长度为1的有向线段。我们不妨做下列的假设：

- 若参照系变为：x轴上长度为0.5的有向线段和y轴上长度为0.5的有向线段，即x轴和y轴上的单位都由原来的1变为了0.5。
  此时，原始的坐标(4,5)就变成了(8,10)。
- 若参照系变为：x轴上长度为2的有向线段和y轴上长度为0.5的有向线段，则原始的坐标(4,5)，将就为了(2,10)。
  注意，此时坐标轴x和坐标轴y使用不同长度的参照。

坐标

参照系

值得注意的是，上面的假设，我们依然使用的是与坐标轴重合的参照系。在默认情况下，x轴上的参照系，是一个长度为1的有向线段，进一步说是一个x方向为1，y方向为0的向量，表示为$\mathrm{e}_x = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$；相似地，y轴的参照系，可以表示为$\mathrm{e}_y = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$。

- 假设一，参照系可以表示为$\mathrm{e}_{x1} = \begin{bmatrix}0.5\\0\end{bmatrix}, \mathrm{e}_{y1} = \begin{bmatrix}1\\0.5\end{bmatrix}$；
- 假设二，参照系可以表示为$\mathrm{e}_{x2} = \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}, \mathrm{e}_{y2} = \begin{bmatrix}0\\0.5\end{bmatrix}$。

坐标

参照系

对于二维向量 a 在二维空间的坐标(4,5)来说，它更完整的写法应该是 $a=4e_x+5e_y$，展开后表示为：$a=4\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+5\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$。

类似地，对于假设二中的二维向量 a 在二维空间的坐标(2,10)来说，它更完整的写法应该是 $a=2e_{x1}+10e_{y1}$，展开后表示为：

$a=2\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}+10\begin{bmatrix}0\\0.5\end{bmatrix}$。

坐标

参照系

至此，我们仍然没有脱离坐标轴重合的参照系的假设。

事实上，参照系 e_x, e_y 并非一定要和坐标轴重合，例如，参照系可以变为 $e_{x1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, e_{y1} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$，或者其他值。

甚至于，可以使用极坐标系作为参照系，例如：

$$e_r = e_x cos\phi + e_y sin\phi,\ e_\phi = e_x(-sin\phi) + e_y cos\phi$$ 。

坐标

标准基

在上例中，基 E= ($e_x = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, $e_y = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$) 称之为**标准基**，

- 在一阶张量（向量）中，我们将一组始终依附于坐标轴x,y，且长度为1的有向线段 $e_1, e_2, \ldots, e_n$ 称为 n 维度数组（向量）在 n 维空间 Vn 中的**标准基**。
- 对于二阶张量（矩阵），同样使用依附于坐标轴，且长度为1的有向线段称为**标准基**。

例：在空间 R^2 中，集合 $A = (e_{11} = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}, e_{12} = \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}, e_{21} = \begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}, e_{22} = \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$，就是一组典型的标准基。

坐标

坐标

对照定义4.1 维数与基的定义，我们可以发现二维向量 a 在二维空间中的完整表示 $a=4e_x+5e_y$，正好可以满足空间V_n的表示$V_n=\{a=x_1a_1+x_2a_2+\ldots+x_na_n \mid x_1,x_2,\ldots,x_n\in R\}$。

此处，向量 a 正好可以表示为有序数（4,5）与向量组$a_1=e_x$, $a_2=e_y$的线性组合，使得 $V_2=\{a=4a_1+5a_1 \mid x_1=4, x_2=5\in R\}$。

由此，我们可以得出一个结论，在空间V_n中，元素 a 与有序数组 $(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T$ 之间存在着一种一一对应的关系，因此可以用这组有序数来表示元素 a 。

坐标

坐标的定义

定义 设$a_1,a_2,\ldots,a_n$是线性空间V_n的一个基，对于任意元素 $a\in V_n$，总**有且仅有一组**有序数$x_1,x_2,\ldots,x_n$，使$a=x_1a_1+x_2a_2+\ldots+x_na_n$。

有序数$x_1,x_2,\ldots,x_n$就称为元素 a 在$a_1,a_2,\ldots,a_n$这个基下的**坐标**，并记作：$a=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T$。

需要注意的是，在不特别说明基底的时候，均表示使用标准基来表征向量和坐标。

坐标

基于向量的线段

在某些情况下，我们可以默认**坐标轴**的原点为起点，此时，**向量**就可以被看作是一个以原点为起点，以向量坐标为终点的有向线段。

- 在**二维坐标系**中，向量 $a=[4,5]^T$ 可以表示一条存在于平面xOy中，起点为O[0,0]，终点为[4,5]的有向线段。此时，它在x轴上的投影长度为4，在y轴上的投影长度为5.
- 在**三维坐标系**中，向量 $b=[3,4,5]^T$ 可以表示为空间中，起点为O[x,y,z]，终点为[3,4,5]的有向线段。此时，它在x轴上的投影长度为3，在y轴上的投影长度为4，在z轴上的投影长度为5.

坐标

基于向量的线段

此外，

- 在空间中的向量，值的正负表示了与坐标轴方向的关系
  - 正值表示与坐标轴方向一致
  - 负值表示与坐标轴方向相反
- 向量的相加表示多个向量首尾相连，两端的起止点相连的有向线段；
- 向量的数乘表示向量在某方向上进行倍数的改变。

构成基底的条件

构成基底的条件

在前面的内容中，我们已经看到在标准坐标系中的向量可以以不同的形态存在于不同的基底上，这是一个非常有意义的结论。

基于这样的结论，我们可以实现将**样本**从一个空间向另外一个空间的转换，这意味着降维压缩、显示优化等应用变成可能。例如对于一张适配于桌面计算机的1600×1200的RGB图像，我们可以将其无损地转换为适配于手机显示的640×480的RGB图像，也可以将其转换为黑白的灰度图；甚至于经过一定的算法将其从.bmp格式空间转换为.png或.wepp格式空间，以实现其在视觉上的无损压缩。

任意向量都可以作为基底吗?

答案是否定的!

给定一组向量（$\mathrm{e}_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathrm{e}_y = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$）作为空间的基底，但无论如何，我们都无法找到一个能满足等式$a = x\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$的$\{x,\ y\}$的解，也就意味着向量 e_x，e_y 不能作为基底。

类似的向量（$\mathrm{e}_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathrm{e}_y = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$），（$\mathrm{e}_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathrm{e}_y = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$）同样也不能作为基底。

对于 n 维空间 V_n，并非任意选取 n 个向量都能作为一组基底，构成基底必须要**满足一定的条件。**

构成基底的条件

给定一个 n 维空间 V_n和一组向量 a，要使向量组 a 能够成为 n 维空间 V_n 的**充要条件**是：

在n维空间中，任意一个向量都可以表示为向量组a的线性组合，并且这种线性组合的表示方式（系数组合）必须是唯一的。此时，向量组a，就称为n维空间V_n的一组基。

具体看，充要条件包含两个方面的要点：

1. **向量完备**：任意向量
2. **线性无关**：线性组合唯一性

构成基底的条件

1. 向量完备

所谓向量完备主要包含两个层面的概念：**数量完备**及**维数完备**。简而言之，给定一个 n 维空间 V_n，要使向量组a能成为空间的一组基向量，必要条件是：

1. a中基向量的数量等于 n
2. a中的每一个基向量的维数也等于 n

假设在一个三维空间中，按照向量完备的要求，要使向量组a能成为一组基向量，就要**保证** a内的基向量的数量为3，并且每一个基向量的维数也等于3。我们来做下列两种假设。

构成基底的条件

1. 向量完备

1. 数量完备但维数不完备：

基向量数量为3，但是其中有的向量的维度不等于3，即可能少于3，也可能大于3。例如向量 u=[1,2] 和向量 v=[1,2,3,4] 。不难想象，在一个三维空间中，这样的向量根本无法表示，因为在三维空间中任何一个向量都必然会有三个维度的分量，只是在其中某个值为0的时候，会与某个平面或坐标轴重合，但依然不会出现维度缺失或维度过多的问题。

因此，**违背维数完备是无法成为基向量的**。

构成基底的条件

1. 向量完备

2. **维数完备但数量不完备**：

- 当基向量数量小于3时，向量 $a_1,a_2 \in a$ 不足以表征整个向量空间，即使它们不共线，也只能用于表征一个平面。
- 当基向量数量大于3时，
  - 若向量组中存在4个向量，任选其三组成一组基向量，则第4个向量就可由基向量来表征，也就是说第4个向量是多余的；
  - 如果任选3个向量不足以表征第4个向量，说明这三个向量必然存在共线或共面的问题。

综上，**违背数量完备的向量也无法成为基底。**

构成基底的条件

向量空间中的向量

下面，我们讨论在三维空间中，不同数量的向量在向量空间中的形态问题。

假设存在3个非零三维向量$u=[u_x,u_y,u_z]$，$v=[v_x,v_y,v_z]$，$w=[w_x,w_y,w_z]$和一个三维空间V_3。

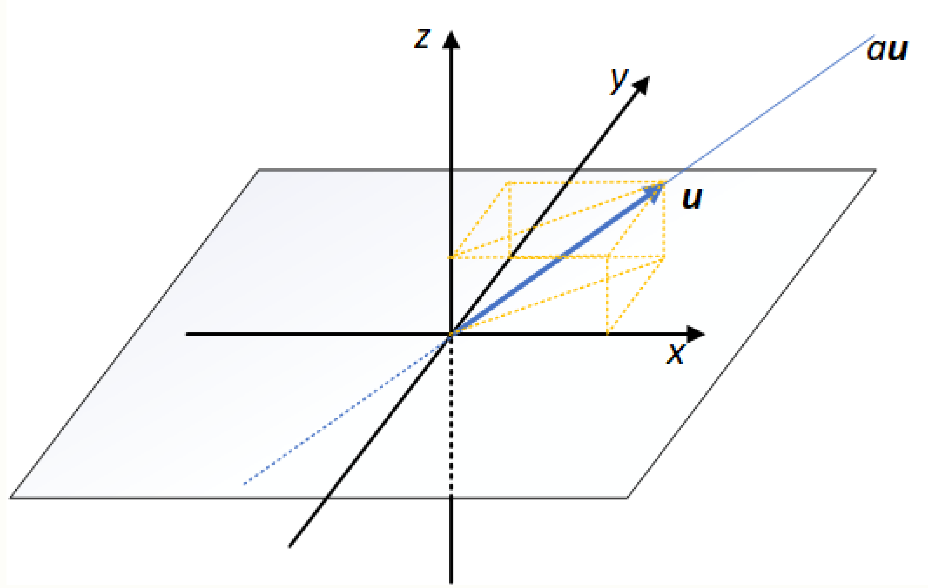
在默认情况下，u,v,w将表示空间V_3中的一个确定的点，或者分别表示为一条以原点(0,0,0)为起点，u(x,y)，v(x,y)，z(x,y)为终点的有向线段。

构成基底的条件

向量空间中的向量

第一种情况：只存在向量 $\boldsymbol{u}$ 和标量 $a\in$R，$a\boldsymbol{u}$将确定空间中的一条直线。

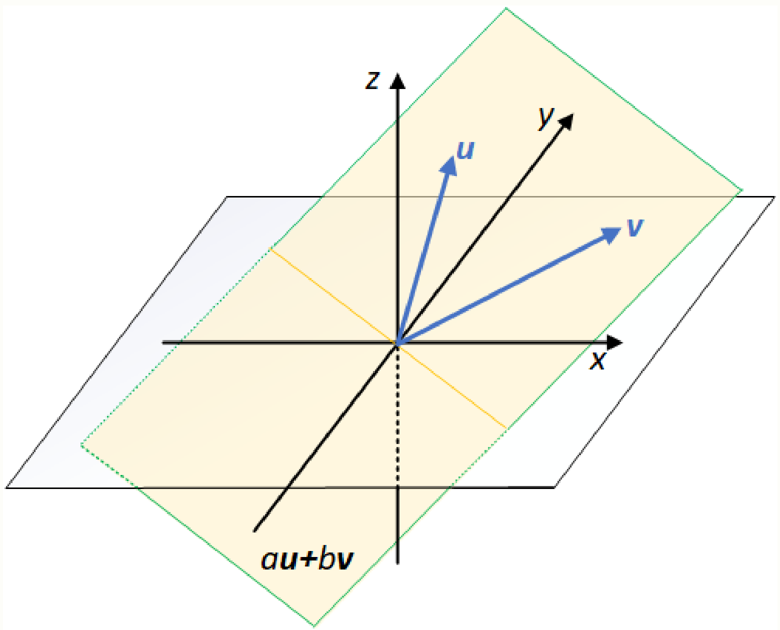
由于向量$\boldsymbol{u}$在x，y，z三个方向上的坐标是固定的，因此可以认为向量$\boldsymbol{u}$是空间中的一条固定的有向线段，因此线性组合 $a\boldsymbol{u}$ 将覆盖向量$\boldsymbol{u}$所在的直线，换句话说，$a\boldsymbol{u}$将确定三维空间 V_3 中一条过原点(0,0,0)的直线。



构成基底的条件

向量空间中的向量

第二种情况：存在向量 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ 和标量 $a,b\in \mathrm{R}$，$a\boldsymbol{u}+b\boldsymbol{v}$ 将确定空间中的一个平面或一条直线。



- ✓ 当 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ 处于同一条直线上时， $au+bv$ 的所有线性组合将确定一条直线，这条直线与 u,v 所在的直线重合。(等同第一种情况)
- ✓ 当 u,v 不在同一条直线时，$au+bv$ 将表示为两条过原点(0,0,0)的直线，并且相交于原点。根据两条不共线的直线确定一个平面的定理，不共线的向量 u,v 将确定一个过原点的二维平面。

构成基底的条件

向量空间中的向量

第三种情况：存在向量 u,v,w 和标量 $a,b,c\in \mathrm{R}$，$au+bv+cw$ 将确定空间中的一个平面或一条直线。

- 当 u,v,w 处于同一条直线上时，$au+bv+cw$ 的所有线性组合将确定一条直线，这条直线与 u,v,w 所在的直线重合。(等同第一种情况)
- 当 u,v,w 位于同一个平面时，或任意两个处于同一条直线上时，$au+bv+cw$ 的所有线性组合将确定一个平面，这个平面与 u,v,w 所在的平面重合。(等同第二种情况)
- 当 u,v,w 不在同一个平面时，$au+bv+cw$ 将表征整个三维空间 V_3，也就是说 V_3 中的任意一个点都可以通过 $au+bv+cw$ 的线性组合来表示。

构成基底的条件

2. 线性无关

如何确保唯一性呢？即如何确保空间 Vn 中的任意一个向量 a 有且仅有一种方法可以通过基向量的线性组合来表示？简而言之，就是确保基向量间是线性无关的。

回顾**线性相关**的定义：给定向量组 A:$a_1,a_2,\ldots,a_m$，如果存在不全为零的数$k_1,k_2,\ldots,k_m$，使得 $k_1a_1+k_2a_2+\ldots+k_ma_m=0$，则称向量组 A是线性相关的，否则称它**线性无关。**

这就意味着，只有在 $k_1=k_2=,\ldots,=k_m=0$ 时，线性组合才能满足$k_1a_1+k_2a_2+\ldots+k_ma_m=0$，否则，如果存在 $k_i\neq 0$，则 A 就是线性相关的。也就是说，**满足向量组 A 线性无关的条件是有序数全为0。**

构成基底的条件

2. 线性无关

下面我们简单证明一下，为什么线性无关等价于唯一性。首先给出两个假设：

- **假设1**：存在线性无关的向量组**U**：$u_1,u_2,\ldots,u_n$ 是空间 V_n 的基底向量，即空间中的任意一个向量都可以使用**U**与不全为零的有序数来表征。
- **假设2**：给定一个指定向量 w，该向量可以同时使用 **U** 与两组不全为零的有序数a_n, b_n来表征，即：

$$w=a_1u_1+a_2u_2+\ldots+a_nu_n=b_1u_1+b_2u_2+\ldots+b_nu_n$$

构成基底的条件

2. 线性无关

整理一下有:

$$(a_1 - b_1)u_1 + (a_2 - b_2)u_2 + \ldots + (a_n - b_n)u_n = 0,$$

由于$u_1, u_2, \ldots, u_n$ 是一组线性无关的向量，因此为了满足线性组合的等式等于0的要求，就必须满足：

$$a_1 - b_1 + = a_2 - b_2 = \ldots = a_n - b_n = 0。$$

因此，对于任意 a_i, b_i 都有$a_i - b_i = 0$，即 $a_i = b_i$。这个结论与假设2——存在两组有序数相违背。由此，反证了不可能存在两种不同的线性组合使得基向量 U 能够用来表达空间 Vn 中的所有向量。

综上，线性无关与表示唯一性是等价的。

构成基底的条件

3. 结论

在 n 维空间中，向量组 $E=e_1,e_2,\ldots,e_n$ 能够构成基底的充要条件是：

1. n 维空间中的任何向量 v，都能表示为： $v = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n$ 的形式；
2. 以上的这种表示形式是唯一的。

换句话说，构成 n 维空间的基底的 n 个向量 $(e_1,e_2,\ldots,e_n)$ 必须满足**线性无关**的条件。

张成的空间

张成的空间

空间张成的定义

给定一个向量组，由它的所有线性组合所构成的空间称为这个向量组的**张成**。换句话说，一个向量组的张成空间是这个向量组线性组合得到的所有点的集合。张成空间对向量组并没有线性无关性的要求，但作为基底的向量组是张量空间的**最小向量组**。

张成的空间

空间张成的例子

- **第一种情况：** $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

向量 u_1 和 u_2 是两个线性无关的二维向量，它们构成了二维空间中的一组基底，因此它们的张成空间就是整个二维空间。

- **第二种情况：** $u_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

向量 u_1 和 u_2 存在着如下关系 $u_1 = -2u_2$，即 u_1, u_2 是线性相关的共线向量，它们的张成空间是一条经过原点(0,0)的一条直线。

张成的空间

空间张成的例子

- **第三种情况**：$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

向量u_1和u_2是一组线性无关的向量，但是根据向量在空间中的特性，两个不相关的向量只能确定一个过原点的平面，因此它们张成的空间是一个经过原点(0,0,0)的平面。

张成的空间

空间张成的例子

- **第四种情况**：$u_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$, $u_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$, $u_3=\begin{bmatrix}3\\-1\\3\end{bmatrix}$

此处，存在三个不同的向量 u_1,u_2,u_3，但是我们发现它们之间存在 $u_3=u_1+2u_2$，也就是说向量u_3可以用u_1,u_2来表征，它们之间存在线性相关性。所以，可以说这三个向量中有一个向量是多余的。因此，对于只存在两个线性无关向量（剔出一个可被合成的向量后）的向量空间，向量u_1,u_2的张成空间是一个经过原点(0,0,0)的平面。相似地，对于向量u_1,u_3，它们所张成的空间也是一个经过原点(0,0,0) 的平面，此时$u_2=1/2(u_3-u_1)$，u_2可以被向量u_1,u_3线性表示，此时u_2是一个可以被剔除的向量。

张成的空间

空间张成的例子

- **第五种情况**：$u_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$, $u_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$, $u_3=\begin{bmatrix}3\\-1\\3\end{bmatrix}$

向量u_1,u_2,u_3是三个典型的线性无关向量，它们可以组成三维空间的一组基底，因此它们的张成空间是整个三维空间。

由上面的例子，可以得到一些结论：向量的个数和维数都不是张成空间维数及形态的决定因素，还需要与向量的线性无关性及秩进行整体考虑。

读万卷书 行万里路 只为最好的修炼

QQ：14777591 (宇宙骑士)

Email：ouxinyu@alumni.hust.edu.cn

Tel：18687840023