

第09讲 基底变换 课堂互动答案

作者：欧新宇 (Xinyu OU)

本文档所展示的测试结果，均运行于：Intel Core i7-7700K CPU 4.2GHz

【课堂互动一】 基于基底变换的坐标变换

1. $[x]_U \rightarrow [x]_V$ 表示的含义是()。

- A. 将坐标x从基底V迁移到基底U
- B. 将坐标x从基底U迁移到基底V
- C. 将向量U的x坐标分量迁移到向量V
- D. 将向量V的x坐标分量迁移到向量U

答案及解析： B

2. 一般情况下，下面哪个符号用于表示空间的标准基。

- A. u
- B. v
- C. e
- D. a

答案及解析： C

3. 令 $u = (4, 3)^T$, $v = (-1, 2)^T$, 若存在向量 $x = 3u - v$, 则向量x的坐标为 ()。

- A. $[[3 * 4 + (-1) * (-1), 3 * 3 + (-1) * 2]] = [[13, 7]]$
- B. $[[3 * 4 + (-1) * (-1)], [3 * 3 + (-1) * 2]] = [[13], [7]]$
- C. $[[4 * 3, -1 * 3], [-1 * 3, 2 * (-1)]] = [[12, -3], [-3, -2]]$
- D. $[[4 * 3, -1 * 3], [-1 * 3, 2 * (-1)]] = [[12, -3], [-3, -2]]$

答案及解析： B

【课堂互动二】 从矩阵乘法的角度理解基底变换

1. 给定一个矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, 若以A的列向量组为基的空间中存在向量 $u = [6, 8]^T$ 。则向量u在标准基和以矩阵A为基的空间中的坐标分别表示为： ()。

- A. (6,8) (6,8)
- B. (6,8) (20,22)
- C. (20,22) (6,8)
- D. (20,22) (20,22)

答案及解析： A

因为向量 u 存在于空间 A 中，因此相对于空间 A ， u 的坐标为(6,8). 而相对于标准基的空间，其坐标为

$$Au = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 22 \end{bmatrix}.$$

2. 如果一个向量所存在的空间 R 的维度确定了，那么它就有了一个固定的位置，这个位置就称为向量的坐标。无论其他量如何变化，该坐标值都不会变化。

A. 对

B. 错

答案及解析： B

空间中向量的坐标与基底关系密切，若基底发生变化，即使维度不变，坐标也会跟着变化。

3. 三阶方阵和三阶向量相乘将满足以下哪一个公式？

A.

$$Au = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} a \\ d \\ g \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} b \\ e \\ h \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} c \\ f \\ i \end{bmatrix}$$

$$B. Au = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} g \\ h \\ i \end{bmatrix}$$

答案及解析： A

4. 向量的空间位置由其所参考的基底和相对于基底的位置决定，简单说，向量的空间位置可以表示为基底乘以对应的坐标。

A. 对

B. 错

答案及解析： A

5. 给定一组向量 $U = \left(\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} \right)$ ，及以该向量组 A 为基底的坐标 $c(x, y)$ 。问：如果将该坐标迁移到以标准基为基底的空间后，新坐标为()。

A. (x, y)

B. (ax+bx, cy+dy)

C. (ax+by, cx+dy)

D. (ay+by, cx+dx)

答案及解析： C

从标准基 e 到特定基底 u 的转移矩阵为，矩阵 U 的逆矩阵，因此，可以得到新的坐标

$$d = Uc = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix}$$

【课堂互动三】 从标准基开始的基底变换

1. 给定基底 V 和基于基底 V 的坐标 c ，我们可以得到该坐标在标准基下的坐标 x 为()。

- A. $x=Uc$
- B. $x=cU$
- C. $x=U/c$
- D. $x=c/U$

答案及解析： A

2. 令 $u_1 = (1, -1)^T, u_2 = (2, 2)^T$ 。则坐标 $x = (1, 2)^T$ 相应于 $[u_1, u_2]$ 的坐标向量为()。

- A. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$
- B. $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$
- C. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$
- D. $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$

答案及解析： C

从 $[u_1, u_2]$ 到 $[e_1, e_2]$ 的转移矩阵为： $U = [u_1, u_2]$ 。

由此，从 $[e_1, e_2]$ 到 $[u_1, u_2]$ 的转移矩阵为： U^{-1}

因此，坐标 x 相应于 $[u_1, u_2]$ 的坐标向量为： $c = U^{-1}x = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

【课堂互动四】 从任意基开始的基底变换

1. 从 $[v_1, v_2]$ 到 $[u_1, u_2]$ 的转换可以看成是一个两步的过程。首先从 $[v_1, v_2]$ 转换为标准基 $[e_1, e_2]$ ，然后再从标准基转换为 $[u_1, u_2]$ 。那么如果给定基于 V 的坐标 w ，我们可以得到基于 U 的坐标 x 的求解公式为：()。

- A. $x = UVw$
- B. $x = UV^{-1}w$
- C. $x = U^{-1}Vw$
- D. $x = U^{-1}V^{-1}w$

答案及解析： C

从 $[v_1, v_2]$ 到 $[e_1, e_2]$ 的转移矩阵为 V ，而从 $[e_1, e_2]$ 到 $[u_1, u_2]$ 的转移矩阵为 U^{-1} 。因此，我们可以得到： $Vw = d$ 及 $U^{-1}d = x$ ，其中 d 为 w 在标准基下的坐标。

于是， $x = U^{-1}d = U^{-1}Vw$ 。

2. 下列用于求解矩阵 A 的逆矩阵 B 的Python代码，正确的一个是()。

- A. $B = \text{np.inv}(A)$
- B. $B = \text{scipy.inv}(A)$
- C. $B = \text{linalg.inv}(A)$
- D. $B = \text{np.dot}(A)$

答案及解析： C

