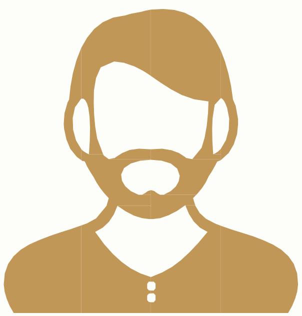
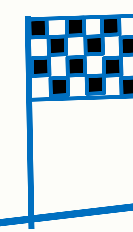
第07讲 向量空间

传媒与信息工程学院
欧 新 宇

- 向量和向量组
- 向量空间和子空间
- 线性相关性
- 空间的张成
- 维数、基底与坐标
- 构成基底的条件
- 基底变换
- 基底变换的实例





向量和向量组

向量组的基本概念

n 维向量

【定义7.1】：n 个有序的数$a_1,a_2,\dots,a_n$所组成的数组称为**n维向量**，这n个数称为该向量的n个分量，第 i 个数a_i称为第i 个分量。

- n 维向量可以写成一行，称为n 维行向量；也可以写成一列，称为n 维列向量。
- 在计算机领域中，无论是行向量还是列向量，都按照矩阵的运算规则进行运算，即：将向量转换成二阶矩阵来进行结算。
- 在默认情况下，如果没有指明是行向量还是列向量，都当作列向量。

向量组的基本概念

n 维向量

在本课程中，我们统一使用*黑体小写斜体字母* 表示，这也是标准表达方式。（在部分Slide或者代码中可能会使用 ***A*，*B*，*C***类似的***大写英文斜体字母***，这也不错，此时可以理解为这是一个张量，因为，所有的向量都可以理解为一阶张量。）

- 其中 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$表示列向量；
- 用列向量的转置用来表示行向量，如：$\boldsymbol{\alpha}^T, \boldsymbol{\beta}^T, \boldsymbol{u}^T, \boldsymbol{v}^T$。
- 假设： $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ a_n \end{pmatrix}$，则有： $\boldsymbol{u}^T = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$

  其中$\boldsymbol{u}$是一个列向量， $\boldsymbol{u}^T$是一个行向量。

向量组

若干个同维数的列向量（或同维的行向量）所组成的集合叫做**向量组**。

- 一个$m\times n$矩阵 $\boldsymbol{A}=a_{ij}$ 有 n 个 m 维列向量：$\boldsymbol{a}_{\mathrm{j}}=\begin{pmatrix} a_{1\mathrm{j}} \\ a_{2\mathrm{j}} \\ \dots \\ a_{m\mathrm{j}} \end{pmatrix}$，$(j=1,2,\dots,n)$。它们组成的向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\dots,\boldsymbol{a}_n$ 称为矩阵$\boldsymbol{A}$的**列向量组**。
- 一个$m\times n$矩阵 $\boldsymbol{A}$ 又有 m 个 n 维行向量：$\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}=(a_{i1},a_{i2},\dots,a_{in})$，$(i=1,2,\dots,m)$。它们所组成的向量组 $\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}},\dots,$ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{T}}$ 称为矩阵$\boldsymbol{A}$的**行向量组**。

向量组

由有限个向量所组成的**向量组**可以构成一个**矩阵。**

- m个n维列向量所组成的**向量组**$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_m$，构成一个$n\times m$ **的矩阵**：$\boldsymbol{A}=(a_1,a_2,\ldots,a_m)$。
- m个n维行向量所组成的**向量组** $\boldsymbol{b}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{b}_2^{\mathrm{T}},\ldots,\boldsymbol{b}_m^{\mathrm{T}}$，构成一个$m\times n$**的矩阵**：$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_1^{\mathrm{T}} \\ b_2^{\mathrm{T}} \\ \cdots \\ b_m^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$。

课堂互动一 Link

向量空间

向量空间

三维向量空间

在几何中，**空间**通常作为点的集合，即空间的元素是点，这样的空间称为**点空间**。我们把3维向量的全体所组成的集合：$\boldsymbol{R}^3=\{\boldsymbol{r}=(x,y,z)^T|x,y,z\in R\}$ 叫做**三维向量空间。**

在点空间取定坐标系后，空间中的点P(x,y,z)与3维向量$\boldsymbol{r}=(x,y,z)^T$之间就存在**一一对应**的关系。因此，**向量空间**可以类比为取定了坐标系的**点空间**。

向量的集合：$\boldsymbol{\pi}=\{\boldsymbol{r}=(x,y,z)^T|ax+by+cz=d\}$ 也叫做向量空间 $\boldsymbol{R}^3$ 中的平面。

向量空间

n 维向量空间

n 维向量的全体所组成的集合：

$\boldsymbol{R}_n=\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T|x_1,x_2,\ldots,x_n\in R\}$ 叫做 **n 维向量空间**。

n 维向量的集合 $\pi=\{x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T|a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n=b\}$ 叫做 n 维向量空间 R_n 中的 $n-1$ 维**超平面**。

n 维向量有着广泛的实际意义。例如，为了确定飞机的飞行状态，我们需要6个参数。表示飞机重心在空间的位置需要3个参数x,y,z; 此外，还需要3个参数，机身的水平转角 $\theta(0\leq\theta<2\pi)$，机身的仰角 $\psi(-\pi 2\leq\psi\leq\pi 2)$，以及机翼的转角 $\phi(-\pi\leq\phi\leq\pi)$。如此，6个参数组成一个6维的向量，就可用来描述一架飞机的飞行状态。

向量空间

标准向量空间的定义

令V为一定义了加法和标量乘法运算的几何空间。这意味着，对V中的每一对元素x和y，可唯一对应于V中的一个元素$x+y$，且对每一个V中的元素x和每一个标量a，可唯一对应于V中的元素ax。如果集合V连同其上的加法和标量乘法运算满足下面的公理，则称V为**向量空间**（vector space）

- A1. 对V中的任何x和y，$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$
- A2. 对V中的任何x,y和z，$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$
- A3. V中存在一个元素0,满足对任意的$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{V}$,都有$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{x}$
- A4. 对每一$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{V}$,存在V中的元素$x$和$y$,**满足**$\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}$
- A5. 对任意标量a，及V中的元素x和y，有$a(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=a\boldsymbol{x}+a\boldsymbol{y}$
- A6. 对任意标量a和b，及$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{V}$，有$(a+b)\boldsymbol{x}=a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{x}$
- A7. 对任意标量a和b，及$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{V}$，有$(ab)\boldsymbol{x}=a(b\boldsymbol{x})$
- A8. 对所有$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{V}$,有$1\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$

子空间

子空间

给定一个向量空间V，常常会用到在**V**上定义的运算意义下**V**的一个自己所构成的向量空间。

【定义】若S为向量空间V的非空子集，且S满足如下条件：

1) 对任意标量a，若向量$\boldsymbol{x} \in \mathbf{S}$，则$a\boldsymbol{x} \in \mathbf{S}$;

2) 若$\boldsymbol{x} \in \mathbf{S}$且$\boldsymbol{y} \in \mathbf{S}$，则$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in S$.

则S称为V的**子空间**(subspace)。

- **条件一**说明，S在标量乘法意义下是封闭的，即S中的一个元素乘以一个标量，结果仍为S中的一个元素；
- **条件二**说明，S在加法意义下是封闭的，即两个S中元素的和仍为S中的元素。

因此，基于空间S的全集所构建的数学系统将满足向量空间的所有公理和性质。向量空间的任何子空间仍为向量空间。

课堂互动二 Link

线性相关性

线性组合

- **定义**：

  给定向量组 $\boldsymbol{A}$: $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_m$，对于任何一组实数 $k_1,k_2,\ldots,k_m$，向量 $k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+\ldots+k_m\boldsymbol{a}_m$ 称为关于向量组$\boldsymbol{A}$和系数 k_i 的线性组合，k_i 称为线性组的系数。

- 给定向量组$\boldsymbol{A}$: $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_m$和向量$\boldsymbol{b}$，如果存在一组数 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m$，使 $\boldsymbol{b}=\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\ldots+\lambda_m\boldsymbol{a}_m$，则向量 $\boldsymbol{b}$ 是向量组 $\boldsymbol{A}$ 的线性组合，这时称向量 $\boldsymbol{b}$ 能由向量组 $\boldsymbol{A}$ 线性表示。

- **扩展到方程组：**

  向量 b 能够由向量组 A 线性表示，也就意味着由它们构成的方程组：$x_1\boldsymbol{a}_1+x_2\boldsymbol{a}_2+\ldots+x_m\boldsymbol{a}_m=b$ 有解。

线性相关性

- **定义：**

给定向量***A***: $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_m$，如果存在**不全为零**的数$k_1,k_2,\ldots,k_m$，使得 $k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+\ldots+k_m\boldsymbol{a}_m=0$，则称向量组***A***是**线性相关**的，否则称它**线性无关**。

讨论向量组$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_m$ 线性相关，通常是指 $\boldsymbol{m\geq 2}$ 的情况。

- 当 $m=1$ 时，该定义也成立，这意味着向量组只包含一个向量
  - 当 $a=0$ 时，$k_1\boldsymbol{a}_1=0$，线性相关；
  - 当 $a\neq 0$ 时，$k_1\boldsymbol{a}_1\neq 0$，线性无关。
- 当 $m=2$ 时，二个向量线性相关的几何意义是两向量共线。
- 当 $m=3$ 时，三个向量线性相关的几何意义是三向量共面。

线性相关性

扩展到方程组

- 当方程组中有某个方程是其余方程的线性组合时，这个方程就是多余的，这时称**方程组**（各个方程）**是线性相关**的；
- 当方程组中没有多余的方程，就称该方程组（各个方程）**线性无关**（或**线性独立**）。

给定向量组***A***: $a_1,a_2,\ldots,a_m$ 构成矩阵***A***: $a_1,a_2,\ldots,a_m$，如果**向量组*A*线性相关**，

$\Rightarrow$ 则**齐次线性方程组**$x_1 a_1+x_2 a_2+\ldots+x_m a_m=0$，

$\Rightarrow$ 即$Ax=0$ 有非零解。

线性相关性

- 向量组$a_1,a_2,\ldots,a_m$ 线性相关的**充分必要条件**是它所构成的矩阵$\boldsymbol{A}=a_1,a_2,\ldots,a_m$的秩：$R(A)<m$；
- 向量组线性无关的**充分必要条件**是：$R(A)=m$。

求**矩阵的秩**的方法，需要将矩阵进行**初等变换**。基于Python，可以使用numpy库来实现，不需要手动求取，基本方法如下：

```
import numpy as np
A = np.array([[1,2,3],[2,3,3]])

np.linalg.matrix_rank(A)
```

Last executed at 2020-05-29 09:26:20 in 70ms

```
2
```

课堂互动三 Link

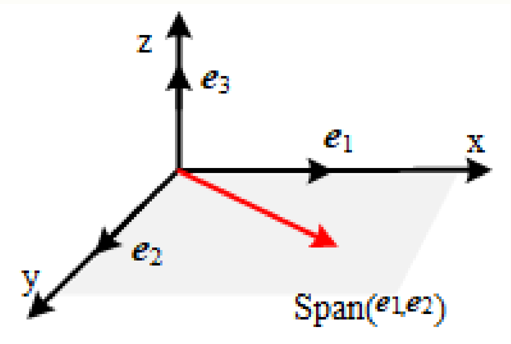
空间的张成

空间的张成

空间张成的定义

【定义】令$\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n}$为向量空间V中的向量(组)。$a_1\boldsymbol{v_1} + a_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + a_n\boldsymbol{v_n}$（其中$a_1, a_2, \dots, a_n$为标量）为向量$\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n}$的**线性组合**。向量$\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n}$的所有线性组合构成的集合称为$\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n}$的**张成（span）**，记作：Span($\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n}$)。

例：3维空间$\boldsymbol{R}^3$中向量$\boldsymbol{e}_1$和$\boldsymbol{e}_2$的张成为：所有形如$\alpha\boldsymbol{e}_1 + \beta\boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\\ 0\end{bmatrix}$的向量的集合，此时Span$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$为$\boldsymbol{R}^3$的一个子空间。这个子空间从几何上可表示为所有x, y平面内3维空间的向量。



不难得出结论，$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$的张成为所有形如$a_1\boldsymbol{e}_1 + a_1\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3 = \begin{bmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{bmatrix}$的向量的集合。因此Span$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$= $\boldsymbol{R}^3$。

空间的张成

【定理】子空间的证明

【定理】若$\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n}$为向量空间**V**中的元素，则Span($\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n}$）为V的一个子空间。

证明：要证明Span($\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n}$)为向量空间**V**的子空间，即证明在Span($\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n}$)中，标量积和向量和具有封闭性。

(1) 令β为一标量，并令$\boldsymbol{v} = a_1\boldsymbol{v_1} + a_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + a_n\boldsymbol{v_n}$为Span（$\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n}$)中的任意一个元素。由于$\beta\boldsymbol{v} = (\beta a_1)\boldsymbol{v_1} + (\beta a_2)\boldsymbol{v_2} + \cdots + (\beta a_n)\boldsymbol{v_n}$，因此，$\beta\boldsymbol{v} \in$ Span($\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n}$)。**标量积的封闭性得证。**

(2) 令$\boldsymbol{v} = a_1\boldsymbol{v_1} + a_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + a_n\boldsymbol{v_n}$，$\boldsymbol{w} = b_1\boldsymbol{v_1} + b_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + b_n\boldsymbol{v_n}$，则:

$\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = (a_1 + b_1)\boldsymbol{v_1} + (a_2 + b_2)\boldsymbol{v_2} + \cdots + (a_n + b_n)\boldsymbol{v_n}$。**向量和的封闭性得证。**

因此，Span ($\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n}$) 是**V**的一个子空间。

空间的张成

向量空间中的向量

下面，我们讨论在三维空间中，不同数量的向量在向量空间中的张成的形态问题。

假设存在3个非零三维向量$\boldsymbol{u}=[x_u,y_u,z_u]$，$\boldsymbol{v}=[x_v,y_v,z_v]$，$\boldsymbol{w}=[x_w,y_w,z_w]$和一个三维空间$\boldsymbol{R}^3$。

在默认情况下，u,v,w 都表示空间$\boldsymbol{R}^3$中的一个确定的点，或者分别表示为一条以原点(0,0,0)为起点，$\boldsymbol{u}(x_u,y_u,z_u)$，$\boldsymbol{v}(x_v,y_v,z_v)$，$\boldsymbol{w}(x_w,y_w,z_w)$为终点的有向线段。

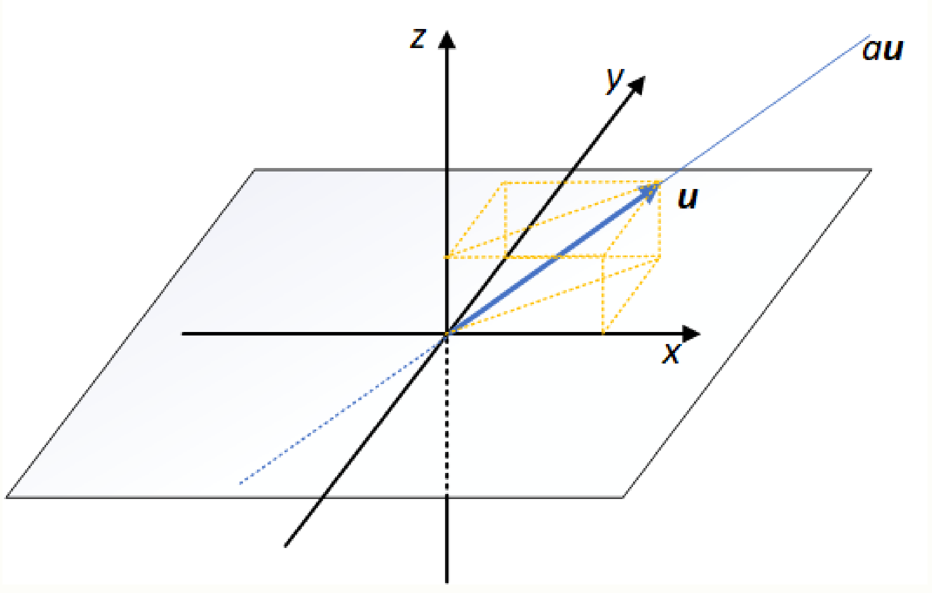
下面讨论这三个向量在空间R^3中的张成。

空间的张成

一个向量的张成

第一种情况：只存在向量 $\boldsymbol{u}$ 和标量 $a\in\mathrm{R}$，$a\boldsymbol{u}$将确定空间中的一条直线。

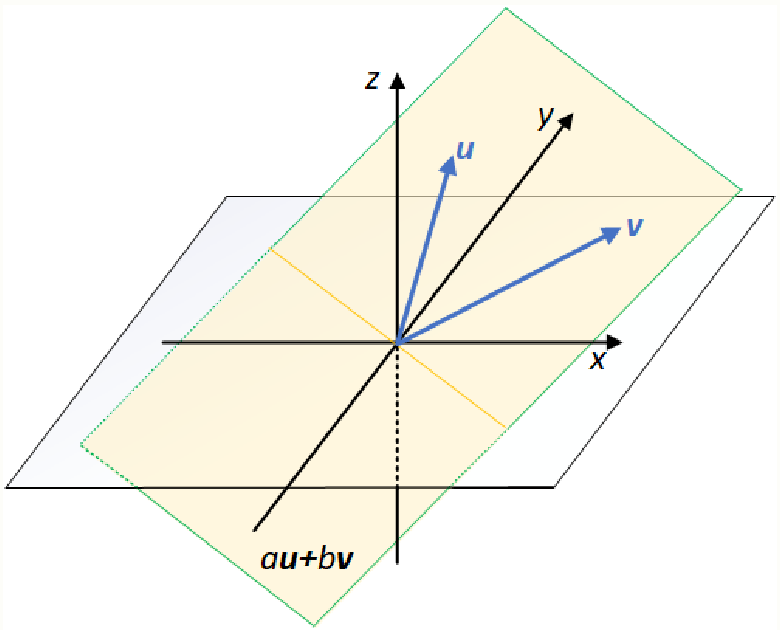
由于向量$\boldsymbol{u}$在x，y，z三个方向上的坐标是固定的，因此可以认为向量$\boldsymbol{u}$是空间中的一条固定的有向线段，因此线性组合 $a\boldsymbol{u}$ 将覆盖向量$\boldsymbol{u}$所在的直线，换句话说，$a\boldsymbol{u}$将确定三维空间 V_3 中一条过原点(0,0,0)的直线。



空间的张成

二个向量的张成

第二种情况：存在向量 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ 和标量 $a,b\in$R，$a\boldsymbol{u}+b\boldsymbol{v}$ 将确定空间中的一个平面或一条直线。



- ✓ 当 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ 处于同一条直线上时， $au+bv$ 的所有线性组合将确定一条直线，这条直线与 u,v 所在的直线重合。(等同第一种情况)
- ✓ 当 u,v 不在同一条直线时，$au+bv$ 将表示为两条过原点(0,0,0)的直线，并且相交于原点。根据两条不共线的直线确定一个平面的定理，不共线的向量 u,v 将确定一个过原点的二维平面。

空间的张成

三个向量的张成

第三种情况：存在向量 u,v,w 和标量 $a,b,c\in\mathrm{R}$，$au+bv+cw$ 将确定空间中的一个平面或一条直线。

- 当 u,v,w 处于同一条直线上时，$au+bv+cw$ 的所有线性组合将确定一条直线，这条直线与 u,v,w 所在的直线重合。(等同第一种情况)
- 当 u,v,w 位于同一个平面时，或任意两个处于同一条直线上时，$au+bv+cw$ 的所有线性组合将确定一个平面，这个平面与 u,v,w 所在的平面重合。(等同第二种情况)
- 当 u,v,w 不在同一个平面时，$au+bv+cw$ 将表征整个三维空间 V_3，也就是说 V_3 中的任意一个点都可以通过 $au+bv+cw$ 的线性组合来表示。

张成的空间

空间张成的例子

- **第一种情况：** $u_1= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, u_2= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

向量 u_1 和 u_2 是两个线性无关（不共线）的二维向量，它们构成二维空间中的一组基底，因此它们张成的空间是整个二维空间。

- **第二种情况：** $u_1= \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, u_2= \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

向量 u_1 和 u_2 存在着如下关系 $u_1 = -2u_2$，即 u_1, u_2 是线性相关的共线向量，它们的张成空间是一条经过原点(0,0)的一条直线。

张成的空间

空间张成的例子

- **第三种情况**：$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

向量u_1和u_2是一组线性无关（不共线）的向量，但是根据向量在空间中的特性，两个不相关的向量只能确定一个过原点的平面，因此它们张成的空间是一个经过原点(0,0,0)的平面。

张成的空间

空间张成的例子

- **第四种情况**：$u_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$, $u_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$, $u_3=\begin{bmatrix}3\\-1\\3\end{bmatrix}$

此处，存在三个不同的向量 u_1,u_2,u_3，但是我们发现它们之间存在 $u_3=u_1+2u_2$，也就是说向量u_3可以用u_1,u_2来表征，它们之间存在线性相关性。所以，可以说这三个向量中有一个向量是多余的。因此，对于只存在两个线性无关向量（剔出一个可被合成的向量后）的向量空间，向量u_1,u_2的张成空间是一个经过原点(0,0,0)的平面。相似地，对于向量u_1,u_3，它们所张成的空间也是一个经过原点(0,0,0) 的平面，此时$u_2=1/2(u_3-u_1)$，u_2可以被向量u_1,u_3线性表示，此时u_2是一个可以被剔除的向量。

张成的空间

空间张成的例子

- **第五种情况**：$u_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$, $u_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$, $u_3=\begin{bmatrix}3\\-1\\3\end{bmatrix}$

向量u_1,u_2,u_3是三个典型的线性无关向量，它们可以组成三维空间的一组基底，因此它们的张成空间是整个三维空间。

由上面的例子，可以得到一些结论：向量的个数和维数都不是张成空间维数及形态的决定因素，还需要与向量的线性无关性及秩进行整体考虑。

课堂互动四 Link

读万卷书 行万里路 只为最好的修炼

QQ：14777591 (宇宙骑士)

Email：ouxinyu@alumni.hust.edu.cn

Tel：18687840023